

Kugel, Kegel, Scherung und stereographische Projektion

Zusammenfassung und Voruntersuchung

Ein Teil des Folgenden wurde 2014 in einer Gruppe von 14- bis 17-Jährigen und in 2 Gruppen von 11- bis 13-Jährigen bzw. 2015 abermals bei 14- bis 17-Jährigen ausgeführt. Problematisch ist hierbei nicht die stereographische Projektion als solche sondern das Fehlen der Begriffe Abbildung/Funktion und Kenntnisse über die Kugel. Es fragt sich allerdings, ob überhaupt eine weitere Publikation zur stereographischen Projektion zu einer bereits in der Mathematikinformation vorhandenen (siehe MEYER [1]) notwendig ist? Das ist sicher der Fall, ist es doch ein schönes Schulbeispiel für die Förderung von begabten Schülerinnen und Schülern:

- Die zu lehrenden Inhalte liegen außerhalb des Curriculums.
- „Normaler“ Schulstoff wird wiederholt und vertieft.
- Die Inhalte sind elementar, sie spielen heute noch in der Mathematik auch an anderer Stelle eine Rolle.
- Eine wichtige Beweismethode der Geometrie wird mehrfach verwendet: Ein räumliches Problem wird auf ein ebenes zurückgeführt, dessen Ergebnis anschließend wiederum räumlich interpretiert wird. Dies entspricht in der neueren Mathematik dem Wechsel zwischen Projektion und Lifting.

Die „klassischen Beweise“ wie in MEYER [1] haben insbesondere für Schüler Schwachstellen, wenn sie z. B. Hüllkurven wie beim Beweis von LEXELL¹ benötigen oder beim schiefen Kreiskegel zwar elementare algebraische Geometrie benutzen, die aber die Schule nicht lehrt. Im Folgenden findet man ein Curriculum, das an der Schule auch heute noch von begabten Schülerinnen und Schülern verstanden werden kann, wenn einige rudimentäre Kenntnisse der Schnitte an Rotationskegeln (Kugeln von DANDELIN²) vorhanden sind.

In dieser Arbeit wird versucht, die üblichen Probleme beim Nachweis der Kreistreue der stereographischen Projektion zu vermeiden. Hierbei benötigt man die Existenz zweier Kreisscharen auf einem schiefen Kreiskegel, die man mit dem Zwischenwertsatz stetiger Funktionen, einem sehr anschaulichen Satz, nachweisen kann, wenn man die endlichen Kegelschnitte des schiefen Kreiskegels kennt. So geht der vorliegende Artikel davon aus, dass etwa nach LANGE-MEYER [1] (Seite 33 bzw. Aufgabe 2.6.1, www.mathematikinformation.info) elementar die Eigenschaften eines endlichen Schnitts beim Rotationskegel nach DANDELIN bekannt sind. Dann werden via einer Scherung, also einer bestimmten Affinität, diese Eigenschaften auf den endlichen Schnitt eines schiefen Kreiskegels übertragen. Hierzu werden in Kapitel 2 sehr ausführlich diese besonderen Abbildungen untersucht.

Damit bekommt man vermutlich pädagogische Probleme, wenn man die erforderlichen Untersuchungen mathematisch niederschreiben will, denn Schüler und auch Studenten, die keine Mathematiker werden wollen, sind i. Allg. nicht begeistert, wenn zu viele abstrakte Beweise vorgeführt werden. Aus diesem Grund findet man am Ende mancher Kapitel Hinweise zur Didaktik, wie man sich geschickt der Klassensituation anpassen und zu viel Abstraktion vermeiden kann. Das Finden der erforderlichen Zusammenhänge ist durchaus adäquat zum Können begabter Schülerinnen und Schüler in der gymnasialen Oberstufe; manches verkraften Begabte sogar schon in der Mittelstufe. Erst wenn man die Beobachtungen und Ideen vor allem bei den Scherungen mathematisch halbwegs sauber darstellen will, entstehen die hier angedeuteten Schwierigkeiten.

Dabei kennen Schülerinnen und Schüler aus der ebenen Geometrie bereits den Begriff der Scherung, auch wenn im Unterricht in aller Regel dieser Begriff nicht benutzt wird:

¹ ANDERS JOHAN LEXELL (Андрей Иванович Лексель) * 24. Dezember 1740 in Turku; † 11. Dezember 1784 in Sankt Petersburg (nach Julianischem Kalender 30. November) war ein finnlandschwedisch geborener, später nach Russland emigrierter Astronom und Mathematiker (nach Wikipedia).

² GERMINAL PIERRE DANDELIN (*12. 4. 1794 in Le Bourget, † 15. 2. 1847 in Ixelles), belgischer Mathematiker, Ingenieur der Armee, Professor in Lüttich (nach Wikipedia).

1. Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks wird hergeleitet durch einen Zusammenhang eines allgemeinen Dreiecks mit einem rechtwinkligen, dessen Flächeninhalt sich aus dem des Rechtecks ableitet (siehe Abb. 1; die definierenden Größen der benutzten Scherung sind dick gezeichnet): Die beiden Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt, weil man sich vorstellt, sie seien beide durch Parallelen zu f in „viele“, unendlich dünne entsprechende Trapeze usw. zerlegt, die jeweils „offenbar“ flächengleich sind (in Wirklichkeit nimmt man hier bereits das Prinzip von CAVALIERI³ vorweg). In aller Regel wird an Hand eines Modells diese Behauptung begründet.

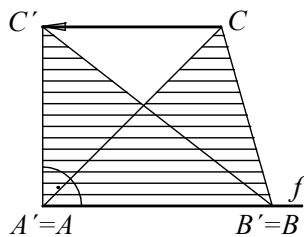


Abb. 1

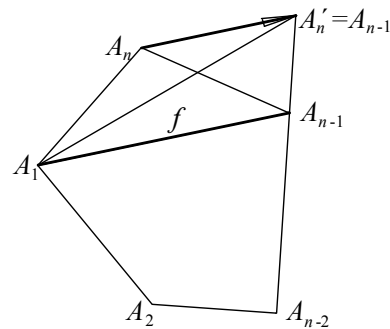


Abb. 2

1. Definition

Will man die Eigenschaften einer Kugel untersuchen, muss man erst einiges über Kreise (siehe auch MEYER [2] und [3]) wissen. Da hierauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll, werden nur einige einschlägige Übungsaufgaben angegeben:

Aufgabe 1.1⁴: Gegeben ist ein Punkt A . Zeichnen Sie einige Kreise durch A .

Aufgabe 1.2: Gegeben ist ein Punkt A und eine Gerade g durch A . Zeichnen Sie einige Kreise durch A , die g berühren.

Aufgabe 1.3: Gegeben ist ein Punkt A und eine Gerade g nicht durch A . Zeichnen Sie einige Kreise durch A , die g berühren.

Aufgabe 1.4: Gegeben sind zwei Punkte. Zeichnen Sie einige Kreise durch die beiden Punkte.

Aufgabe 1.5: Konstruieren Sie alle Mittelpunkte von Kreisen, die zwei parallele Geraden berühren.

Aufgabe 1.6: Konstruieren Sie alle Kreismittelpunkte, die zwei sich schneidende Geraden berühren.

Aufgabe 1.7: Begründen Sie die Existenz aller Kreise, auf denen drei vorgegebene Punkte liegen.

Aufgabe 1.8: Welche gegenseitige Lage können drei Geraden haben? Geben Sie in jedem Fall alle Kreise an, die jede der drei Geraden berühren.

Aufgabe 1.9 (Parabelkenntnisse sind erforderlich): Gegeben ist eine Gerade g und ein Kreis $k(M_1, r_1)$. Gesucht werden die Mittelpunkte aller Kreise, die beide berühren.

³ BONAVENTURA FRANCESCO CAVALIERI (*1598 vermutlich in Mailand, † 2. 12. oder 30. 11. 1647 in Bologna) italienischer Jesuit, Mathematiker und Astronom; nach Wikipedia.

⁴ Viele der in der vorliegenden Arbeit gestellten Aufgaben sind HÄUSLER U. A. [1] entnommen.

1.1 Kugeleigenschaften und Definition der stereographischen Projektion

Definition 1.1.1:

Die Menge aller Punkte P des Raumes, die von einem festen Punkt A gleiche Entfernung r haben, bilden eine Kugel $K = K(A, r)$.

Betrachtet man nur solche Punkte, die in einer Ebene liegen, dann bilden diese einen Kreis.

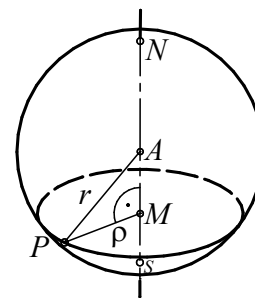


Abb. 3

Hiermit hat man sofort den folgenden Satz:

Satz 1.1.2: Jeder mehr als einen Punkt enthaltende ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Satz 1.1.3⁵: (1) Alle Ebenen, die vom Kugelmittelpunkt gleichen Abstand haben, schneiden die Kugel in gleich großen Kreisen. Umgekehrt haben die Ebenen, die gleich große Schnittkreise mit der Kugel haben, gleichen Abstand von ihrem Mittelpunkt.

(2) Fällt man das Lot vom Kugelmittelpunkt auf die Schnittebene, so ist dessen Fußpunkt Mittelpunkt des Schnittkreises. Die Gerade durch den Kugelmittelpunkt und den Schnittkreismittelpunkt steht auf der Schnittebene senkrecht. Die Senkrechte zur Ebene des Schnittkreises in dessen Mittelpunkt geht durch den Kugelmittelpunkt.

(3) Lässt man einen Kreis um einen Durchmesser rotieren (ein Halbkreis reicht auch), so erhält man eine Kugel. Die Kugel ist daher eine rotationssymmetrische Fläche; jeder Durchmesser kann als Rotationsachse dienen.

(4) Geht man von einer Kugel aus und betrachtet alle Ebenen durch zwei Gegenpunkte, so erhält man als Kugelschnitte Großkreise, also Kreise, deren Radius gleich dem Kugelradius ist. Man beachte, dass mit zwei Gegenpunkten auch der zugehörige Kugeldurchmesser in jeder dieser Ebenen liegt.

(5) Durch zwei Gegenpunkte einer Kugel gibt es unendlich viele Großkreise. Durch zwei Kugelpunkte, die nicht Gegenpunkte sind, lässt sich genau ein Großkreis legen.

Hierbei haben die Großkreise der Kugel deren Radius, wohingegen bei den Kleinkreisen der Radius kleiner als der der Kugel ist. Man kann noch auf einer Kugel mit einem Faden experimentell zeigen, dass die Großkreisbögen die kürzeste Entfernung zwischen ihren Endpunkten bilden, also so genannte geodätische Kurven sind.

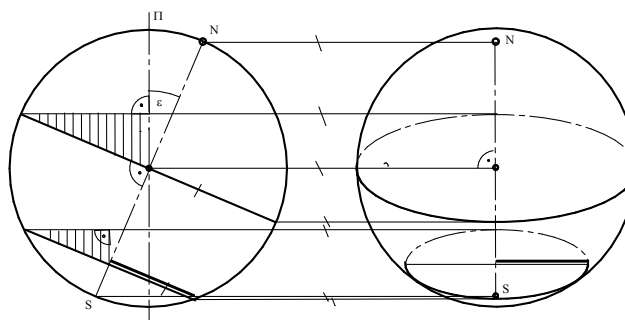


Abb. 4

Die Konstruktion der Abb. 4 zeigt weitere Eigenschaften der Kugel.

Ellipsen als Kreisbilder kennt der Schüler nicht, lernt dies vielleicht nie, aber trotzdem kann man darüber sprechen, dass die Breitenkreise ähnliche Ellipsen sein müssen und wie man die zueinander senkrechten Achsen bekommen kann. Das reicht aus, um mit einem CAD-System die Ellipsen zu zeichnen (siehe Abb. 4).

Übungsaufgaben zum Bisherigen findet man u. a. bei HÄUSLER U. A. [1].

Die Abb. 5 zeigt, dass jeder Punkt P einer Kugel (Erde) durch die Kugelkoordinaten $(\lambda | \phi)$ festgelegt ist. λ heißt

⁵ Die Beweise und weiteres hierzu findet man in MEYER [1].

