

Polyederformel von EULER in der Schule

Zusammenfassung

Die EULERSche¹ Polyederformel stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders her. Die vorliegende Arbeit bemüht sich, auf Schulniveau einen möglichst sauberen Beweis zu geben. Insbesondere muss man sich klar darüber sein, was eigentlich genau unter einem Polyeder zu verstehen ist. Dieser Frage geht das einleitende erste Kapitel nach. Danach folgt ein Beweis für konvexe Polyeder unter Zuhilfenahme der Kugelgeometrie, der dem historisch ersten lückenlosen Beweis nach ADRIEN-MARIE LEGENDRE² nachempfunden ist, und schließlich ein Beweis von KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT³, der den Satz unter schwächeren Voraussetzungen verifiziert (siehe WIKIPEDIA [1]).

1. Einige Grundlagen zu Polygonen und Polyedern

Um Polyeder (Vielflächner) definieren zu können, benötigt man Polygone (Vielecke). In 1.1 werden zunächst Polygone definiert und die im Weiteren benötigten Eigenschaften, insbesondere die Triangulierung, untersucht. In 1.2 folgt ein Exkurs zu konvexen Polygonen. Dann werden in 1.3 allgemeine Polyeder und schließlich in 1.4 konvexe Polyeder eingeführt.

1.1 Polygone und einige ihrer Eigenschaften

Definition 1.1.1:

a) Zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2 definieren die Gerade A_1A_2 . Man unterscheidet die Punkte P , die zwischen A_1 und A_2 liegen, von denen, die dies nicht erfüllen. Erstere definieren zusammen mit den Punkten A_1 und A_2 die Strecke $\overline{A_1A_2}$ der Länge $|\overline{A_1A_2}|$. A_1 und A_2 heißen **Randpunkte der Strecke** $\overline{A_1A_2}$, alle weiteren **innere Punkte der Strecke**⁴.

b) Für die *endlich vielen* zunächst verschiedenen Punkte A_1, \dots, A_n mit $n > 1$ ist ein **Streckenzug** $A_1 \dots A_n$ definiert als die Vereinigung der Strecken $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Die Punkte A_1, \dots, A_n heißen **Ecken** des Streckenzugs. Ein Streckenzug $A_1 \dots A_n$ heißt auch Streckenzug **von** A_1 **nach** A_n . Ein Streckenzug heißt **überschneidungsfrei**, wenn gilt:

1. Abgesehen von A_1 und A_n gehört jeder Eckpunkt zu maximal zwei Strecken des Streckenzugs.
2. Kein Punkt im Inneren einer Strecke des Streckenzugs ist Eckpunkt oder innerer Punkt einer anderen Strecke desselben Streckenzugs.

Sind A_1 und A_n identisch, heißt der Streckenzug **geschlossen**.

¹ LEONHARD EULER, geboren 1707 in Basel, gestorben 1783 in St. Petersburg, ist mit vielen Beiträgen unter anderem zur Analysis und Zahlentheorie einer der herausragenden Mathematiker überhaupt gewesen.

² ADRIEN-MARIE LEGENDRE, geboren 1782 in Paris, gestorben 1833 in Paris, wirkte in den Bereichen Analysis, Algebra, Zahlentheorie, Statistik und Geometrie.

³ KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT, geboren 1798 in Rothenburg ob der Tauber, gestorben 1867 in Erlangen, war ein Schüler von CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) und hinterließ viele Resultate in den Bereichen Zahlentheorie und Geometrie.

⁴ Streng genommen müsste man noch ein Axiomensystem für die Zwischenbeziehung aufstellen, was hier nicht geschehen soll (siehe dazu Coxeter [1], Kapitel 12). Auch bräuchte man im Folgenden angeordnete Ebenen, was aber an der Schule und auch hier vergessen wird. So bleiben insbesondere die Unterscheidungen von Innen und Außen aus Grundlagensicht unvollständig.

Definition 1.1.2: Ein geschlossener überschneidungsfreier Streckenzug mit $n \geq 3$ Strecken in der Ebene heißt **Polygon**. Es heißen dann die Strecken und Ecken des Streckenzugs **Kanten**⁵ und **Ecken** des Polygons.

Bezeichnungen: Das Polygon $A_1A_2\dots A_n$ bestehe aus den Strecken $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$; ein Polygon mit n Ecken heiße **n -Eck**.

Bemerkung: Man beachte, dass die Definition 1.1.2 die Möglichkeit zulässt, dass zwei Seiten mit gemeinsamer Ecke zur selben Geraden gehören (siehe bei Abb.1 die Ecke A_9).

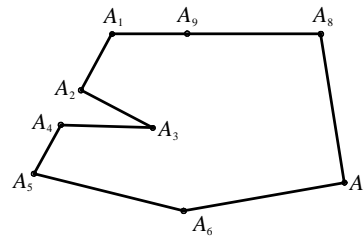


Abb. 1

Aufgabe 1.1.1: Warum stellen folgende Figuren $ABCDEF$ bzw. $ABCDEFG$ kein Polygon dar?

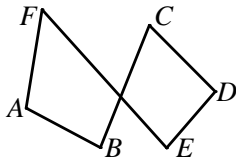


Abb. 2a

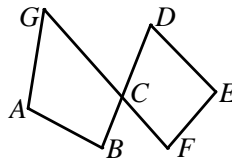


Abb. 2b

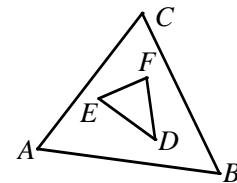


Abb. 2c

Folgende, anschaulich klare Eigenschaft von Dreiecken wird im Folgenden gelegentlich verwendet werden:

Satz 1.1.3 (Axiom von PASCH⁶): Wenn eine Gerade in der Ebene eines Dreiecks eine Seite schneidet, so schneidet sie noch eine andere oder geht durch eine Ecke.

Definition 1.1.4: Eine Punktmenge in der Ebene heißt **beschränkt**, wenn es einen Kreis gibt, der in seinem Inneren alle Punkte der Punktmenge enthält.

Für die Polyederdefinition benötigt man auch das das Innere eines Polygons. Dieser Begriff ist anschaulich klar; in Beweisen benötigen wir aber einige konkrete Eigenschaften, die das Innere (und ußere) eines Polygons charakterisieren. Diese werden in Definition 1.1.5 und Hilfssatz 1.1.6 aufgelistet. Vertiefend folgt in Aufgabe 1.1.5 bzw. Satz 1.1.7 ein genaues Kriterium für innere und ußere Punkte, das auch als exakte Definition des Inneren und ußeren dienen kann und aus dem die in Definition 1.1.5 aufgeführten Eigenschaften folgen. Dieses Kriterium wird aber in dieser Arbeit nicht weiter verwendet.

Definition 1.1.5: 1. Das Polygon teilt die Ebene in drei paarweise elementfremde und nichtleere Teilmengen: das Polygon selbst, das **ußere** und das **Innere** des Polygons. Ein Punkt der Ebene heißt **innerer** bzw. **ußerer** Punkt des Polygons, wenn er im Inneren bzw. ußeren des Polygons liegt.

2. Jede Strecke zwischen einem inneren und ußeren Punkt schneidet das Polygon in mindestens einem Punkt.

3. Das Innere eines Polygons ist beschränkt.

Hinweis:

Aus den Eigenschaften in 1.1.5 lässt sich konkret das Innere und ußere eines gegebenen Polygons bestimmen:

Zunächst wird ein ußerer Punkt ermittelt: Da das Innere eines Polygons beschränkt ist, liegt das Innere des Polygons im Inneren eines Kreises. Es sei A ein Punkt der Ebene, der außerhalb dieses Kreises liegt und nicht

⁵ In aller Regel spricht man hier von Seiten des Polygons. Hinsichtlich der anschließend definierten Seiten(flächen) eines Polyeders nennt man sie in der vorliegenden Arbeit Kanten.

⁶ MORITZ PASCH, geboren 1843 in Breslau, gestorben 1930 in Bad Homburg vor der Höhe, leistete wichtige Beiträge auf dem Gebiet der axiomatischen Geometrie.

Punkt des Polygons ist. Nach Eigenschaft 3 von 1.1.5 ist A äußerer Punkt. Wir finden nun weitere Punkte des Äußeren: Es sei B ein Punkt der Ebene, der kein Punkt des Polygons ist. Zwischen A und B gebe es einen Streckenzug $AA_1 \dots A_n B$ ohne Punkte des Polygons. Daher können nach Eigenschaft 2 von 1.1.5 die Punkte A_1, A_2, \dots, A_n, B keine inneren Punkte des Polygons sein (sonst enthielte mindestens eine der Strecken des Streckenzugs zwischen A und B mindestens einen Punkt des Polygons), daher ist B auch äußerer Punkt. Nun ist anschaulich klar: auf diese Weise kann man *alle* äußeren Punkte erreichen. Damit bilden alle Punkte der Ebene, die weder Punkte des Polygons noch durch einen solchen Streckenzug von A aus „erreichbar“ sind, das Innere des Polygons.

Im weiteren Text benötigen wir noch ein paar wichtige Eigenschaften des Inneren, die anschaulich wiederum klar sind.

Hilfssatz 1.1.6: a) *Notwendiges* Kriterium für innere Punkte (nicht hinreichend, siehe Aufgabe 1.1.3): Jeder in einem inneren Punkt des Polygons beginnende Strahl schneidet das Polygon in mindestens einem Punkt. Insbesondere liegt jeder innere Punkt auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polygons.

b) Jede Strecke zwischen zwei Punkten eines Polygons, die keine weiteren Punkte des Polygons enthält, hat in ihrem Inneren entweder nur innere oder nur äußere Punkte des Polygons.

Beweis:

a) Es sei Q innerer Punkt des Polygons und s ein beliebiger Strahl mit Anfangspunkt Q . Da das Innere des Polygons beschränkt ist, liegt es im Inneren eines Kreises; damit ist ein Punkt R auf dem Strahl s , dessen Abstand von Q größer als der Kreisdurchmesser ist, nicht im Inneren des Polygons. Ist R Punkt des Polygons, ist man fertig; ansonsten liegt nach Eigenschaft 2 von 1.1.5 auf der Strecke \overline{QR} , also auch auf s , mindestens ein Punkt S des Polygons. Ist g eine Gerade durch Q , enthalten somit die beiden in Q anfangenden Halbgeraden von g jeweils mindestens einen Punkt des Polygons. Dann liegt Q auf der Strecke zwischen einem beliebigen Polygonpunkt des einen und einem des anderen Strahls.

b) Beweis durch Widerspruch: Enthielte die Strecke einen inneren Punkt Q und einen äußeren Punkt R des Polygons, läge nach Eigenschaft 2 von 1.1.5 auf der Strecke \overline{QR} mindestens ein Punkt des Polygons.

Aufgabe 1.1.2: Zeige, dass ein Polygon nicht vollständig in einer Geraden enthalten sein kann.

Aufgabe 1.1.3: Zeige, dass das Kriterium 1.1.6a) nicht hinreichend ist, d. h. gib an Hand einer Skizze ein Beispiel eines Polygons und eines Punktes im Äußeren dieses Polygons an, der auch die im Kriterium 1.1.6a) beschriebene Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 1.1.4: Zeige, dass ein Polygon $A_1 A_2 \dots A_n$ beschränkt ist.

Aufgabe 1.1.5: P sei ein Polygon. Begründe, gegebenenfalls auch anhand von Skizzen:

a) Es sei Q ein Punkt, der nicht auf P liegt. Schneidet irgendein in Q beginnender Strahl, der keine Ecke von P enthält, das Polygon in gerade (bzw. ungerade) vielen Punkten, gilt dies für jeden derartigen, in Q beginnenden Strahl. Die Parität der Anzahl der Schnittpunkte hängt also nicht von der Wahl des Strahls ab. *Hinweis:* Man drehe den in Q beginnenden Strahl um Q und untersuche die Veränderungen, wenn der Strahl eine Ecke des Polygons überstreicht.

Für die Aufgaben b) bis f) heiße ein nicht auf P liegender Punkt Q gerade/ungerade, wenn irgendein in Q beginnender Strahl, der keine Ecke von P enthält, P in gerade/ungerade vielen Punkten schneidet.

b) Das Polygon und die Mengen der geraden und der ungeraden Punkte sind paarweise elementfremd; ihre Vereinigung ist die gesamte Ebene.

c) Die Mengen der geraden bzw. ungeraden Punkte sind nicht leer.

d) Die Menge der ungeraden Punkte ist beschränkt.

e) Sind Q und R zwei Punkte, so dass die Strecke \overline{QR} keinen Punkt des Polygons enthält, dann sind Q und R beide gerade oder beide ungerade.

- f) Für jedes Polygon gilt: Ein Punkt ist genau dann ungerade oder gerade, wenn er innerer bzw. äußerer Punkt des Polygons ist. *Hinweis:* Zeige, dass die Eigenschaften von Definition 1.1.5 erfüllt sind.
- g) Zeige mittels zweier Beispiele mit je einem Quadrat und je einem geeigneten Strahl, dass es sowohl von einem inneren als auch von einem äußeren Punkt aus einen Strahl gibt, der das Quadrat in genau einem Punkt (einer Ecke) schneidet. Wie könnte man das Kriterium in Teil f) sinnvoll erweitern, wenn der Strahl auch Ecken enthalten kann?

Der Teil f) aus Aufgabe 1.1.5 lässt sich zu folgendem Satz formulieren, der im Folgenden nicht weiter benötigt wird:

Satz 1.1.7: Ein Punkt Q liegt genau dann im Inneren oder Äußeren eines Polygons P , wenn Q nicht auf P liegt und irgend ein in Q beginnender Strahl, der keine Ecke von P enthält, das Polygon in einer ungeraden bzw. geraden Anzahl von Punkten schneidet.

Im Folgenden wird benötigt, dass sich jedes Polygon in Dreiecke zerlegen lässt. Hierzu benötigt man Diagonalen, also die Verbindungsstrecken zwischen zwei Ecken, die nicht zur selben Kante gehören. Man beachte, die Diagonalenendpunkte sind Ecken, die anderen Punkte können innere und auch äußere Punkte des Polygons sein; vergleiche die nebenstehende Abb. 3. Die übliche Definition wird für das Folgende eingeschränkt:

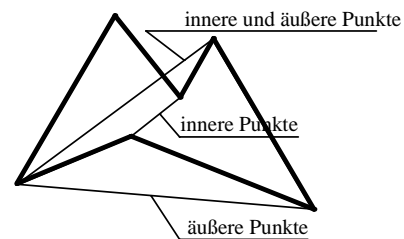


Abb. 3

Definition 1.1.8: Eine *innere Diagonale* eines Polygons ist eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Ecken, die keine Kante ist und außer den Ecken *nur innere Punkte des Polygons* enthält.

Definition 1.1.9: Eine (minimale) **Triangulierung eines Polygons** ist eine Menge von Dreiecken, so dass

- jede Ecke eines Dreiecks Ecke des Polygons ist und jede Dreiecksseite eine Seite oder innere Diagonale des Polygons ist,
- keine zwei Dreiecke einen gemeinsamen inneren Punkt haben,
- das Polygon und sein Inneres die Vereinigung der Dreiecke und ihrer inneren Punkte ist.

Bemerkung:

Erlaubt man weitere Punkte des Polygons oder seinem Inneren als Ecken der Dreiecke, lassen sich beliebig weitere Triangulierungen bilden. Diese spielen aber im Folgenden keine Rolle.

Aufgabe 1.1.6: Wie viele innere Diagonalen haben die Fünfecke der Abb. 4a und 4b und wie viele Triangulierungen gibt es jeweils?

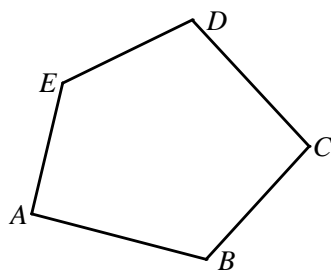


Abb. 4a

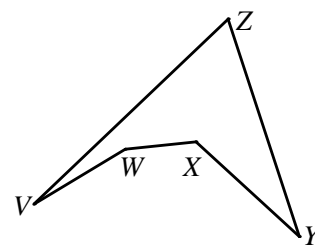


Abb. 4b

Um die wichtige Aussage des folgenden Satzes 1.1.11 zu beweisen, dass jedes Polygon mit mehr als drei Ecken eine innere Diagonale besitzt, benötigt man ein paar Vorüberlegungen:

Man betrachtet das Innere eines Polygons $A_1A_2 \dots A_n$ von einer Ecke A_r aus mit $1 < r < n$. In der Sprache der Optik ausgedrückt, gehen also von der Polygonecke A_r „Seh“-Strahlen aus, die zwischen den sich in A_r schneidenden Kanten $k_{r-1} = \overline{A_{r-1}A_r}$ und $k_r = \overline{A_rA_{r+1}}$ liegen. Das Polygoninnere liegt in den folgenden Abbildungen stets rechts von k_{r-1} und k_r .

Jeder bei A_r beginnende Strahl in den Winkelraum $\angle A_{r-1}A_rA_{r+1}$ enthält „nach“ A_r zunächst innere Punkte des Polygons, muss also noch mindestens einen weiteren Punkt S des Polygons enthalten, um das Innere des Polygons wieder zu „verlassen“ (letzteres folgt auch aus Teil a) von Hilfssatz 1.1.6). Der Strahl kann noch weitere Punkte des Polygons enthalten, diese liegen aber „hinter“ S und sind hier nicht relevant.

Die Strecke $\overline{A_rS}$ hat abgesehen von ihren Endpunkten nur innere Punkte des Polygons (siehe Teil b) von Hilfssatz 1.1.6), und wir sagen, dass S von A_r aus **sichtbar** ist.

Hilfssatz 1.1.10: Schaut man von einer Polygonecke A_r ins Innere des Polygons und ist keine Ecke sichtbar, sieht man nur Punkte genau einer Kante.

Beweis: Man blickt von A_r aus in den Winkelraum $\angle A_{r-1}A_rA_{r+1}$:

Fall 1: Man sieht nur eine einzige Kante, dann ist die Behauptung erfüllt (Abb. 5a).

Fall 2: Man sieht mehrere Kanten:

Fall 2a: Man sieht eine Ecke (siehe Abb. 5b), dann ist die Behauptung erfüllt.

Fall 2b: Man sieht zunächst eine Kante s , nicht aber ihre Endpunkte, weil diese durch andere Kanten verdeckt sind (siehe Abb. 5c). Da das Polygon überschneidungsfrei ist, kann jede verdeckende Kante die Kante s nicht in einem inneren Punkt schneiden, daher liegt beim Übergang vom sichtbaren Teil von s zum verdeckten Teil von s eine Ecke. Damit ist wieder von A_r aus eine Ecke sichtbar: Die Behauptung ist erfüllt.

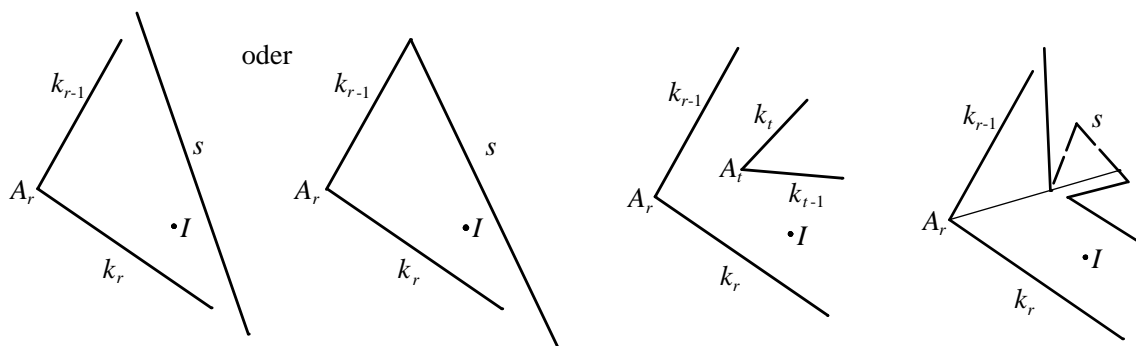


Abb. 5a

Abb. 5b

Abb. 5c

Korollar: Von A_r aus ist entweder eine Ecke sichtbar oder nur Punkte einer Kante.

Zum Beweis hiervon genügt es, nach Hilfssatz 1.1.10 nur noch den Fall zu untersuchen, dass Punkte *genau einer Kante* sichtbar sind:

Fall a: Man sieht keine Ecke und der Winkel bei A_r ist kleiner als 180° (siehe Abb. 5a), dann ist die Behauptung erfüllt.

Man sieht keine Ecke und der Winkel bei A_r ist größer als oder gleich 180° (siehe Abb. 6a): Da jede Polygonkante eine endliche Länge hat, kann dieser Fall nicht eintreten.

Fall b: Man sieht eine Ecke (siehe Abb. 6b); dieser Fall kann nicht eintreten, weil das Polygon ein geschlossener Streckenzug ist.

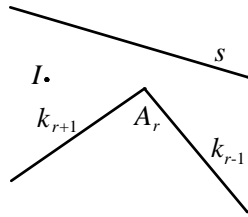


Abb. 6a

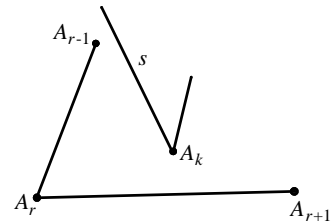


Abb. 6b

Satz 1.1.11: Jedes Polygon mit mehr als 3 Ecken hat eine innere Diagonale.

Beweis:

Fall 1: Von A_r aus ist eine Ecke A_t des Polygons sichtbar. Dann ist nach obiger Bemerkung die Strecke $\overline{A_r A_t}$ die gesuchte innere Diagonale (siehe Abb. 5b)

Fall 2: von A_r aus ist keine Ecke sichtbar, also nach Hilfssatz 1.1.10 nur Punkte einer einzigen Strecke s . (Bemerkung: Insbesondere ist der Innenwinkel $\angle A_{r+1} A_r A_{r-1}$ im Innenwinkel bei A_r des durch die endlich lange Kante s und die Ecke A_r begrenzten Dreiecks enthalten und damit kleiner als 180° .) Das Polygon ist überschneidungsfrei, daher kann s die Kanten $\overline{A_{r-1} A_r}$ und $\overline{A_r A_{r+1}}$ des Polygons nicht schneiden.

Fall 2.1: s enthält einen inneren Punkt der Strecke $\overline{A_{r-1} A_{r+1}}$.

Fall 2.1.1: s liegt auf der Geraden $A_{r-1} A_{r+1}$. Dann ist bereits $A_{r-1} A_r A_{r+1} A_{r-1}$ ein geschlossener Streckenzug aus Punkten des Polygons. Dies ist dann bereits das gesamte Polygon, also das Polygon ein Dreieck im Widerspruch zu $n > 3$. Dieser Fall tritt nicht ein.

Fall 2.1.2: s liegt nicht auf der Geraden $A_{r-1} A_{r+1}$, „geht“ also ins Innere des Dreiecks $A_{r-1} A_r A_{r+1}$ und muss dieses nochmals im Inneren der Kante $\overline{A_{r-1} A_r}$ oder $\overline{A_r A_{r+1}}$ schneiden. Da das Polygon überschneidungsfrei ist, tritt dieser Fall nicht ein.

Fall 2.2: s enthält keinen inneren Punkt der Strecke $\overline{A_{r-1} A_{r+1}}$. Jeder Punkt Q im Inneren der Kante $\overline{A_{r-1} A_{r+1}}$ liegt also – von A_r aus gesehen – vor dem entsprechenden, von A_r aus sichtbaren Schnittpunkt des Strahls $A_r Q$ mit der Kante s und damit im Inneren des Polygons. Damit ist die Diagonale $\overline{A_{r-1} A_{r+1}}$ innere Diagonale.

Bemerkungen:

1. Für Satz 1.1.11 ist wesentlich, dass das Polygon ein *überschneidungsfreier* Streckenzug ist. Bei dem in Abb. 7 gezeichneten nicht überschneidungsfreien Streckenzug bildet offenbar die schraffierte Fläche das Innere in Analogie zu Definition 1.1.5 (und erfüllt auch die Eigenschaften von 1.1.6). Von der Ecke A aus sind Punkte *mehrerer* Kanten, aber *keine* weitere Ecke sichtbar (im Gegensatz zum obigen Beweis). Es gibt auch keine innere Diagonale und keine minimale Triangulierung.

