Leserbrief:

Über reguläre und semireguläre Polyeder“ (MI 59) und Polyederformel von Euler in der Schule (MI 63)

Im Artikel „Über reguläre und semireguläre Polyeder“ in MI 59 werden sehr schön und detailliert die ARCHIMEDischen Körper diskutiert. Jedoch wird nicht begründet, dass es keine weiteren ARCHIMEDischen Körper außer den angegebenen geben kann. Im Folgenden wird skizziert, wie man mit der EULERschen Polyederformel (siehe „Polyederformel von EULER in der Schule“ in MI 63) diesen Nachweis erbringen kann:

Es seien e, k, f die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen des Körpers. An jeder Raumecke mögen r reguläre Vielecke beteiligt sein mit Eckenzahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ in genau dieser Reihenfolge. Unter diesen möge für gegebenes m ein m-Eck genau t-mal vorkommen. Zu jeder Ecke gehören also t m-Ecke, über alle Ecken hinweg wird jedes einzelne m-Eck genau m-mal gezählt, die Anzahl der m-Ecke auf dem Körper ist also et/m. Damit ist die Anzahl aller Flächen:

$f = e/n_1 + e/n_2 + \ldots + e/n_r$. (1)

Jede Ecke des Körpers ist Randpunkt von genau r Kanten ist, über alle Ecken hinweg wird jede Kante genau zweimal gezählt (da jede Kante genau zwei Ecken hat). Damit ist die Anzahl aller Kanten:

$k = re/2$. (2)

Mit der EULERschen Polyederformel $e\text{-}k\text{+}f\text{=}2$ bzw. $f\text{=}2\text{+}k\text{-}e$ folgt hieraus nach Division durch e:

$1/n_1 + 1/n_2 + \ldots + 1/n_r = 2/e + r/2 - 1$. (3)

Da jedes Vieleck mindestens drei Ecken hat, ist die linke Seite von (3) kleiner oder gleich $r/3$. Daraus folgt $r = 6 - 12/e < 6$. Da andererseits an jede Ecke mindestens 3 Seitenflächen angrenzen, sind nur die Fälle $r = 3$, $r = 4$ und $r = 5$ zu betrachten. Es werden alle Möglichkeiten für $n_1, n_2, \ldots, n_r$ bestimmt und jeweils ein Beispiel eines Körpers angegeben:

1. Fall: $r = 3$.

a) n_1, n_2 und n_3 sind verschieden: Dann grenzen an jedes n_1-Eck abwechselnd n_2-Ecke und n_3-Ecke, damit ist n_1 gerade. Entsprechend folgt, dass n_2 und n_3 gerade sind. Wären n_1, n_2 und n_3 alle größer als 4 oder eine dieser Zahlen gleich 4 und die beiden anderen größer als 6, wäre die linke Seite von (3) höchstens ½. Daher kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n_1 = 4$ und $n_2 = 6$ annehmen. Damit wird (3) zu $1/n_3 = 2/e + 1/12$, was sich nach e auflösen lässt: $e = 24n_3/(12-n_3)$, mit den Lösungen $n_3 = 8$, $e = 48$ (Großes Rhombenkuboktaeder) und $n_3 = 10$, $e = 120$ (Großes Rhombenikosidodekaeder). Die Anzahlen der Flächen und Kanten ergibt sich daraus jeweils mittels (1) und (2).

b) Reihenfolge n_1, n_2, n_2 mit n_1 ungleich n_2: An jedes n_2-Eck grenzen dann abwechselnd n_2-Ecke und n_1-Ecke, daher muss n_2 gerade sein. Andererseits können nicht n_1 und n_2 beide größer als 5 sein, da sonst die linke Seite von (3) höchstens ½ wäre und damit kleiner als die rechte Seite. Damit bleiben die drei Unterfälle:

ba) $n_2 = 4$. Hier folgt aus (3): $e = 2n_1$ (reguläres Prisma).

bb) $n_1 = 3$ mit geradem n_2 größer als 4: Hier folgt aus (3): $e = 12n_2/(12-n_2)$ mit Lösungen $n_2 = 6$, $e = 12$ (abgestumpftes Tetraeder), $n_2 = 8$, $e = 24$ (abgestumpfter Würfel) und $n_2 = 10$, $e = 60$ (abgestumpftes Dodekaeder).