(geographische) Länge, ϕ (geographische) Breite. λ wird als Winkel zwischen den Ebenen der Meridiankreise (auch Längengrade genannt) gemessen, ϕ als Winkel, den der Strahl MP mit der Äquatorebene einschließt. Der Längengrad wird in westlicher und östlicher Länge vom so genannten Nullmeridian aus (geht durch Greenwich in London) gemessen, die geographische Breite in nördlicher und südlicher Breite von der Äquatorebene.

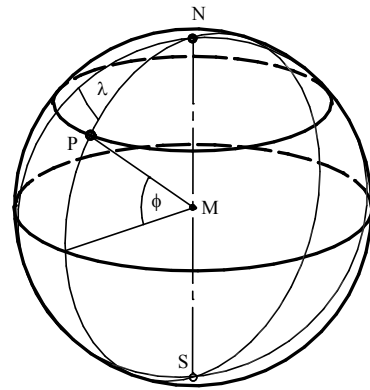


Abb. 5

Hinweis: Stellt sich bei Parallelprojektion (hier Orthogonalprojektion) einer Kugel der Äquator nicht als Strecke dar, können die Pole nicht auf dem Kugelumriss liegen (analog gilt dies bei Zentralprojektion).

Definition 1.1.4: Die stereographische Projektion ist eine eindeutige Abbildung der Kugelpunkte P von ihrem Nordpol N auf ihre Tangentialebene \vec{A} im Südpol S :

1. $P \leftrightarrow P' := NP \cap \vec{A}$ für alle $P \neq N$,
2. $P \leftrightarrow P' := \infty$, ein Symbol.

Hinweise:

1. Die Unterscheidung in Definition 1.1.4 ist erforderlich, weil für $P = N$ die Gerade NP nicht definiert ist.
2. Das Symbol zeigt an, dass der Übergang von einem Punkt $P \neq N$ zu $P = N$ die Gerade NP parallel zu \vec{A} werden lässt, also der „Schnittpunkt“ mit \vec{A} ins Unendliche „rutscht“. Die Besonderheit dieses geometrischen Unendlichen ist, dass alle Geraden der Bildebene \vec{A} einen gemeinsamen Punkt im Unendlichen haben. Dies ist erforderlich, damit die Abbildung eindeutig wird. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der RIEMANNschen Kugel⁶.
3. Leicht lässt sich beweisen: Die stereographische Projektion ist eine eindeutige Abbildung der Kugel auf die Ebene, wenn man davon ausgeht, dass es nur einen einzigen Punkt im Unendlichen der Ebene gibt.

1.2 Erste Eigenschaften der stereographischen Projektion

Satz 1.2.1: Alle Kugelkreise durch den Nordpol N werden eindeutig auf die Geraden der Südpoltangentialebene \vec{A} abgebildet. Hierbei werden die Kreise der Kugel mit einer in N gemeinsamen Tangente t auf parallele Geraden in \vec{A} mit der Richtung von t abgebildet.

Beweis:

1. Betrachtet man einen Kreis k durch N , dann liegen alle Strahlen NP in der Kreisebene. Da die Kreisebene nicht zu \vec{A} parallel sein kann, ist ihr Schnitt mit \vec{A} eine Gerade. Hat der Kreis k in N die Tangente t , so muss diese parallel zu \vec{A} und damit parallel zum Bild k' des Kreises k sein.
2. Hat man viele Kreise durch N mit der Tangente t , dann schneiden die Kreisebenen (die ein Ebenenbüschel durch t bilden) die Äquatorebene \vec{A} in parallelen Geraden, die nach 1. alle die Richtung von t haben.
3. Jede Gerade der Ebene \vec{A} bestimmt zusammen mit einem Punkt N , dem „Nordpol“ der Kugel, der nicht in \vec{A} liegt, eine Ebene, die die Kugel in einem Kreis durch N schneidet.

Die stereographische Projektion kann in jede zur Südpoltangentialebene \vec{A} parallele Ebene erfolgen, z. B. in die Äquatorebene. Nach dem Vierstreckensatz (Strahlensatz) werden, je nachdem wo die Bildebene liegt, die Bilder vergrößert oder verkleinert. So verhalten sich die Längen der Bilder in der Äquatorebene zu denen in der Südpoltangentialebene wie 1 : 2.

⁶ GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN *17. September 1826 in Breselenz bei Dannberg/Elbe, † 20. Juli 1866 in Selasca bei Verbania am Lago Maggiore; einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker, der trotz seines relativ kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte (nach Wikipedia).

Satz 1.2.2: Alle Kugelkreise, die parallel zur Äquatorebene liegen (also Breitenkreise sind), werden auf Kreise in der Bildebene abgebildet, die mit dem Äquatorbild konzentrische Kreise bilden.

Beweis:

Die Projektionsstrahlen NP von Punkten P eines Breitenkreises, also eines Kreises k , dessen Ebene parallel zur Äquatorebene \vec{A} ist, erzeugen einen Rotationskegel mit der Spitze N und der Achse NS . Da die Bildebene \vec{A} senkrecht zu NS ist, bekommt man als k' einen Kreis mit dem Mittelpunkt $NS \cap \vec{A}$. Damit sind alle Breitenkreisbilder konzentrische Kreise.

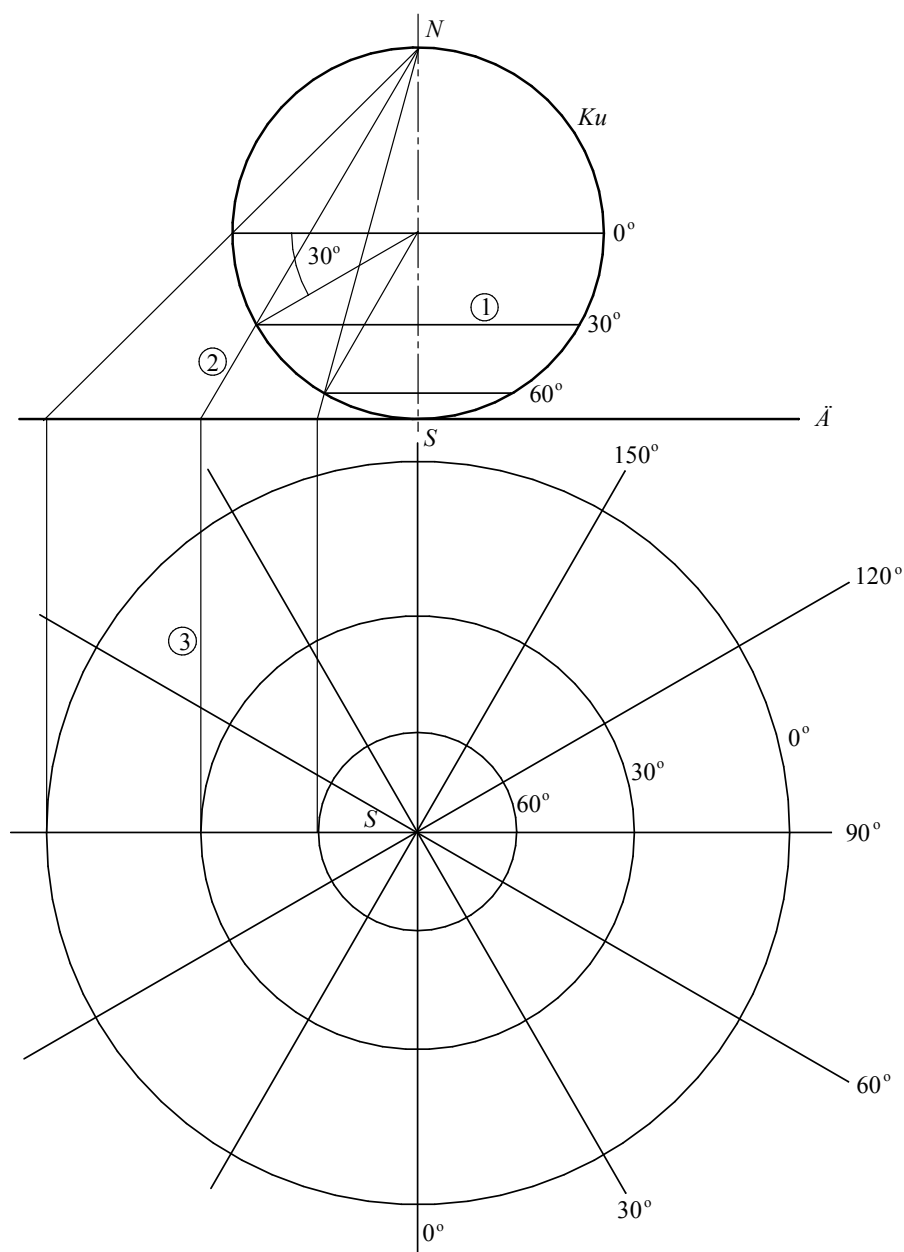


Abb. 6

Will man eine stereographische Projektion konstruieren, zeichnet man die Meridianbilder als Geradenbündel durch $NS \cap \vec{A}$ und die Breitenkreisbilder als konzentrische Kreise um $NS \cap \vec{A}$. Die Konstruktionsschritte 1 bis 3, die zu den Radien dieser Bilder führen, sind in Abb. 6 zu finden.

Aufgabe 1.2.1 (Kenntnisse in Trigonometrie sind erforderlich): Berechnen Sie für den Breitenkreis 30° südlich den Radius r' des Bildkreises.

Aufgabe 1.2.2: Konstruieren Sie die stereographische Projektion einer Kugel mit Radius 30 mm auf ihre Südpoltangentialebene. Zeichnen Sie die Meridianbilder im Abstand von je 15° und die Breitenkreise samt ihren Bildern zu $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ südlich und 15° nördlich. Hierbei soll der 0° -Meridian vorne in der Mitte der Kugel sein. Finden Sie den Ort $P(30^\circ\text{s} | 90^\circ\text{ö})$ einschließlich seiner stereographischen Projektion P' (vergl. Abb.6). Zeichnen Sie in der stereographischen Projektion näherungsweise eine Route von P' aus, die konstant den Winkel $\psi = 75^\circ$ zu den Meridianen einhält. Übertragen Sie diese Route aus der stereographischen Projektion auf die Kugel.

2. Schiefe Kreiskegel

Streng genommen setzt das folgende Kapitel 2.2 zumindest die Ellipse als ebenen Schnitt eines Rotationskegels voraus (siehe LANGE, MEYER [1]), wengleich nur ihre Koordinatendarstellung in der Schnittebene benötigt wird, die man z. B. über eine affine Abbildung $(x|y) \rightarrow (x'|y')$ mit $x = x'$ und $y' : y = b : a$ (Vierstreckensatz beachten!) aus der eines Kreises erhält (siehe in der nebenstehenden Abbildung die Konstruktionsschritte 1 bis 4). Hierbei geht die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$ über in die Ellipsengleichung $x'^2 + \left(\frac{ay'}{b}\right)^2 = a^2$, vereinfacht zu $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ (siehe auch Aufgabe 2.1.8).

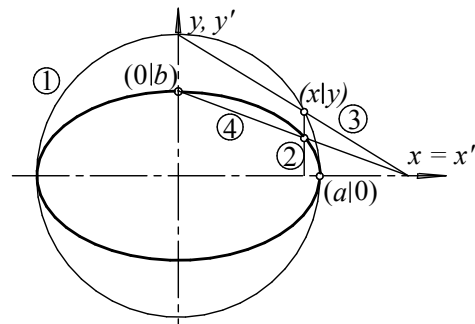


Abb. 7

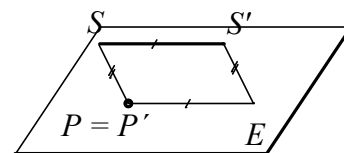


Abb. 8

2.1 Scherung

Definition 2.1.1: Die Scherung ist eine Punktabbildung $P \rightarrow P'$ des Raumes auf sich mit den Eigenschaften:

1. Es gibt eine Ebene E aus Fixpunkten:
 $P = P'$ für alle P aus E (siehe Abb. 8).
2. Es gibt Punkte S, S' mit S nicht auf E ,
 $S \neq S'$, $SS' \perp E$ (siehe Abb. 8).
3. Für alle Punkte $P \notin E$ und $P \neq S$ gilt:
 - a) Falls PS nicht parallel zu E ist, gibt es
 $F := PS \cap E$ und durch P eine Gerade
 $g \parallel SS'$. Dann gelte: $P \rightarrow P' = g \cap FS'$
(siehe Abb. 9)
 - b) Falls PS parallel zu E ist, wähle man zunächst ein R außerhalb E so, dass RS und PR nicht parallel zu E sind. Man sucht dann gemäß a) das Bild zu R und findet abermals gemäß a) das Bild zu P über den Zusammenhang von R und R' (siehe Abb. 10).