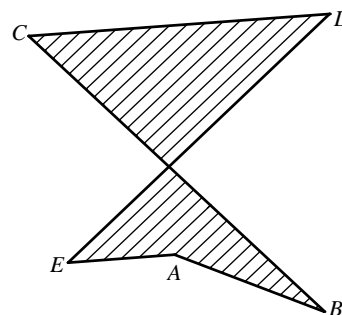


Abb. 7

2. Statt der hier geforderten Überschneidungsfreiheit kann auch verlangt werden, dass das Innere eines Polygons (je nach Umlaufsinn) stets entweder links oder rechts vom durchlaufenden Rand liegt.

Der folgende Satz wird mit einem Verfahren bewiesen, das heute an den meisten Gymnasien kein Lehrstoff mehr ist. Aus diesem Grund muss ein wenig ausgeholt werden:

Das Verfahren beruht auf einer wesentlichen Eigenschaft der natürlichen Zahlen:

Axiomensystem des PEANO⁷ (1891):

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n' .
3. 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
5. Enthält eine Menge M die natürliche Zahl 1 und enthält sie mit jedem Element n auch dessen Nachfolger n' , so umfasst M die Menge der natürlichen Zahlen.

\mathbb{N} sei die Menge der natürlichen Zahlen. Für den Nachfolger zu n schreibt man $n' = n + 1$. Man erkennt sofort, dass die natürlichen Zahlen diese Eigenschaften haben.

Dieses Axiomensystem führt zum **Beweisverfahren der vollständigen Induktion**, das eingesetzt wird, wenn man vermutet, dass eine Behauptung für alle natürlichen Zahlen gilt. Das Verfahren wird zunächst erläutert:

Beispiel: Beweise: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (1)

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

M sei die Menge der natürlichen Zahlen, für die (1) wahr ist (Bemerke: Zunächst kann gelten: $M = \emptyset$).

1. *Induktionsanfang:* Die linke Seite der Gleichung (1) ist 1. Die rechte Seite lautet $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$; d. h. die beiden Seiten sind gleich groß, also gilt $1 \in M$, also ist M nicht leer. (*Hinweis:* Der Induktionsanfang kann auch eine andere natürliche Zahl n_0 sein. Dann zeigt das Verfahren nur, dass M alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$ enthält.)

2. *Induktionsannahme:* Es sei $n \in M$ (d. h.: M enthält alle k mit $1 = n_0 \leq k \leq n$).

3. *Induktionsschluss:* Zu beweisen ist, dass unter der Induktionsannahme $n' = n + 1 \in M$ gilt. Man betrachtet: $1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n + 1)$. Hierzu werden das Assoziativgesetz und die Induktionsannahme zum Einsatz gebracht; dann lässt sich berechnen:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n' \cdot (n'+1)}{2}$$

Also gilt $n' \in M$. Deshalb gilt nach dem Axiom 5 von PEANO: $M = \mathbb{N}$ und (1) gilt für alle natürlichen Zahlen.

Weitere Übungsbeispiele findet man in jedem älteren Lehrbuch der Algebra für das Gymnasium.

Satz 1.1.12: Jedes n -Eck (für $n > 2$) hat eine Triangulierung in $n - 2$ Dreiecke.

Beweis:

M sei die Menge aus natürlichen Zahlen, für die Satz 1.1.12 wahr ist.

Induktionsanfang: Für $n = 3$ ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ eine Triangulierung von sich selbst in $3 - 2 = 1$ Dreiecke.

Also gilt $3 \in M$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen $n \in M$,

d. h. der Satz gilt für alle k mit $3 \leq k \leq n$.

Induktionsschritt: Nach Satz 1.1.11 gibt es eine innere Diagonale $\overline{A_r A_s}$ des Polygons (Abb. 8). Man kann hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r < s$ annehmen. Da $\overline{A_r A_s}$ keine Polygonkante ist, gilt sogar $r < s - 1$, also insgesamt $r < s - 1 \leq n + 1$. Da alle inneren Punkte der Diagonalen $\overline{A_r A_s}$ auch innere Punkte des Polygons sind, schneidet $\overline{A_r A_s}$ keine andere Kante in einem inneren Punkt.

Damit sind auch $A_1A_2 \dots A_r A_s \dots A_{n+1}$ und $A_r A_{r+1} \dots A_s$ Polygone. Wegen $r < s - 1$, also $s - r - 1 > 0$, haben diese Polygone $(n + 1) - (s - r - 1) = n - s + r + 2 \leq n$ (2)

bzw. $s - r + 1 \leq n$ Ecken, (3)

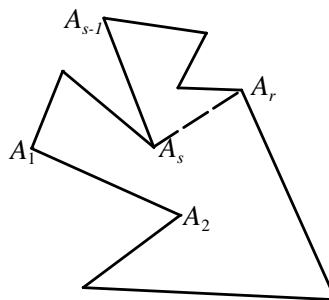


Abb. 8

⁷ GIUSEPPE PEANO, geboren 1858 in Cuneo, gestorben 1932 in Turin, war einer der Begründer mathematischer Logik und Mengenlehre.

außerdem sind die Mengen ihrer inneren Punkte elementfremd. Beide Polygone haben also zwischen 3 und n Ecken. Nach Induktionsvoraussetzung (2) und (3) gibt es Triangulierungen dieser beiden neuen Polygone mit $n - s + r$ bzw. $s - r - 1$ Dreiecken; ihre Vereinigung ist eine Triangulierung des Polygons $A_1A_2\dots A_{n+1}$ mit $(n - s + r) + (s - r - 1) = (n + 1) - 2$ Dreiecken. Also gehört $n + 1$ zu M , und nach Axiom 5 von PEANO enthält M alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 3.

Aus Satz 1.1.12 folgt leicht:

Satz 1.1.13: Ein n -Eck hat die Innenwinkelsumme $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Aufgabe 1.1.7 Man begründe Satz 1.1.13.

1.2 Konvexe Polygone⁸.

Dieser Abschnitt ist zum Beweis der EULERSchen Polyederformel nicht erforderlich, ist aber nützlich für die Vorbereitung der konvexen Polyeder in Abschnitt 1.4.2. Im vorliegenden Abschnitt 1.2 werden verschiedene Definitionen konvexer Polygone aufgeführt und ihre Äquivalenz in Satz 1.2.16 bewiesen.

Definition 1.2.1: Ein Polygon P heißt **konvex**, wenn jede Strecke zwischen zwei Punkten Q und R des Polygons außer Q und R entweder nur Punkte des Polygons enthält (d. h. \overline{QR} ist Teil einer oder mehrerer Kanten des Polygons) oder nur innere Punkte des Polygons enthält.

Aufgabe 1.2.1: Es sei P ein konvexes Polygon. Es seien Q und R zwei Ecken von P . Man beweise: Die Verbindungsstrecke \overline{QR} gehört entweder vollständig zum Polygon oder ist eine innere Diagonale.

Für einige Beweise in diesem Abschnitt ist statt Definition 1.2.1 eine andere Beschreibung konvexer Polygone besser geeignet, die allerdings nicht allgemein üblich ist. Hierfür wird eine neue Eigenschaft, die Polygone haben können, eingeführt und dann gezeigt, dass sie äquivalent zu „konvex“ ist.

Definition 1.2.2: Ein Polygon P heißt **schnittarm**, wenn jede Gerade g , die keine Kante des Polygons enthält, P in höchstens 2 Punkten schneidet.

Anschaulich bedeutet dies, dass das Polygon keine Einbuchtungen haben kann, da es bei einer Einbuchtung Geraden gibt, die das Polygon in mehr als zwei Punkten schneiden (siehe Abb. 9). Mit dieser Definition ist anschaulich klar bzw. folgt sofort aus dem Axiom von PASCH (Satz 1.1.3):

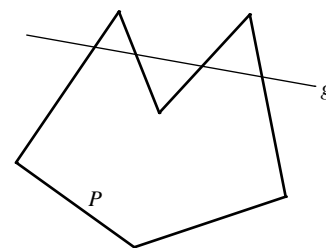


Abb. 9

Hilfssatz 1.2.3: Jedes Dreieck ist schnittarm.

Zunächst werden aus Definition 1.2.2 einige Eigenschaften schnittarmer Polygone hergeleitet:

Hilfssatz 1.2.4: Ist I innerer Punkt eines schnittarmen Polygons und g eine Gerade durch I , die keine Kante des Polygons enthält, dann trifft g genau zwei Punkte Q, R des Polygons; beide auf g liegenden und in I beginnenden Strahlen enthalten genau einen Punkt des Polygons; I liegt auf der Strecke \overline{QR} , und die Strecken \overline{QR} , \overline{QI} und \overline{IR} enthalten außer Q und R nur innere Punkte des Polygons (siehe Abb. 10).

⁸ Dieser Abschnitt kann für den Beweis der EULERSchen Polyederformel übersprungen werden. Nur Hilfssatz 1.2.10 und Satz 1.2.16 werden in Abschnitt 1.4.2 benutzt.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.1.6a) schneiden die beiden von I ausgehenden Strahlen auf g das Polygon in jeweils noch (mindestens) einem Punkt: dies seien die Punkte Q und R . Da g keine Kante des Polygons enthält, ist die Bedingung in Definition 1.2.2 erfüllt, und g kann außer Q und R keine weiteren Punkte des Polygons enthalten. Insbesondere enthält die Strecke \overline{QR} nach Hilfssatz 1.1.6b) außer Q und R nur innere Punkte des Polygons. Das gilt dann auch für die Teilstrecken \overline{QI} und \overline{IR} .

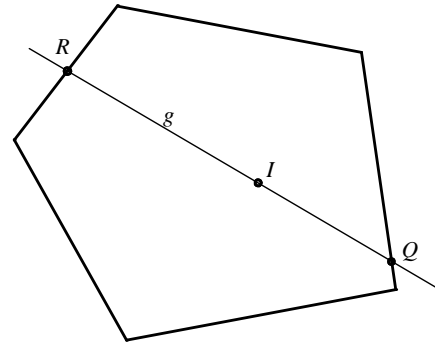


Abb. 10

Hilfssatz 1.2.5: Sind I und J innere Punkte eines schnittarmen Polygons und liegt keine Kante auf der Geraden IJ , dann enthält die Strecke \overline{IJ} nur innere Punkte des Polygons.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.2.4 enthält die Gerade IJ genau zwei Punkte Q und R des Polygons, und die Strecke \overline{QR} enthält außer Q und R nur innere Punkte des Polygons. Insbesondere enthält die Teilstrecke \overline{IJ} nur innere Punkte des Polygons.

Hilfssatz 1.2.6: Ist \overline{AB} eine Kante eines konvexen Polygons, enthält die Gerade AB keine inneren Punkte des Polygons.

Beweis durch Widerspruch:

1. Angenommen, AB enthalte den inneren Punkt I des Polygons. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liege B auf \overline{AI} (siehe Abb. 11).

2. Es sei g eine Gerade durch I , die nicht parallel zu einer der endlich vielen Kanten des Polygons ist, und h eine Parallele zu g durch B . Somit können g und h keine Kante des Polygons enthalten. Nach Hilfssatz 1.2.4 enthält g genau zwei Punkte Q, R des Polygons, und alle inneren Punkte der Strecken \overline{QI} und \overline{IR} sind auch innere Punkte des Polygons.

3. Unter den unendlich vielen inneren Punkten der Strecken \overline{QI} und \overline{IR} gibt es Punkte J und K , so dass AJ und AK keine der endlich vielen Kanten des Polygons enthalten. Nach Hilfssatz 1.2.4 enthalten die Strecken \overline{AJ} und \overline{AK} außer A nur innere Punkte des Polygons, schneiden insbesondere h in zwei inneren Punkten L, M des Polygons. Auf deren Verbindungsstrecke \overline{LM} liegt aber B entgegen Hilfssatz 1.2.5.

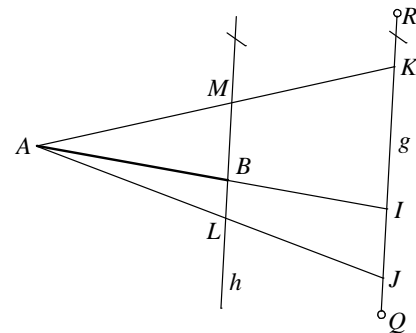


Abb. 11

Wegen Hilfssatz 1.2.6 lassen sich Hilfssatz 1.2.4 und 1.2.5 ohne die Bedingung formulieren, dass die jeweils vorkommende Gerade keine Kante des Polygons enthält:

Hilfssatz 1.2.7: a) Ist I innerer Punkt eines schnittarmen Polygons und g eine beliebige Gerade durch I , enthält g genau zwei Punkte Q, R des Polygons; I liegt auf der Strecke \overline{QR} , und die Strecken \overline{QR} , \overline{QI} und \overline{IR} enthalten außer Q und R nur innere Punkte des Polygons.

b) Ist I ein innerer Punkt des Polygons, enthält jeder in I beginnende Strahl genau einen Punkt des Polygons.

c) Sind I und J innere Punkte eines konvexen Polygons, dann enthält die Strecke \overline{IJ} keine Punkte des Polygons.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.2.6 kann keine Gerade durch einen inneren Punkt des Polygons eine Kante des Polygons enthalten. Damit folgen a) und b) aus Hilfssatz 1.2.4 und c) aus Hilfssatz 1.2.5.

Hilfssatz 1.2.8: Sind Q und R Punkte eines schnittarmen Polygons, so liegen im Inneren der Strecke \overline{QR} entweder nur Punkte des Polygons (d. h.: \overline{QR} ist Teil einer oder mehrerer Polygonkanten auf derselben Geraden) oder nur innere Punkte des Polygons, d. h. ein schnittarmes Polygon ist konvex.

Beweis:

Fall 1: Die Gerade QR enthält einen inneren Punkt I_0 des Polygons. Nach Hilfssatz 1.2.7a) müsste I_0 auf der Strecke \overline{QR} liegen, und alle inneren Punkte der Strecke \overline{QR} sind innere Punkte des Polygons.

Fall 2: Die Gerade QR enthält keinen inneren Punkt des Polygons.

Fall 2.1: Angenommen, auf der Strecke \overline{QR} liegt ein äußerer Punkt A des Polygons (Abb. 12). Das

Polygon hat einen inneren Punkt I , der nicht auf QR liegt. Auf der Strecke \overline{AI} liegt nach Definition 1.1.5 ein Punkt S des Polygons. Die Parallele zu QR durch S schneide die Seiten \overline{IQ} und \overline{IR} in J und K ; nach Hilfssatz 1.2.7a) sind J und K innere Punkte des Polygons, und S kann nach Hilfssatz 1.2.7c) nicht auf \overline{JK} liegen. Dieser Fall kann nicht vorkommen.

Fall 2.2: Anderenfalls liegen auf \overline{QR} weder innere noch äußere Punkte und deshalb nur Punkte des Polygons.

Damit gilt:

Satz 1.2.9: Ein Polygon P ist genau dann konvex (Definition 1.2.1), wenn es schnittarm (Definition 1.2.2) ist.

Wegen Hilfssatz 1.2.8 bleibt noch zu zeigen, dass ein konvexes Polygon schnittarm ist:

Beweis durch Widerspruch: Es sei g eine Gerade, die keine Kante, aber drei Punkte A, B, C des Polygons enthalte. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liege B auf der Strecke \overline{AC} . Da das Polygon konvex ist, muss nach Definition 1.2.1 die Strecke \overline{AC} vollständig zum Polygon gehören, damit enthält g eine Polygonkante im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist das Polygon nach Definition 1.2.2 schnittarm.

Hiermit ergeben sich weitere Charakterisierungen konvexer (bzw. schnittarmer) Polygone.

Hilfssatz 1.2.10: Es seien g eine Gerade und X und Y zwei Punkte, die nicht auf g liegen, und g schneidet die Strecke \overline{XY} . Weiter liegt X auf der Strecke $s = \overline{VW}$. Dann schneidet für mindestens einen der Randpunkte R von s die Gerade g die Strecke \overline{RY} auch nur in einem inneren Punkt.

Beweis:

Ist X bereits Randpunkt von s , ist die Behauptung trivial. Da g die Gerade XY nur in höchstens einem Punkt schneiden kann und X nicht auf g liegt, schneidet g höchstens eine der Strecken \overline{WX} und \overline{VX} . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit schneide g **nicht** die Strecke \overline{WX} . Nach dem Axiom von PASCH (Satz 1.1.3) für das Dreieck WXY schneidet die Gerade g neben der Kante \overline{XY} noch eine der Kanten \overline{WX} und \overline{WY} . Da g die Kante \overline{WX} nicht schneidet, schneidet g die Strecke \overline{WY} in einem inneren Punkt, damit ist W der gesuchte Randpunkt von s .

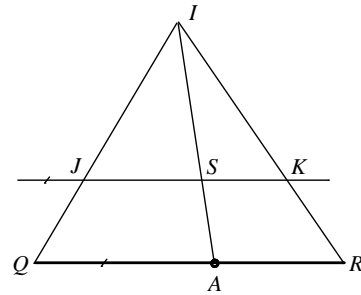


Abb. 12

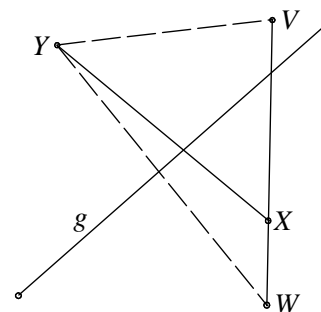


Abb. 13

Hilfssatz 1.2.11: Ein Polygon ist schnittarm (und damit nach Satz 1.2.9 konvex), wenn gilt: Für beliebige Ecken X und Y des Polygons und jede Kante ist \overline{XY} entweder auf dieser Kante oder liegt auf der Verlängerung dieser Kante oder hat mit ihr höchstens entweder X oder Y gemeinsam.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen, eine Gerade, die keine Kante des Polygons enthält, schneidet das Polygon in den Punkten A, B, C (siehe Abb. 14). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegt B auf der Strecke \overline{AC} . Der Punkt B gehört zu einer Kante des Polygons; die Gerade g enthalte diese Kante. Der Punkt C liegt auf einer Kante des Polygons. Nach Hilfssatz 1.2.10 schneidet g für einen der Randpunkte T dieser Kante die Strecke \overline{AT} nur in einem inneren Punkt. Ebenso liegt A auf einer Kante, und nach Hilfssatz 1.2.10 schneidet für einen der Randpunkte U dieser Kante die Gerade g die Strecke \overline{TU} nur in einem inneren Punkt. Da T und U Ecken sind und g die Gerade durch eine Kante des Polygons, widerspricht dies der Voraussetzung.

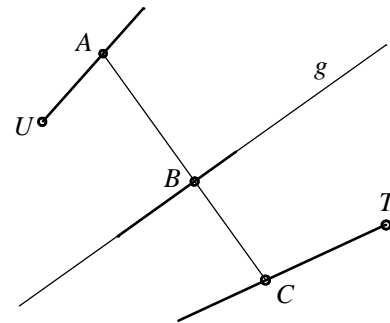


Abb. 14

Hilfssatz 1.2.12: Ist jeder Innenwinkel eines n -Ecks kleiner oder gleich 180° , so ist das Polygon schnittarm (und damit nach Satz 1.2.9 konvex).

Beweis durch vollständige Induktion nach n für $n > 2$:

M sei die Menge aus natürlichen Zahlen, für die Hilfssatz 1.2.12 wahr ist.

Induktionsanfang: Für $n = 3$: Ein Dreieck $A_1A_2A_3$ ist nach 1.2.3 stets schnittarm. Also gilt $3 \in M$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen $n \in M$, d. h.: der Satz gilt für alle k mit $3 \leq k \leq n$.

Induktionsschritt: Nach Satz 1.1.11 gibt es eine innere Diagonale $\overline{A_rA_s}$ des Polygons $A_1A_2\dots A_{n+1}$. Diese teilt das Polygon in zwei Polygone P_1 und P_2 mit jeweils höchstens n Ecken; deren Innenwinkel bei A_r und A_s sind kleiner als die von $A_1A_2\dots A_{n+1}$, also kleiner als 180° . Damit sind P_1 und P_2 nach Induktionsvoraussetzung schnittarm. Nun sei g eine Gerade, die keine Kante von $A_1A_2\dots A_{n+1}$ enthält.

1. Fall: Die Diagonale $\overline{A_rA_s}$ liegt auf g (Abb. 15). Nach Hilfssatz 1.2.8 können P_1 und P_2 nur Punkte auf $\overline{A_rA_s}$ mit g gemeinsam haben, daher schneidet g das Polygon $A_1A_2\dots A_{n+1}$ in 2 Punkten: A_r und A_s .

2. Fall: Die Diagonale $\overline{A_rA_s}$ liegt nicht auf g . Dann liegt keine Seite von P_1 und P_2 auf g , und g schneidet P_1 wie auch P_2 in höchstens je 2 Punkten. Angenommen, g hat mehr als 2 Schnittpunkte mit $A_1A_2\dots A_{n+1}$. Wir nehmen an, g schneidet P_1 in A und B sowie P_2 in C und D . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegen A und D außerhalb der Strecke \overline{BC} (Abb. 16). Nach Hilfssatz 1.2.7a gehören alle inneren Punkte der Strecke \overline{BC} zum Äußeren von P_1 und P_2 , also auch

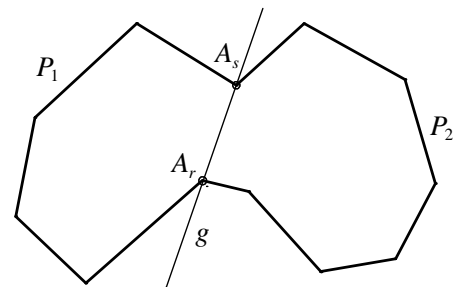


Abb. 15

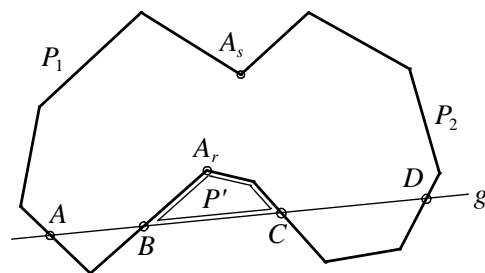


Abb. 16

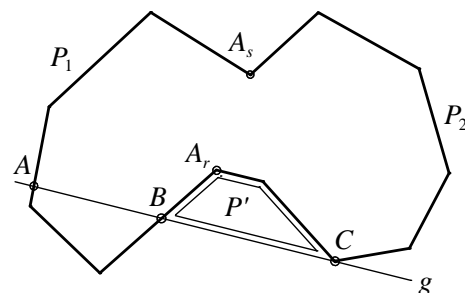


Abb. 17

zum Äußeren von $A_1A_2\dots A_{n+1}$. Die Punkte B und C teilen $A_1A_2\dots A_{n+1}$ in zwei Streckenzüge auf; derjenige Streckenzug s , der nicht A enthält, bildet zusammen mit der Strecke \overline{BC} ein m -Eck P' . Dieses hat nach Satz 1.1.13 die Innenwinkelsumme $(m-2)\cdot 180^\circ$, und die Summe der Innenwinkel an den $m-2$ Ecken außer B und C ist kleiner als $(m-2)\cdot 180^\circ$, daher gibt es eine Ecke A_i mit Innenwinkel echt kleiner als 180° (in Abb.16 bzw. 17 ist $A_i = A_r$). Da sich dieser Winkel mit dem Innenwinkel von $A_1A_2\dots A_{n+1}$ an der Ecke A_i zu 360° ergänzt, wäre letzterer Innenwinkel größer als 180° im Widerspruch zur Voraussetzung. Analog führt die Annahme, dass P_2 die Gerade g nur in einem Punkt C schneidet, zum Widerspruch (Abb. 17). g schneidet $A_1A_2\dots A_{n+1}$ somit in höchstens 2 Punkten. Daher ist $A_1A_2\dots A_{n+1}$ schnittarm. Also gehört $n+1$ zu M , und nach Axiom 5 von PEANO enthält M alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 3.

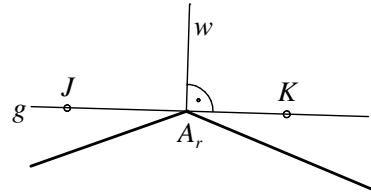


Abb. 18

Hilfssatz 1.2.13: Jeder Innenwinkel eines schnittarmen Polygons ist kleiner oder gleich 180° .

