Karlhorst Meyer

Zum Thema kompetenzorientierter Unterricht

Zusammenfassung: Das Forschungsgebiet „Kompetenzen-Bildungsstandards-Modellieren“ hat die Kultusministerkonferenz (abgekürzt: KMK) veranlasst, nach 2000 in allen Bundesländern für alle Schularten neue Lehrpläne vorzustellen und dann einzuführen. Dies ist entsprechend der Kulturhoheit der Bundesländer recht unterschiedlich gelungen, wenngleich viele Formulierungen weitgehend einheitlich sind. In der vorgelegten Publikation wird allerdings in Frage gestellt, ob diese Lehrpläne zu einem besseren Unterricht führen, da die Details viel zu häufig zu vage – auch falsch – und viel zu hochtrabend formuliert sind, vor allem aber den vielseitigen Wunsch nach hinreichend vielen, notwendigen Inhalten der Mathematik nicht erfüllen, obwohl Didaktiker und die Urheber des kompetenzorientierten Unterrichts immer wieder auf diesen Missstand hingewiesen haben.

Da diese Publikation mit einem Vortrag des gleichen Titels an der Technischen Universität Braunschweig[1] im Zusammenhang steht, wird die Untersuchung mit den Kernlehrplänen von Niedersachsen belegt; es könnten aber auch die neuen Lehrpläne der meisten anderen Bundesländer herangezogen werden.

In einem eigenen Kapitel „Was geht, was geht nicht?“ wird gezeigt, wie der in seinem Fach gut ausgebildete Lehrer[2] befähigt wird, manche Lücken des Lehrplans unabhängig von diesem zu schließen.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Verlagerung von Themen und Methoden des Gymnasiums in die Grundschule nicht empfehlenswert ist.

Nahezu einheitlich wollen sich alle Bundesländer zukünftig mehr als bisher mit dem „Output“ der Schüler befassen und darüber hinaus Aufgaben stellen, die komplexer als bisher dem Schüler sein Können und Wissen abverlangen. Leider führen solche Postulate nicht unmittelbar zu einer besseren Schule.

Schließlich fasst der Autor im letzten Kapitel unter „Konsequenzen hinsichtlich der kompetenzorientierten Lehrpläne“ zusammen, was jetzt zu tun ist, wenn man in Mitteleuropa den Stellenwert einer guten, breit angelegten Bildung wieder erreichen will.

1. Moderne Lehrpläne

Literacy
Im Oxford Dictionary [1] findet man: „Quality or state of being literate”. Für “literate” wird angegeben: “Acquainted with letters, educated, learned“. Frei übersetzt geht es also um die Fähigkeit lesen und schreiben zu können. Wikipedia [1] schreibt hierzu: „Literacy is the ability to read and write. The inability to do so is called illiteracy or analphabetism.” In der deutschen Übersetzung findet man für die ursprüngliche Überschrift „Literacy“ schlicht „Alphabetisierung“. Der sich anschließende Artikel befasst sich mit der weltweiten Einführung des Alphabets. Dieser kurze Hinweis zeigt bereits, wie vage der Begriff „literacy“ schon immer gewesen ist.

Deshalb fiel es den Organisatoren **A**ustralian **C**ouncil for **E**ducational **R**esearch (die im Auftrag der **O**rganisation for **E**conomic **C**o-operation and **D**evelopment Paris handelten) bei der Vorbereitung der weltweiten ersten

[1] Kolloqiumsvortrag am Institut für Didaktik der Mathematik der Technischen Universität Braunschweig am 11. 11. 2014
[2] Man möge entschuldigen, wenn der Autor aus Gründen der Lesbarkeit nach Duden jeweils nur die männliche Variante schreibt.

Schülerbefragung **P**rogramme for **I**nternational **S**tudent **A**ssessment nicht schwer, den ursprünglich für die Sprache vorgesehenen Begriff auf das Studium *aller* Wissenschaften und damit auch auf die Mathematik auszudehnen (nach NEUBRAND [1]): „Mathematical literacy is an individual's ability, in dealing with the world, to identify, to understand, to engage in, and to make well-founded judgement about the role that mathematics plays, as needed for that individual's current and future life as a constructive, concerned, and reflective citizen."