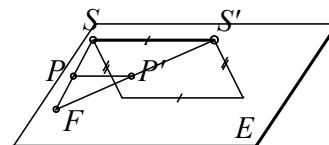


Abb. 9

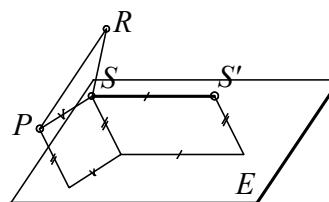


Abb. 10

Man muss Existenzen klären: Bei a): F existiert, weil eine Gerade, die nicht zu einer Ebene parallel ist, im dreidimensionalen Raum die Ebene schneidet (Abb. 9). Bei b): Man wähle einen beliebigen Punkt F auf E ; dann kann S nicht auf FP liegen und jeder Punkt auf FP außer F und P kann als R gewählt werden (Abb. 10).

Definition 2.1.1 ordnet also jedem Punkt des Raumes einen Bildpunkt zu. Hierbei ist die Abbildungsrichtung durch $S \rightarrow S'$ festgelegt. Es ist aber auch durch $S' \rightarrow S$ eine Scherung aller Punkte des Raumes festgelegt. Wendet man beide Abbildungen nacheinander an, so erhält man die identische Abbildung; deshalb gilt:

Satz 2.1.2: Jede Scherung ist eine eineindeutige Punktabbildung des Raumes auf sich. Sie ist festgelegt durch die Fixpunktebene E und zwei (verschiedene) Punkte S, S' , die nicht in E liegen und die $SS' \parallel E$ erfüllen.

Hilfssatz 2.1.3: Die Bildpunkte P' liegen stets auf einer Parallelen zu SS' durch P .

Beweis: Ist P Fixpunkt, so ist die Aussage trivial. Ist P kein Fixpunkt und PS nicht parallel zu E so ist die Aussage der Definition 2.1.1 unter 3a) zu entnehmen. Im Fall 3b) folgt die Aussage aus der Transitivität der Parallelität.

Hilfssatz 2.1.4: Ist die Ebene PSS' parallel E erhält man P' als vierten Punkt im Parallelogramm $PSS'P'$.

Beweis: Nach Definition 2.1.1. 3b) wählt man z. B. oberhalb der Ebene PSS' ein R . Dann schneidet RS die Ebene E in F_R und $R' = S'F_R \cap g$ mit g parallel zu SS' durch R . Aus $PSS' \parallel E$ folgt mit den Bezeichnungen der Abb.11:

$PS \parallel F_P F_R \parallel P'S'$. Wegen der Transitivität von \parallel ist also $PSS'P'$ ein Parallelogramm.

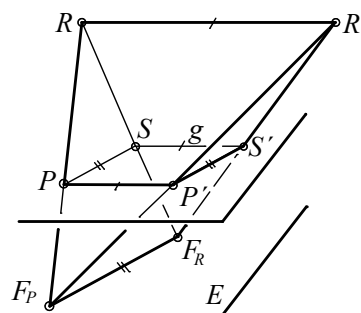


Abb. 11

Definition 2.1.5: Liegen Punkte auf einer Geraden, so heißen sie **kollinear**.

Satz 2.1.6: Jede Scherung bildet kollineare Punkte auf kollineare Punkte ab; sie ist also **geradentreu**.

Beweis: Wegen der Eineindeutigkeit der Scherung haben verschiedene Punkte verschiedene Bildpunkte. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, für drei paarweise verschiedene Punkte zu zeigen:

Aus $R \in PQ$ folgt $R' \in P'Q'$. Mit den bisher benutzten Bezeichnungen unterscheiden wir:

1. PQ parallel zu E :

- Falls $PQ \parallel SS'$ liegen P', Q' und R' nach Hilfssatz 2.1.3 auf PQ' , weil es durch P nur eine Parallele zu SS' gibt. Die Punkte sind also kollinear.
- Falls PQ und SS' nicht parallel sind, liegen nach Hilfssatz 2.1.4 die Punkte P', Q' und R' auf Parallelogrammen; im Einzelnen: Man erhält in der Ebene PSS' (vgl. Abb. 12) die 3 Parallelogramme $PSS'P', QSS'Q'$ und $RSS'R'$ mit kollinearen Punkten P, R, Q . Hieraus folgt: Die Strecken $\overline{SS'}, \overline{PP'}, \overline{QQ'}$ und $\overline{RR'}$ sind parallel und gleich lang. Deshalb ist $PP'R'R$ ein Parallelogramm und deshalb P', Q' und R' kollinear.

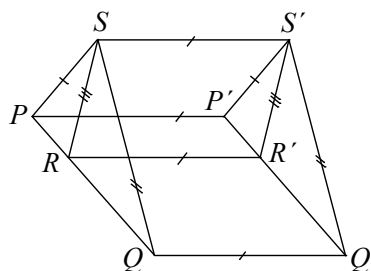


Abb. 12

2. PQ nicht parallel zu E :

- Falls $S \in PQ$ existiert $F = PQ \cap E$; deshalb sind nach Definition 2.1.1.3a) P', Q', R' auf FS' (siehe Abb. 13), alsokollinear.

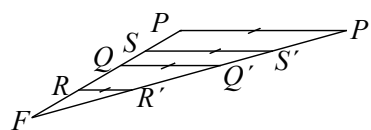


Abb. 13

- b) Falls $S \notin PQ$ gehören zu P, Q, R nach Definition 2.1.1.3a) die Fixpunkte F_P, F_Q und F_R in E (siehe Abb. 14). Die Gerade PQR schneidet E in F . Da aber alle diese Fixpunkte in den Ebenen SPQ und E liegen, müssen diese Fixpunkte kollinear sein.

Die Bildpunkte von P, Q, R liegen auf Geraden durch diese Punkte, die alle parallel zu SS' sind, d. h. in einer Ebene $E_1 = FRR'$ sind.

Liegen die Bildpunkte auf $S'F_P$ bzw. $S'F_Q$ bzw. $S'F_R$, so sind sie alle in einer zweiten Ebene $E_2 = FF_R S'$, weil die Fixpunkte kollinear sind. Auf beiden Ebenen liegt F , deshalb schneiden sie sich in einer Geraden $a = FR'$, auf der also P', Q', R' liegen. P', Q', R' sind demnach kollinear (siehe Abb. 14).

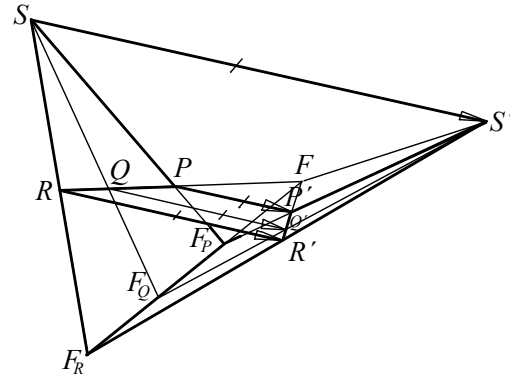


Abb. 14

Aufgabe 2.1.1: In Definition 2.1.1 wird eine Fixpunktebene definiert. Man kann aber auch Fixebenen und Fixgeraden definieren, die als Ganzes fest bleiben, nicht aber ihre Punkte, die dann innerhalb der Ebene bzw. Geraden „verschoben“ werden. Beschreiben Sie Fixebenen und Fixgeraden bei einer Scherung.

Aufgabe 2.1.2: Beschreiben Sie den Unterschied zwischen einer Scherung und einer Verschiebung (Translation).

Aufgabe 2.1.3: Definieren Sie in der Ebene eine Scherung unter Vorgabe der „Scherungsrichtung“ $S \rightarrow S'$ und der Fixpunktgeraden f mit $f \parallel SS'$.

Aufgabe 2.1.4: Im Raum sei eine Scherung mit der Fixpunktebene E , $S \rightarrow S' \neq S$, $SS' \parallel E$ und ein **normiertes** (d. h. die Einheiten sind in allen Richtungen die gleichen), **rechtwinkliges** oder **orthogonales Koordinatensystem** $(O; (x|y|z))$ gegeben. Der Ursprung O sei der Fußpunkt des Lotes durch S senkrecht auf E , x sei parallel zu SS' , y senkrecht hierzu in E und z senkrecht zu E in O . Beschreiben Sie durch Gleichungen die Wirkungsweise der Scherung $(x|y|z) \rightarrow (x'|y'|z')$.

Aufgabe 2.1.5: Übertragen Sie die Aufgabenstellung und Lösung zu Aufgabe 2.1.5 entsprechend der Aufgabe 2.1.3.

Aufgabe 2.1.6: Die Scherung ist ein Spezialfall einer **Affinität** $P \rightarrow P'$ im Raum: Bei der Affinität gibt es ebenso eine Fixpunktebene E und ein Punktepaar (S, S') mit $S' \neq S$, S und S' nicht aus E . Allerdings kann u. U. gelten, dass SS' nicht zu E parallel ist. Für die Punkte $P \notin E$ gilt $P' \neq P$ mit $PP' \parallel SS'$ und kollineare Punkte werden in kollineare Punkte übergeführt.

Geben Sie eine Konstruktionsvorschrift für das Finden der Bildpunkte an.

Aufgabe 2.1.7: Übertragen Sie Aufgabe 2.1.7 in den Spezialfall einer ebenen Affinität.

Aufgabe 2.1.8: Gegeben ist ein normiertes rechtwinkliges Koordinatensystem mit einem Kreis $x^2 + y^2 = a^2$, also mit Mittelpunkt $O = (0|0)$ und Radius a . Die x -Achse bestehe aus den Fixpunkten einer ebenen Affinität $(x|y) \rightarrow (x'|y')$ mit $(0|a) \rightarrow (0|b)$ und $b < a$. Berechnen Sie $(x'|y')$ und geben Sie für das Bild des Kreises eine Gleichung an. Das Bild nennt man **Ellipse**.

Didaktische Hinweise zu 2.1

Schülerinnen und Schüler beherrschen die Kunst der Niederschrift mathematischer Überlegungen nur bedingt. Sie haben deshalb oft wenig Freude, wenn der Lehrer an der Tafel schreibt und schreibt und sie kaum mit dem Abschreiben nachkommen, geschweige denn das Vorgetragene ohne häusliche Nacharbeit verstehen. Aus diesem Grund ist es wohl vorteilhaft, vor allem die Abb. 8 bis 14 auszuteilen und das dort Dargestellte vor allem erkennen zu lassen und vielleicht erst in einem zweiten Anlauf gelegentlich eine schriftliche Fixierung des Erkannten vorzunehmen. Das Verfahren kann durch einen Stapel kleiner Brettchen „anfassbar“ werden, wenn man an ihm das Prinzip der Scherung erklärt und beobachtet, was in den einzelnen Schichten passiert (siehe das Ergebnis einer Scherung in Abb. 15).