Beweis durch Widerspruch:

Im schnittarmen Polygon $A_1\dots A_n$ sei ein Innenwinkel $\angle A_{r+1}A_rA_{r-1}$ größer als 180° . Die Gerade g sei senkrecht zur Innenwinkelhalbierenden von $\angle A_{r+1}A_rA_{r-1}$ (siehe Abb. 18). Daher liegen die von A_r ausgehenden Strahlen auf g im Winkelraum $\angle A_{r+1}A_rA_{r-1}$ und enthalten „nach“ A_r zunächst innere Punkte, z. B. J und K . Somit läge A_r auf der Verbindungsstrecke \overline{JK} innerer Punkte des Polygons, das daher wegen Hilfssatz 1.2.7c) nicht schnittarm sein könnte.

Die Umkehrungen von Hilfssatz 1.2.7b) und 1.2.11 gelten auch:

Hilfssatz 1.2.14: Umkehrung von Hilfssatz 1.2.7b): Gilt für jeden inneren Punkt I eines Polygons, dass jeder in I beginnende Strahl genau einen Punkt des Polygons enthält, ist das Polygon konvex (bzw. schnittarm).

Aufgabe 1.2.2: Man beweise Hilfssatz 1.2.14.

Hilfssatz 1.2.15: Umkehrung von Hilfssatz 1.2.11: Für jedes schnittarme Polygon gilt: Für beliebige Ecken X und Y des Polygons und jede Kante ist \overline{XY} entweder auf dieser Kante oder liegt auf der Verlängerung dieser Kante oder hat mit ihr höchstens entweder X oder Y gemeinsam.

Aufgabe 1.2.3: Man beweise Hilfssatz 1.2.15.

Die bisherigen Aussagen des Kapitels 1.2 lassen sich zusammenfassen zu dem folgenden Satz:

Satz 1.2.16: Jede der folgenden Bedingungen ist äquivalent dazu, dass ein Polygon konvex ist:

- Jede Strecke zwischen zwei Punkten Q und R des Polygons enthält außer Q und R entweder nur Punkte des Polygons (d. h. \overline{QR} ist Teil einer oder mehrerer Kanten des Polygons) oder nur innere Punkte des Polygons.
- Jede Gerade, die keine Kante des Polygons enthält, schneidet das Polygon in höchstens 2 Punkten.
- Jeder Innenwinkel ist höchstens 180° .
- Für jeden inneren Punkt I des Polygons gilt: Jeder in I beginnende Strahl enthält genau einen Punkt des Polygons.
- Für beliebige Ecken X und Y des Polygons und jede Kante ist \overline{XY} entweder auf dieser Kante oder liegt auf der Verlängerung dieser Kante oder hat mit ihr höchstens entweder X oder Y gemeinsam.

Beweis:

- Definition 1.2.1,
- Satz 1.2.9,
- Hilfssätze 1.2.12 und 1.2.13 und Satz 1.2.9,

- d) Hilfssätze 1.2.7b und 1.2.14 und Satz 1.2.9,
 e) Hilfssätze 1.2.11 und 1.2.15 und Satz 1.2.9.

Abschließend folgt noch eine wichtige Eigenschaft konvexer Polygone:

Satz 1.2.17: Jede Gerade durch einen inneren Punkt eines konvexen Polygons P zerlegt das Polygon in zwei konvexe Polygone.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.2.7a) liegen auf der Geraden genau zwei Punkte Q und R des Polygons, und die Strecke \overline{QR} enthält außer den Randpunkten nur innere Punkte des Polygons. Die Punkte Q und R zerlegen das Polygon in zwei Streckenzüge, zusammen mit \overline{QR} ergeben sich zwei Polygone P_1 und P_2 . Insbesondere kann es für keine zwei Punkte S, T von P_1 (bzw. von P_2) vorkommen, dass die Gerade QR die Verbindungsstrecke \overline{ST} nur in einem inneren Punkt schneidet. Es wird gezeigt, dass P_1 nach Definition 1.2.1 konvex ist (analog folgt, dass P_2 konvex ist). Sind nun S, T zwei Punkte von P_1 , gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Fall: S und T (und damit die gesamte Strecke \overline{ST}) liegen auf der Strecke \overline{QR} : Damit gehört \overline{ST} vollständig zu beiden Polygonen.
2. Fall: Entweder S oder T liegen auf \overline{QR} : Ohne Einschränkung der Allgemeinheit ist T innerer Punkt der Strecke \overline{QR} , damit liegt S auf P , und es ist T innerer Punkt von P (siehe Abb. 19). Die Gerade ST schneidet P nochmals in einem Punkt U . Da das Polygon P konvex ist, liegen nach Definition 1.2.1 im Inneren der Strecke \overline{SU} nur innere Punkte von P , somit auf dem Inneren von \overline{ST} nur innere Punkte von P_1 .
3. Fall: Weder S noch T liegen im Inneren der Strecke \overline{QR} : Dann enthält das Innere der Strecke \overline{ST} nur Punkte von P_1 oder innere Punkte von P_1 , weil sie nur Punkte von P oder innere Punkte von P enthält.

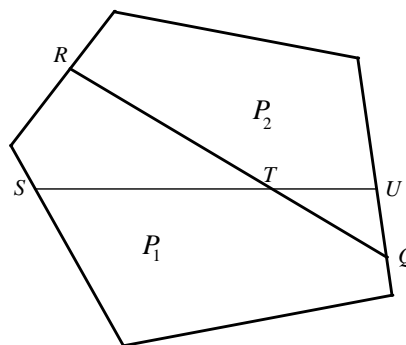


Abb. 19

1.3 Was ist ein Polyeder?

Eine erste Definition 1.3.1: Meist wird ein Polyeder als ein von endlich vielen Polygonen begrenzter Körper definiert und der Rest der Anschauung überlassen.

In aller Regel sind an der Schule die folgenden so genannten PLATONischen und ARCHIMEDischen Körper bekannt. Betrachtet man diese Klassen (siehe auch KELLER und MEYER [1] bzw. MEYER [1]), so stellt man – mit einigem Geschick – fest, dass es zwischen der Anzahl e der Ecken, der Anzahl k der Kanten und der Anzahl f der Seitenflächen der betreffenden Polyeder den algebraischen Zusammenhang $e - k + f = 2$ gibt. Siehe hierzu:

Liste der PLATONischen Körper

Name des Körpers	e	k	f	Abb.
Reguläres Tetraeder	4	6	4	20a
Würfel	8	12	6	20b
Oktaeder	6	12	8	20c
Ikosaeder	12	30	20	20d
Dodekaeder	20	30	12	20e

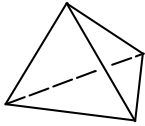


Abb. 20a

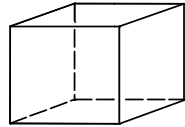


Abb. 20b

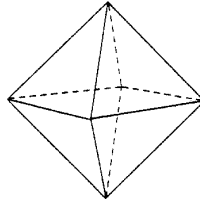


Abb. 20c

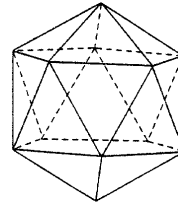


Abb. 20d

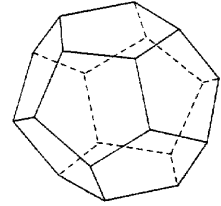


Abb. 20e

Liste der ARCHIMEDISchen Körper

Name des Körpers	e	k	f	Abb.
Abgestumpftes Tetraeder	12	18	8	21a
Abgestumpfter Würfel	24	36	14	21b
Abgestumpftes Dodekaeder	60	90	32	21c
Abgestumpftes Oktaeder	24	36	14	21d
Abgestumpftes Ikosaeder	60	90	32	21e
Großes Rhombenkuboktaeder	48	72	26	21f
Großes Rhombenikositodekaeder	120	180	62	21g
Kuboktaeder	12	24	14	21h
(Kleines) Rhombenkuboktaeder	24	48	26	21i
Ikositodekaeder	30	60	32	21j
(Kleines) Rhombenikositodekaeder	60	120	62	21k
Cubus simus	24	60	38	21l
Dodekaeder simum	60	150	92	21m

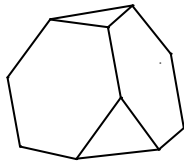


Abb. 21a

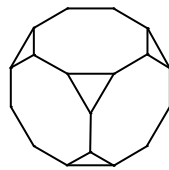


Abb. 21b

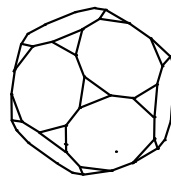


Abb. 21c

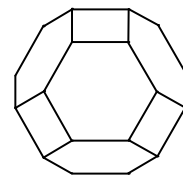


Abb. 21d

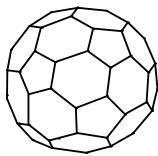


Abb. 21e

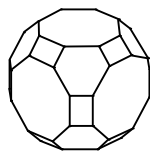


Abb. 21f

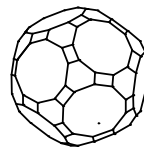


Abb. 21g

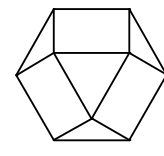


Abb. 21h

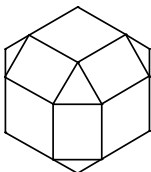


Abb. 21i

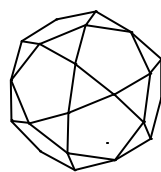


Abb. 21j

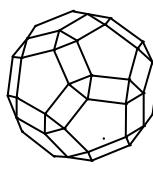


Abb. 21k

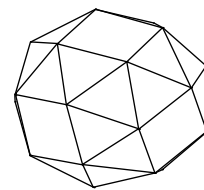


Abb. 21l

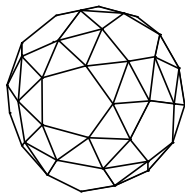


Abb. 21m

Obige anschauliche Definition 1.3.1 eines Polyeders ist für die Beweise der EULER-Formel unbrauchbar, weil sie zu wenige konkrete Eigenschaften enthält. Daher wird im Rahmen dieses Artikels ein Polyeder wie in CROMWELL [1], Kapitel 5 definiert (beachte, dass hier – in Analogie zur Polygonddefinition 1.1.2 – kein „massiver“ räumlicher Körper, sondern dessen begrenzende Fläche definiert wird):

Definition 1.3.2⁹: Ein **Polyeder** besteht aus endlich vielen **Seitenflächen**, die jeweils die Vereinigung eines Polygons mit dem Inneren dieses Polygons sind. Die Kanten und Ecken dieser Polygone heißen im Folgenden **Kanten** und **Ecken** des Polyeders. Hierbei gelten folgende Eigenschaften:

1. Kein innerer Punkt einer Seitenfläche (d. h. innerer Punkt des zugehörigen Polygons) gehört zu einer anderen Seitenfläche. Kein innerer Punkt einer Kante ist Punkt einer anderen Kante.
2. Jede Kante ist gemeinsame Kante von genau zwei Polygonen. Jede Kante hat genau 2 Ecken. Zwei Polygone eines Polyeders, die eine Kante gemeinsam haben, heißen **benachbart**.
3. Man kann von jedem Polygon F_1 zu jedem anderen Polygon F_n gelangen, indem man endlich oft jeweils von einem Polygon F_k zu einem der benachbarten Polygone F_{k+1} für $k = 1, \dots, n - 1$ wechselt. $F_1 F_2 \dots F_n$ heißt **Polygonkette**.
4. Ist eine Polyederecke A Ecke zweier Seitenflächen F_1 und F_n , so gibt es eine sie verbindende Polygonkette mit der Zusatzeigenschaft, dass alle Polygone der Polygonkette die Ecke A haben.

Diese Bedingungen sorgen dafür, dass die Polyederfläche einen Raumteil einschließt und folgende Situationen vermieden werden (vgl. CROMWELL [1], Kapitel 5):

- a) Ein Würfel, aus dem ein konzentrischer Würfel kleinerer Kantenlänge „ausgespart“ wurde, so dass der Würfel hohl ist (Abb. 22a).
- b) Zwei kongruente reguläre Tetraeder, die eine Kante gemeinsam haben (Abb. 22b).
- c) Zwei kongruente reguläre Tetraeder, die eine Ecke gemeinsam haben (Abb. 22c).
- d) Das Polyeder berührt sich selbst in einer Ecke (Abb. 22d): Aus einem dreiseitigen Prisma werden von zwei Seiten Tetraeder so heraus gefräst, dass sich die beiden Tetraeder in einer Spitze berühren. Würden sie sich nicht berühren, gälte der Polyedersatz!

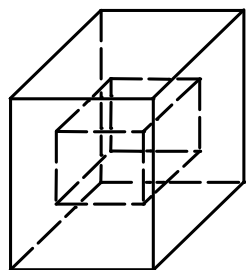


Abb. 22a

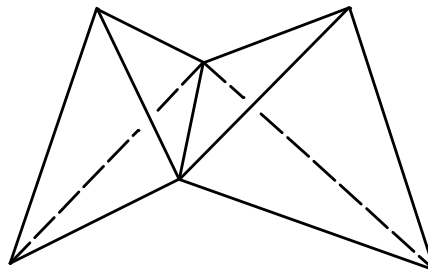


Abb. 22b

⁹ Die Einschränkungen dieser Definition ermöglichen die folgenden Beweise der Polyederformel. Man könnte sich allerdings durchaus vorstellen, die Flächen der Abb. 22a bis d ebenfalls Polyeder zu nennen.

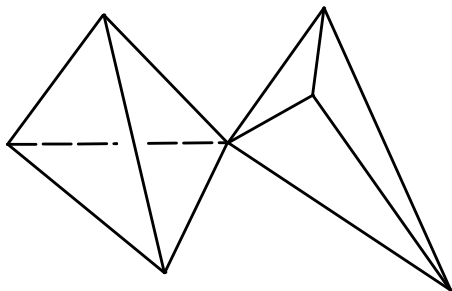


Abb. 22c

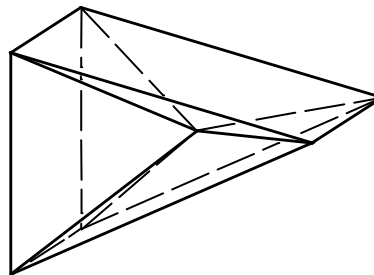


Abb. 22d

Bemerkungen:

1. Die Definition schließt also „Polyeder“ aus, die in zwei Teile zerfallen, die nur Kanten oder Ecken gemeinsam haben.
2. Da die Seitenflächen eines Polyeders Polygone mit ihrem Inneren sind, können die Seitenflächen keine Löcher enthalten. Aber es ist möglich, dass mehrere Seitenflächen in derselben Ebene liegen (vgl. Bemerkung nach Definition 1.1.2).
3. Da ein Polyeder eine so genannte geschlossene Fläche ist, schließt die Definition aus, dass in seinem „Inneren“ ein Hohlraum sein kann (siehe Abb. 22a) aber:
4. Die Polyederdefinition schließt nicht aus, dass ein Polyeder ein Loch haben kann (siehe Kapitel 2.3.2 und Kapitel 3). Die Polyederformel gilt nur für Polyeder ohne Loch, dies wird durch die Zusatzbedingung „konvex“ in Kapitel 2 und „lochfrei“ in Kapitel 3 gewährleistet.

Aufgabe 1.3.1: Gegen welche der Bedingungen der Polyederdefinition widersprechen die Beispiele der Abbildungen 22a bis 22d?

Aufgabe 1.3.2: Gegeben seien die Punkte $A(-1|-1|-1)$, $B(1|-1|-1)$, $C(1|1|-1)$, $D(-1|1|-1)$, $E(-1|-1|1)$, $F(1|-1|1)$, $G(1|1|1)$, $H(-1|1|1)$, $K(0|0|t)$ mit einem reellen Parameter t . Für welche Werte von t ist die aus den Polygonen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, EFK , FGK , GHK , HEK (zusammen mit ihrem Inneren) gebildete Fläche ein Polyeder? Wie viele Ecken, Flächen und Kanten hat dieses?

Definition 1.3.3: Eine Punktmenge im Raum heißt **beschränkt**, wenn es eine Kugel gibt, die in ihrem Inneren alle Punkte der Punktmenge enthält.

So lässt sich analog zum Inneren und Äußeren eines Polygons (Definition 1.1.5) das Innere und Äußere eines Polyeders definieren:

Definition 1.3.4:

1. Das Polyeder teilt den Raum in drei paarweise elementfremde und nichtleere Teilmengen: das Polyeder selbst, das **Äußere** und das **Innere** des Polyeders. Ein Punkt des Raums heißt **innerer** bzw. **äußerer** Punkt des Polyeders, wenn er im Inneren bzw. Äußeren des Polyeders liegt.
2. Jede Strecke zwischen einem inneren und äußeren Punkt schneidet das Polyeder in mindestens einem Punkt.
3. Das Innere eines Polyeders ist beschränkt.

Hinweise:

a) Aus den Eigenschaften in 1.3.4 lässt sich konkret das Innere und Äußere eines gegebenen Polyeders bestimmen: Zunächst wird ein äußerer Punkt ermittelt: Da das Innere eines Polyeders beschränkt ist, liegt das Innere des Polyeders im Inneren einer Kugel. Es sei A ein Punkt des Raumes, der außerhalb dieser Kugel liegt und nicht Punkt des Polyeders ist. Nach Eigenschaft 3 von 1.3.4 ist A äußerer Punkt. Wir finden nun weitere Punkte des Äußeren: Es sei B ein Punkt des Raumes, der kein Punkt des Polyeders ist. Zwischen A und B gebe es einen Streckenzug $AA_1 \dots A_n B$ ohne Punkte des Polyeders. Daher können nach Eigenschaft 2 von 1.3.4 die

Punkte A_1, A_2, \dots, A_n, B keine inneren Punkte des Polyeders sein (sonst enthielte eine der Strecken des Streckenzugs zwischen A und B mindestens einen Punkt des Polyeders), daher ist B auch äußerer Punkt. Nun ist anschaulich klar: auf diese Weise kann man *alle* äußeren Punkte erreichen. Damit bilden alle Punkte des Raumes, die weder Punkte des Polyeders noch durch einen solchen Streckenzug von A aus „erreichbar“ sind, das Innere des Polyeders.

b) Man muss zwischen dem Inneren eines Polyeders (Definition 1.3.4) und dem Inneren einer Seitenfläche des Polyeders (Definition 1.1.5) unterscheiden.

Im weiteren Text benötigen wir noch ein paar wichtige Eigenschaften des Inneren, die anschaulich wiederum klar sind.

Hilfssatz 1.3.5: a) *Notwendiges* Kriterium für innere Punkte (nicht hinreichend, siehe Aufgabe 1.3.3): Jeder in einem inneren Punkt des Polyeders beginnende Strahl schneidet das Polyeder in mindestens einem Punkt. Insbesondere liegt jeder innere Punkt auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte des Polyeders.

b) Jede Strecke zwischen zwei Punkten eines Polyeders, die keine weiteren Punkte des Polyeders enthält, hat in ihrem Inneren entweder nur innere oder nur äußere Punkte des Polyeders.

Beweis:

a) Es sei Q innerer Punkt des Polyeders und s ein beliebiger Strahl mit Anfangspunkt Q . Da das Innere des Polyeders beschränkt ist, liegt es im Inneren einer Kugel; damit ist ein Punkt R auf dem Strahl s , dessen Abstand von Q größer als der Kugeldurchmesser ist, nicht im Inneren des Polyeders. Ist R Punkt des Polyeders, ist man fertig; ansonsten liegt nach Eigenschaft 2 von 1.3.4 auf der Strecke \overline{QR} , also auch auf s , mindestens ein Punkt S des Polyeders. – Ist g eine Gerade durch Q , enthalten somit die beiden in Q anfangenden Halbgeraden von g jeweils mindestens einen Punkt des Polyeders. Dann liegt Q auf der Strecke zwischen einem beliebigen Polyederpunkt des einen und einem des anderen Strahls.

b) Beweis durch Widerspruch: Enthielte die Strecke einen inneren Punkt Q und einen äußeren Punkt R des Polyeders, läge nach Eigenschaft 2 von 1.3.4 auf der Strecke \overline{QR} mindestens ein Punkt des Polyeders.

Aufgabe 1.3.3: Zeige, dass Hilfssatz 1.3.5a) nicht hinreichend ist, d. h. gib an Hand einer Skizze ein Beispiel eines Polyeders und eines Punktes an, der im Äußeren dieses Polyeders liegt, aber auch die im Kriterium 1.3.5a) beschriebene Eigenschaft erfüllt.

Aufgabe 1.3.4: Zeige, dass ein Polyeder nicht vollständig in einer Ebene enthalten sein kann.

Aufgabe 1.3.5: Zeige, dass jedes Polyeder beschränkt ist.

Aufgabe 1.3.6: P sei ein Polyeder. Begründe, gegebenenfalls auch anhand von Skizzen:

a) Es sei Q ein Punkt, der nicht auf P liegt. Schneidet irgendein in Q beginnender Strahl, der keinen Punkt einer Kante (und somit auch keine Ecke) von P enthält, das Polyeder in gerade (bzw. ungerade) vielen Punkten, gilt dies für jeden derartigen, in Q beginnenden Strahl. Die Parität der Anzahl der Schnittpunkte hängt also nicht von der Wahl des Strahls ab. *Hinweis:* Man drehe den in Q beginnenden Strahl um Q und untersuche, wie sich die Anzahl der Schnittpunkte verändert, wenn der Strahl einen inneren Punkt einer Kante des Polyeders überstreicht.

Für die Aufgaben b) bis f) heiße ein nicht auf P liegender Punkt Q gerade/ungerade, wenn irgendein in Q beginnender Strahl, der keinen Punkt einer Kante von P enthält, P in gerade/ungerade vielen Punkten schneidet.

b) Das Polyeder und die Mengen der geraden und der ungeraden Punkte sind paarweise elementfremd; ihre Vereinigung ist der gesamte Raum.

c) Die Mengen der geraden bzw. ungeraden Punkte sind nicht leer.

d) Die Menge der ungeraden Punkte ist beschränkt.

e) Sind Q und R zwei Punkte, so dass die Strecke \overline{QR} keinen Punkt des Polyeders enthält, dann sind Q und R beide gerade oder beide ungerade.

- f) Für jedes Polyeder gilt: Ein Punkt ist genau dann ungerade oder gerade, wenn er innerer bzw. äußerer Punkt des Polyeders ist. *Hinweis:* Zeige, dass die Eigenschaften von Definition 1.3.4 erfüllt sind.
- g) Zeige mittels zweier Beispiele mit je einem Würfel und je einem geeigneten Strahl, dass es sowohl von einem inneren als auch von einem äußeren Punkt aus einen Strahl gibt, der den Würfel in genau einem Punkt (einer Ecke) schneidet.

Der Teil f) aus Aufgabe 1.3.6 lässt sich zu folgendem Satz formulieren, der im Folgenden nicht weiter benötigt wird:

Satz 1.3.6: Ein Punkt Q liegt genau dann im Inneren oder Äußeren eines Polyeders P , wenn Q nicht auf P liegt und irgend ein in Q beginnender Strahl, der keine Ecke und keinen Punkt einer Kante von P enthält, das Polyeder in einer ungeraden bzw. geraden Anzahl von Punkten schneidet.

Folgende Eigenschaft eines jeden Polyeders ist anschaulich völlig klar; sie lässt sich aber auch direkt mittels der Polyeder-Definition beweisen und wird in Kapitel 3 im Beweis der EULERSchen Polyederformel nach STAUDT [1] verwendet:

Hilfssatz 1.3.7: Ist P ein Polyeder, so gibt es zwischen beliebigen zwei Ecken einen Streckenzug aus Kanten des Polyeders.

Beweis: Es seien A und B diese beiden Ecken; A sei Ecke der Seitenfläche S , B der Seitenfläche T . Nach Bedingung 3 der Definition 1.3.2 gibt es eine Polygonkette $S_1S_2\dots S_n$ mit $S_1 = S$ und $S_n = T$.

Zuerst ist zu bemerken, dass es zwischen zwei beliebigen Ecken einer Seitenfläche einen Streckenzug aus Kanten gibt, da das zugehörige Polygon auch ein Streckenzug ist. Wegen dieser Eigenschaft gilt diese Behauptung zunächst einmal im Fall $S = T$.

Im allgemeinen Fall gibt es – aus demselben Grund – einen Streckenzug zwischen A und einer gemeinsamen Ecke A_1 von S und S_2 , einen Streckenzug zwischen A_1 und einer gemeinsamen Ecke A_2 von S_2 und S_3 usw. bis zu einer gemeinsamen Ecke A_{n-1} von S_{n-1} und S_n , sowie schließlich zwischen A_{n-1} und B . Die Vereinigung dieser Streckenzüge ist ein Streckenzug zwischen A und B .