In den ersten deutschen Publikationen hierüber, wie z. B. bei NEUBRAND [1] und [2], findet man noch das englische Wort „literacy", später wird es „eingedeutscht" zu „Kompetenzen", wobei dann Wikipedia [2] die Benutzung vom bereits vorher vorhandenen Sprachgebrauch mit der Kapitelüberschrift „Kompetenz (Pädagogik)" deutlich abgrenzt und dann mit der Überschrift „Kompetenz in der Bildungspolitik" noch weiter eingrenzt.

Aus Wikipedia [2] „Kompetenz (Pädagogik)" wird entnommen: „Kompetenzen sind weniger eng auf Anforderungen von Berufen oder Tätigkeiten bezogen (Hinweis: Wie das vorher mit dem Begriff „Qualifikation" der Fall war), sondern allgemeine Dispositionen von Menschen zur Bewältigung bestimmter lebensweltlicher Anforderungen." Man sprach ja früher in diesem Zusammenhang auch von „Schlüsselqualifikationen".

Es geht hierbei um die Förderung der Schüler und damit um Aspekte für den Lehrer. Kompetenzen haben etwas mit dem Erreichen von „Lernzielen" zu tun, wie dies etwa um 1960 z. B. KRATZ U. A. [1] im Rahmen der curricularen Lehrpläne versucht haben. Allerdings werden die damaligen Lernziele erweitert, wie man das etwa nach Wikipedia bei BLOOM [1] findet, wenn er die folgenden kognitiven Kompetenzgrade nennt:

- Wissen
- Verstehen
- Anwenden
- Analyse
- Synthese
- Evaluation

Die ersten drei Punkte sind bisher von nahezu jedem Mathematikunterricht erfüllt worden.

Bereits zu Beginn der Untersuchungen von Kompetenzen in der Pädagogik wird darauf hingewiesen, **dass dies nicht ohne Inhalte, insbesondere ohne Wissen und Können geht;** damit wird man bereits zu den Standards hingeführt.

Oben ist auf das Übersetzungsproblem Englisch – Deutsch hingewiesen worden, einige Mathematiker stört hierbei vor allem, dass für die neuen Begriffsbildungen keine (eindeutigen) Definitionen zu finden sind, ja zur selben Zeit verschiedene Personen recht unterschiedliche Auffassungen über nicht vorhandene Definitionen haben. So findet man in Wikipedia [2] das Folgende:

„Die Unklarheit darüber, welche Kompetenzen in welchem Umfang für ein bestimmtes Lehrziel existieren müssen, kann zu unterschiedlichen Ergebnissen führen (siehe Unterschiede im Abitur). Das Lehrziel wird in diesem Fall von einer sich frei formierten Gruppe von anerkannten und ausgewiesenen Experten des jeweiligen Sachgebietes festgelegt. Allerdings ist es möglich, dass sich zu einem Sachgebiet mehrere Expertengruppen gebildet haben, die zu unterschiedlichen und ggf. sogar widersprüchlichen Anforderungen kommen." Und weiter heißt es dann: „Insbesondere an Universitäten und Hochschulen trifft man auf individuell festgesetzte Lehrzieldefinitionen durch den jeweiligen Professor. Aufgrund der dort geltenden Freiheit in Forschung und Lehre ist der Professor, nicht zuletzt durch seine Expertise, dazu berechtigt."

D. h. es bleibt offen, was mit den heute benutzten Begriffen gemeint ist. Nun kann man sich auf die Ansicht zurückziehen: Was ist Wikipedia schon wert, da die dortigen Autoren und Redakteure in aller Regel nicht erkennbar sind. Man darf hierbei nicht übersehen, dass jeder Leser von Wikipedia leicht in die Texte durch Veränderungen eingreifen kann und allein in Deutschland an die 1000 Mathematik-Didaktiker an den Hochschulen als Experten tätig sind und angenommen werden kann, dass ein Großteil von ihnen diese Texte gelesen hat und offenbar nicht verändern will.