Abb. 15

So erkennt man im Einzelnen:

1. Es versteht sich von selbst, dass die beiden Beispiele ebener Scherungen, die in der Einleitung dieser Abhandlung zu finden sind, zu Beginn von Kapitel 2 den Schülern genannt werden, wenn man das Experiment der Abb. 15 erstmals vorgeführt hat.
2. Die Abb. 7 in einem Experiment entstehen zu lassen, ist nur möglich, wenn man ein dehnbare Gummituch zur Hand hat, das längs der x -Achse und einer weit genug außen liegenden zur x -Achse parallelen Geraden fixiert wird. Auf das Gummituch wird zwischen den Fixierungsgeraden ein Kreis samt den Koordinaten und der mit 3 bezeichneten Geraden gezeichnet. Hält man nun die x -Achse fest und zieht an der hierzu parallelen Geraden in y -Richtung, so verändert sich der Kreis zu einer Ellipse. Wie kann man das Experiment ändern, um die Ellipse von Abb. 7 zu erhalten?
3. Wenn das unterste Brettchen in Abb. 15 liegen bleibt, also nur aus Fixpunkten besteht, werden in jedem Parallelbrett alle Punkte um einen festen Betrag b in Richtung $\overrightarrow{SS'}$ verschoben. In jeder Schicht hat man also eine Verschiebung, deren Vorschub aber jeweils von null an zunimmt; man beachte die angelehnte Leiste in Abb. 15.
4. Die Leiste in Abb. 15 kann irgendwie schief liegen. Ihr Fußpunkt aber in der untersten Schicht ist jeweils Fixpunkt. Deshalb ergibt sich das Dreieck FSS' der Abb. 13.
5. Ist PSS' parallel zu den Brettchen der Abb. 15, so werden alle Punkte gleich verschoben und $PSS'P'$ ist ein Parallelogramm. Der „Trick“, diese Erkenntnis in der Definition 2.1.1 über ein R festzulegen, hat seine Ursache im Stil, mit dem man mathematische Texte verfasst.
6. Damit ist eigentlich Abb. 11 überflüssig. Da sie aber ein gutes Beispiel zur Schulung der räumlichen Vorstellung ist, sollte man die Konfiguration $RR'F_RF_P$ als Hausaufgabe basteln lassen und in der nächsten Stunde das in Abb. 11 dargestellte Problem nochmals besprechen.
7. Satz 2.1.6 kann an dem Brettchenstapel einschließlich der Fallunterscheidung des Beweises von diesem Satz erkannt werden. Hierbei ist empfehlenswert, die in Abb. 14 dargestellte Ebenensituation ebenfalls basteln zu lassen.
8. Im Nachhinein oder Voraus sollte man die Schülerinnen und Schüler untersuchen lassen, dass alle bisher kennen gelernten geometrischen Abbildungen die Eigenschaft hatten, Geraden auf Geraden abzubilden, und dass eigentlich die stereographische Projektion die erste Abbildung ist, die eine solche Eigenschaft – also die so genannte **Kreistreue** – nur hat, wenn man Geraden und Kreise der Ebene nicht mehr unterscheidet.

2.2 Eigenschaften schiefer Kreis- kegel

Definition 2.2.1: Verbindet man die Punkte eines Kreises k mit einem Punkt S (genannt Spitze) außerhalb der Kreisebene durch Geraden (genannt Mantellinien), so entsteht ein Kegel Ke . Liegt S auf der Drehachse des Kreises, so entsteht eine rotationssymmetrische Fläche, genannt Rotationskegel. Liegt S nicht auf der Drehachse des Kreises, so entsteht ein so genannter schiefer Kreiskegel.

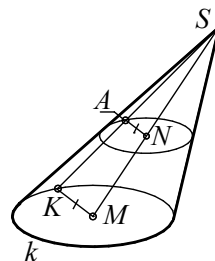


Abb. 16

Satz 2.2.2: Jeder schiefe Kreiskegel hat eine Ebene, zu der er symmetrisch ist.

Aufgabe 2.2.1: Beweisen Sie Satz 1.3.2.

k sei ein Kreis (Mittelpunkt M) auf einem Kegel mit Spitze S (siehe Abb. 16, in der der Kegel schief ist, was nicht sein muss). Man schneide den Kegel mit einer Ebene E durch N (N sei beliebig auf MS), die parallel zur Kreisebene liegt. K sei ein beliebiger Punkt auf k . Dann schneidet KS die Ebene E in A . Der Schnittpunkt existiert, weil S nicht in der Ebene von k liegt. Wegen der Parallelität der Ebenen ist KM parallel zu AN . Durchläuft K den Kreis k , so durchläuft A auf dem Kegel eine ebene Kurve so, dass für alle $K \in k$

$|\overline{AN}| = |\overline{KM}| \cdot \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{SM}|}$ nach dem Strahlensatz eine Konstante ist, weil $|\overline{KM}|$ und $|\overline{SN}|:|\overline{SM}|$ konstant sind. Es gilt:

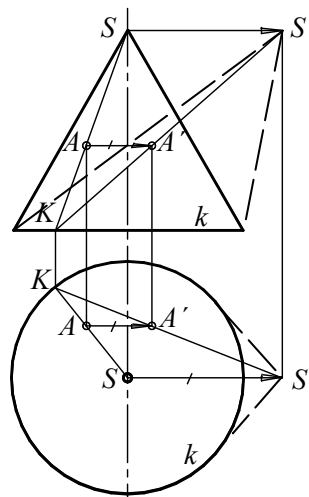


Abb.17

Hilfssatz 2.3.3: Jeder Kreiskegel (schief oder nicht schief) trägt eine Kreisschar in zueinander parallelen Ebenen.

Man stelle sich nun vor, ein gegebener Rotationskegel mit Spitze S und Grundkreis k werde durch viele sehr dünne Kreisscheiben senkrecht zu seiner Rotationsachse aufgeteilt. Diese Scheiben verschiebt man gegeneinander so, dass k fix bleibt und die Spitze S des Rotationskegels übergeht in einen schiefen Kreiskegel mit Spitze S' (diese eindeutige Abbildung ist also eine Scherung; siehe Abb. 17).

Ein beliebiger Punkt A des Rotationskegels liegt dann auf einer seiner Mantellinien SK mit K auf k , die in eine Mantellinie $S'K$ übergeht. Das Bild von A ist dann A' mit AA' parallel zu SS' (siehe Abb. 17, in der der schiefe Kreiskegel symmetrisch zur Aufrisstafel liegt). Man hat also mit dem Vierstreckensatz gefunden:

$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{SS'}|} = \frac{|\overline{KA}|}{|\overline{KS}|} = \frac{|\overline{KA'}|}{|\overline{KS'}|}$, wobei die geschriebenen Streckenlängen sowohl die wahren Längen der Strecken oder die Projektionen derselben in Abb. 17 sein können.

Definition 2.2.4: Ein ebener Schnitt eines Kegels heißt **endlich**, wenn die Schnittkurve in ihrer Ebene mit einer Kreisscheibe überdeckt werden kann. Den endlichen, ebenen Schnitt eines Rotationskegels nennt man **Ellipse**, deren Eigenschaften in LANGE, MEYER [1] sehr ausführlich dargestellt sind.

Im Folgenden benötigen wir hiervon nur, dass jede Ellipse zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen hat. Legt man auf diese die Koordinatenachsen, erfüllen die Ellipsenpunkte $(x|y)$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{siehe auch die Einleitung zu Kapitel 2}). \quad (1)$$

Jeder durch (1) dargestellte Graph ist eine Ellipse.

Man betrachtet nun einen schiefen Kreiskegel mit Spitze S' und den „dazugehörigen“ Rotationskegel durch einen seiner Kreise und Spitze S so, dass der schiefe Kegel symmetrisch zur Bildtafel liegt, also seine bereits gefundene Kreisschar jeweils parallele Strecken sind (siehe Abb. 18).

Satz 2.2.5: Jeder endliche ebene Schnitt eines schiefen Kreiskegels ist eine Ellipse.

Beweis: \overline{AR} ist die Projektion eines ebenen, offensichtlich endlichen Schnitts des durch k und S' definierten schiefen Kreiskegels. Die in Abb. 17 bereits betrachtete Scherung kann wegen ihrer Eineindeutigkeit jetzt umgekehrt betrachtet werden. Das Urbild des Kegels (k, S') ist der Rotationskegel (k, S) . Die Urbilder des endlichen Kegelschnitts, also z. B. die Urbilder zu A', P', R' sind

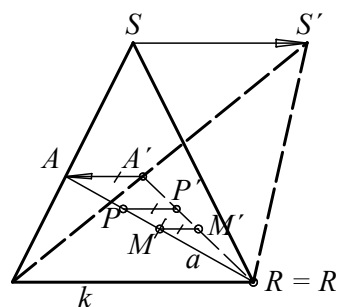


Abb. 18

auf den Parallelen zu SS' durch die betreffenden Punkte zu suchen. Es ergeben sich die Punkte A bzw. P bzw. R , die alle wegen Satz 2.1.6 auf einer Geraden, also einer projizierenden Ebene liegen, die einen endlichen Kegelschnitt, also eine Ellipse, auf dem Rotationskegel verursacht, der z. B. seinen Mittelpunkt bei M in der Mitte von \overline{AR} hat. Durch M gehen Symmetrieachsen der Ellipse, die dann die Halbachsenlängen a und b tragen. a sieht man aus der speziellen Lage der beiden Kegel in Abb. 18 in wahrer Größe. Längs der Symmetrieachsen wählen wir ein normiertes, orthogonales Koordinatensystem $(x|y)$, dessen Bild bei Scherung $S \rightarrow S'$ der Punkt $(x'|y')$ sei. So geht der allgemeine Ellipsenpunkt $P(x|y)$ über in $P'(x'|y')$.

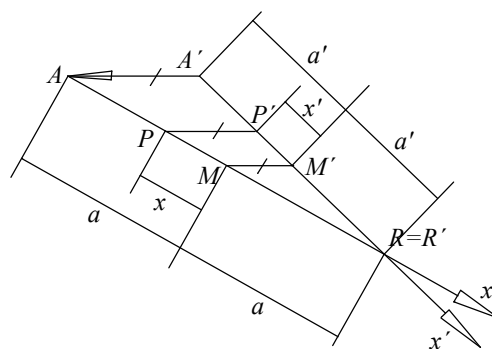


Abb. 19

Wie man bereits oben bei Abb. 17 feststellen kann, ändern sich bei der Scherung nicht die Abstände zur Symmetrieebene der Gesamtdarstellung; d. h.: $y = y'$, wohingegen im Trapez $AA'M'M$ der Abb. 19 gilt $\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}$; also erhält man $x = \frac{a}{a'} \cdot x'$. Aus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt deshalb $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Damit liegen die Punkte P' auf einer Ellipse.

Satz 2.2.6: Jeder schiefe Kreiskegel hat zwei Scharen parallel gelegener Kreise.

Die Abb. 20 zeigt in den Schritten 1 bis 4 die Konstruktion der 2. Schar:

Man betrachtet den schiefen Kegel in einer zu seiner Symmetrieebene symmetrischen Lage. Man sieht dann einen Kreis k_1 der 1. Schar als Strecke. K sei eine Kugel, die den Kegel in B berührt. Dann ist C ein Punkt des Schnitts der Kugel mit dem Kegel bzw. die Strecke BC auf einer schneidenden Ebene. Die Kugel schneidet sie in einem Kreis k_2 . Fraglich bleibt zunächst: Wie schneidet sie den Kegel Ke ? Betrachten wir die Abb. 21: Der Kegelschnitt, der sich als die Strecke BD zeigt, ist endlich und damit eine Ellipse, die im Spezialfall ein Kreis sein kann.