1.4 Konvexe Polyeder

Viele bekannte Polyeder, z. B. Tetraeder, Spate, die PLATONischen Körper, haben eine weitere Eigenschaft: sie sind konvex. Anschaulich bedeutet dies, dass sie u. a. keine Dellen und Einbuchtungen haben.

Dieses Kapitel enthält zwei Zugänge zu konvexen Polyedern:

- einen sehr knapp gehaltenen (Kapitel 1.4.1), der nur das für den Beweis der EULERSchen Polyederformel in Kapitel 2 unbedingt Nötige enthält,
- einen ausführlichen mit verschiedenen Charakterisierungen konvexer Polyeder (Kapitel 1.4.2), auch zum einfachen Beweis, dass ein gegebenes Polyeder tatsächlich konvex ist, und weiter gehende Eigenschaften konvexer Polyeder.

Für den Beweis der EULERSchen Polyederformel in Kapitel 2 wird nur Satz 1.4.3 verwendet.

1.4.1 Das Nötigste über konvexe Polyeder zum Beweis der EULERSchen Polyederformel

Definition 1.4.1: Ein Polyeder P heißt **konvex**, wenn jede Strecke zwischen zwei Punkten Q und R des Polyeders außer Q und R entweder nur Punkte des Polyeders (d. h. \overline{QR} ist Teil einer oder mehrerer Seitenflächen des Polyeders) oder nur innere Punkte des Polyeders enthält.

Hieraus folgt:

Hilfssatz 1.4.2: Ist I ein innerer Punkt eines konvexen Polyeders P , enthält jeder in I beginnende Strahl genau einen Punkt von P .

Beweis:

Da I innerer Punkt des Polyeders ist, enthält jeder in I beginnende Strahl nach Hilfssatz 1.3.5a) mindestens einen Punkt von P (siehe Abb. 23). Angenommen, für einen Punkt Q des Polyeders enthalte der in I beginnende Strahl IQ noch einen weiteren Punkt R des Polyeders. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegt R auf der Strecke \overline{IQ} . Es sei r der andere in I beginnende und auf der Geraden IQ liegende Strahl. Dieser enthält auch einen Punkt S des Polyeders. Dann liegt aber auf der Strecke \overline{SQ} sowohl der innere Punkt I als auch der Punkt R des Polyeders im Widerspruch zu Definition 1.4.1.

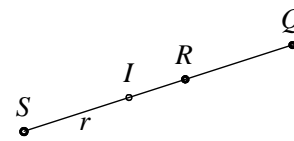


Abb. 23

Für den Beweis der EULERSchen Polyederformel für konvexe Polyeder wird folgende, anschaulich einfache Eigenschaft benötigt: Jedes konvexe Polyeder lässt sich durch zentrale Projektion von einem inneren Punkt aus eindeutig auf eine Kugel abbilden:

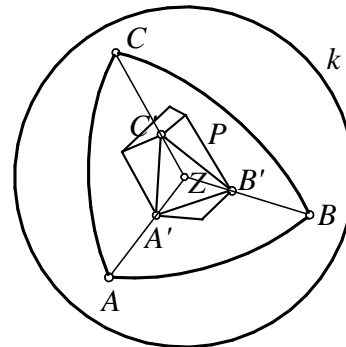


Abb. 24

Satz 1.4.3: Für einen inneren Punkt Z eines konvexen Polyeders P und jede Kugel k mit Mittelpunkt Z wird P durch folgende Abbildung ω bijektiv (eindeutig) auf k abgebildet: Jeder Punkt Q des Polyeders wird auf den Schnittpunkt des in Z beginnenden Strahls ZQ mit der Kugel k abgebildet. Diese Abbildung bildet Kanten des Polyeders auf Großkreisbögen ab (siehe Abb. 24).

Beweis:

1. Auf jedem von Z ausgehenden Strahl r gibt es genau einen Punkt, dessen Abstand von Z gleich dem Kugelradius ist. Daher ist die Abbildung ω eindeutig.
2. Nach Hilfssatz 1.4.2¹⁰ hat r genau einen Schnittpunkt mit dem Polyeder. Daher ist die Abbildung ω eineindeutig.
3. Es bleibt zu beweisen, dass jede Kante des Polyeders auf einen Großkreisbogen abgebildet wird. Beweis: Das Bild einer Kante \overline{AB} des Polyeders liegt auf dem Schnitt der Kugel mit der Ebene ABZ zwischen A' und B' . Das Bild ist damit ein Bogen eines Großkreises der Kugel. Damit liegen auch alle Strahlen mit Anfangspunkt Z , die durch die Kante gehen, in der Ebene AZB : sie bilden das Feld des Winkels $\angle AZB$. Die Ebene E durch den Kugelmittelpunkt Z schneidet sie in einem Großkreis, und das Feld des Winkels $\angle AZB$ somit in einem Großkreisbogen.

1.4.2 Detaillierte Behandlung konvexer Polyeder

Konvexe Polyeder werden in Analogie zu Kapitel 1.2 mit einer weiteren Definition eingeführt, die einige elegante Charakterisierungen erlaubt. Um Verwechslungen mit Definition 1.4.1 zu vermeiden, wird die Eigenschaft zunächst anders bezeichnet, es wird sich aber herausstellen, dass diese Definition äquivalent zu konvex ist.

Definition 1.4.4: Ein Polyeder P heißt **schnittarm**, wenn jede Gerade, die in keiner Ebene einer Seitenfläche liegt, P in höchstens 2 Punkten schneidet. (vgl. Cromwell [1], Kapitel 7, Seite 252).

¹⁰ bzw. Satz 1.4.14 aus Abschnitt 1.4.2, Folgerung von a) nach c)

Anschaulich bedeutet auch dies, dass das Polyeder z. B. keine Dellen haben kann, da es bei einer Delle Geraden gibt, die das Polyeder in mehr als zwei Punkten schneiden (siehe Abb. 25).

Zunächst werden aus Definition 1.4.4 einige Eigenschaften schnittarmer Polyeder hergeleitet:

Hilfssatz 1.4.5: Ist I innerer Punkt (siehe Definition 1.3.4) eines schnittarmen Polyeders und g eine Gerade durch I , die in keiner Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt, enthält g genau zwei Punkte Q, R des Polyeders (siehe Abb. 26); beide auf g liegenden und in I beginnenden Strahlen enthalten genau einen Punkt des Polyeders; I liegt auf der Strecke \overline{QR} , und die Strecken \overline{QR} , \overline{QI} und \overline{IR} enthalten außer Q und R nur innere Punkte des Polyeders.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.3.5a) schneiden die beiden von I ausgehenden Strahlen auf g das Polyeder jeweils noch in (mindestens) einem Punkt: dies seien die Punkte Q und R . Da g in keiner Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt, ist die Bedingung in Definition 1.4.4 erfüllt und g kann außer Q und R keine weiteren Punkte des Polyeders enthalten. Insbesondere enthält die Strecke \overline{QR} nach Hilfssatz 1.3.5b) außer Q und R nur innere Punkte des Polyeders. Das gilt dann auch für die Teilstrecken \overline{QI} und \overline{IR} .

Hilfssatz 1.4.6: Sind I und J innere Punkte eines schnittarmen Polyeders und liegt die Gerade IJ in keiner Ebene einer Seitenfläche des Polyeders, dann enthält die Strecke \overline{IJ} nur innere Punkte des Polyeders.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.4.5 enthält die Gerade IJ genau zwei Punkte Q und R des Polyeders, und die Strecke \overline{QR} enthält außer Q und R nur innere Punkte des Polyeders. Insbesondere enthält die Teilstrecke \overline{IJ} nur innere Punkte des Polyeders.

Hilfssatz 1.4.7: Ist E die Ebene einer Seitenfläche s eines schnittarmen Polyeders, enthält E keine inneren Punkte des Polyeders.

Beweis durch Widerspruch:

Abb. 27 zeigt einen Teil des Polyeders P mit dem Polygon S einer Seitenfläche s , deren Ebene E ist.

1. Angenommen, E enthält den inneren Punkt I des Polyeders. Es sei B innerer Punkt der Seitenfläche s (siehe Abb. 27). Nach Hilfssatz 1.1.6a) enthält der von B ausgehende, auf der Geraden BI liegende und nicht I enthaltende Strahl einen Punkt A des Polygons S . Damit gehören A und B zum Polyeder und B liegt auf der Strecke \overline{AI} .

2. Es sei g eine Gerade durch I , die nicht parallel zu irgendeiner Ebene einer Seitenfläche des Polyeders ist, und h eine Parallele zu g durch B . Somit können g und h nicht in der Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegen. Nach Hilfssatz 1.4.5 enthält somit g genau zwei Punkte Q, R des Polyeders, und alle inneren Punkte der Strecken \overline{QI} und \overline{IR} sind auch innere Punkte des Polyeders (siehe Abb. 27).

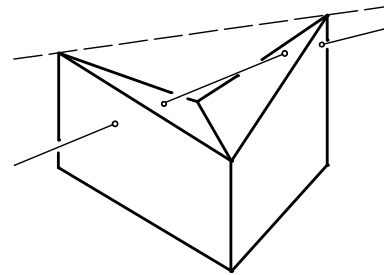


Abb. 25

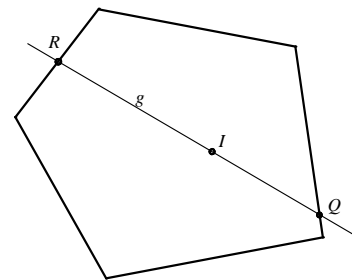


Abb. 26

3. Unter den unendlich vielen inneren Punkten der Strecken \overline{QI} und \overline{IR} gibt es Punkte J und K , so dass AJ und AK auf keiner Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegen. Nach Hilfssatz 1.4.5 enthalten die Strecken \overline{AJ} und \overline{AK} außer A nur innere Punkte des Polyeders, schneiden insbesondere h in zwei Punkten L, M , die im Inneren des Polyeders liegen. Auf deren Verbindungsstrecke \overline{LM} liegt aber B entgegen Hilfssatz 1.4.6.

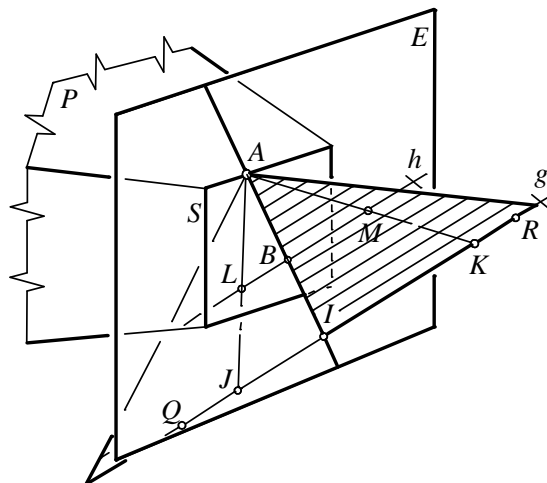


Abb. 27

Hilfssatz 1.4.8:

- Ist I innerer Punkt eines schnittarmen Polyeders und g eine beliebige Gerade durch I , enthält g genau zwei Punkte Q, R des Polyeders; I liegt auf der Strecke \overline{QR} , und die Strecken \overline{QR} , \overline{QI} und \overline{IR} enthalten außer Q und R nur innere Punkte des Polyeders.
- Ist I ein innerer Punkt des Polyeders, enthält jeder in I beginnende Strahl genau einen Punkt des Polyeders.
- Sind I und J innere Punkte eines schnittarmen Polyeders, dann enthält die Strecke \overline{IJ} keine Punkte des Polyeders.

Beweis:

Nach Hilfssatz 1.4.7 kann keine Gerade durch einen inneren Punkt des Polyeders in der Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegen. Damit folgen a) und b) aus Hilfssatz 1.4.5 und c) aus Hilfssatz 1.4.6.

Hilfssatz 1.4.9: Sind Q und R Punkte eines schnittarmen Polyeders, so liegen im Inneren der Strecke \overline{QR} entweder nur Punkte des Polyeders (d. h. \overline{QR} ist Teil einer oder mehrerer Polyederflächen in derselben Ebene) oder nur innere Punkte des Polyeders, d. h. das Polyeder ist konvex nach Definition 1.4.1.

Beweis:

Fall 1: Die Gerade QR enthält einen inneren Punkt I_0 des Polyeders. Nach Hilfssatz 1.4.8a) müsste I_0 auf der Strecke \overline{QR} liegen, und alle inneren Punkte der Strecke \overline{QR} sind innere Punkte des Polyeders.

Fall 2: Die Gerade QR enthält keinen inneren Punkt des Polyeders.

Fall 2.1: Angenommen, auf der Strecke \overline{QR} liegt ein äußerer Punkt A des Polyeders (Abb. 28). Das Polyeder hat einen inneren Punkt I , der nicht auf QR liegt. Auf der Strecke \overline{AI} liegt nach Definition 1.3.4 ein Punkt S des Polyeders. Die Parallele zu QR durch S schneide die Strecken \overline{IQ} und \overline{IR} in J und K ; nach Hilfssatz 1.4.8a) sind J und K innere Punkte des Polyeders, und S kann nach Hilfssatz 1.4.8c) nicht auf \overline{JK} liegen. Dieser Fall kann nicht vorkommen.

Fall 2.2: Anderenfalls liegen auf \overline{QR} weder innere noch äußere Punkte und deshalb nur Punkte des Polyeders.

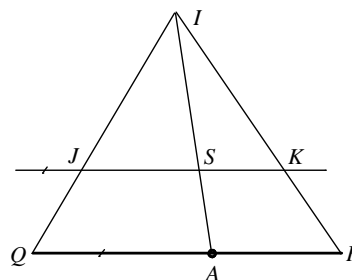


Abb. 28

Hilfssatz 1.4.10: Ein Polyeder P ist schnittarm, wenn für beliebige Ecken X und Y des Polyeders und jede Seitenfläche die Verbindungsstrecke \overline{XY} entweder in der Ebene dieser Seitenfläche liegt oder mit dieser Ebene höchstens entweder X oder Y gemeinsam hat.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen, es gibt es eine Gerade g , die P in mindestens drei Punkten A, B, C schneidet (die nicht notwen-

dig Ecken sein müssen) und in keiner Ebene einer Seitenfläche liegt. Hierbei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass B auf der Strecke \overline{AC} liegt (ansonsten bezeichne man A, B, C , so um, dass der Abstand von A und C am größten ist). Es sei E die Ebene einer Seitenfläche, die B enthält. A liegt auf einer Seitenfläche, daher nach Hilfssatz 1.1.6a) auf der Verbindungsstrecke t zweier Punkte des zugehörigen Polygons (Abb. 29). Da A nicht in E liegt, aber die Gerade AC die Ebene E schneidet, schneidet die Ebene E durch t und C die Ebene E in einer Geraden h , und h schneidet \overline{AC} nur in einem ihrer inneren Punkte. Nach Hilfssatz 1.2.10 gibt es also einen Endpunkt A' von t , so dass h bzw. E die Strecke $\overline{A'C}$ nur in einem ihrer inneren Punkte schneidet. Nun liegt A' auf einer Kante des Polygons, und analog wie zuvor gilt für einen der Randpunkte A'' dieser Kante, dass die Ebene E die Strecke $\overline{A''C}$ nur in einem ihrer inneren Punkte schneidet. Wiederholt man diese Überlegungen, ausgehend von C , erhält man, dass es eine Ecke C'' des Polyeders gibt, so dass die Ebene E die Strecke $\overline{A''C''}$, also die Ver-

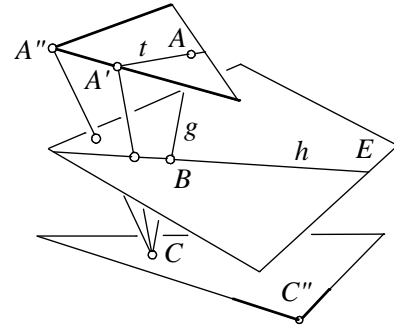


Abb. 29

bindungsstrecke zweier Polyederecken, nur in einem ihrer inneren Punkte schneidet. Da E die Ebene einer Seitenfläche ist, liegt nach Voraussetzung entweder die Strecke $\overline{A''C''}$ vollständig in E oder die Ebene E schneidet die Strecke $\overline{A''C''}$ höchstens in *einem* ihrer Randpunkte. Das ist ein Widerspruch.

Es gilt auch die Umkehrung von Hilfssatz 1.4.8b, 1.4.9 und 1.4.10:

Hilfssatz 1.4.11 (Umkehrung von Hilfssatz 1.4.8b)): Gilt für jeden inneren Punkt I eines Polyeders, dass jeder in I beginnende Strahl genau einen Punkt des Polyeders enthält, ist das Polyeder schnittarm.

Aufgabe 1.4.1: Man beweise Hilfssatz 1.4.11.

Hilfssatz 1.4.12 (Umkehrung von Hilfssatz 1.4.9): Wenn für beliebige Punkte Q und R eines Polyeders im Inneren der Strecke \overline{QR} entweder nur Punkte des Polyeders oder nur innere Punkte des Polyeders liegen, ist das Polyeder schnittarm.

Aufgabe 1.4.2: Man beweise Hilfssatz 1.4.12.

Hilfssatz 1.4.13 (Umkehrung von Hilfssatz 1.4.10): Es sei P ein schnittarmes Polyeder. Dann liegt für beliebige Ecken X und Y des Polyeders und jede Seitenfläche die Verbindungsstrecke \overline{XY} entweder in der Ebene dieser Seitenfläche oder hat mit dieser Ebene höchstens entweder X oder Y gemeinsam.

Aufgabe 1.4.3: Beweise Hilfssatz 1.4.13.

Die bisherigen Ergebnisse des Kapitels 1.4.2 lassen sich zusammenfassen zu dem

Satz 1.4.14: Für ein Polyeder sind folgende Bedingungen äquivalent:

- Das Polyeder ist konvex, d. h. jede Strecke zwischen zwei Punkten Q und R des Polyeders enthält außer Q und R entweder nur Punkte von Seitenflächen des Polyeders oder nur innere Punkte des Polyeders
- Das Polyeder ist schnittarm, d. h. jede Gerade, die in keiner Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt, schneidet das Polyeder in höchstens 2 Punkten.
- Für jeden inneren Punkt I des Polyeders gilt: Jeder in I beginnende Strahl enthält genau einen Punkt des Polyeders.
- Für beliebige Ecken X und Y des Polyeders und jede Seitenfläche ist \overline{XY} entweder in der Ebene dieser Seitenfläche oder hat mit ihr höchstens entweder X oder Y gemeinsam.

Beweis:

- a) Definition 1.4.1
- b) Hilfssätze 1.4.9 und 1.4.12 und Definition 1.4.4
- c) Hilfssätze 1.4.8b und 1.4.11
- d) Hilfssätze 1.4.10 und 1.4.13.

Bemerkungen:

1. Aus Satz 1.4.14 folgt sofort der für den Beweis der EULERSchen Polyederformel benötigte Satz 1.4.3, da die im Beweis verwendete Aussage (Hilfssatz 1.4.2) genau Hilfssatz 1.4.8b) bzw. die Folgerung von a) nach c) in Satz 1.4.14 ist.

2. Die Bedingung d) in Satz 1.4.14 ist sehr praktisch, um zu beweisen, dass ein Polyeder konvex ist, da man nur endlich viele Ecken und Ebenen untersuchen muss. Im Kontext der analytischen Geometrie unter der Benutzung der HESSE¹¹-Normalform von Ebenen ist die Bedingung offenbar äquivalent dazu, dass für keine Ebene einer Seitenfläche zwei Ecken des Polyeders existieren, die gerichteten Abstand ungleich Null und mit unterschiedlichen Vorzeichen haben.

Korollar 1.4.15:

- a) Jedes Tetraeder ist konvex.
- b) Jede Pyramide mit konvexer Grundfläche ist konvex.

Aufgabe 1.4.4: Man beweise Korollar 1.4.15 mittels Satz 1.4.14.

Aufgabe 1.4.5: Für welche Werte des Parameters t ist das Polyeder aus Aufgabe 1.3.2 konvex?

Abschließend folgen noch ein paar weitere Eigenschaften konvexer Polyeder:

Satz 1.4.16: Jede Ebene E schneidet ein konvexes Polyeder P entweder gar nicht oder in einem Punkt oder einer Strecke oder einem konvexen Polygon oder in einem konvexen Polygon mit seinem Inneren.

Aufgabe 1.4.6: Man gebe ein Beispiel eines nicht konvexen Polyeders und einer Ebene an, die das Polyeder in mehr als einem Polygon schneidet.

Aufgabe 1.4.7 (schwer): Man beweise Satz 1.4.16.

Aus Satz 1.4.16 folgt sofort:

Satz 1.4.17: Ein konvexes Polyeder ist von konvexen Flächenstücken begrenzt.

Aufgabe 1.4.8: Man beweise Satz 1.4.17.

Satz 1.4.18: Jede Ebene E durch einen inneren Punkt eines konvexen Polyeders P zerlegt das Polyeder in zwei konvexe Polyeder.

Aufgabe 1.4.9 (schwer): Man beweise Satz 1.4.18.

Bemerkung: Satz 1.4.17 ist die Grundlage dafür, dass man aus einem konvexen Polyeder (z. B. einem Tetraeder nach Korollar 1.4.15) durch „Abschneiden“ von Teilen mittels ebener Schnitte weitere konvexe Polyeder erzeugen kann. Daraus ergibt sich sofort die Konvexität der PLATONischen Körper und der meisten der ARCHIMEDischen Körper. Siehe auch Abschnitt 4.3.2 in KELLER, MEYER [1].

¹¹ LUDWIG OTTO HESSE, geboren 1811 in Königsberg in Preußen, gestorben 1874 in München, wirkte auf dem Gebiet der analytischen Geometrie.

2. Beweis der Polyederformel mittels Kugelgeometrie

Hier wird zunächst ein Beweis der EULERSchen Polyederformel für den Spezialfall eines konvexen Polyeders ausgeführt. Für die Polyederformel gibt es sehr viele Beweise (siehe Wikipedia [1]). Der erste fehlerfreie Beweis stammte von ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) und benutzte Kugeldreiecke (siehe LEGENDRE [1]), ein späterer von CAUCHY¹² (siehe CAUCHY [1]) führte das Problem auf ebene Graphen zurück. Hier folgt eine Variante des Beweises von LEGENDRE. Hierfür werden zunächst Kugeldreiecke sowie ihre Flächenformel eingeführt (die folgende Herleitung ist von Abschnitt §29 in ZWERTGER-KLUG [1] inspiriert).

2.1 Einiges aus der Kugelgeometrie

Bekanntlich teilen drei Ebenen, die sich nur in *einem* Punkt M schneiden, den Raum in 8 Teilräume. Jeder dieser Teilräume ist also der Schnitt von drei Halbräumen bezüglich dieser Ebenen. Von jeder der drei Schnittgeraden der drei Ebenen liegt genau eine ihrer beiden in M beginnenden Halbgeraden am Rand eines dieser 8 Teilräume. Dadurch wird jeder der 8 Teilräume durch 3 solche Halbgeraden eindeutig bestimmt. Das führt zu Folgendem:

Definition 2.1.1: Es seien A, B, C Punkte, für die A, B, C, M nicht in einer Ebene liegen (siehe Abb. 30). Derjenige der 8 Teilräume, in den die Ebenen MAB, MAC, MBC den Raum teilen und an dessen Rand die bei M beginnenden Halbgeraden MA, MB, MC liegen, heiße **Dreikant** $MABC$. Die Innenwinkel des Dreikants bei A, B, C seien die innerhalb des Dreikants gemessenen 3 Winkel zwischen den sich jeweils in M schneidenden Ebenen.