Bei den **Standards** wurde anfangs sehr wohl zwischen Minimalstandards, Regelstandards und Maximalstandards unterschieden. Eigentlich ist letzterer Begriff in der Wissenschaft und dann wohl auch in der Pädagogik Unsinn, denn noch hat die Wissenschaft keine Maxima des Wissens oder Könnens entdeckt. Es gibt wohl auch keine. Es ist aber ansonsten bedauerlich, dass die früher genannte Differenzierung in den neuen Lehrplänen in aller Regel fehlt.

Offenkundig ist die **Parallele zu den Begriffen** der curricularen Lehrpläne, die fortgesetzt werden, allerdings mit neuen Bezeichnungen:

- Lehrziele werden zu Standards,
- Lernziele werden zu Literacy und dann zu Kompetenzen,
- Leistungserhebung beim einzelnen Schüler wird zur Evaluation der Lehrer und der Schule; in beiden Lehrplantypen findet man noch:
- Reproduzieren,
- Zusammenhänge herstellen,
- Verallgemeinern und Reflektieren.

Das Grundziel der beteiligten Didaktiker ist: Weg von den zu vielen Einzelinhalten der Lehrpläne hin zu übergeordneten Erwartungen an die Schüler: **Weg vom Input an die Schüler, hin zum erwarteten Output bei ihnen.**

Hier wird eine sicher gute Idee, die z. B. KRATZ U. A. [1] schon 1960, also viel früher, hatten, erneut aufgegriffen; damals gab es in den curricularen Lehrplänen ein Vorwort, in denen über die Niveaus der Begriffe Lernziel, Leistungserhebung u. a. diskutiert wurde; so explodierte der Seitenumfang der Lehrpläne, wie man das noch heute gewohnt ist. All dies wäre nicht notwendig, wenn man mehr Vertrauen zu den Lehrern hätte und so wieder zum Stil der Lehrpläne vor 1960 zurückkehren könnte, bei denen der Mathematikstoff einer Jahrgangsstufe bezogen auf die einzelne Schulart in 6 bis 8 Druckzeilen festgelegt war, was von Haus aus keine Überfrachtung sein konnte. Es gibt allerdings verschiedenste Gründe, weshalb dies heute nicht mehr so gemacht werden kann. Hierauf soll in der vorliegenden Arbeit nicht eingegangen werden.

Der Hauptvorwurf, den manche Kritiker seit Jahren erheben, besteht in erster Linie darin, dass die noch vorhandenen Standards nicht die Bedürfnisse der Abnehmer der Schüler in den einzelnen Schularten berücksichtigen, ja teilweise bewusst vermeiden. So hört man entsprechende Äußerungen auch von Lehrern: „Was geht mich die Industrie an, ich bin doch nicht Diener des Kapitalismus und lehre das, was die dort brauchen." Die Formulierung der verbliebenen Standards zeigt, dass es sich durch die Bank nur um Minimalstandards handelt. Spricht man betroffene Lehrplanmacher an, so wird in aller Regel so argumentiert, dass Lehrer Akademiker mit Hochschulabschluss sind, die wohl wissen, was man lehren muss um die Kompetenzen zu erreichen. Im Kernlehrplan selbst geht es nur noch um die allgemeine Festlegung des Unterrichtstils für alle Lehrer, die durchaus sehr verschiedene Charaktereigenschaften u. a. haben. Man erhofft damit, bei aller Verschiedenheit der Schüler einer Altersstufe und einer Schulart konform dieselben Kompetenzen zu erreichen, ohne letztere genauer definiert zu haben.

Das Bisherige zeigt im Wesentlichen in Anlehnung an Wikipedia [2], wie es zu den neuen Wortbildungen gekommen ist; es kann aber nicht die Spezialisierung auf die Mathematik weggelassen werden, wo dann weitere Verwirrung gestiftet wird, weil die oben mühsam aufgebaute Unterscheidung in Kompetenzen und Standards nochmals anders aussieht:

Die KMK schreibt in [1]: „Die Bildungsstandards ***ergänzen*** **die sehr kleinschrittig formulierten Lernziele der Lehrpläne**." Man beachte das Wort *ergänzen,* das andeuten will, dass auch weiterhin „die sehr kleinschrittig formulierten inhaltlichen Lernziele" erhalten bleiben. Einerseits findet man, dass „die Bildungsstandards steuern durch Kompetenzen" (siehe Wikipedia [4]) und man braucht vielleicht keine Lernziele mehr; andererseits ergänzen sie die Bildungsstandards nur.