bc) $n_1 = 5$ mit geradem n_2 größer als 4: Hier folgt aus (3): $e = 20n_2/(20-3n_2)$ mit einziger Lösung $n_2 = 6$, $e = 60$ (abgestumpftes Ikosaeder).

c) Reihenfolge n_1, n_1, n_1: Hier erhält man aus (3): $e = 4n_1/(6-n_1)$ mit den Lösungen $n_1 = 3$, $e = 4$ (reguläres Tetraeder), $n_1 = 4$, $e = 8$ (Würfel) und $n_1 = 5$, $e = 20$ (Ikosaeder).

2. Fall: $r = 4$. In (3) muss hier die linke Seite größer als 1 sein, was nur möglich ist, wenn zur Raumecke mindestens ein Dreieck gehört.

a) Reihenfolgen n_1, n_2, n_3, n_4 (mit verschiedenen Werten von n_1, n_2, n_3, n_4) bzw. n_1, n_1, n_3, n_4 (mit verschiedenen Werten von n_1, n_3, n_4) und n_1, n_1, n_2, n_2 mit n_1 ungleich n_2: Hier grenzen an jedes beiteiligte Vieleck abwechselnd Vielecke unterschiedlicher Eckenzahlen. Damit hätten alle Vielecke gerade Eckenzahl. Das ist unmöglich, da ein Dreieck zur Raumecke gehört.

b) Reihenfolge n_1, n_2, n_1, n_4 mit verschiedenen Werten von n_1, n_2, n_4: Hier grenzen an jedes n_1-Eck abwechselnd n_2-Ecke und n_4-Ecke, damit muss n_1 gerade sein. Wäre n_1 mindestens 6, ist die linke Seite von (3) höchstens $2/6+2/3 = 1$: Widerspruch. Damit ist $n_1 = 4$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n_2 = 3$, da die Raumecke

mindestens ein Dreieck hat. Aus (3) folgt nun $e = 12n_4/(6\text{-}n_4)$ mit einziger Lösung n_4=5, e = 60 (kleines Rhombenikosidodekaeder).
c) Reihenfolge n_1, n_2, n_1, n_2 mit n_1 ungleich n_2: Da zur Raumecke mindestens ein Dreieck gehört, kann man n_1 = 3 setzen. Aus (3) folgt nun $e = 6n_2/(6\text{-}n_2)$ mit Lösungen n_2 = 4, e = 12 (Kuboktaeder) und n_2 = 5, e = 30 (Ikosidodekaeder).
d) Reihenfolge n_1, n_2, n_2, n_2 mit n_1 ungleich n_2: Im Fall n_1 = 3 folgt aus (3): $e = 6n_2/(9\text{-}2n_2)$ mit einziger Lösung n_2 =4, e = 24 (kleines Rhombenkuboktaeder). Im Fall n_2 = 3 folgt aus (3): $e = 2n_1$ (Antiprisma).
e) Reihenfolge n_1, n_1, n_1, n_1: Das ist nur für n_1 = 3 möglich (Oktaeder).

3. Fall: r = 5. In (3) muss hier die linke Seite größer als 3/2 sein, was nur möglich ist, wenn zur Raumecke mindestens 4 Dreiecke gehören. Damit hat man die Reihenfolge 3, 3, 3, 3, n_5. Aus (3) folgt hieraus $e = 12n_5/(6\text{-}n_5)$ mit den Lösungen n_5 = 3, e = 12 (Ikosaeder), n_5 = 4, e = 24 (Cubus simus) und n_5 = 5, e = 60 (Dodecaedrum simum).