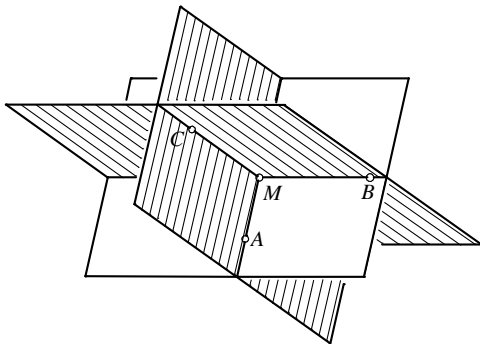


Abb. 30

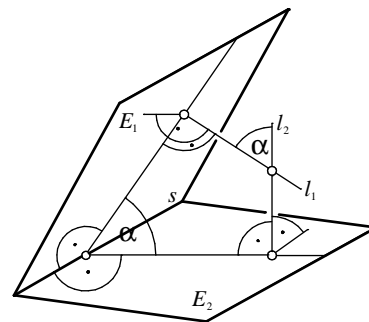


Abb. 31

Hinweis: Der Winkel zwischen zwei sich in s schneidenden Ebenen E_1 und E_2 wird unterschiedlich erklärt: Es sei l_1 das Lot auf E_1 , l_2 das Lot auf E_2 , $a_1 \subset E_1$ mit $a_1 \perp s$ und $a_2 \subset E_2$ mit $a_2 \perp s$ (siehe Abb. 31); dann gilt: $\angle(E_1, E_2) = \angle(l_1, l_2) = \angle(a_1, a_2)$.

Aufgabe 2.1.1: a) Weshalb sind in Abb. 31 am Fußende der Lote auf den Ebenen jeweils zwei rechte Winkel eingezeichnet?

b) Begründe, dass der Winkel zwischen den Loten und zwischen den Ebenen an ihrer Schnittkante in Abb. 31 gleich groß sind oder sich zu 180° ergänzen.

Aus obiger Definition folgt unmittelbar die anschaulich klare Aussage:

Hilfssatz 2.1.2: Es seien A, B, C, M Punkte, die nicht in einer Ebene liegen. Sind A', B', C' die durch Punktspiegelung an M aus A, B, C hervorgehenden Punkte, sind die 8 von den Ebenen MAB, MAC, MBC bestimmten Teilräume die Dreikante $MABC, MA'BC, MAB'C, MA'B'C, MABC', MA'BC', MAB'C', MA'B'C'$.

¹² AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, geboren 1789 in Paris, gestorben 1857 in Sceaux, wirkte unter anderem auf dem Gebiet der Analysis

Definition 2.1.3: Gegeben seien eine Kugel mit Mittelpunkt M und Punkte A, B, C auf der Kugeloberfläche (siehe Abb. 32) so, dass A, B, C, M nicht in einer Ebene liegen. Dann heißt der Schnitt des Dreikants $MABC$ mit der Kugeloberfläche **Kugeldreieck** ABC mit Ecken A, B, C . Die Innenwinkel des Dreikants bei A, B, C heißen **Innenwinkel** des Kugeldreiecks bei A, B, C . Da man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass der Kugelradius zu 1 normiert ist, werden die Kugelkreisbögen AB, BC, CA im Winkelmaß angegeben.

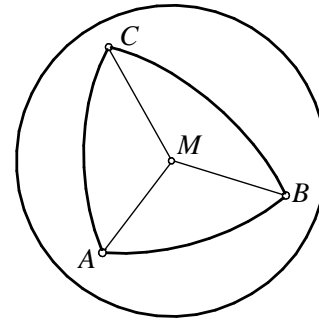


Abb. 32

Anmerkungen:

1. Da die Ebenen durch den Kugelmittelpunkt die Kugeloberfläche in Großkreisen schneiden, sind die Seiten des Kugeldreiecks drei Großkreisbögen. Meist wird ein Kugeldreieck als ein von drei Großkreisbögen begrenzter Teil der Kugeloberfläche eingeführt. Diese Definition legt aber ohne weitere Angaben das Kugeldreieck nicht eindeutig fest (wie das ebenso etwa bei einem Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden ist), denn es gibt stets *zwei* Großkreisbögen durch zwei nicht diametral gegenüberliegende Punkte.
2. Da sich in jeder Kugeldreiecksecke, etwa C , zwei Großkreisbögen a und b schneiden, gibt es an diese jeweils in C die Tangente t_1 bzw. t_2 . So gilt für den Innenwinkel bei C mit obigem Hinweis zu Definition 2.1.1: $\angle(E_1, E_2) = \angle(l_1, l_2) = \angle(a_1, a_2) = \angle(t_1, t_2) < 180^\circ$
3. Auch die Großkreisbögen auf der Kugel werden im Winkelmaß gemessen. Ihre Länge ist dann z. B. durch $r \cdot \pi \cdot \alpha / 180^\circ$ mit dem Kugelradius r und ihrem Zentriwinkel $\alpha < 180^\circ$ festgelegt.
4. Die hier eingeführten Kugeldreiecke sind sogenannte EULERSche Kugeldreiecke, die durch ihre Ecken eindeutig bestimmt sind. Zu drei Punkten auf der Kugeloberfläche, die nicht auf demselben Großkreis liegen, kann man auch weitere Kugeldreiecke untersuchen: Einerseits kann man auch die jeweiligen komplementären Großkreisbögen mit Zentriwinkel größer als 180° als Kanten verwenden und auch jeden der beiden durch die Großkreisbögen begrenzten Teile der Kugeloberflächen betrachten. Daraus ergeben sich maximal 16 Möglichkeiten für Kugeldreiecke. Siehe hierzu auch HAME [1].

Im Folgenden soll die Fläche eines Kugeldreiecks berechnet werden; schreibtechnisch wird dies einfacher, wenn man Winkel statt in Grad im Bogenmaß misst:

Definition 2.1.4: Man betrachtet den Winkel α mit dem Scheitel A und einen Kreis um A mit Radius $r = 1$. Dieser Kreis heißt **Einheitskreis um A** . Dann nennt man die zu α gehörige Bogenlänge auf dem Einheitskreis das **Bogenmaß** von α (z. B. in

Abb. 33: $\alpha = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{45}{180} \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$).

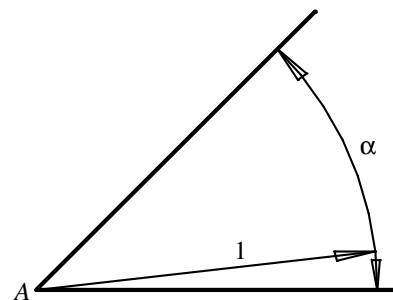


Abb. 33

Aufgabe 2.1.2:

- a) Begründe, wie man aus dem Gradmaß eines Winkels sein Bogenmaß erhält.
- b) Welche Werte kann der Winkel zwischen zwei Großkreisen auf der Kugel annehmen?
- c) Welche Werte kann der Winkel zwischen Großkreisbögen annehmen?
- d) Gegeben sind die folgenden Punkte auf der Erdkugel (der erste Wert ist die geographische Länge, der zweite Wert die geographische Breite; die Länge wird bis zu 180° westlich bzw. östlich vom Nullmeridian durch Greenwich, die Breite in 90° nördlich bzw. südlich vom Äquator ausgehend

gemessen: $A(20^\circ\ddot{o}|20^\circ\text{s})$, $B(70^\circ\text{w}|10^\circ\text{n})$, $C(0^\circ|90^\circ\text{s})$. Zeige, dass die Innenwinkelsumme dieses Kugeldreiecks größer als 180° ist.

e) Gegeben ist ein Kugeldreieck aus Großkreisbögen, wobei einer der drei Bogen auf den beiden anderen jeweils senkrecht steht. Zwischen welchen Werten liegt die Innenwinkelsumme dieses Kugeldreiecks?

Hilfssatz 2.1.5: Sind A, B, C Punkte auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius r und Mittelpunkt M , so dass A, B, C, M nicht auf einer Ebene liegen, und ist A' diametral gegenüber von A und ist α der Innenwinkel des Kugeldreiecks bei A , so hat die von den Kugeldreiecken ABC und $A'BC$ zusammen begrenzte Fläche den Flächeninhalt $2r^2 \cdot \alpha$.

Beweis:

Die Dreikante $MABC$ und $MA'BC$ bilden zusammen den Teil des Raums, der der Schnitt derjenigen Halbräume bezüglich der Ebenen MAB bzw. MAC ist, die C bzw. B enthalten; bezüglich der Ebene MBC sind beide Halbräume möglich. Dies ist der Raum zwischen zwei von der Gerade MA begrenzten Halbebenen

durch B und C mit eingeschlossenem Winkel α . Der Schnitt (das schraffierte Zweieck in Abb. 18) mit der Kugeloberfläche wird also durch zwei Halbkreise mit Durchmesser $\overline{AA'}$ und eingeschlossenem Winkel α begrenzt. Es wird gezeigt, dass sich dessen Fläche zur Kugeloberfläche wie α zu 2π verhält.

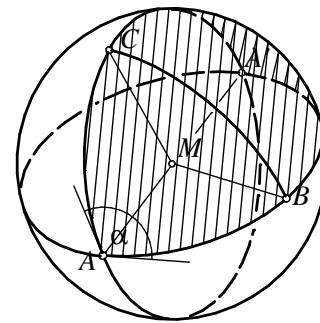


Abb. 34

a) Das ist klar, wenn es positive ganze Zahlen m und n mit $m < n$ und $\alpha = 2\pi \cdot m/n$ gibt, da man die Kugeloberfläche in n kongruente Flächenstücke zwischen je zwei Halbkreisen mit Durchmesser $\overline{AA'}$ und eingeschlossenem Winkel $2\pi/n$ zerlegen kann und die gesuchte Fläche m dieser Flächenstücke umfasst (siehe Abb. 34).

b) Ist $\alpha/2\pi$ irrational, kann man durch Intervallschachtelung den Flächeninhalt von oben und unten durch Flächeninhalte für rationale Verhältnisse des eingeschlossenen Winkels zu 2π eingrenzen und erhält die Gültigkeit auch hierfür.

Da die Kugeloberfläche bekanntlich Flächeninhalt $4\pi r^2$ hat, folgt obige Gleichung.

Satz 2.1.6: Gegeben sei eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt M . Die Fläche eines Kugeldreiecks mit Innenwinkelsumme σ (im Bogenmaß) ist $r^2(\sigma - \pi)$.

Beweis:

Es seien A, B, C die Ecken des Kugeldreiecks und A', B', C' die durch Punktspiegelung an M daraus hervorgehenden Punkte der Kugeloberfläche. Bei den Ecken A, B, C mögen die Innenwinkel α, β, γ liegen. Es sei (XYZ) die Fläche eines Kugeldreiecks XYZ . Aus Hilfssatz 2.1.2 folgt, dass die Kugeloberfläche von den Kugeldreiecken $ABC, A'BC, AB'C, A'B'C, ABC', A'BC', AB'C', A'B'C'$ abgedeckt ist. Daher gilt

$$(ABC) + (A'BC) + (AB'C) + (A'B'C) + (ABC') + (A'BC') + (AB'C') + (A'B'C') = 4r^2\pi. \quad (4)$$

Nach Hilfssatz 2.1.4 gilt:

$$(ABC) + (A'BC) = 2r^2\alpha$$

Analog gilt:

$$(ABC) + (AB'C) = 2r^2\beta$$

$$(ABC) + (ABC') = 2r^2\gamma$$

Durch Addition ergibt sich:

$$3(ABC) + (A'BC) + (AB'C) + (ABC') = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 2r^2\sigma \quad (5)$$

Durch Punktspiegelung an M werden A, B, C mit A', B', C' vertauscht, insbesondere wird Kugeldreieck ABC zum kongruenten Kugeldreieck $A'B'C'$ mit gleicher Fläche; analog für die Kugeldreiecke $A'BC, AB'C, ABC'$.

Daher gilt auch:

$$3(A'B'C') + (AB'C') + (A'BC') + (A'B'C) = 2r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 2r^2\sigma \quad (6)$$

Aus Addition von (5), (6) und Subtraktion von (4) folgt mit $(ABC) = (A'B'C')$:

$$4r^2(\sigma - \pi) = 2(ABC) + 2(A'B'C') = 4(ABC)$$

Daraus ergibt sich obige Formel.

Aufgabe 2.1.3: Zeige: Das Kugeldreieck aus Aufgabe 2.1.2d) hat eine Innenwinkelsumme größer als 270° .

2.2 Die EULERSche Formel

Mit dem Rüstzeug aus Kapitel 1 und 2.1 lässt sich die Polyederformel für konvexe Polyeder beweisen:

Satz 2.2.1 (EULERSche Polyederformel): Es sei P ein konvexes Polyeder. Dann gilt für die Anzahlen e, f, k der Ecken, Flächen und Kanten die Formel $e - k + f = 2$.

Beweis:

1. Die Seitenflächen von P lassen sich nach Satz 1.1.12 in Dreiecke zerlegen. Ist eine Seitenfläche ein n -Eck, kommen hierbei $n - 3$ Kanten hinzu,

und man hat danach $n - 2$ Dreiecke, also $n - 3$ Flächen mehr als zuvor. Es sei d die Gesamtanzahl der auf diese Weise hinzugefügten Kanten. Dann hat das Polyeder jetzt $f + d$ Seitenflächen und $k + d$ Kanten, und alle Seitenflächen sind Dreiecke. Nun gehören zu jedem Dreieck genau 3 Kanten; da jede Kante an genau zwei Flächen angrenzt, gilt also $k + d = 3(f + d)/2$. (7)

2. Nach Satz 1.4.3 werden die Polyederpunkte durch eine zentrale Projektion ω eindeutig auf die Punkte einer Kugel mit Mittelpunkt Z abgebildet, wobei jede Kante auf einen Großkreisbogen abgebildet wird und damit auch jedes Dreieck auf ein Kugeldreieck. Da die Abbildung ω jedem Punkt des Polyeders genau einen Punkt der Kugel zuordnet, überschneiden sich keine zwei Dreikante und damit auch nicht die Kugeldreiecke. Die „Struktur“ von P bildet sich auf k ab:

Da die Abbildung ω eindeutig ist, ist die Vereinigung aller Kugeldreiecke die gesamte Kugeloberfläche. Die Kugel k wird also durch die Dreikante in Kugeldreiecke zerlegt; es gibt genau so viele Kugeldreiecke auf k wie Dreiecke auf P , die gemeinsamen Kanten und Ecken von Dreiecken der Oberfläche entsprechen gemeinsamen Kanten und Ecken der Kugeldreiecke auf k .

3. An jeder gemeinsamen Ecke von Kugeldreiecken stoßen Winkel zusammen mit Winkelsumme 2π , daher ist die Gesamtwinkelsumme $2e\pi$. Die $f + d$ Kugeldreiecke mögen Innenwinkelsummen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{f+d}$ haben. Da die Oberfläche von k in Kugeldreiecke zerlegt ist, gilt $2e\pi = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{f+d}$.

Andererseits ist die Gesamtfläche nach Satz 2.1.6

$$4r^2\pi = r^2(\sigma_1 - \pi) + r^2(\sigma_2 - \pi) + \dots + r^2(\sigma_{f+d} - \pi) = r^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{f+d} - (f + d)\pi) = r^2\pi(2e - f - d).$$

Nach Division durch $2r^2\pi$ folgt $2 = (2e - f - d)/2$.

Zusammen mit (7) folgt hieraus: $2 + (k + d) = (2e - f - d)/2 + 3(f + d)/2 = e + f + d$.

Subtrahiert man d von beiden Seiten, erhält man die gesuchte Formel.

Aufgabe 2.2.1:

- Ändert sich etwas an der Projektion eines konvexen Polyeders von einem seiner inneren Punkte Z auf eine Kugel um Z , wenn das Polyeder außerhalb der Kugel liegt bzw. wenn das Polyeder die Kugel schneidet?
- Begründe: Die Projektion von a) führt nicht zum gewünschten Ziel, wenn Z ein äußerer Punkt des Polyeders ist.

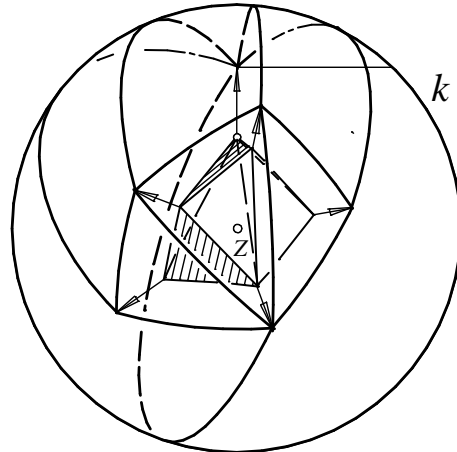


Abb. 35

2.3 Gilt die Polyederformel auch unter schwächeren Voraussetzungen?

Obiges Beweisverfahren benutzt wesentlich die Eigenschaft, dass sich das Polyeder so eindeutig auf eine Kugel abbilden lässt, dass die wechselseitige Lage von Kanten und Flächen erhalten bleibt. So kann man durchaus Abschwächungen für die zunächst gestellten Voraussetzungen vermuten:

2.3.1 Konvexität der Polyeder:

Hat man ein nicht konvexes Polyeder, das sich durch zentrale Projektion wie in Satz 1.4.3 eindeutig auf eine Kugel abbilden lässt, gilt die Polyederformel. Abb. 36a und Abb. 36b zeigen Beispiele hierzu.

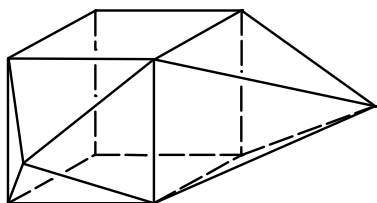


Abb. 36a

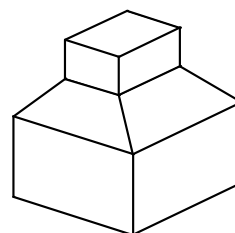


Abb. 36b

2.3.2 Zusammenkleben von Polyedern:

Man kann aus zwei Polyedern durch Zusammenkleben an einer Seitenfläche ein neues Polyeder bilden. (Beim Zusammenkleben ist natürlich das Innere der „Klebefläche“ zu entfernen, damit wieder ein Polyeder entsteht). Man muss aber aufpassen, dass auch wirklich ein Polyeder entsteht: Bei der in der Abb. 37 gezeigten Figur ist eine „Seitenfläche“ von zwei getrennten Streckenzügen aus Kanten begrenzt, daher ist dies kein Polyeder.

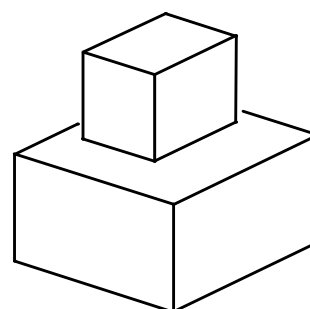


Abb. 37

Man kann aber durch Einfügen zusätzlicher Kanten wieder ein Polyeder daraus erzeugen, für das die Polyederformel gilt (vgl. Abb. 36b). Offenbar sollten Polyeder nur an kongruenten Seitenflächen zusammengeklebt werden.

Satz 2.3.1: Werden die Polyeder P_1 und P_2 , für die jeweils die Polyederformel gilt, an einer kongruenten Seitenfläche zusammengeklebt, gilt für das entstehende Polyeder wieder die Polyederformel.

Beweis:

Es seien zwei Polyeder P_1 bzw. P_2 mit e_1 bzw. e_2 Ecken, k_1 bzw. k_2 Kanten und f_1 bzw. f_2 Seiten-

flächen gegeben, für die jeweils die Polyederformel gilt: $e_1 - k_1 + f_1 = 2$ und $e_2 - k_2 + f_2 = 2$.

Weiter habe das erste Polyeder eine Seitenfläche mit e_3 Ecken und k_3 Kanten, die kongruent zu einer Seitenfläche des zweiten Polyeders ist, so dass sich beide Polyeder an dieser Seitenfläche zu einem neuen Polyeder verkleben lassen. Dann hat das entstandene Polyeder $e_1 + e_2 - e_3$ Ecken, $k_1 + k_2 - k_3$ Kanten und $f_1 + f_2 - 2$ Seitenflächen, da die zwei kongruenten „Klebeflächen“ wegfallen. Hierfür gilt aber auch:

$$(e_1 + e_2 - e_3) + (k_1 + k_2 - k_3) - (f_1 + f_2 - 2) = (e_1 - k_1 + f_1) + (e_2 - k_2 + f_2) - 2 = 2$$

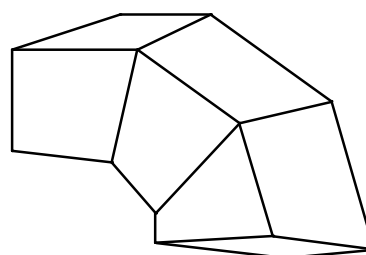


Abb. 38

Auf diese Weise kann man, wie in Abb. 38, aus konvexen Polyedern weitere Polyeder bauen, die sich nicht mehr durch zentrale Projektion eineindeutig auf eine Kugeloberfläche abbilden lassen, für die aber weiterhin die Polyederformel gilt.

Hier stellt sich die Frage, warum das Argument mit dem Zusammenkleben in Abb. 39 nicht funktioniert: Bei obigem Zusammenkleben fielen gleich viele Ecken und Kanten sowie 2 Seitenflächen weg. Damit ein Loch entsteht, muss das zuletzt eingefügte Polyeder an mindestens 2 Seitenflächen mit bestehenden Polyedern verklebt werden, wodurch zwar weiterhin gleich viele Ecken und Kanten, aber nicht 2, sondern mindestens 4 Seitenflächen wegfallen.

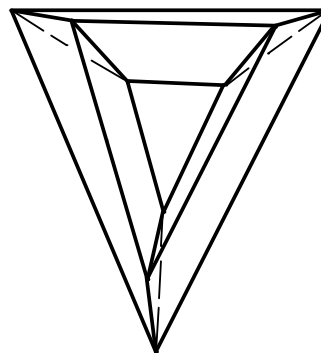


Abb. 39

Obiger Satz lässt sich auch andersherum formulieren:

Satz 2.3.2: Lässt sich ein Polyeder durch ebene Schnitte, die jeweils ein Polygon sind, in konvexe Polyeder zerlegen, für die jeweils die Polyederformel gilt (d. h. nach jedem Schnitt wird die Schnittfläche zusammen mit ihrem Inneren als neue Seitenfläche jedem der beiden Teile hinzugefügt), gilt die Polyederformel auch für das anfängliche Polyeder, falls es kein Loch hat.

Aufgabe 2.2.2: Begründe den Nachsatz „falls es kein Loch hat“ in Satz 2.3.2.

Insgesamt zeigen diese Betrachtungen, dass es sich lohnt, nach einem „besseren“ Beweis zu suchen.

3. Weg nach STAUDT

Die Definition 1.3.1 und auch Definition 1.3.2 eines Polyeders schließen nicht aus, dass ein Polyeder überhaupt Löcher enthalten kann, wie Abb. 39 und Abb. 40 zeigen.

Definition 3.1: Ein Polyeder P heiße **lochfrei**, wenn jeder geschlossene, überschneidungsfreie Streckenzug aus Kanten das Polyeder in zwei Teile teilt, d. h. schneidet man es längs diesem Streckenzug auf, zerfällt es in zwei punktfremde Teile.

Bemerkungen:

1. Die Bezeichnung „lochfrei“ ist nicht allgemein gebräuchlich.
2. Gewisse geschlossene Streckenzüge teilen jedes Polyeder in zwei Teile, z. B. bilden die zu einer Seitenfläche gehörenden Kanten einen geschlossenen Streckenzug, der das Polyeder in zwei Teile teilt: das Innere dieser Seitenfläche und den nicht zu dieser Seitenfläche gehörenden Teil des Polyeders.
3. In der Definition gibt es zwischen zwei Seitenflächen offenbar genau dann mindestens eine Polygonkette, die keine Kante des geschlossenen, überschneidungsfreien Streckenzugs überschreitet, wenn die beiden Seitenflächen im selben Teil des Polyeders liegen.
4. Enthält ein Polyeder ein Loch, ist es auch im Sinne obiger Definition nicht lochfrei. Als Beispiel hierzu ein

Bilderrahmen in Gärung geschnitten:

Die Eckennummerierung entnehme man der Abb. 40. Die geschlossenen Streckenzüge aus den Kanten 0102, 0203, 0304, 0401 oder den Kanten 0307, 0711, 1115, 1503 zerlegen das Polyeder nicht in zwei Teile, es ist also nicht lochfrei.

Enthält ein Polyeder keine Löcher, gilt die EULERSche Polyederformel. Einen besonders instruktiven Beweis hat KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT (1798-1867) gefunden (VON STAUDT [1], Seite 20f, Absatz 49, vgl. Cromwell [1]; in Kapitel 5 findet man einen abgewandelten Beweis):

Satz 3.2: Es sei P ein lochfreies Polyeder. Dann gilt für die Anzahlen e , f , k der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders: $e - k + f = 2$.