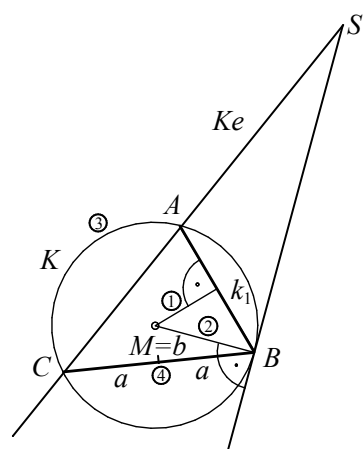


Abb. 20

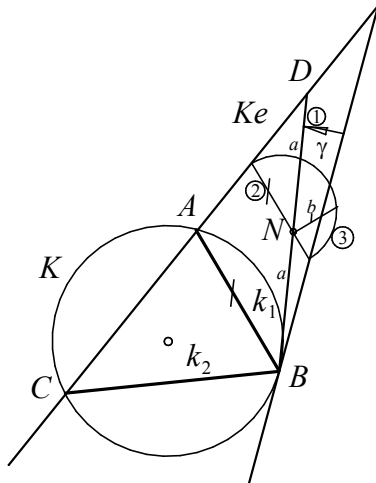


Abb. 21

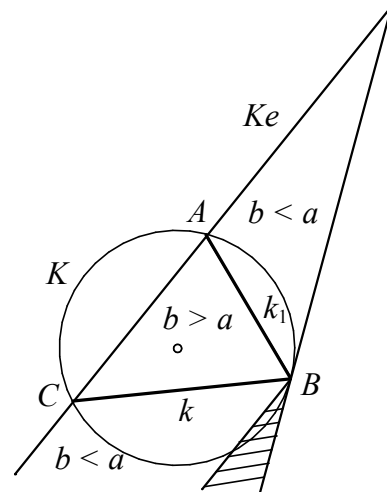


Abb. 22

1. Aus Symmetriegründen (s. o.) liegt eine Achse der Ellipse auf DB und die zweite Achse zeigt sich projizierend als Mitte N von DB .
2. Durch N kann man eine zur Ebene von k_1 parallele Ebene legen, die den Kegel in einem Kreis schneidet.
3. Diesen Kreis klappt man um und erhält die Länge b der zweiten Halbachse der Ellipse. Deutlich ist zu erkennen, dass im vorliegenden Fall $b < a$ gilt.

Das letzte Ergebnis hängt von der Lage der Schnittebene DB ab, wie die Abb. 22 dokumentiert.

Hierzu empfiehlt sich eine der beiden folgenden Demonstrationen:

- a) Man beleuchte einen schwarzen schiefen Kreiskegel über eine Schlitzblende und variiere die Lage von DB .
- b) Man programmiere die Konfiguration der Abb. 21 in einer dynamischen Geometriesoftware und variiere mit dem Zugoperator die Lage γ von DB siehe Abb. 21.

In beiden Fällen kann man „sehen“:

Die beiden Schnittebenen der Kugelkreise k_1 und k_2 teilen das Innere des schiefen Kreiskegels in drei Teilräume. Entsprechend der Abb. 22 führt ein Schnitt DB (siehe Abb. 21) im „obersten“ und im „untersten“ Teilraum zu einer Schnittellipse mit $b < a$, wohingegen im mittleren Teilraum $a < b$ gilt. Im „untersten“ Teilraum muss man allerdings beachten, dass im „schraffierten“ Raum keine endliche Schnitte entstehen können.

- c) Man kann aber auch den einzelnen Schülerinnen und Schülern weitere verschiedene Lagen von BD vorgeben.

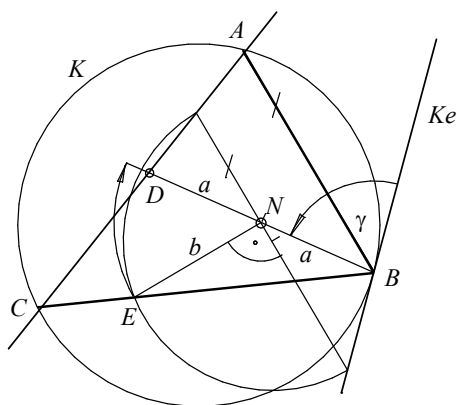


Abb. 23

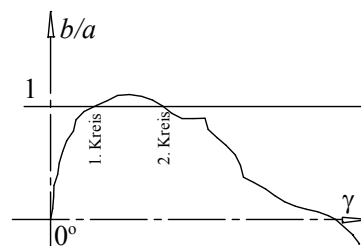


Abb. 24

Anschaulich kann man im „unteren“ Kegelteil „sehen“, dass offenbar gilt: $b < a$. Anders ist dies im „mittleren Kegelteil“ (siehe Abb.23): Hier zeigt eine „mittlere“ Lage von BD , dass gilt: $b > a$

Alle Experimente lassen vermuten (also Schüler auch „einsehen“), dass der Übergang zwischen den einzelnen Lagen von BD nie abrupt geht. Daraus kann man (nach dem Zwischenwertsatz) schließen (siehe Abb. 24), dass der Schnittkreis auf der Kugel auch den Kegel in einem Kreis schneidet. Ein Beweis hierzu ist mit Hilfsmitteln der algebraischen Geometrie in MEYER [1] durchgeführt.

Aufgabe 2.2.2: Zeichnen Sie den mittleren Teil der Abb. 23 möglichst groß und führen Sie für eine weitere mittlere Lage von D die Konstruktionsschritte von Abb. 23 aus.

Aufgabe 2.2.3: Begründen Sie mit dem bisher erworbenen Wissen, dass sich in jedem Punkt eines schiefen Kreiskegels zwei Kreise auf ihm schneiden.

Didaktische Hinweise zu 2.2

1. Abb. 17 kann man im Unterricht nur vorstellen, wenn die Schülerinnen und Schüler gewohnt sind, das Grund- und Aufrissverfahren zu verstehen. Sollte dies nicht der Fall sein, ist es wohl besser, zunächst nur den Aufriss und dann unabhängig von ihm den Grundriss zu entwickeln. Verständlicher wird der



Abb. 25

→
Scherung



Abb. 26

Vorgang einer Raumscherung durch das Modell der Abb. 25 und 26, da diese zeigen, dass in jeder Parallelebene zur Fixpunktebene jede Figur nur verschoben wird, wobei eine Verschiebung in all diesen Ebenen in derselben Richtung um einen Betrag stattfindet, der von der Lage der Ebene abhängig ist. Ein Kreis wird also in einen kongruenten Kreis, also von gleichem Radius, übergeführt, wie die Fotos deutlich werden lassen.

2. Abb. 19 könnte man vermeiden, wenn man bereits in (einer etwas größeren) Abb. 18 die Vermaßung vorgenommen hätte. Durch die eigene Abb. 19 wird auch dokumentiert, dass es ab jetzt um „innere“ Angelegenheiten des Schnittebene geht.
3. Bei den Abb. 20 und 21 ist zwar durch die Nummern die Reihenfolge der Konstruktionsschritte festgehalten. Da aber in aller Regel dieses Verfahren ungewohnt ist, sollte man die *Überlegungsschritte* außerdem schriftlich fixieren.
4. Der schraffierte Teil in Abb. 22 ist zwar ohne Interesse, kann aber trotzdem in Übungsaufgaben benutzt werden um zu zeigen, dass sich der Grenzfall eines nicht endlichen zusammenhängenden Schnitts wie

auch in dem nicht endlichen unzusammenhängenden Schnitt (wozu man dann den „oberen“ Teil des Kegels benötigt) als Parabel- bzw. Hyperbelschnitt herausstellt, wenn man mit der kennen gelernten Methode mit geeigneten Koordinatensystemen in den Schnittebenen aus den Eigenschaften einer Scherung die dazugehörigen Kurvengleichungen ableitet.

5. Manche Kolleginnen und Kollegen weigern sich, Grundlagen der Analysis in Unter- und Mittelstufe des Gymnasiums anzusprechen. So werden nicht nur alle Rechnungen mit Beträgen und Ungleichungen vermieden, sondern auch die ganze klassische Propädeutik der Analysis ausgelassen. D. h.: Die unbenannte Anwendung des Mittelwertsatzes für stetige Funktionen in Abb. 24 ist kein Eingriff in den Analysisunterricht, wenn man den Begriff der Stetigkeit als „lückenlos“ propädeutisch nutzt. Die Problematik dieses Satzes liegt nicht im Verstehen, sondern in der mathematische sauberen abstrakten Darstellung, was „lückenlos“ heißt.
6. In den Unterrichtsexperimenten des Autors wurde beim ersten Anlauf der Kreistreue der stereographischen Projektion sogar Kapitel 2 völlig weggelassen, also den Schülerinnen und Schülern zunächst suggeriert, dass „selbstverständlich“ die ebenen endlichen Schnitte eines schiefen Kreiskegels Ellipsen sind.

3. Weitere Eigenschaften der stereographischen Projektion

3.1 Die Winkeltreue

Definition 2.1.1: Zwei Kurven k_1 und k_2 schneiden sich in P und haben dort die Tangenten t_1 und t_2 . Diese Kurven mögen sich unter dem Winkel $\angle(k_1, k_2) := \angle(t_1, t_2)$ schneiden. Das gilt in der Ebene und im Raum, wenn dort die beiden Kurven auf einer (gekrümmten) Fläche liegen, die in P eine Tangentialebene hat.

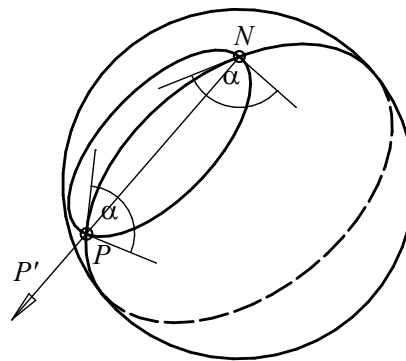


Abb.27

Satz 2.1.2: Zwei Kurven auf der Kugel schneiden sich unter demselben Winkel wie ihre stereographischen Bilder.

Man sagt: Die stereographische Projektion ist **winkeltreu**.

Beweis: Zwei Kurven, die sich auf der Kugel in P schneiden, haben einen Schnittwinkel, der gleich dem zwischen ihren Tangenten ist. Diese Tangenten bestimmen mit dem Nordpol N zwei Ebenen, die die Kugel in zwei Kreisen schneiden. Da es zu zwei sich in zwei Punkten schneidenden Kreisen stets eine Ebene gibt, zu der sie symmetrisch liegen, schneiden sich die beiden Kreise in beiden Schnittpunkten unter demselben Winkel. Da die Bildebene \bar{A} der stereographischen Projektion parallel zur Tangentialebene in N ist, tritt der Schnittwinkel α zwischen den Bildern der beiden Kurven auf der Kugel auf.

Aufgabe 3.1.1: Begründen Sie schriftlich, weshalb die Gleichheit der Winkel α in Abb. 27 zur Winkeltreue der stereographischen Projektion führt.

Aufgabe 3.1.2: Bekanntlich schneidet jeder Meridian jeden Breitenkreis rechtwinklig. Zeigen Sie dies durch eine Konstruktion am Breitenkreis 30° nördlich, indem Sie bei dem rechten Winkel einen Hilfskreis durch N benutzen. Geben Sie die entsprechende Symmetrieebene an, zu der der Winkel am Breitenkreis symmetrisch zum entsprechenden Winkel am Nordpol liegt.

3.2 Die Kreistreue

In Kapitel 2.2 wird gezeigt, dass man mit einer den Kegel berührenden Kugel seine 2. Kreisschar erhält. Bei der stereographischen Projektion wird ein Kugelkreis durch einen schiefen Kreiskegel mit Spitze im Nordpol N z. B. in die Äquatorebene abgebildet. Für die Kreistreue der stereographischen Projektion fehlt jetzt noch der Beweis, dass die Kreise der zweiten Schar jeweils parallel zur Äquatorebene liegen. Man beachte: In der Bildebene wird nicht mehr zwischen Geraden und Kreisen unterschieden.

Satz 3.2.1: Die stereographische Projektion ist **kreistreu**.

Beweis:

- Die Kugel kann stets in eine zur Darstellungsebene symmetrische Lage gebracht werden. Ihr Umriss ist dann ein Kreis k_1 und ihre Pole N und S liegen auf ihm. Ihr Äquator \vec{A} ist als Strecke zu sehen. An dieser Situation ändert sich nichts, wenn man die Kugel um NS dreht. Deshalb kann jeder Kreis durch eine solche Drehung in projizierende Lage AB gebracht werden, d. h. man sieht ihn als Strecke.
- Oben ist bereits bewiesen: Stellt AB einen Breitenkreis dar, so ist der Kegel der stereographischen Projektion ein Drehkegel und das stereographische Bild ebenfalls ein Kreis. Geht der abzubildende Kreis durch N , ist sein Bild eine Gerade.
- Deshalb kann im Folgenden angenommen werden, dass der Urbildkreis AB nicht durch N geht und sein Abbildungskegel ein schiefer Kreiskegel ist. Deshalb kann o. B. d. A. angenommen werden, dass B auf der Kugel tiefer als A liegt.