Es könnte aber mehrere Archimedische Körper mit selber Reihenfolge n_1, n_2, …, n_r geben. Durch Probieren findet man zunächst, dass sich – außer bei den Reihenfolgen 3, 4, 4, 4 und 3, 3, 3, 3, 4 und 3, 3, 3, 3, 5 aus der Anordnung der Vielecke an **einer** Raumecke bereits eindeutig die Anordnung an allen Raumecken, also auch das Netz, ergibt. Die Symmetrieeigenschaft (Definition 4.1.2 aus „Über reguläre und semireguläre Polyeder" in MI 59) löst die Uneindeutigkeit bei der Reihenfolge 3, 4, 4, 4 auf; in den beiden anderen Fällen gibt es jeweils zwei Anordnungen, die zueinander chiral sind. Es bleibt zu zeigen, dass die Winkel zwischen den Flächen an einer Raumecke eindeutig bestimmt sind. Für r = 3 bildet eine Raumecke zusammen mit den Randpunkten der drei an sie anstoßenden Kanten ein Tetraeder, dessen Kantenlängen als Seiten- und Diagonalenlängen gegebener regulärer Vielecke bekannt sind, wodurch auch die Winkel zwischen den Seitenflächen bestimmt sind, daher kann es keine anderen Körper geben. Für die nicht regulären Polyeder für r = 4 und r = 5 gibt es – außer im Fall 2c) oben – jeweils mindestens eine Zahl n, für die zu jeder Raumecke genau ein n-Eck gehört. Die Kongruenzabbildung nach Definition 4.1.2, die eine Ecke eines solchen n-Ecks auf eine andere desselben n-Ecks abbildet, muss das n-Eck auf sich abbilden und ist daher eine Drehung um eine Gerade durch die Mitte dieses n-Ecks, die senkrecht zur Ebene des n-Ecks ist. Im Falle des Antiprismas folgt, dass die Ebenen der beiden n-Ecke senkrecht zur Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte sind, womit sich das Antiprisma eindeutig bauen lässt. Zwei Mitten von n-Ecken des Körpers werden nun genau dann durch eine Strecke verbunden, wenn mindestens eine Kante des Körpers die beiden n-Ecke verbindet. Die Menge der Mitten von n-Ecken und dieser Strecken geht bei obiger Drehung in sich über, hat also viele n-zählige Rotationssymmetrien. Daraus ergibt sich jeweils (außer beim Antiprisma), dass die Strecken alle gleich lang sind und die n-Ecks-Mitten und Strecken die Ecken und Kanten eines regulären Polyeders sind und dass die Ebene jedes der n-Ecke jeweils senkrecht zur Verbindungsstrecke aus Mitte des n-Ecks und Mitte M des regulären Polyeders ist. Daraus folgt nach Pythagoras, dass der Körper eine Umkugel mit Mittelpunkt M haben muss. Da alle Kanten des Körpers alle gleiche Länge a haben, liegen die Randpunkte der an eine Raumecke E angrenzenden Kanten auf dem Schnittkreis der Umkugel des Körpers mit einer Kugel um E mit Radius a, bilden also ein Sehnen-r-Eck, das durch seine Kantenlängen (Diagonalenlängen gegebener regulärer Vielecke) eindeutig bestimmt ist. Hiermit ist auch hier die Raumecke mit allen Winkeln eindeutig bestimmt.

Im noch übrigen Fall 2c) stellt man fest, dass die Kongruenzabbildung, die eine Ecke eines Dreiecks auf dem Körper auf eine andere desselben Dreiecks abbildet, entweder eine Drehung um die Mitte dieses Dreiecks oder um die Mitte eines zu diesem Dreieck benachbarten n_2-Ecks sein muss. In beiden Fällen kann man jeweils weiter wie oben argumentieren und erhält auch hier die Eindeutigkeit. In diesem Fall sind sogar sowohl die Mitten der Dreiecke als auch die Mitten der n_2-Ecke jeweils Ecken eines regulären Polyeders.
Daher kann es keine anderen ARCHIMEDischen Körper geben.

Noch eine Bemerkung zu „Polyederformel von EULER in der Schule" in MI 63: Die Beweise, dass ein konvexes Polyeder keine Löcher haben kann (Satz 3.8) gelten allgemeiner auch für Polyeder, die sich durch zentrale Projektion eineindeutig auf eine Kugel abbilden lassen, also für eine viel größere Klasse von Polyedern (s. Abschnitt 2.3.1).

Anschrift des Autors:

Dr. Eric Müller

Kirchdorfer Straße 10

78052 Villingen-Schwenningen-Marbach61