Im Folgenden wird der Beweis von Satz 3.2 in mehrere Teile (anhand von Hilfssätzen 3.3 bis 3.7) aufgeteilt, wobei manche Zwischenbehauptungen anschaulich klar sind und deren Beweise nur der Vollständigkeit halber aufgeführt sind:

Gegeben sei ein Polyeder. Wir färben zunächst einige Kanten und ihre Ecken blau (in Abb. 41 am Beispiel einer vierseitigen Pyramide 12345 mit Spitze 1 veranschaulicht):

Schritt 1: Wähle eine beliebige Kante aus und färbe sie und ihre Ecken blau (z. B. Kante 23 in Abb. 26).

Schritt 2: Man kann weitere Kanten des Polyeders blau färben, wenn **genau eine** Ecke der jeweils gewählten Kante bereits blau gefärbt ist. Dies wird so oft wie möglich durchgeführt, z. B. in Abb. 41: Kanten 23, 31, 14, 15; die Kanten 12, 34, 45, 52 können nicht eingefärbt werden, weil jeweils beide beteiligten Ecken bereits eingefärbt sind. Man beachte: Der Schritt 2 kann auch zu einer anderen als der angegebenen Lösung führen. In dieser Situation gilt:

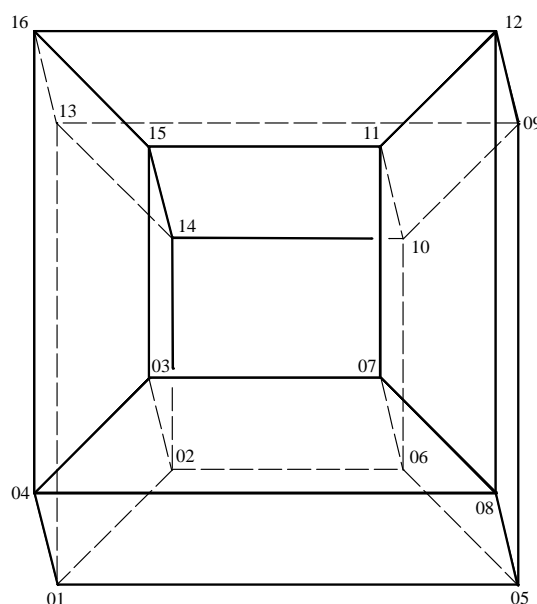


Abb. 40

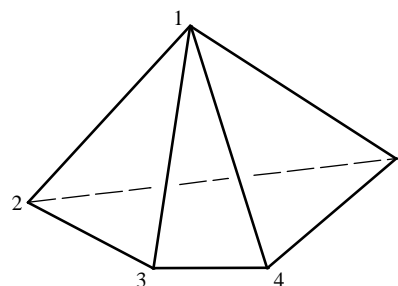


Abb. 41

Hilfssatz 3.3: Nach Schritt 2 gibt es zwischen zwei beliebigen blau gefärbten Ecken einen überschneidungsfreien Streckenzug aus blau gefärbten Kanten.

Beweis:

Dies gilt offenbar nach Schritt 1 für die erste Kante. Hat man nun bereits gefärbte Ecken E_0, \dots, E_{r-1} und wird eine weitere Strecke $\overline{E_k E_r}$ blau gefärbt mit $0 < k < r$, so verbindet diese die Ecke E_r mit E_k ; für jede andere Ecke E_l liefert der Streckenzug aus der Strecke $\overline{E_k E_r}$ zusammen mit dem überschneidungsfreien Streckenzug zwischen E_k und E_l einen überschneidungsfreien Streckenzug zwischen E_r und E_l .

Wenn Schritt 2 nicht weiter ausführbar ist, spricht man vom **Ende von Schritt 2**.

Hilfssatz 3.4: Am Ende von Schritt 2 sind alle Ecken blau gefärbt.

Beweis:

Gäbe es am Ende noch eine ungefärbte Ecke E_0 , existierte nach Hilfssatz 1.3.7 zwischen dieser Ecke und einer

beliebigen bereits gefärbten Ecke E_r ein Streckenzug $E_0E_1\dots E_r$. Folgt man dem Streckenzug zwischen E_0 und der ersten gefärbten Ecke E_s , ist von der direkt davor durchlaufenen Kante $\overline{E_{s-1}E_s}$ genau ein Endpunkt (nämlich E_s) gefärbt, sie lässt sich also auch färben. Das widerspricht der Annahme, dass keine weiteren Kanten färbbar wären.

Hilfssatz 3.5: Am Ende von Schritt 2 gibt es $e - 1$ blaue Kanten, wobei e die Anzahl der Ecken des Polyeders ist.

Beweis:

Die in Schritt 1 gefärbte Kante hat zwei Ecken; mit jeder weiteren Kante wird genau eine weitere Ecke gefärbt. Daher gibt eine blaue Kante weniger als blaue Ecken, nach Hilfssatz 3.4 sind aber schließlich alle Ecken blau.

Hilfssatz 3.6: Das Polyeder zerfällt am Ende von Schritt 2 nicht in mehrere Teile, wenn man es längs der blauen Kanten aufschneidet.

Beweis:

Man kann von einer beliebigen Seitenfläche X des Polyeders zu einer beliebigen Seitenfläche Y längs einer Polygonkette gelangen, ohne eine blau eingefärbte Kante überschreiten zu müssen:

Nach Eigenschaft 3 der Polyederdefinition gibt es eine solche Polygonkette von X nach Y vor Färbung der ersten Kante in Schritt 1. Nun wird in Schritt 1 oder 2 eine Kante \overline{QR} blau gefärbt, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Ecke Q zuvor noch ungefärbt ist. Wird die Kante \overline{QR} nicht überschritten, braucht man nichts zu tun. Gehören zur Polygonkette von X nach Y benachbarte Seitenflächen mit gemeinsamer Kante \overline{QR} , weicht man über alle anderen (und bislang noch ungefärbten) an Q angrenzenden Kanten und die Seitenflächen mit Ecke Q aus. Daher gibt es die Polygonkette auch nach Ende von Schritt 2.

Im Beispiel von Abb. 41 kann man z. B. zunächst von der Seitenfläche 123 zur Seitenfläche 134 über die Kante 13 gelangen. Wird nach der Kante 23 die Kante 13 gefärbt, muss man ausweichen, die Polygonkette wird dann 123, 152, 145, 134. Werden noch die Kanten 14 und 15 gefärbt, muss man jeweils über die Grundfläche 2345 ausweichen; eine Polygonkette ist schließlich 123, 152, 2345, 145, 2345, 134.

Anmerkungen zu Hilfssatz 3.6:

1. Wie im Beispiel der Abb. 41 kann es vorkommen, dass eine Seitenfläche mehrfach in der Polygonkette enthalten ist. Für die Aussage ist aber nur wichtig, dass man von X nach Y überhaupt längs einer Polygonkette gelangen kann, ohne gefärbte Kanten überschreiten zu müssen.

2. In obigem Beweis wurde benutzt, dass man über die anderen Seitenflächen mit Ecke Q ausweichen kann, es also eine Polygonkette über die noch ungefärbten Kanten mit Ecke Q gibt. Das ist anschaulich klar, lässt sich aber auch abstrakt aus der Polyederdefinition folgern: Jede Seitenfläche mit Ecke Q hat genau 2 Kanten mit Randpunkt Q , und nach Eigenschaft 2 der Polyederdefinition 1.3.2 gibt es zu jeder dieser beiden Kanten genau eine benachbarte Seitenfläche. Es seien nun F und F' die beiden Seitenflächen mit gemeinsamer Kante \overline{QR} . Bilde eine Polygonkette S_0, S_1, S_2, \dots mit $S_0 = F'$, $S_1 = F$, wobei für $t > 0$ jeweils S_{t+1} und S_{t-1} die beiden zu S_t benachbarten Seitenflächen mit Ecke Q sind. Da es nur endlich viele Seitenflächen gibt, kommt nach endlich vielen Schritten zum ersten Mal eine Seitenfläche doppelt in der Polygonkette vor: es sei dann $S_n = S_t$ mit $n > t$ und minimalem n . Ist $t > 0$, sind S_{t+1} und S_{t-1} beide zu S_t benachbarten Seitenflächen, eine davon wäre damit identisch zu S_{n-1} , so dass S_{n-1} bereits doppelt vorkommt im Widerspruch zur Minimalität von n .

Sonderfall: Ist $S_{n-1} = S_{t+1}$ mit $t = n - 2$, hätte S_{n-1} zu beiden Kanten mit Randpunkt Q hin die benachbarte Seitenfläche $S_n = S_t$. Dann hätte aber auch S_n zu beiden Kanten mit Randpunkt Q hin die benachbarte Seitenfläche S_{n-1} , insbesondere wäre $S_{n-1} = S_{n-3} = S_{t-1}$.

Daher ist $t = 0$, also $S_0 = S_t$ und damit S_1, S_2, \dots, S_n die Polygonkette von F nach F' , die die Kante \overline{QR} umgeht.

Hilfssatz 3.7: Am Ende von Schritt 2 gibt es beim *lochfreien* Polyeder $f - 1$ ungefärbte Kanten, wobei f die Anzahl der Seitenflächen ist.

Beweis:

Man schneide das bereits längs der blauen Kanten aufgeschnittene Polyeder weiter längs ungefärbter auf: Grundsätzlich zerteilt ein Schnitt den diese Kante enthaltenden Teil des Polyeders in höchstens zwei Teile. Hier aber entstehen bei jedem Schnitt wirklich zwei Teile: Es sei s eine ungefärbte Kante, die zusammen mit ihren angrenzenden Seitenflächen in einem Teil T enthalten ist. Nach Hilfssatz 3.3 und 3.4 gibt es einen Streckenzug aus blauen Kanten zwischen den Ecken der Kante s , der zusammen mit s einen geschlossenen überschneidungsfreien Streckenzug bildet. Damit zerschneidet der Schnitt längs s zusammen mit den blauen Kanten das nach Voraussetzung lochfreie Polyeder. Insbesondere liegen die beiden an s angrenzenden Seitenflächen nicht im gleichen Teil; folglich zerfällt T in zwei Teile. Die anderen Teile bleiben unverändert, da nur längs s geschnitten wird.

Es sei u die Anzahl der ungefärbten Kanten. Unmittelbar bevor wir das Polyeder längs der ungefärbten Kanten aufschneiden, gibt es nach Hilfssatz 3.6 genau einen Teil. Nach jedem Schnitt längs einer ungefärbten Kante gibt es einen Teil mehr, schließlich also genau $u + 1$ Teile. Diese sind aber die einzelnen Seitenflächen, damit ist $u + 1 = f$ bzw. $u = f - 1$.

Beispiel: In Abb. 41 bildet die ungefärbte Kante 52 zusammen mit den blauen Kanten 23, 31, 15 den Streckenzug 52315, der die Pyramide in einen Teil, bestehend aus den Dreiecken 152 und 123, und einen mit den übrigen Seitenflächen aufteilt. Den ersten Teil zerlegt der Schnitt längs Kante 12 (Streckenzug 1231) in die Seitenflächen 152 und 123.

Beweis von Satz 3.2:

Am Ende von Schritt 2 sind von den k Kanten des Polyeders nach Hilfssatz 3.4 $e - 1$ blau gefärbt und nach Hilfssatz 3.7 $f - 1$ Kanten ungefärbt. Damit ist $k = (e - 1) + (f - 1)$ bzw. $e - k + f = 2$.

Bemerkungen:

1. Auch in obigem Beispiel der Abb. 40 des nicht lochfreien „Bilderrahmens“ kann man z. B. durch Blaufärben der Kanten 0102, 0203, 0304, 0408, 0805, 0506, 0607, 0711, 1112, 1209, 0910, 1014, 1415, 1516, 1613 alle Ecken erfassen. Ungefärbt bleiben dann die 17 Kanten 0104, 0105, 0206, 0307, 0708, 0812, 0509, 0610, 1011, 1115, 1216, 0913, 1314, 0113, 0214, 0315, 0416. In obigem Beweis bleiben damit die Aussagen von den Hilfssätzen 3.3 bis 3.6 gültig. Da das Polyeder aber nicht lochfrei ist, entstehen beim Zerschneiden längs ungefärbter Kanten im Beweis von Hilfssatz 3.7 nicht stets aus einem Teil zwei Teile, z. B. wenn man zunächst längs der Kante 0104 aufschneidet, da der geschlossene überschneidungsfreie Streckenzug aus den Kanten 0102, 0203, 0304, 0401 das Polyeder nicht in zwei Teile teilt.

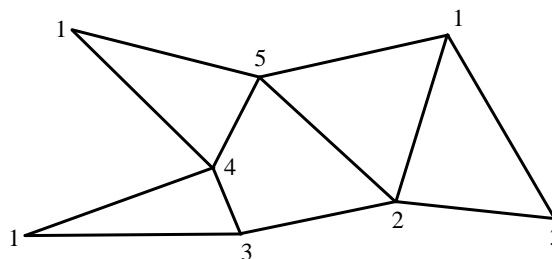


Abb. 42

2. Schneidet man das lochfreie Polyeder längs der blauen Kanten auf, so sind jeweils zwei benachbarte Flächen nur durch eine (nicht eingefärbte) Kante verbunden und es kommt keine Polygonfläche zweimal vor. Deshalb kann man die eine Fläche stets in die Ebene der anderen aufbiegen. Überlappen sich die Flächen am Ende nicht, entsteht für das Polyeder der Abb. 41 eine **Abwicklung** (siehe Abb. 42). In obigem Beispiel des nicht lochfreien „Bilderrahmens“ ist das nicht möglich, da es bei der gewählten Blaufärbung einen „Ring“ aus Polyedern mit den verbindenden ungefärbten Kanten 0113, 0214, 0315, 0416 gibt.

Offenbar können konvexe Polyeder keine Löcher enthalten. Das ergibt sich auch aus dem folgenden Satz:

Satz 3.8: Jedes konvexe Polyeder P ist lochfrei.

Beweis:

Gegeben seien ein konvexes Polyeder P und ein geschlossener überschneidungsfreier Streckenzug r aus Polyederkanten. Durch die zentrale Projektion ω aus Satz 1.4.3 wird das Polyeder eineindeutig auf eine Kugel

abgebildet, dabei wird auch der Streckenzug r auf einen geschlossenen „Kreisbogenzug“ r' auf der Kugel abgebildet. Schneidet man die Kugel längs r' auf, ist anschaulich klar, dass sie in zwei Teile zerfällt. Die Umkehrabbildung von ω bildet diese beiden Teile auf zwei Teile des Polyeders ab. In diese zerfällt das Polyeder, wenn man es längs r aufschneidet.

Eine weitere Überlegung:

Man kann Satz 3.8 mit mehr Aufwand auch beweisen, ohne die im obigen Beweis verwendete Eigenschaft der Kugel vorauszusetzen. Vom Beweis werden im Folgenden nur die wesentlichen Gedanken beschrieben:

1. Es sei r ein geschlossener, überschneidungsfreier Streckenzug aus Kanten von P und Z ein innerer Punkt von P . Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, das P und damit auch Z so in seinem Inneren enthält, dass auf AZ kein Punkt von r liegt.
2. Nach Korollar 1.4.15 ist das Tetraeder $ABCD$ konvex.
3. Nach Hilfssatz 1.4.2 schneidet jeder von Z ausgehende Strahl P und $ABCD$ in jeweils genau einem Punkt. Daher ist die zentrale Projektion ω , die jeden Punkt Q von P auf den Schnittpunkt des Strahls ZQ mit $ABCD$ abbildet, eineindeutig.
4. Das Bild einer Strecke in P kann hierbei auf mehreren Seitenflächen von $ABCD$ liegen. Auf jeder beteiligten Seitenfläche ist das Bild eine Teilstrecke, insgesamt ist es ein Streckenzug. ω bildet r auf einen geschlossenen überschneidungsfreien¹³ Streckenzug r' auf $ABCD$ ab, der mehr Strecken als r haben kann.
5. Es sei m maximaler Abstand von Ecken von r' zur Ebene BCD ; damit haben auch alle Punkte von r' höchstens Abstand m von BCD . Da AZ keinen Punkt von r enthält, ist der Abstand von A zu BCD größer als m , und $ABCD$ hat einen inneren Punkt I mit Abstand $d > m$ von BCD .
6. Es sei M die Menge aller Punkte von $ABCD$, deren Abstand von BCD kleiner als d ist. Da nach Hilfssatz 1.4.2 jeder von I ausgehende Strahl genau einen Punkt von $ABCD$ enthält, ist die zentrale Projektion λ , die jeden Punkt Q von M auf den Schnittpunkt des Strahls IQ mit BCD abbildet, eineindeutig. λ bildet r' wegen $m < d$ auf einen geschlossenen überschneidungsfreien Streckenzug r'' in BCD , also ein Polygon, ab.
7. Die Punkte von M , die λ auf innere Punkte von r'' abbildet, werden gelb gefärbt, die übrigen Punkte von M und $ABCD$ schwarz. Diejenigen Punkte von P , die ω auf gelb gefärbte Punkte von $ABCD$ abbildet, werden weiß gefärbt, die übrigen Punkte von P blau.
8. Man kann wegen Satz 1.1.12 annehmen, dass die Seitenflächen von P Dreiecke sind. Es sei $F_1 F_2 \dots F_n$ eine Polygonkette auf P , die keine Kante von r überschreitet. Es sei u der Streckenzug zwischen je einem nicht auf r liegenden Punkt von F_1 und F_n , der über die Mittelpunkte der von der Polygonkette überschrittenen Kanten verläuft. Da F_1, \dots, F_n Dreiecke sind, enthält u keine Punkte von r .
9. Angenommen, u enthält einen weißen und einen blauen Punkt. ω bildet u auf einen Streckenzug u' auf $ABCD$ ab, dessen Schnittmenge mit M eine Teilstrecke k' (einer Strecke von u') mit einem gelben und einem schwarzen Randpunkt enthält. λ bildet k' auf eine Strecke k'' mit einem Randpunkt im Inneren und einem im Äußeren von r'' ab. Daher enthält k'' nach Definition 1.1.5 einen Punkt von r'' und damit u einen Punkt von r : Widerspruch. Somit wird P durch r in zwei Teile zerlegt, nämlich einen weißen und einen blauen, und P ist lochfrei.

Zur Vertiefung der „weiteren Überlegung“:

Abb. 43 zeigt, wie ein Dreieck UVW eines Polyeders, das ganz innerhalb eines Tetraeders $ABCD$ liegt, von einem inneren Punkt Z aus, der nicht in der Ebene UVW liegt, auf das Tetraeder durch Zentralprojektion abgebildet wird. Z liegt im Inneren des Tetraeders und nicht in der Ebene von UVW .

¹³ wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung

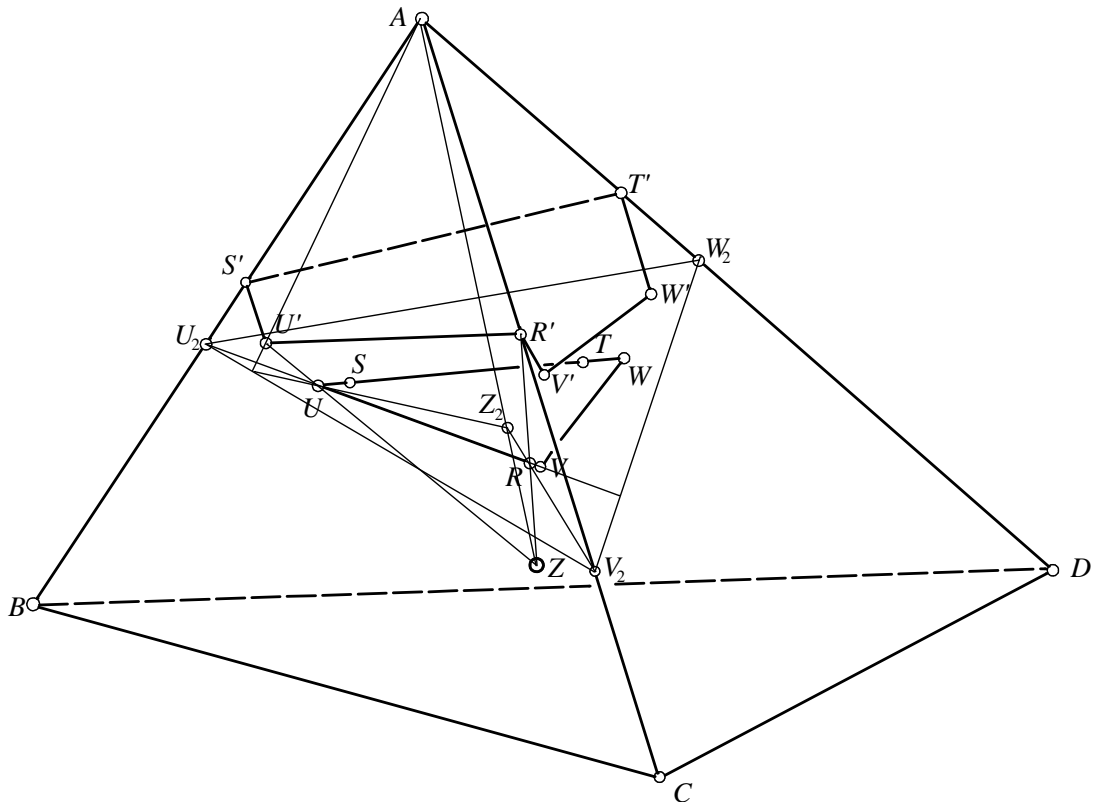


Abb. 43

Zur Konstruktion der Abb. 43:

1. Das Tetraeder $ABCD$ wird als Schrägbild dargestellt.
2. Die Ebene des Dreiecks UVW wird festgelegt: Hierzu zeichnet man ein Dreieck $U_2V_2W_2$ „nahezu“ willkürlich auf $ABCD$ (siehe Abb. 43).
3. Innerhalb von $U_2V_2W_2$ wird das Dreieck UVW „irgendwie“ festgelegt: Hierzu zeichnet man im Dreieck ein weiteres Dreieck, das nur aus inneren Punkten des Tetraeders besteht.
4. Festlegung von Z : Man wählt im Inneren von UVW einen willkürlichen Punkt Z_2 , der in der Ebene von $U_2V_2W_2$ liegt. Das gesuchte Projektionszentrum Z kann dann noch willkürlich auf AZ_2 innerhalb von P , also sicher nicht auf UVW , aber innerhalb von $ABCD$ gewählt werden.
5. Ab jetzt findet eine Zentralprojektion des Dreiecks UVW von Z aus auf das Tetraeder $ABCD$ statt:
 - a) Die Abbildung der Ecken des Dreiecks UVW wird an der Ecke U demonstriert: Man betrachtet die Ebene UAZ , in der auch Z_2 liegt. Der Schnittpunkt der Geraden UZ_2 mit der Kante U_2V_2 liefert einen nicht weiter bezeichneten Punkt. Verbindet man diesen mit A und schneidet diese Linie mit ZU , so erhält man den Bildpunkt U' . Das ist möglich, weil alles in der Ebene UAZ liegt. Analog findet man V' und W' .
 - b) Man stellt fest, dass U' und V' auf verschiedenen Tetraederseiten liegen, d. h. das Bild der Strecke \overline{UV} , also die Ebene UVZ , schneidet diese Tetraederseiten in verschiedenen Strecken. D. h. das Bild von \overline{UV} wird auf der Kante \overline{AC} bei R' einen Knick haben. Um R' zu finden, wird der Konstruktionsschritt a) rückwärts ausgeführt. Siehe die Konstruktionslinien zu R' . Man findet zunächst R , das dann von Z aus auf die Kante \overline{AC} projiziert wird.
 - c) Die Projektion von VW überschreitet keine Kante des Tetraeders. Anders ist dies bei der Projektion von UV : Alle drei in A sich schneidenden Tetraederseiten sind beteiligt, d. h. $U'W'$ hat Knicke in S' und T' . Beide Konstruktionen sind der Abb. 43 nicht zu entnehmen.

Kritik:

1. Die Projektion eines Polyeders auf eine Kugel (wie in Abb. 24 geschehen) ist zeichnerisch einfacher ausführbar als die Projektion auf einen Tetraeder.

2. Die Kugelprojektion lässt klarer die Struktur des Polyeders erkennen, als dies bei der Projektion auf einen Tetraeder der Fall ist. Jedes Polygon des Polyeders wird hierbei zwar immer noch auf einen geschlossenen Streckenzug abgebildet, aber die Anzahl der beteiligten Strecken kann sich vergrößern, da bei letzterer eine einzelne Strecke auf einen Streckenzug mit bis zu vier Strecken abgebildet werden kann.