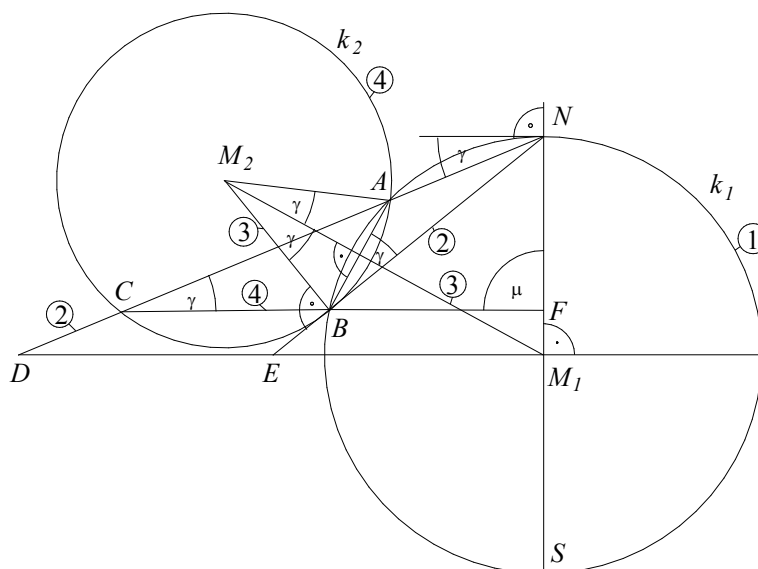


Abb. 28

- Da es zu jeder Lage von AB links von NS eine hierzu symmetrische rechts gibt, kann o. B. d. A. angenommen werden, dass die Mitte von AB links von NS liegt.
- Dann lässt sich stets die folgende Konstruktion für die in 1. entwickelte Darstellung durchführen (man beachte die Reihenfolge der Konstruktionsschritte in Abb. 28):
 - Zeichne den Kreis k_1 um M_1 samt einer Senkrechten (durch N) und einer Waagrechten durch M_1 .
 - Wähle die Sehne \overline{AB} auf dem Kreis k_1 gemäß b) und c) aus und zeichne die Verbindungsgeraden NA und NB . Sie schneiden die Äquatorebene in D bzw. E .

3. Man findet den Mittelpunkt M_2 des Kreises k_2 , der durch A und B geht und NB berührt, indem man M_2 als Schnitt des Lotes auf NB in B mit dem Mittellot zu \overline{AB} schneidet. Da \overline{AB} auf beiden Kreisen liegt, muss dieses Mittellot durch M_1 gehen.
 4. Jetzt kann man den Kreis k_2 zeichnen, der NA in C und NB in B schneidet. Es entstehen die Sehndreiecke ABN und ABC in k_1 bzw. in k_2 .
- f) Wir wissen aus unseren Betrachtungen schiefer Kreiskegel: Auf BC liegt ein Kreis, der Schnitt zwischen der Kugel k_2 und dem schiefen Kreiskegel ist. Zu zeigen ist noch: Liegt die Kreisebene parallel zur Äquatorebene? Hierzu:
1. Man definiert zunächst γ als Winkel von AB , einer Sehne in k_1 , gegenüber BN , einer Tangente an k_2 . Dann gilt:
 2. γ ist Sehntangentenwinkel (der halb so groß wie der Mittelpunktswinkel bei M_2) und gleich groß dem Peripheriewinkel bei C ist. γ ist aber auch bzgl. k_1 Peripheriewinkel zur Sehne \overline{AN} und damit gleich groß mit dem Sehntangentenwinkel bei N .
 3. Die Tangente an k_1 in N ist senkrecht auf NS .
 4. Nach der Umkehrung des Satzes über Z-Winkel an parallelen Geraden folgt aus der Gleichheit der Winkel γ bei N und C , dass die Tangente in N parallel zu BC und damit zu DE ist, also gilt: $\mu = \angle(FB, FN) = 90^\circ$
- g) Dann wird das Ergebnis wieder räumlich gedeutet:
1. Man interpretiert nun \overline{AB} als einen Kreis und k_1 als eine Kugel.
 2. Von N aus (dem Nordpol der Kugel) wird der Kreis stereographisch auf die durch DEM_1 dargestellte Äquatorebene von k_1 projiziert. Dann ist NCB die Projektion eines Kreiskegels mit der Spitze N , dessen Schnitt mit der Äquatorebene \overline{DE} das Bild des Kreises \overline{AB} ist.
 3. Man beachte: Die Gesamtkonfiguration aus Kugel, Kegel und Kreis samt Kreisbild liegt symmetrisch zur Darstellungsebene der obigen Abbildung. D. h. insbesondere \overline{AB} ist projizierend.
 4. Obiger Kreis k_2 ist jetzt der Umriss einer Kugel k_2 , die ebenfalls symmetrisch zur Darstellungsebene liegt und offenbar den Kegel wie auch die Kugel k_1 in einem Kreis schneidet, den man in der Projektion als \overline{AB} sieht. k_2 berührt in B den Kegel.
 5. FC ist die Projektion einer Ebene, die die Kugel k_2 ebenfalls in einem Kreis \overline{BC} schneidet, der wegen der symmetrischen Lage zur Darstellungsebene projizierend ist.
 6. Da BC als parallel zur Äquatorebene von k_1 oben erkannt worden ist, ist die stereographische Projektion des Ausgangskreises AB ein Kreis DE , weil jeder parallele Schnitt eines schiefen Kreiskegels zu einem seiner Kreise abermals ein Kreis ist.

D. h.: Die Kreistreue ist bewiesen.

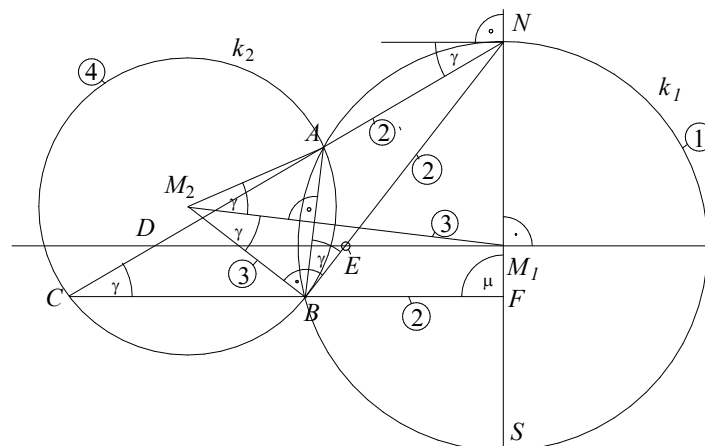


Abb. 29

Da zunächst die Konfiguration, die zum Beweis führt, von der Lage von AB bezüglich k_1 abhängig zu sein scheint, lässt man die Schülerinnen und Schüler diesbezüglich verschiedene Situationen prüfen (siehe die Abb. 29 und 30). Insgesamt zeigen diese Versuche, dass die Interpretation von γ von der Lage der Kreise k_1 und k_2 unabhängig ist, solange der Abbildungskegel schief ist.

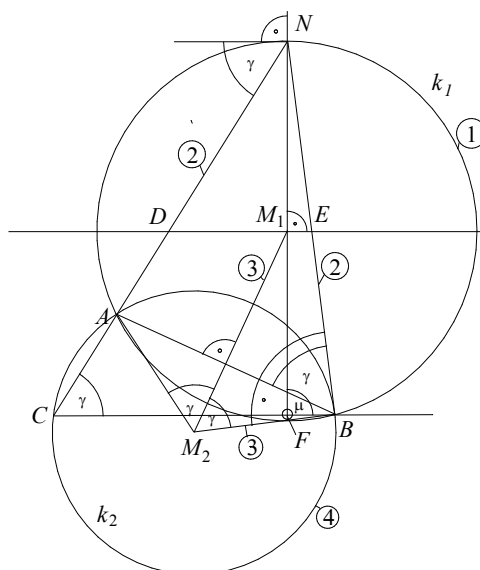


Abb. 30

Hinweis:

Aus pädagogischen Gründen ist im vorliegenden Artikel stets die Rede von einer Kugel mit ihren Polen und Äquator. Stereographische Projektion gilt allgemeiner: Man kann von jedem Punkt P einer Kugel aus stereographisch projizieren auf die Tangentialebene des Gegenpunktes zu P . Die folgende Aufgabe 3.2.3 ist entnommen MEYER [4] bzw. MO 491146 (d. h. 49. Mathematik-Olympiade, 4. Runde (Bundesrunde) 6. Aufgabe).

Aufgabe 3.2.1: Begründen Sie, weshalb im Allgemeinen bei Abb. 28 der Kreismittelpunkt von \overline{AB} nicht auf den Kreismittelpunkt seines Bildes abgebildet wird. Wie muss \overline{AB} liegen, damit das Bild einen Mittelpunkt hat, der durch stereographische Projektion aus dem Mittelpunkt von \overline{AB} entsteht?

Aufgabe 3.2.2: Welchen Vorteil bringt Kreistreue und Winkelstreue stereographischen Landkarten? Ist es sinnvoll, „Erdkarten“ in stereographischer Projektion zu erstellen? Siehe MERTENBACHER [1]. Welche „Selbstverständlichkeit“ von Landkarten erfüllen die stereographischen Projektionen nicht?

Aufgabe 3.2.3: Auf einer Kugel liegen die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H so, dass $ABCD, ABFE, BCGF, CDHG$ und $DAEH$ jeweils eine Ebene bestimmen. Man zeige: Dann liegen E, F, G, H auch auf einer Ebene.

Aufgabe 3.2.4: Gegeben sind zwei Kreise in der Ebene. Man finde einen Konstruktionsweg, der zeigt, wo die Mittelpunkte aller Kreise liegen, die die beiden gegebenen Kreise berühren.

Didaktische Hinweise zu 3.2

1. Kapitel 3.2 stellt den „letzten Schritt“ bei der Beweisführung der Kreistreue dar. Was will man damit erreichen? Es handelt sich offenbar um eine unbedeutende Kleinigkeit, wenn man einen eigenen Beweis dafür schreibt, dass die zweite Kreisschar eines schiefen Kreiskegels parallel zur Tangentialebene im Gegenpunkt zum Projektionszentrum N liegt. Aus diesem Grund ergibt sich in einer Schulklasse begabter Schülerinnen und Schüler das Folgende:

2. Man legt jedem eine Zeichnung vor, deren Entstehen man an ihr erklärt: Ein Kreis auf der Kugel wird abgebildet. Er wird deshalb zuerst einmal in eine „vernünftige“ Lage gebracht. Dann wird der dazugehörige schiefe Kreiskegel erwähnt usw. Erst wenn die Gesamtzeichnung erklärt ist, kommt man auf die noch bestehende Beweislücke zu sprechen. In aller Regel werden die Schülerinnen und Schüler von sich aus nicht auf die Idee kommen, das Problem zunächst als ein ebenes zu betrachten. Was da an Grundsätzlichem dahintersteckt, wird nicht erwähnt.
3. Jetzt kommt die Sache mit dem Peripheriewinkelsatz usw.
4. Schließlich kommt die Kritik oder zumindest die Frage: Hängt dieser Beweisgang nicht von der besonderen Wahl eines Kugelkreises ab? Es wäre falsch, bereits an dieser Stelle ein „Nein“ zu begründen, denn ein normales Verhalten ist, den Beweisgang mit anderen Voraussetzungen zu beginnen, also einen anders gelegenen Kreis als Ausgangspunkt zu nehmen. Sicher gibt es in der Gruppe den Hinweis, dass die Ausgangskugel Kreise in symmetrischer Lage zu NS hat, die man nicht berücksichtigen muss.
5. Beim Überlegen weiterer Anordnungen sollte man dafür sorgen, dass verschiedene Schülerinnen und Schüler wirklich verschiedene Ausgangskreise auf der Kugel wählen und jetzt selbständig die vorher nur besprochenen aber nicht eigens durchgeführten Konstruktionsschritte ausführen.
6. Bei einer Überprüfung der verschiedenen Ergebnisse wird die Frage geklärt, weshalb es sich um einen allgemein durchgeführten Beweis handelt.
7. Schließlich wird das Beweisverfahren grundsätzlich untersucht: Man hat ein räumliches Problem, das auf ein ebenes führt, das gelöst und anschließend wieder räumlich interpretiert wird. Man teilt der Klasse mit, dass dieser Weg oft beschritten werden kann. Man kann ihr aber nicht auseinandersetzen, warum und wo dieses Beweisverfahren möglich ist.