Aufgabe 3.1: Zeige, dass die Beispiele der Abb. 22a bis d nicht der Polyederformel genügen.

Aufgabe 3.2: Wie kann man für $n = 0$ und jede natürliche Zahl n ein Polyeder mit $e + f - k = -2n$ erhalten?

Ausblick:

In der algebraischen Topologie untersucht man allgemeinere Flächen und klassifiziert, welche Flächen ineinander durch stetige Verformungen übergehen. Flächen ohne „Loch“ werden etwas anders als oben so klassifiziert, dass sich jede geschlossene Kurve innerhalb der Fläche stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. In der algebraischen Topologie wird gezeigt, dass sich zwei geschlossene Flächen im dreidimensionalen Raum durch stetige Verformung ineinander überführen lassen, wenn sie dieselbe Anzahl an Löchern haben. Hierbei werden die Flächen angenähert durch aus Polygonen (inklusive ihrem Inneren) zusammengesetzte Flächen. Ein wichtiges Hilfsmittel dafür ist die sogenannte EULER-Charakteristik, nämlich $e - k + f$, wenn e , k , f die Anzahlen der Ecken, Kanten und Polygone sind (vgl. Wikipedia [3]). Für Polyeder ohne Loch ist die EULER-Charakteristik nach der Polyederformel stets 2. Man kann zeigen, dass ein Polyeder mit g Löchern EULER-Charakteristik $2 - 2g$ hat (vgl. auch Aufgabe 3.2; zum Beweis siehe z. B. MASSEY [1], Kapitel 1). Dies ist stets eine gerade Zahl. Beachte, dass der in Abb. 22d ausgeschlossene Körper zwar kein Loch, aber doch EULER-Charakteristik 1 hat: Dieser Körper ist also von anderer Art und wurde daher in der Polyederdefinition ausgeschlossen.

4. Lösungen der Aufgaben

Bei manchen Aufgaben findet man den Vermerk „schwer“. Diese Bemerkung bezieht sich in aller Regel darauf, inwieweit die Schülerinnen oder Schüler in der Lage sind, abstrakt, d. h. unter Bezug auf die Definitionen und nicht nur mittels Anschauung, ihre Überlegungen niederzuschreiben. Viele Aufgabenstellungen sind nämlich anschaulich sofort klar, es ist aber gar nicht so einfach, sie aus den gegebenen Definitionen herzuleiten. Man kann natürlich auch bei solchen Aufgaben rein anschaulich zu Begründungen gelangen; d. h.: Je nach den Fähigkeiten des einzelnen wird eine solche Begründung mehr oder weniger abstrakt ausgeführt. Auch sollte man nicht übersehen, dass in aller Regel eine Abstraktion erst möglich wird, wenn die Anschauung hierfür eine Idee zur Verfügung stellt.

Meist sind zum Lösen „schwerer“ Aufgaben einige Lösungsideen erforderlich.

Zu 1.1.1 Abb. 2a: Die Strecken \overline{BC} und \overline{EF} haben einen gemeinsamen inneren Punkt im Widerspruch dazu, dass der Streckenzug überschneidungsfrei ist (vgl. Definition 1.1.1b).

Abb. 2b: Die Ecke C gehört zu mehr als 2 Strecken (im Widerspruch zu Definition 1.1.1b).

Abb. 2c: Es liegen zwei Streckenzüge vor: $ABCA$ und $DEFD$ im Widerspruch dazu, dass ein Polygon ein Streckenzug ist, vgl. Definition 1.1.2.

Zu 1.1.2: Angenommen, das Polygon liege in einer Geraden. Es seien A und B Ecken mit dem größten Abstand. Dann liegen alle anderen Ecken auf der Strecke \overline{AB} . Es seien \overline{AX} und \overline{AY} Seiten des Polygons. Da X und Y auf der Strecke \overline{AB} liegen, haben die Strecken \overline{AX} und \overline{AY} gemeinsame innere Punkte im Widerspruch zu Forderung 2 der Definition 1.1.1.

Andere Lösung: Angenommen, das Polygon liege in der Geraden g . Es sei I innerer Punkt des Polygons und s ein Strahl, der in I beginnt und nicht in g liegt, also mit g nur I gemeinsam hat. Dann enthält s nach Hilfssatz 1.1.6a) einen Punkt des Polygons, der nicht auf g liegt.

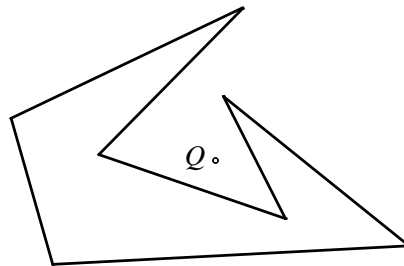


Abb. 44

Zu 1.1.3: Das Sechseck von Abb. 44 „umzingelt“ den Punkt Q :

Zu 1.1.4: Wähle als Kreismittelpunkt die Ecke A_1 und als Radius die Summe der Längen aller Seiten. Das Polygon liegt im Inneren dieses Kreises: Ein beliebiger Punkt Q des Polygons liegt auf der Seite $\overline{A_n A_1}$ oder einer Seite $\overline{A_k A_{k+1}}$ mit $k > 0$. Im ersten Fall ist die Strecke $\overline{A_1 Q}$ höchstens so lang wie $\overline{A_n A_1}$, im zweiten Fall ist nach Dreiecksungleichung die Streckenlänge $|\overline{A_1 Q}|$ höchstens so groß wie $|\overline{A_1 A_2}| + |\overline{A_2 A_3}| + \dots + |\overline{A_k Q}|$, wobei $|\overline{A_k Q}|$ höchstens so lang ist wie $|\overline{A_k A_{k+1}}|$. In allen Fällen ist $|\overline{A_1 Q}|$ kleiner als die Summe der Längen aller Seiten.

Zu 1.1.5: a) Der Strahl „rotiere“ in der Ebene von P um Q . Da sich die Seiten des Polygons nicht in inneren Punkten schneiden, ändert sich die Anzahl der Schnittpunkte nicht, solange der Strahl keine Ecke überstreicht. Nach Bedingung 1 der Definition 1.1.1b) gibt es höchstens eine Änderung, wenn der Strahl mindestens eine Ecke überstreicht: Jeweils treffen sich zwei Kanten in einer Ecke oder haben Eckpunkte einer auf dem Strahl liegenden Kante. Jeder Strahl, der zu einer Ecke führt oder auf dem eine Kante liegt, ändert unter Umständen die Anzahl der Schnittpunkte. Die oberen Zahlen von Abb. 45 zeigen die Anzahl der Schnittpunkte zwischen den Grenzlagen. Die untere Zahlenfolge gibt an, wie viele Schnitte es in den Grenzfällen gibt (u gibt an, dass dieser Grenzstrahl unendlich viele Punkte mit P gemeinsam hat.) Die Gesamtanzahl der Schnittpunkte erhöht bzw. verringert sich als Summe all dieser Einzelfälle dann auch stets um eine gerade Zahl oder bleibt gleich, weil jede Ecke zu genau zwei Kanten gehört¹⁴

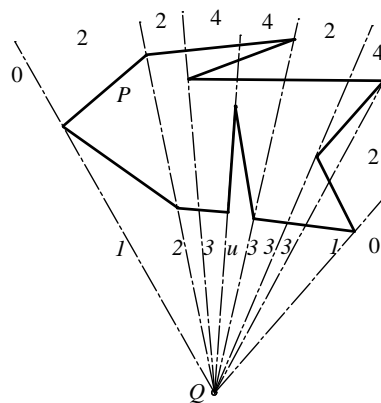


Abb. 45

b) Es sei Q beliebiger Punkt der Ebene, der nicht auf P liegt. Da das Polygon nur endlich viele Ecken hat, gibt es einen in Q beginnenden Strahl, der keine Ecke von P enthält. Der Strahl kann mit jeder Kante des Polygons nur höchstens einen Punkt gemeinsam haben, weil ansonsten auch eine Ecke auf dem Strahl liegen würde. Daher hat der Strahl mit P nur endlich viele gemeinsame Punkte. Die Anzahl ist also entweder gerade oder ungerade. Nach Teil a) kann kein Punkt gerade und ungerade zugleich sein.

c) Wähle irgendeine Gerade g , die keine Ecke des Polygons enthält, aber das Polygon in mindestens einem Punkt B_k schneidet (siehe Abb. 46). Es sei A ein Punkt dieser Geraden, der nicht zum Polygon gehört. Der

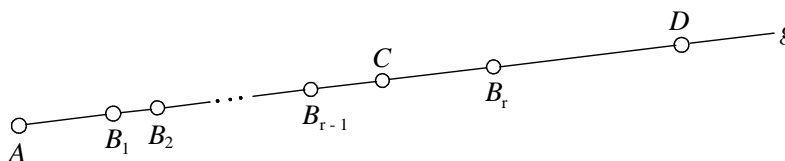


Abb. 46

¹⁴ siehe auch die Lösung zu Aufgabe 1.3.6

Strahl $\overrightarrow{AB_k}$ enthält nach b) endlich viele Punkte B_1, B_2, \dots, B_r des Polygons, sortiert nach steigenden Abständen von A . Einer davon ist B_k . Im Falle $r = 1$ ist A nach Definition ungerade, im Fall $r > 1$ ist jeder innere Punkt C der Strecke $\overline{B_{r-1}B_r}$ ungerade, da der Strahl $\overrightarrow{CB_r}$ genau einen Punkt des Polygons enthält. In beiden Fällen ist jeder Punkt D des Strahls $\overrightarrow{AB_r}$, der außerhalb der Strecke $\overline{AB_r}$ liegt, gerade, da der Strahl mit Anfangspunkt D , der nicht A enthält, keinen Punkt des Polygons enthält.

d) Da das Polygon beschränkt ist (Aufgabe 1.1.4), ist es im Inneren eines Kreises enthalten. Damit sind auch Verbindungsstrecken zwischen Punkten des Polygons im Inneren dieses Kreises enthalten. Es sei Q ein innerer Punkt und g eine Gerade durch Q , die keine Ecke des Polygons enthält. Damit enthalten beide in Q beginnenden Halbgeraden von g ungerade viele Punkte des Polygons, also mindestens einen. Somit liegt Q auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Polygons und damit im Kreis.

e) Enthält der Strahl QR oder RQ keine Ecke des Polygons, folgt die Behauptung direkt aus der Definition gerader und ungerader Punkte. Anderenfalls sei g eine Gerade durch R (siehe Abb. 47), die keine Ecke des Polygons enthält, insbesondere ungleich der Geraden QR ist. Die Gerade h sei anfangs QR und wird dann etwas um Q gedreht, so dass sie keine weitere Ecke des Polygons überstreicht und die Strecke zwischen Q und dem Schnittpunkt S von g und h keine Punkte des Polygons enthält. Das ist möglich, da das Polygon nur endlich viele Ecken hat und g nur in endlich vielen Punkten schneidet. Würde man h wieder zurückdrehen, könnte sich die Anzahl der Schnittpunkte der Strecke zwischen Q und dem Schnittpunkt von g und h nur ändern, wenn sie durch Ecken des Polygons geht (vgl. a) oben). Solche Ecken gibt es nicht, da die Strecke \overline{QR} keine Punkte des Polygons enthält. Damit enthält auch Strecke \overline{QS} keine Punkte von P , somit sind Q und S bzw. S und R , also auch Q und R beide gerade oder beide ungerade.

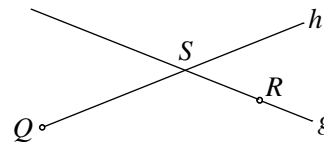


Abb. 47

f) Teil a) von Definition 1.1.5 folgt aus Aufgabenteil b) und c); Teil b) und c) von Definition 1.1.5 folgen aus Aufgabenteil e) bzw. d).

g) Beginnt der Strahl in der Quadratmitte (siehe Abb. 48), gilt das Kriterium auch, wenn der Strahl eine Ecke enthält. Beginnt der Strahl außerhalb des Quadrats und streift das Quadrat nur in einer Ecke, ist das Kriterium nicht erfüllt. Also:

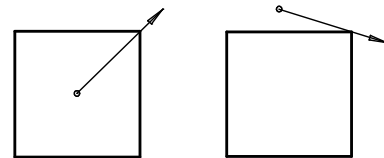


Abb. 48

Verbesserung: Enthält der Strahl eine Ecke, sollte man diese genau dann mitberücksichtigen, wenn man die Gerade des Strahls zu beiden Seiten hin verlässt, wenn man sich von der Ecke aus in beide Richtungen längs dem Polygon bewegt. (Bemerkung: Auch wenn Abb. 49 es nahe legt, genügt es nicht, nur zu verlangen, dass zu beiden Seiten der Geraden des Strahls Ecken zu finden sind. Gegenbeispiel hierzu ist der 3. Strahl von rechts in Abb. 45).

Zu 1.1.6: Das Fünfeck $ABCDE$ hat 5 innere Diagonalen $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{CE}, \overline{DA}, \overline{EB}$ und 5 Triangulierungen, eine in die Dreiecke ABC, ACD, ADE , die anderen erhält man durch zyklisches Vertauschen der Ecken. Das Fünfeck $VWXYZ$ hat nur die zwei inneren Diagonalen \overline{WZ} und \overline{XZ} und eine Triangulierung in die Dreiecke VWZ, WXZ, XYZ .

Bemerkung: Zur Anzahl der Triangulierungen von konvexen n -Ecken siehe auch Wikipedia [2].

Zu 1.1.7: Nach Satz 1.1.12 hat das n -Eck eine Triangulierung in $(n - 2)$ Dreiecke. Jedes Dreieck hat Innenwinkelsumme 180° . Da die Innenwinkel an den Ecken des n -Ecks die Summen der entsprechenden Innenwinkel der Dreiecke sind, ergibt sich $(n - 2) \cdot 180^\circ$ für die Summe.

Zu 1.2.1: Enthält die Verbindungsstrecke \overline{QR} nicht nur Punkte des Polygons, kann sie offenbar keine Kante sein und enthält nach Definition 1.2.1 nur innere Punkte des Polygons. Nach Definition 1.1.8 ist sie daher eine innere Diagonale.

Zu 1.2.2: Für jeden inneren Punkt I' und jedem von I' ausgehenden Strahl und den einzigen Polygonpunkt R' auf diesem Strahl enthält nach Hilfssatz 1.1.6b) die Strecke $\overline{I'R'}$ außer R' nur innere Punkte des Polygons.

Nun sei g eine Gerade, die keine Kante des Polygons enthält, aber das Polygon in Punkten Q, R, T schneidet, wobei ohne Einschränkung R auf der Strecke \overline{QT} liegt. Enthält die Gerade g einen inneren Punkt I_0 des Polygons, muss einer der in I_0 beginnenden Strahlen auf g mehr als einen Punkt des Polygons enthalten: Widerspruch!

Somit enthält die Strecke \overline{QR} einen äußeren Punkt A des Polygons, und es gibt einen inneren Punkt I außerhalb der Geraden QR (vgl. Abb. 12). Nach Eigenschaft 2 in Definition 1.1.5 enthält die Strecke \overline{AI} einen Punkt S des Polygons, und die Parallele zu QR durch S schneide die Strecken \overline{QI} und \overline{RI} in den Punkten J und K .

Nach obiger Bemerkung sind auch J und K innere Punkte des Polygons, so dass der in J beginnende und S nicht enthaltende Strahl auf JK einen weiteren Punkt des Polygons enthalten müsste. Dieser Punkt läge aber zusätzlich zu S auf dem in K beginnenden Strahl KS , ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu 1.2.3: Beweis durch Widerspruch: Angenommen, die Gerade einer Kante s schneide die Strecke \overline{XY} nur in einem inneren Punkt der Strecke \overline{XY} . Es sei I innerer Punkt des Polygons, der nicht auf XY liegt. Nach dem Axiom von PASCH (1.1.3) schneidet die Gerade von s auch eine der Kanten \overline{IX} und \overline{IY} des Dreiecks IXY , damit läge nach Hilfssatz 1.2.7a) aber ein innerer Punkt des Polygons auf dieser Geraden im Gegensatz zu Hilfssatz 1.2.6.

- Zu 1.3.1:** a) Bedingung 3,
 b) Bedingung 2,
 c) Bedingung 3 und 4,
 d) Bedingung 4.

Zu 1.3.2: Die Ebenen der Seitenflächen haben die HESSE-Normalformen im x - y - z -Koordinatensystem (wobei $r = \sqrt{1 + (1-t)^2}$ bzw. $r = -\sqrt{1 + (1-t)^2}$ sei, je nachdem, ob t größer gleich null oder kleiner gleich null ist):

- $ABCD: -z - 1 = 0,$
- $ABFE: -y - 1 = 0,$
- $BCGF: x - 1 = 0,$
- $CDHG: y - 1 = 0,$
- $DAEH: -x - 1 = 0,$
- $EFK: ((1-t)y + z - t)/r = 0,$
- $FGK: ((t-1)x + z - t)/r = 0,$
- $GHK: ((t-1)y + z - t)/r = 0,$
- $HEK: ((1-t)x + z - t)/r = 0.$

Ist t kleiner oder gleich -1 , liegt der Punkt $Q \left(\frac{1+t}{1-t} \mid \frac{1+t}{1-t} \mid -1 \right)$ auf den Ebenen $ABCD$ und EFK . Wegen $\left| \frac{1+t}{1-t} \right| < 1$ ist dies ein innerer Punkt des Quadrats $ABCD$, der auf der Strecke \overline{EK} und damit auch auf der Seitenfläche EFK des Polyeders liegt, da gilt: $\overrightarrow{OQ} = \frac{1+t}{t-1} \overrightarrow{OE} + \frac{-2}{t-1} \overrightarrow{OK}$, wobei O der Ursprung des Koordinatensystems ist und die beiden Koeffizienten zwischen 0 und 1 liegen. Dies widerspricht aber Punkt 1 der Polyederdefinition.

Ist t größer als -1 , haben E, F, K z -Wert größer als -1 , damit schneidet auch das Dreieck EFK die Ebene von $ABCD$ nicht. Analoges gilt für die Dreiecke FGK, GHK, HEK . Die Ebenen $ABFE$ und $CDHG$ sind parallel und nicht identisch, daher können sich die Seitenflächen nicht schneiden. Entsprechendes gilt für die Ebenen $BCGF$ und $DAEH$. Alle anderen Paare von Seitenflächen haben eine gemeinsame Kante. Damit ist Punkt 1 der Polyederdefinition erfüllt. Die Bedingungen 2, 3, 4 sind stets erfüllt.

Zu 1.3.3: Abb. 49 zeigt einen Würfel, an dessen vorderer Seite ein Trichter nach innen angebracht ist. Die Trichteröffnung ist als Stollen in den Würfel getrieben. Dieser Stollen hat im Inneren des Würfels einen 90° -Knick nach oben. Der Stollen endet im Würfel, führt also nicht heraus. Im oberen Teil des Stollens liegt der Punkt Q . Betrachten wir den verbliebenen Teil des Würfels, so liegt ein Polyeder vor, in dessen Innerem sich der Punkt Q nicht befindet, aber von Q aus kann man nicht nach „draußen“ sehen, da jeder Strahl von Q das Polyeder trifft.

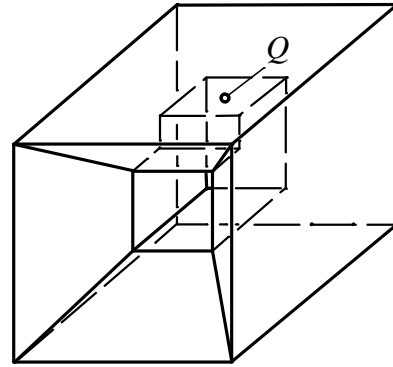


Abb. 49

Zu 1.3.4: Beweis durch Widerspruch: Angenommen, das Polyeder liege in der Ebene E . Es sei I innerer Punkt des Polyeders und s ein Strahl, der in I beginnt und nicht in E liegt, also mit E nur I gemeinsam hat. Dann enthält s nach Hilfssatz 1.1.5a) einen Punkt des Polyeders, der nicht in E liegt.

Zu 1.3.5: Es sei A eine Ecke des Polyeders. Da das Polyeder nur endlich viele Ecken hat, gibt es ein Maximum m unter den endlich vielen Abständen von A zu Polyederecken. Die Kugel um A mit Radius $r > m$ enthält also alle Ecken des Polyeders, damit auch die Kanten und Seitenflächen, da innere Punkte von Polygonen auf Verbindungsstrecken von Randpunkten von Polygonen liegen, vgl. Hilfssatz 1.1.6a), und somit das ganze Polyeder.

Zu 1.3.6:

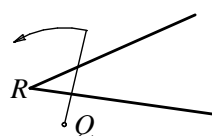
a) Es seien QA und QB zwei in Q beginnende Strahlen, die keinen Punkt einer Kante des Polyeders enthalten. Es wird gezeigt: Man kann durch höchstens zwei Drehungen um Q den Strahl QA in QB überführen, so dass der Strahl während dieser Drehbewegung(en) nie eine Ecke des Polyeders enthält. Beweis:

1. Fall: Die Ebene QAB enthält keine Ecke des Polyeders. Dann leistet die Drehung um Q mit Winkel $\angle AQB$ das Gewünschte.

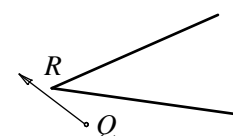
2. Fall: Die Ebene QAB enthält mindestens eine Ecke des Polyeders. Da das Polyeder nur endlich viele Ecken hat, gibt es zwei verschiedene Ebenen E und F , die die Geraden QA bzw. QB enthalten, aber außerhalb dieser beiden Geraden keine Ecke des Polyeders enthalten. Die Ebenen E und F sind nicht parallel und schneiden sich daher in einer Geraden QC , die nach Wahl der Ebenen E und F keine Ecke des Polyeders enthält. Dann leisten die Drehungen um Q mit Winkel $\angle AQC$ und danach um Winkel $\angle CQB$ das Gewünschte.

Nun wird gezeigt, dass sich die Anzahl der Schnittpunkte während dieser Drehbewegungen nur um Vielfache von 2 ändern kann. Die Anzahl kann sich nur ändern, wenn der Strahl eine Kante des Polyeders überstreicht. An jede Polyederkante grenzen genau zwei Seitenflächen. Der Strahl kann die Kante nur in einem Punkt R schneiden, da er sonst auch eine der Ecken dieser Kante enthalten müsste, und liegt daher nicht in der Ebene eine der beiden Seitenflächen. Durch R gehen die Schnitte mit den beiden Seitenflächen, insbesondere Strecken mit Randpunkt R . Es gibt folgende Möglichkeiten (Abb. 50 zeigt die Situation jeweils vor und nach dem Überstreichen von R in der Ebene, innerhalb derer der Strahl gedreht wird; alle übrigen Schnitte mit Seitenflächen des Polyeders sind weggelassen.) Die Gesamtanzahl der Schnittpunkte erhöht bzw. verringert sich als Summe all dieser Einzelfälle dann auch stets um eine gerade Zahl oder bleibt gleich:

1) Die Seitenflächen werden geschnitten, bevor R vom Strahl überstrichen worden ist.



vorher

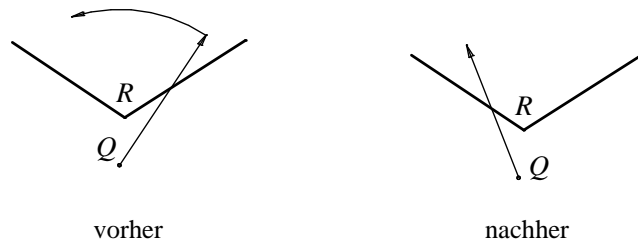


nachher

2) Die Seitenflächen werden geschnitten, nachdem R vom Strahl überstrichen worden ist.



3) Jeweils eine Seitenfläche wird geschnitten, bevor und nachdem R vom Strahl überstrichen worden ist.



In allen Fällen ändert sich die Anzahl stets um ein Vielfaches von 2, die Anzahl bleibt also gerade bzw. ungerade.