3. Lösungen der Aufgaben

zu 1.1: Zu jeder Geraden durch A gibt es ein parabolisches Kreisbündel, also von Kreisen, die diese Gerade als gemeinsame Tangente haben. Man beachte die Konstruktionsschritte in Abb.31.

zu 1.2: Die Lösung ist der Teil von Aufgabe 1.1 mit den Konstruktionsschritten 1 bis 4.

zu 1.3: Man wählt auf der Geraden g einen Punkt B aus und errichtet in ihm ein Lot, das man mit dem Mittellot von \overline{AB} schneidet in M . Man erhält so den Mittelpunkt eines Kreises durch A , der g in B berührt (siehe Abb. 32). Zu jedem Punkt B auf g gibt es einen Kreis um „ein“ M .

zu 1.4: Das „elliptische Kreisbündel“ durch die beiden Punkte hat Kreise, deren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten der beiden Punkte liegt.

zu 1.5: Alle Kreise, die die beiden parallelen Geraden berühren, haben Mittelpunkte auf der Mittelparallelen.

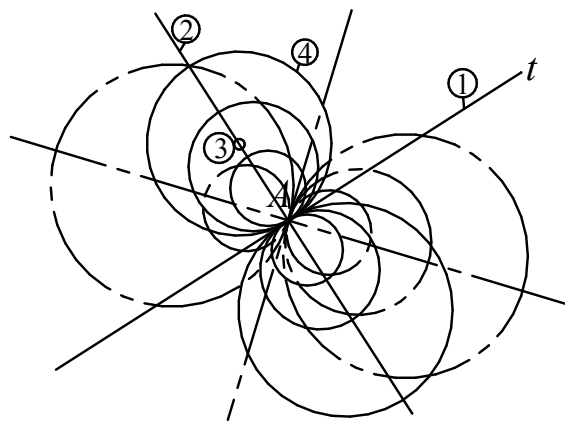


Abb. 31

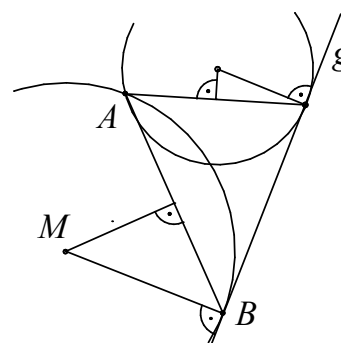


Abb. 32

zu 1.6: Alle Kreise, die zwei sich schneidende Geraden berühren, haben Mittelpunkte auf den beiden Winkelhalbierenden der gegebenen Geraden.

zu 1.7: Liegen die drei gegebenen Punkte auf einer Geraden g , so gibt es keinen Kreis durch sie, es sei denn, man nennt diese Gerade g einen Kreis.

Liegen die drei Punkte nicht auf einer Geraden, so bilden sie ein Dreieck, dessen Umkreis die gesuchte Eigenschaft hat.

zu 1.8: Gehen die drei gegebenen Geraden durch einen Punkt, so gibt es nur dann einen Kreis, der alle drei berührt, wenn die drei Geraden identisch sind. Gehen die drei Geraden nicht durch einen Punkt, so bilden sie ein Dreieck, dessen Inkreis und dessen Ankreise alle drei Geraden berühren.

zu 1.9: Die Kreise $k(M, r)$ und $k(M_1, r_1)$ berühren sich in B , wenn die Punkte B , M_1 und M auf einer Geraden liegen. D. h. ein gesuchter Mittelpunkt M muss die Bedingung $d(M, g) = d(M, M_1) - r_1$ erfüllen; also liegt M auf einer Parabel, deren Brennpunkt M_1 und deren Leitlinie eine Parallele zu g im Abstand r_1 ist.

zu 1.2.1: Der Breitenkreisradius sei r , der der Kugel R . Dann gilt z. B. für den Breitenkreis 30° südlich:

$r = R \cos 30^\circ$. r' sei der Radius des Bildkreises; dann gilt: $r:r' = r(1 + \sin 30^\circ):2R$ usw.

zu 1.2.2: Man zeichnet zunächst die Kugel so, dass die Äquator- und ihre Südpoltangentialebene in der Ansicht Geraden sind. Die Breitenkreise sind dann in der Ansicht Strecken, die zum Äquator parallel liegen.

Ihre Abstände und ihre Lage in der stereographischen Projektion findet man durch die Konstruktionsschritte 1 bis 3. Der Meridian 90° östlich wie auch westlich bildet den Umriss der Kugel. Da hierauf P liegt, findet man aus P' diesen Punkt. Der weitere Weg ist abhängig vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler:

a) Mittelstufe: Der Konstruktionsschritt 4 deutet das Anlegen des Winkels $\psi = 75^\circ$ an. Diesen Schritt kann man auf dem nächsten Meridian, also 15° weiter, wiederholen. Es ist zweckmäßig darauf zu achten, dass die Kurve in der stereographischen Projektion links gekrümmt bleibt und deshalb als Scheitel des anzulegenden Winkels jeweils einen Punkt wählt, der auf dem nächsten Meridian etwas näher zu S' als der Schnittpunkt der letzten Tangente mit dem Meridian liegt. Anschließend überträgt man die so gefundenen Punkte auf die Kugel und erhält insgesamt Abb. 33.

b) Der Differenzialquotient ist bekannt: Wenn die Kurve in all ihren Punkten konstante Steigungswinkel $\psi = 75^\circ$ hat, muss gelten (siehe Abb. 34):

$$\frac{dr}{r d\phi} = \tan(90^\circ - \psi) = k = \tan 15^\circ = 0,2679... \quad (1)$$

Man rät und findet als Lösung dieser Gleichung

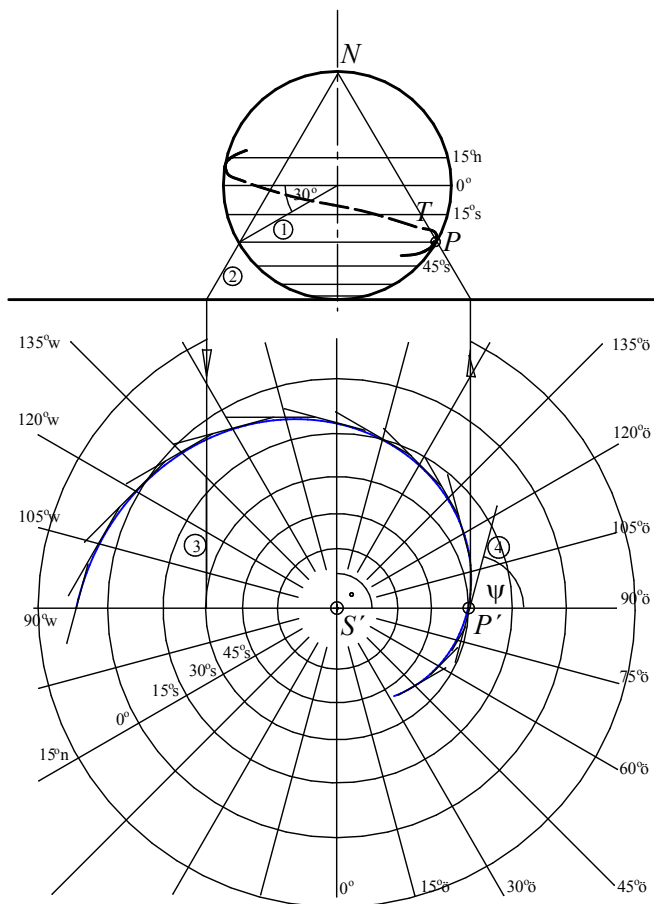


Abb. 33

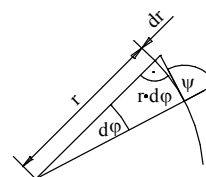


Abb. 34

T' aus P' und R' , U' aus Q' und R' . Schließlich kann man diese Konstruktion etwas variieren, um aus T' und P' den Punkt V' zu bekommen. Diese Punkte kann man mit ein wenig Schätzen auf die Kugel übertragen (siehe Konstruktionsangaben bei P'). Man beachte: P und Q liegen auf dem Kugelumsriss.

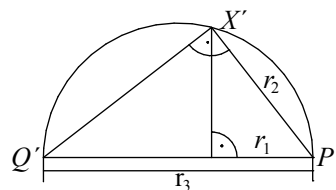


Abb. 37

Hinweis: Da die Tangenten an die Kugelloxodrome in Tangentialebenen der Kugel liegen, die die Bildebene der stereographischen Projektion in den Tangenten der logarithmischen Spirale dort schneiden, lassen sich auch die Tangenten an die Loxodrome konstruieren u. a.

zu 2.1.1: Alle nicht fixen Punkte „wandern“ auf Parallelen zu SS' ; deshalb sind alle Geraden aus E Fixpunktgeraden und alle Geraden $g \parallel SS'$, die nicht in E liegen Fixgeraden, obwohl ihre Punkte nicht fix sind. In Folge sind alle Ebenen, die parallel zu SS' sind und die nicht E sind, Fixebenen, aber keine Fixpunktebenen.

zu 2.1.2: Wie weit Punkte, die nicht auf der Fixpunktebene liegen, bei einer Scherung geschoben werden, hängt nur vom Abstand des Punktes von der Fixpunktebene ab. Bei einer Verschiebung gibt es keine Fixpunkte und alle Punkte werden um den gleichen Betrag in der gleichen Richtung verschoben.

zu 2.1.3: Die Punkte der Fixpunktgeraden f sind fix. Alle anderen Punkte werden gemäß den Konstruktionsschritten 1 bis 3 auf Parallelen zu f bewegt in Richtung SS' (siehe Abb. 38: Bei P volle Striche, bei Q strichpunktirt),

zu 2.1.4: $y = y'$; $z = z'$; $\frac{x-x'}{s} = \frac{z-e}{-e}$ usw. Abb. 39 zeigt E so projizierend, dass SS' parallel zur Bildtafel ist, also in wahrer Länge zu sehen ist. Man beachte, dass sich die Abbildungsrichtung umkehren kann.

zu 2.1.5: $y = y'$; $\frac{x-x'}{s} = \frac{y-e}{-e}$ usw. Diesen Zusammenhang hat man bereits in Abb. 39, wenn man jeweils die zweite Koordinate weglässt und stets z durch y ersetzt.

zu 2.1.6:

In Abb. 40 ist F_P in E gelegen und deshalb Fixpunkt der Geraden PS (Schritt 1). PS wird auf die Gerade $S'F_P$ abgebildet (Schritt 2). P wandert auf einer Parallelen zu SS' (Schritt 3; Ergebnis P').

Hinweis: Die gesamte Konstruktion findet in einer Ebene PSS' statt.

zu 2.1.7:

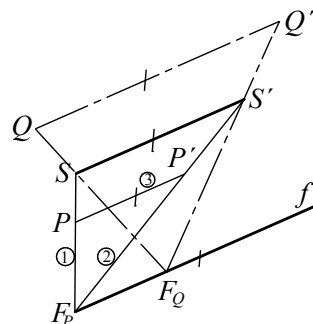


Abb. 38

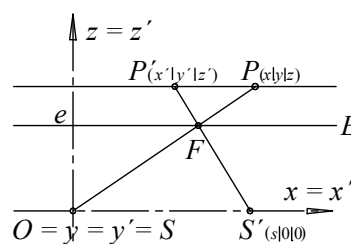


Abb. 39

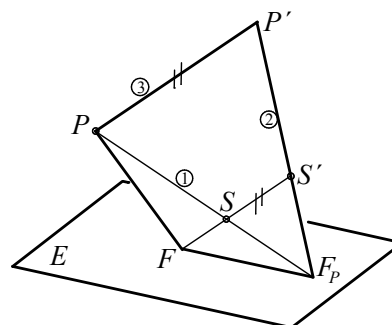


Abb. 40

Handelt es sich um eine ebene Affinität, so entsteht nur eine Zeichnung innerhalb der Ebene $SS'P$ von Abb. 40. Die dann vorgegebene Fixpunktgerade ist längs FF_P .