Abb. 50

b) Es sei Q beliebiger Punkt des Raumes, der nicht auf P liegt. Daher gibt es einen in Q beginnenden Strahl, der keine Ecke und keinen Punkt einer Kante von P enthält (denn jede Kante bestimmt zusammen mit Q eindeutig eine Ebene, der Strahl darf also nur nicht in einer von endlich vielen Ebenen des Raums liegen). Der Strahl kann in keiner Ebene einer Seitenfläche liegen, weil er ansonsten auch einen Punkt einer Kante enthalten würde. Daher hat der Strahl mit P nur endlich viele gemeinsame Punkte. Die Anzahl ist also entweder gerade oder ungerade. Nach Teil a) kann kein Punkt gerade und ungerade zugleich sein.

c) Es sei B ein Punkt im Inneren einer Seitenfläche des Polyeders. Wähle irgendeine Gerade g durch B , die keinen Punkt einer Kante des Polyeders enthält (das ist möglich, denn jede Kante bestimmt zusammen mit B eindeutig eine Ebene, die Gerade g darf also nur nicht in einer von endlich vielen Ebenen des Raums liegen). Es sei A ein Punkt dieser Geraden, der nicht zum Polyeder gehört. Der Strahl AB enthält nach b) endlich viele Punkte B_1, B_2, \dots, B_r des Polyeders, diese seien sortiert nach steigenden Abständen von A . Im Falle $r = 1$ ist A nach Definition ungerade, im Fall $r > 1$ ist jeder Punkt C auf der Strecke $\overline{B_{r-1}B_r}$ ungerade, da der Strahl CB_r genau einen Punkt des Polyeders enthält. In beiden Fällen ist jeder Punkt D des Strahls AB , der außerhalb der Strecke $\overline{AB_r}$ liegt, gerade, da der nicht A enthaltende Strahl mit Anfangspunkt D , der nicht A enthält, keinen Punkt des Polyeders enthält.

d) Da das Polyeder beschränkt ist (Aufgabe 1.3.5), ist es im Inneren einer Kugel enthalten. Damit sind auch Verbindungsstrecken zwischen Punkten des Polyeders im Inneren dieser Kugel enthalten. Es sei Q ein innerer Punkt und g eine Gerade durch Q , die keine Ecke des Polyeders enthält. Damit enthalten beide in Q beginnenden Halbgeraden von g ungerade viele Punkte des Polyeders, also mindestens einen. Somit liegt Q auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Polyeders und damit im Inneren der Kugel.

e) Enthält der Strahl QR oder RQ keinen Punkt einer Kante des Polyeders, folgt die Behauptung direkt aus der Definition gerader und ungerader Punkte. Anderenfalls sei g eine Gerade durch R , die keinen Punkt einer Kante des Polyeders enthält, insbesondere ungleich der Geraden QR ist und nur endlich viele Punkte von P enthält. Die Gerade h sei anfangs QR und wird dann in der von g und Q bestimmten Ebene etwas um Q gedreht, so dass sie keinen weiteren Punkt einer Kante des Polyeders überstreicht und die Strecke zwischen Q und dem Schnittpunkt S von g und h keine Punkte des Polyeders enthält. Das ist möglich, da das Polyeder die Gerade g nur in endlich vielen Punkten schneidet. Würde man h wieder zurückdrehen, könnte sich die Anzahl der Schnittpunkte der Strecke zwischen Q und dem Schnittpunkt von g und h nur ändern, wenn sie durch Punkte von Kanten des Polyeders geht (vgl. Teil a) oben). Solche Punkte gibt es nicht, da die Strecke \overline{QR} keine Punkte des Polyeders enthält. Damit enthält auch Strecke \overline{QS} keine Punkte von P , somit sind Q und S bzw. S und R , also auch Q und R beide gerade oder beide ungerade (siehe Abb. 51).

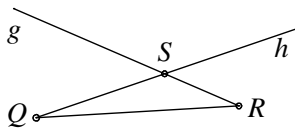


Abb. 51

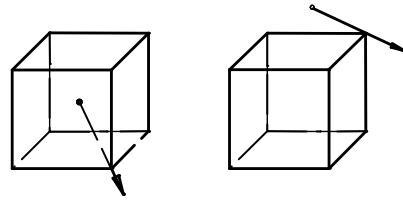


Abb. 52

f) Teil a) von Definition 1.3.4 folgt aus Aufgabenteil b) und c); Teil b) und c) von Definition 1.3.4 folgen aus Aufgabenteil e) bzw. d).

g) Beginnt der Strahl im Mittelpunkt des Würfels, gilt das Kriterium auch, wenn der Strahl eine Ecke oder den Punkt einer Kante enthält. Beginnt der Strahl außerhalb des Würfels und streift den Würfel nur in einer Ecke oder dem Punkt einer Kante, ist das Kriterium nicht erfüllt (Abb. 52).

Zu 1.4.1: Für jeden inneren Punkt I' und jeden von I' ausgehenden Strahl und den einzigen Polyederpunkt R' auf diesem Strahl enthält nach Hilfssatz 1.3.5b) die Strecke $\overline{I'R'}$ außer R' nur innere Punkte des Polyeders. Nun sei g eine Gerade, die nicht in der Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt, aber das Polyeder in Punkten Q, R, T schneidet, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit R auf der Strecke \overline{QT} liegt. Enthält die Gerade g einen inneren Punkt I_0 des Polyeders, muss einer der in I_0 beginnenden Strahlen auf g mehr als einen Punkt des Polyeders enthalten: Widerspruch! Somit enthält die Strecke \overline{QR} einen äußeren Punkt A des Polyeders, und es gibt einen inneren Punkt I außerhalb der Geraden QR (vgl. Abb. 12). Nach Eigenschaft 2 in Definition 1.3.4 enthält die Strecke \overline{AI} einen Punkt S des Polyeders, und die Parallele zu QR durch S schneidet die Strecken \overline{QI} und \overline{RI} in den Punkten J und K . Nach obiger Bemerkung sind auch J und K innere Punkte des Polyeders, so dass der in J beginnende und S nicht enthaltende Strahl auf JK einen weiteren Punkt des Polyeders enthalten müsste. Dieser Punkt läge aber zusätzlich zu S auf dem in K beginnenden Strahl KS , ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Zu 1.4.2: Beweis durch Widerspruch: Es sei g eine Gerade, die nicht in der Ebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt, aber drei Punkte A, B, C des Polyeders enthalte. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liege B auf der Strecke \overline{AC} . Nach Voraussetzung muss die Strecke \overline{AC} vollständig zum Polyeder gehören, damit liegt aber g in der Ebene einer Seitenfläche im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist das Polyeder nach Definition 1.4.4 schnittarm.

Zu 1.4.3: Beweis durch Widerspruch: Angenommen, die Ebene G einer Seitenfläche s schneidet die Strecke \overline{XY} nur in einem inneren Punkt der Strecke \overline{XY} . Es sei I innerer Punkt des Polyeders, der nicht auf XY liegt. Die Ebene IXY schneidet die Ebene G in einer Geraden h , da G nicht X , aber einen Punkt von XY enthält. Nach dem Axiom von PASCH (1.1.3) schneidet h eine der Strecken \overline{IX} und \overline{IY} des Dreiecks IXY , damit läge nach Hilfssatz 1.4.8a) aber ein innerer Punkt des Polyeders auf h und damit auf G im Gegensatz zu Hilfssatz 1.4.7.

Zu 1.4.4: a) Dies folgt sofort aus Hilfssatz 1.4.10 (bzw. Satz 1.4.14), da jede Tetraederkante entweder in einer Tetraederseitenfläche enthalten ist oder mit dieser nur eine Ecke gemeinsam hat.

b) Es sei S die Spitze der Pyramide. Die Ebene der Grundfläche der Pyramide enthält alle Ecken außer S , damit ist Bedingung d) in 1.4.14 erfüllt. Alle anderen Seitenflächen sind Dreiecke mit Ecke S . Es sei SAB eine solche Seitenfläche. Da S in SAB liegt, gehören alle Verbindungsstrecken zwischen S und einer anderen Ecke entweder ganz zur Ebene SAB oder haben nur S mit dieser Ebene gemeinsam. Alle anderen Ecken liegen in der Ebene der Grundfläche. Diese schneidet SAB in der Geraden AB . Da die Grundfläche konvex ist, liegt nach Satz 1.2.16e) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Ecken der Grundfläche entweder auf AB oder hat nur einen Randpunkt mit AB gemeinsam. Damit ist die Bedingung von Satz 1.4.14d) für SAB erfüllt. Diese gilt somit für alle Ebenen von Seitenflächen der Pyramide, die daher konvex ist.

Zu 1.4.5: Es werden die Normalformen der Ebenen der Seitenflächen aus der Lösung von Aufgabe 1.3.2 benutzt. Die Bedingung d) aus Satz 1.4.14 ist äquivalent dazu, dass keine zwei Ecken des Polyeders von diesen Ebenen gerichtete Abstände ungleich Null mit unterschiedlichen Vorzeichen haben können. Für $t > -1$ haben offenbar alle Ecken negativen Abstand oder Abstand 0 von den Ebenen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$. Nun sei $t \geq 1$. Für die Ebene EFK gilt: K liegt in der Ebene und hat daher Abstand 0; für die anderen Punkte des Polyeders gilt $|y| = |z| = 1$ und damit $|(1-t)y + z| \leq |1-t||y| + |z| = |1-t| + 1 = t - 1 + 1 = t$. Es folgt wegen $t > 0$, also auch $r > 0$, für den gerichteten Abstand $((1-t)y + z - t)/r \leq (t-t)/r = 0$. Analoges gilt für die Ebenen FGK , GHK , HEK .

Somit ist das Polyeder konvex. Für $-1 < t < 1$ hat A den gerichteten Abstand $(-(1-t) - 1 - t)/r = -2/r$ und G

den gerichteten Abstand $((1-t) + 1 - t)/r = (2-2t)/r$; beide Abstände sind ungleich 0 und haben wegen $-1 < t < 1$ unterschiedliche Vorzeichen. Daher ist das Polyeder in diesem Fall nicht konvex.

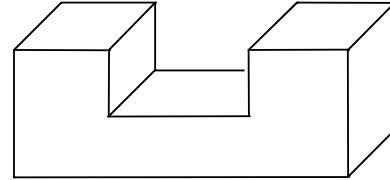


Abb. 53

Zu 1.4.6: Schneidet man das Polyeder aus Abb. 53

mit einer waagrecht Ebene „ganz oben“, dann bekommt man als Schnitt zwei Rechtecke, also 2 Polygone.

Zu 1.4.7:

Offenbar schneidet jede Seitenfläche des Polyeders die Ebene in endlich vielen Punkten, Kanten, Polygonen, Seitenflächen. Es sei S die Schnittmenge von E mit P .

1. Fall: Die Ebene enthält einen inneren Punkt I von P . Dann kann E keine Seitenfläche eines Polyeders enthalten. Der Schnitt S besteht aus endlich vielen Punkten und Strecken. Es wird gezeigt, dass S ein einziges Polygon ist. Es sei S' die Menge der Punkte von S , die keine inneren Punkte von Strecken sind. Offenbar ist S' endlich. Nach Hilfssatz 1.4.8b) enthält jeder von I ausgehende Strahl genau einen Punkt von S . Es sei T_1 ein Punkt von S' . Nun sei T_2 der Punkt von S' , für den der Winkel $\angle T_1IT_2$ minimal ist, wobei man sich um I im mathematisch positiven Sinn nach links dreht. Da im Bereich des Winkels $\angle T_1IT_2$ keine weiteren Randpunkte von Strecken liegen können, gibt es dort nur innere Punkte einer Strecke s . Liegen T_1 und T_2 nicht auf s , müssten die Strahlen IT_1 bzw. IT_2 mehr als einen Punkt von S enthalten. Damit schneidet der Winkel $\angle T_1IT_2$ die Menge S in der Strecke $\overline{T_1T_2}$. Entsprechend sei T_3 der Punkt von S' , für den der Winkel $\angle T_2IT_3$ minimal ist; der Bereich dieses Winkels schneidet S in $\overline{T_2T_3}$. So ergeben sich der Reihe nach die Punkte T_1, T_2, \dots, T_n von S' , und der Schnitt S ist das Polygon $T_1T_2\dots T_n$. Jeder innere Punkt I des Polygons S liegt nach Hilfssatz 1.1.6a) auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte von S (und damit des Polyeders). Damit ist I nach Hilfssatz 1.4.9 innerer Punkt des Polyeders, und nach Hilfssatz 1.4.8b) schneidet jeder von I ausgehende Strahl in E das Polyeder und damit S in genau einem Punkt. Daher ist S nach Satz 1.2.16 konvex.

2. Fall: Die Ebene enthält keinen inneren Punkt I von P . Daher liegt die Verbindungsstrecke zweier Punkte von S vollständig in S . Angenommen, S enthält mindestens zwei Punkte Q und R des Polyeders (ansonsten ist die Behauptung erfüllt). Es bleibt zu zeigen, dass S eine Strecke oder ein konvexes Polygon mit Rand ist. Liegen alle Punkte von S auf einer Geraden, ist somit S eine Strecke. Ansonsten ist offenbar S ein Polygon inklusive seinem Inneren. Jede Gerade durch einen Punkt von S schneidet S in einer Strecke. Das Innere des Polygons sind offenbar die Punkte von S , die nie Randpunkt dieser Strecke sind. Damit ist das Polygon nach Definition 1.2.1 konvex.

Zu 1.4.8:

Jede Ebene, die eine Seitenfläche des konvexen Polyeders enthält, kann das Polyeder nicht nur in einzelnen Punkten oder Strecken oder einem Polygon schneiden. Daher ist der Schnitt nach Satz 1.4.16 ein konvexes Polygon zusammen mit seinem Inneren, also eine konvexe Fläche.

Zu 1.4.9:

Nach Satz 1.4.16 schneidet die Ebene E das Polyeder in einem konvexen Polygon R , und dieses Polygon enthält in seinem Inneren nur innere Punkte des Polyeders (Begründung: Jeder innere Punkt von R gehört nicht zum Polyeder und liegt auf der Verbindungsstrecke von Punkten aus R , also auch von Punkten des Polyeders).

Nach Definition 1.4.1 ist er damit innerer Punkt des Polyeders). Die Ebene E zerteilt das Polyeder in zwei Teilflächen, zusammen mit R und seinem Inneren ergeben sich zwei Polyeder P_1 und P_2 . Insbesondere kann es für keine zwei Punkte S, T von P_1 (bzw. von P_2) vorkommen, dass die Ebene E die Verbindungsstrecke \overline{ST} nur in einem inneren Punkt schneidet. Es wird gezeigt, dass P_1 die Voraussetzungen von Definition 1.4.1 erfüllt und damit konvex ist (analog folgt, dass P_2 konvex ist). Sind nun S, T zwei Punkte von P_1 , gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Fall: S und T (und damit die gesamte Strecke \overline{ST}) liegen im Inneren des Polygons R : Damit gehört \overline{ST} vollständig zu beiden Polyedern.
2. Fall: Entweder S oder T liegen im Inneren des Polygons R : Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liegt T im Inneren des Polygons R , und S liegt nicht in der Ebene E , damit ist T innerer Punkt von P (siehe Abb. 54 mit der Situation in einer Ebene durch ST , die E in der Geraden Q_1Q_2 und R in den Punkten Q_1 und Q_2 schneidet). Die Gerade ST schneidet P nochmals in einem Punkt U . Da das Polyeder P konvex ist, liegen nach Definition 1.4.1 im Inneren der Strecke \overline{SU} nur innere Punkte von P , somit auf dem Inneren von \overline{ST} nur innere Punkte von P_1 .
3. Fall: Weder S noch T liegen im Inneren des Polygons R : Dann enthält das Innere der Strecke \overline{ST} nur Punkte von P_1 oder innere Punkte von P_1 , weil sie nur Punkte von P oder innere Punkte von P enthält.

Zu 2.1.1:

a) Damit eine Gerade senkrecht zu einer Ebene ist, muss sie senkrecht zu zwei sich schneidenden Geraden in der Ebene sein. Dies wird durch die beiden rechten Winkel verdeutlicht.

b) In der Ebene E , in der die beiden Lote verlaufen, bilden die Lotfußpunkte, der Schnittpunkt der Lote und der Schnitt der beiden Ausgangsebenen mit E ein Viereck, das an den beiden Lotfußpunkten zwei rechte Winkel hat. Die Innenwinkelsumme im Viereck ist 360° nach Satz 1.1.13, damit ergänzen sich die beiden übrigen Winkel (Winkel zwischen den Ebenen

und Winkel zwischen den Loten) zu 180° . In der Abbildung wurde der Winkel zwischen den Loten nicht als Innenwinkel des Vierecks gemessen, sondern als dessen Nebenwinkel. Daher stimmen die Winkel in der Abbildung überein.

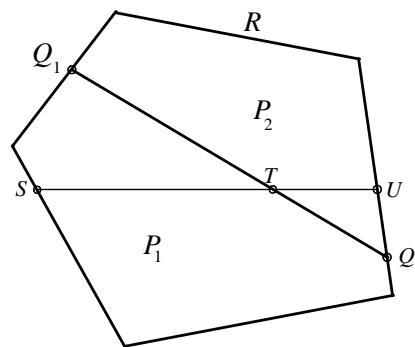


Abb. 54

Zu 2.1.2:

a) Die Bogenlänge ist offenbar proportional zum Winkel. Bei Winkel 360° erhält man einen Vollkreis, die Bogenlänge ist 2π . Daher ist die Bogenlänge zu einem beliebigen Winkel x im Gradmaß gleich $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot x$ im Bogenmaß.

b) Zwei verschiedene Großkreise liegen in Ebenen, die sich in α schneiden mit $0 < \alpha < 180^\circ$. Berücksichtigt man, dass sich zwei Ebenen unter zwei Winkeln schneiden, die sich zu 180° ergänzen und man nur den kleineren von beiden angeben will, dann gilt $0 < \alpha \leq 90^\circ$.

c) $0^\circ < \beta < 360^\circ$

d) C ist der Südpol; damit sind die Bögen AC und BC auf Meridianen, die aufeinander senkrecht stehen. In A kommt der Großkreisbogen BA nördlich vom Breitenkreis durch A an, also ist der Winkel zwischen dem Meridian und dem Großkreisbogen BA größer als 90° . Der Bogen BA trifft den Meridian durch B sicher unter einem Winkel größer als 0° .

D. h. die drei Winkel zusammen sind sicher größer als 180° .

e) O. b. d. A. nehme man an, dass zwei der Großkreisbögen Meridiane sind, die sich maximal unterhalb von 180° schneiden. Der dritte Großkreisbogen steht auf den beiden ersten senkrecht. Damit ist die Winkelsumme kleiner als 360° , kann aber beliebig nahe an 360° herankommen. (Bemerkung: Wird der Winkel zwischen den Meridianen größer als 180° , ist das Kugeldreieck kein EULERSches Kugeldreieck mehr. Man kann zeigen, dass die Innenwinkelsumme der Kugeldreiecke Werte α mit $180^\circ < \alpha < 540^\circ$ annehmen kann).

Zu 2.1.3:

Es sei r der Erdradius. Man spiegele das Kugeldreieck aus Aufgabe 2.1.2d) am Kugeldurchmesser durch den Punkt $(25^\circ\text{w}|0^\circ)$ des Äquators. Damit wird C auf den Nordpol abgebildet, und A und B auf die Punkte $(70^\circ\text{w}|20^\circ\text{n})$ und $(20^\circ\text{ö}|10^\circ\text{s})$. Das ursprüngliche und das gespiegelte Kugeldreieck überdecken also zusammen die Fläche zwischen den sich im Südpol C rechtwinklig schneidenden Meridianen durch A und B , diese Fläche ist nach Hilfssatz 2.1.5 genau $r^2\pi$. Damit hat das Kugeldreieck ABC mehr als die Hälfte dieser Fläche, also $r^2\pi/2$. Nach Satz 2.1.6 gilt dann für die Innenwinkelsumme σ : $\sigma - \pi > \pi/2$, also $\sigma > 3\pi/2$ bzw. im Gradmaß größer als 270° .

Zu 2.2.1: a) Solange der Kugelmittelpunkt Z innerer Punkt des konvexen Polyeders ist, erhält man unabhängig vom Radius der Kugel eine eindeutige Zuordnung ω zwischen den Punkten des Polyeders und der Kugel, weil jeder Strahl ZQ von einem Polyederpunkt Q die Kugel genau einmal trifft.

b) Anders ist dies, wenn Z ein äußerer Punkt des Polyeders ist, da dann viele Strahlen ZQ das Polyeder zweimal treffen, also die Eineindeutigkeit gestört ist (vgl. Aufgabe 1.3.3).

Zu 2.2.2: Hat ein Polyeder kein Loch, entstehen bei jedem ebenen Schnitt zwei neue Seitenflächen. Um ein Polyeder mit einem Loch in zwei Polyeder ohne Loch zu zerschneiden, benötigt man zwei ebene Schnitte, die das Polyeder jeweils in einem Polygon schneiden. Dadurch entstehen bei den beiden Teilen nicht 2, sondern 4 neue Seitenflächen. Das Ausgangspolyeder hat dann zu wenig Seitenflächen.

Zu 3.1: a) $e = 16, f = 12, k = 24$, also $e - k + f = 4$

b) $e = 6, f = 8, k = 11$, also $e - k + f = 3$

c) $e = 7, f = 8, k = 12$, also $e - k + f = 3$

d) $e = 7, f = 9, k = 15$, also $e - k + f = 1$.

Zu 3.2: Das Polyeder der Abb. 40 hat 16 Ecken und Flächen und 32 Kanten, also gilt $e - k + f = 0$. Hat man $n + 1$ kongruente Polyeder dieser Art, legt man sie nebeneinander, so dass sie durch Verschiebung auseinander hervorgehen. Sie haben zusammen $16(n + 1)$ Ecken und Flächen und $32(n + 1)$ Kanten. Nun werden sie zusammengeschoben, so dass Seitenfläche mit Ecken 01, 04, 16, 13 jedes Polyeders außer des ganz links befindlichen die Seitenfläche mit Ecken 05, 08, 12, 09 des jeweils von links benachbarten Polyeders berührt. An diesen Seitenflächen klebt man die Polyeder zusammen (wie in Abschnitt 2.3.2 oben). Bei jedem dieser n Klebevorgänge gehen 2 Seitenflächen, 4 Ecken und 4 Kanten „verloren“, so dass das entstehende Polyeder $e_n = 16(n+1) - 4n$ Ecken, $f_n = 16(n+1) - 2n$ Flächen und $k_n = 32(n+1) - 4n$ Kanten hat. Damit gilt für ein Polyeder mit $z+1$ Löchern: $e_n - k_n + f_n = 16(n+1) - 4n - 32(n+1) + 4n + 16(n+1) - 2n = -2n$

6. Literatur

- | | | |
|-----------------------|-----|--|
| Cauchy, A.-L. | [1] | Recherches sur les Polyédres, 1824. Online verfügbar unter http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k90193x/f13 |
| Coxeter, H. S. M. | [1] | Unvergängliche Geometrie, Birkhäuser Verlag, Basel 1981 |
| Cromwell, P. R. | [1] | Polyhedra, Cambridge University Press, Cambridge 1997 |
| Hame, Rudolf | [1] | Sphärische Trigonometrie, Ehrenwirth Verlag GmbH, München 1997 |
| Keller, H., Meyer Kh. | [1] | Über reguläre und semireguläre Körper, Mathematikinformation Nr. 59 (2013), Seiten 3-43 |
| Legendre, A.-M. | [1] | Éléments de Géométrie, Paris 1794. Spätere Auflage online verfügbar unter https://archive.org/details/lmentsdegomtrie10legegoog ; Deutsche Übersetzung online verfügbar unter: |

- <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN516768018>; hierin: Seite 196, Satz 25
- Massey, W. S. [1] Introduction to Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag New York, Berlin, Heidelberg 1990
- Meyer, Karlhorst [1] Cubus simus, ein chiraler Archimedischer Körper, Mathematikinformation Nr. 60 (2014), Seiten 3-27
- Staudt, Karl [1] Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, siehe <http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;idno=01190001>
- Wikipedia [1] http://de.wikipedia.org/wiki/Eulerscher_Polyedersatz
- Wikipedia [2] <http://de.wikipedia.org/wiki/Catalan-Zahl>
- Wikipedia [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic
- Zwergler-Klug [1] Trigonometrie, Lindauer Verlag, München 1960

Die Internetquellen hat der Autor am 3. März 2015 kontrolliert.

Alle Abbildungen: Dr. Karlhorst Meyer, Neubiberg

Danksagung

Der Autor bedankt sich bei Dr. Karlhorst Meyer für viele Hinweise und Anregungen sowie die Abbildungen, ohne die dieser Artikel nicht in dieser Form möglich gewesen wäre.

Anschrift des Autors:

Dr.
Eric Müller
Kirchdorfer Straße 10
78052 Villingen-Schwenningen

Eingereicht am 8. 5. 2014.