Hinweis: Der in Abb. 7 dargestellte Zusammenhang zwischen einem Kreis und einer Ellipse ist also eine Affinität. Da hierbei SS' senkrecht zur Affinitätsachse liegt, spricht man von einer **orthogonalen Affinität**.

zu 2.1.8: Die Lösung findet man bei Abb. 7.

zu 2.2.1:

Der schiefe Kreiskegel wird definiert durch einen Kreis k und seiner Spitze N , die nicht auf dem Lot l_1 der Kreisebene durch den Kreismittelpunkt M liegt. Nun kann man jeden Kreis so ansehen, dass man von ihm nur eine Strecke sieht. Fällt man von N aus das Lot l_2 auf die Kreisebene, so schneidet das Lot die Ebene in B . Weil N in der Ebene MNB liegt und k symmetrisch zu dieser Ebene liegt, gilt dies auch für den Kegel.

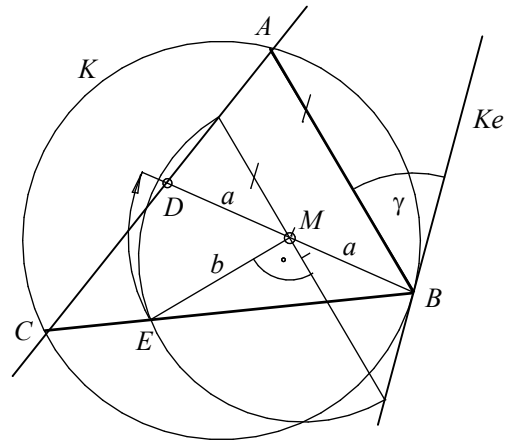


Abb. 41

zu 2.2.2:

Man betrachtet vom Kegel die Projektion in seine Symmetrieebene und schneidet ihn mit einer projizierenden Ebene, so dass in Abb. 41 gilt $\angle(DM, Ke) > \gamma$. Die Mitte M von \overline{DB} „trägt“ dann den Mittelpunkt der Schnittellipse und a ist die eine Halbachse dieser Ellipse. Die dazu senkrecht stehende Halbachse b liegt auf einem Kegelkreis parallel zu dem von \overline{AB} , den man in die Zeichenebene umklappt. Hierdurch erhält man die Länge von b , die offenbar größer als die von a ist.

Hinweis: Der umgeklappte Kreis schneidet BC zufällig in E .

zu 2.2.3: Da alle Kreise einer Schar in zueinander parallelen Ebenen liegen, gibt es etwa in der Projektion der Abb. 41 nach dem Parallelenaxiom durch jeden Punkt zu jeder der beiden Scharen eine Parallele und damit zu jedem Kegelpunkt zwei Kreisschnitte durch den Kegel.

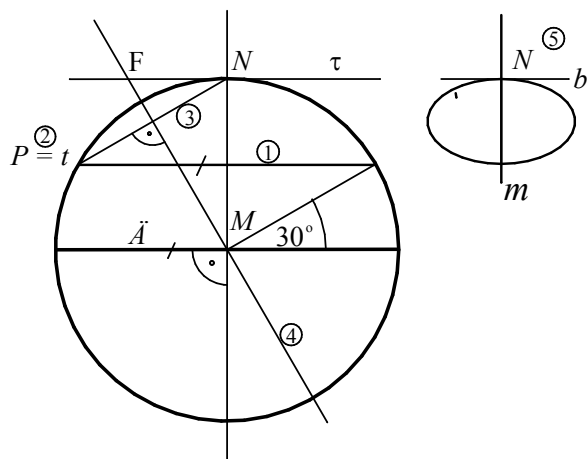
zu 3.1.1: Die Tangentialebene τ in N an die Kugel ist parallel zur Äquatorebene und deshalb auch parallel zu allen Ebenen, die parallel zur Äquatorebene sind. In N haben die beiden sich schneidenden Kurven k_1 und k_2 die Tangenten t_1 bzw. t_2 . Der Projektionsstrahl durch $P \neq N$ bildet zusammen mit t_1 bzw. t_2 zwei Projektionsebenen, die die Bildtafel in t_1' bzw. t_2' schneiden. Parallel zur Bildtafel \vec{A} können die Projektionsebenen nicht sein, denn sonst müsste P in der Tangentialebene zu N liegen. Zwei sich in NP schneidende Projektionsebenen werden von zwei parallelen Ebenen τ und \vec{A} in parallelen Geraden geschnitten. Deshalb gilt $\angle(t_1, t_2) = \angle(t_1', t_2')$. Ersterer

Winkel ist aber nach dem Beweis zu Satz 2.1.2 gleich dem Ausgangswinkel bei P .

zu 3.1.2:

Die Kugel um M mit Äquator \vec{A} und Nordpol N sei gegeben (siehe Abb. 42).

1. Zunächst ist der 30ste Breitenkreis nördlich parallel zu \vec{A} zu zeichnen.
2. Man dreht die Kugel so lange um ihre Achse, bis der Meridian mit dem Kugelumriss zusammenfällt und t in P die Tangente des Breitenkreises ist.
3. \overline{PN} ist dann der projizierende Hilfskreis durch N , der mit dem Breitenkreis



die Tangente t gemeinsam hat.

Abb.42

4. FM ist die projizierende Symmetrieebene zu dem Hilfskreis und dem Meridian durch P .
5. m ist die Tangente in N an den Meridian, b die Tangente in N an den Hilfskreis. Betrachtet man die Situation in N senkrecht zu \vec{A} , so entsteht die kleine Zeichnung rechts oben in Abb. 42. Man sieht: m steht senkrecht auf b . Wegen der konstruierten Symmetrieebene gilt dies dann auch in P .

zu 3.2.1:

Wäre bei einer stereographischen Projektion das Bild eines Kreismittelpunkts ebenfalls Mittelpunkt des Bildes, müssten (nach einer Umkehrung des Vierstreckensatzes) das Bild und das Urbild in parallelen Ebenen liegen. Das kann allerdings nur der Fall sein, wenn der abzubildende Kreis ein Breitenkreis ist.

zu 3.2.2:

1. Die Kreistreue hat zur Folge, dass die Richtungen, z. B. von Straßen, in der Projektion zu sehen sind.
2. Straßen schneiden sich dank der Winkeltreue unter dem gleichen Winkel wie ihr Kartenbild.
3. Landkarten wie auch Baupläne sind maßstabstreu, was bei der stereographischen Projektion nur in einem Punkt erfüllt ist; bei den obigen Gepflogenheiten wäre das das Bild des Südpols.

zu 3.2.3:

Wissen: Die Anwendung der Stereographischen Projektion ist z. B. sinnvoll, wenn man durch die Projektion einige Kreise auf der Kugel in Geraden in der Projektionsebene verwandeln kann: Da alle Kugelkreise durch den Projektionspol zu solchen Geraden werden, geht es also bei der Aufgabe zunächst um Auswahl eines Punktes des gesuchten Sehnenvierecks als Pol; im Folgenden wird der Punkt H gewählt:

Beweis:

Man macht eine stereographische Projektion von H auf die Tangentialebene durch den zu H liegenden diametralen Punkt. Die Bilder der Punkte A, B, \dots auf der Kugel bei stereographischer Projektion von H auf diese Tangentialebene werden mit A', B', \dots bezeichnet (siehe Abb. 43). Auf Grund der Kreistreue dieser Projektion sind die Bilder der bekannten 5 Schnittebenen mit der Kugel Kreise, wobei Geraden auch Kreise genannt werden. Die Ebenen durch H werden in der Bildebene zu Geraden $E'A'D'$ bzw. $G'C'D'$. Die Bilder der 4 Punkte einer Schnittebene mit der Kugel liegen also jeweils auf einem Kreis und bilden deshalb ein Sehnenviereck. In der Bildebene ergibt sich die Zeichnung von Abb. 43. Die Punkte E, F, G und H liegen auf einem Kugelkreis, wenn die Punkte E', F' und G' auf einer Geraden sind. Hierzu betrachtet man die gegebenen Sehnenvierecke in der Projektionsebene. Dann gilt:

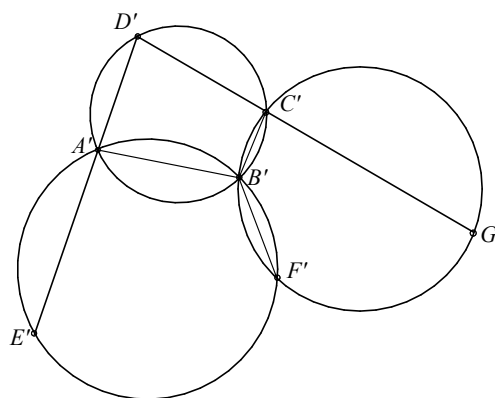


Abb. 43

$\angle B'F'G' = 180^\circ - \angle B'C'G'$, weil diese Winkel im Sehnenviereck $F'G'C'B'$ gegenüberliegen.

$180^\circ - \angle B'C'G' = \angle B'C'D'$, weil G', C', D' auf einer Geraden liegen.

$\angle B'C'D' = 180^\circ - \angle B'A'D'$, weil die Winkel im Sehnenviereck $A'B'C'D'$ gegenüberliegen

$180^\circ - \angle B'A'D' = \angle B'A'E'$, weil D', A', E' auf einer Geraden liegen.

$\angle B'A'E' = 180^\circ - \angle B'F'E'$, weil

die Winkel im Sehnenviereck E', F', B', A' gegenüberliegen. Also gilt $\angle B'F'G' = 180^\circ - \angle B'F'E'$ und E', F' und G' liegen auf einer Geraden. Deshalb gilt nach Obigem E, F, G und H liegen auf einem Kugelkreis.

zu 3.2.4: Man projiziert die beiden Kreise stereographisch auf eine Kugel, wobei ihre Ebene z. B. als Südpoltangentialebene aufgefasst wird.

a) Schneiden sich die beiden Kreise oder berühren sie sich, dann projiziert man erneut stereographisch von dem gemeinsamen Punkt oder von einem der beiden gemeinsamen Punkte auf die Tangentialebene im Gegenpunkt. Man erhält dann in der stereographischen Projektion die Situation der Aufgabe 1.5 oder 1.6.

b) Meiden sich die beiden Kreise, so bildet man stereographisch von einem beliebigen Punkt eines dieser Kreise auf die Tangentialebene des Gegenpunktes ab und erhält die Situation der Aufgabe 1.9.

4. Literaturverzeichnis

- | | | |
|------------------------------------|-----|---|
| Häusler F., Meyer Kh., Ullitzka B. | [1] | Aufgaben zur Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, 1998, Seiten 20 bis 36,
siehe auch www.mathematikinformation.info |
| Lange St., Meyer Kh | [1] | Kegelschnitte I, Mathematikinformation Nr. 31, 1999, Seiten 3 bis 53, siehe auch www.mathematikinformation.info |
| Mertenbacher Richard | [1] | Betrachtungen zur Kartographie unter besonderer Berücksichtigung der Stereographischen Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, 1998, Seiten 37 bis 44,
siehe auch www.mathematikinformation.info |
| Meyer Karlhorst | [1] | Stereographische Projektion, Mathematikinformation Nr. 29, 1998, Seiten 3 bis 19, siehe auch www.mathematikinformation.info |
| | [2] | Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26, 1996, Seiten 3 bis 25, siehe auch www.mathematikinformation.info |
| | [3] | Aufgaben zur Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 30, 1998, Seiten 33 bis 39,
siehe auch www.mathematikinformation.info |
| | [4] | Geometrie in der Mathematik-Olympiade, Mathematikinformation Nr. 56, 2012, Seiten 40 bis 47. |

Bildnachweis: Abb. 15, 25 und 26 Dr. Karlhorst Meyer

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
 Kyffhäuserstraße 20
 85579 Neubiberg
 Tel. 089/60600800
 e-mail: karlhorst@meyer-muc.de

Eingereicht am 13. Februar 2015.