Man findet unter Wikipedia [3] dann die drei Stufen (genannt Dimensionen) für die Bildungsstandards der Mathematik:

- 1. Dimension: 6 mathematische Kompetenzen
- 2. Dimension: 5 mathematische Leitideen
- 3. Dimension: 3 Anforderungsbereiche, die den kognitiven Anspruch von kompetenzorientierten Aufgaben erfassen.

Hierzu:

1. Dimension: Mathematische Kompetenzen:

- **Mathematisch argumentieren:** Bei Wikipedia wird sehr allgemein erklärt: „Beim mathematischen Argumentieren sollen Schüler mathematische Aussagen zu logischen Argumentationsketten verbinden und kritisch bewerten.“ Dieser Satz ist ohne Angaben seines Bezugs zu den Inhalten der Schule sinnlos, denn sonst würde hiermit postuliert, dass der Schüler auch etwa den Satz von GÖDEL kritisch bewerten können muss: „In einem widerspruchsfreien Axiomensystem, das genügend reichhaltig ist, um die Arithmetik (natürliche Zahlen) in der üblichen Weise aufzubauen, und das überdies *hinreichend einfach* ist, gibt es immer Aussagen, die aus diesem weder bewiesen noch widerlegt werden können“ (nach Wikipedia). D. h.: Fast in jeder mathematischen Theorie können Aussagen formuliert werden, deren Wahrheitsgehalt innerhalb der Theorie nicht gezeigt werden kann.
  Obige Formulierung hinsichtlich des „Argumentierens“ bleibt völlig leer, es sei denn die Schüler sind so eine Art Superprofessoren. Hier waren die früheren Lehrplanmacher vorsichtiger.
- **Probleme mathematisch lösen:** Gab es je einen Mathematikunterricht, wo dies nicht geschehen ist? Was soll daran neu sein? Meint man vielleicht, dass Schüler Probleme außerhalb der Mathematik, also z. B. in der Linguistik, mathematisch lösen sollen? Also auch diese Formulierung ist ohne eine Beziehung zu Schulinhalten sinnlos, was auch für Wikipedia gilt, wenn es dort heißt: „Wenn eine Lösungsstruktur nicht offensichtlich ist, ist ein strategisches Vorgehen bei der Bearbeitung notwendig und somit wird die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ gefordert und gefördert. Die Schüler müssen über geeignete Strategien zur Lösung mathematischer Probleme verfügen, die sich bei Problemlöseprozessen allgemein als zielführend erweisen und nicht wie Algorithmen unmittelbar zur Lösung führen“ (Red.: Man ist also doch auf einen Lehrer angewiesen, der weiß, welches Wissen und Können vermittelt werden muss). Die hier getroffene Unterscheidung zwischen Algorithmen und Problemlöseprozessen mag Beweistheoretikern klar sein, wird aber bei herkömmlichem Studium Lehrern unverständlich bleiben. Ich hoffe, dass alle Bundesländer deshalb zumindest für Junglehrer im Referendariat längst das Fach Beweistheorie als verpflichtenden Unterricht eingeführt haben.
  Es steckt in obiger Formulierung noch anderes: Die Didaktik der Mathematik erweckt immer wieder den Eindruck, als wäre das Finden einer Lösungsstrategie an sich das Problem des mathematischen Unterrichts und unabhängig vom Wissen und Können; auch Erfahrungen und Wissen im Finden von Lösungstrategien spielen hierbei offenbar keine Rolle.
- **Mathematisch modellieren:** Wie schlecht die Absicht des mathematischen Modellierens bisher an Schulen auch bei neuem Kernlehrplan funktioniert, konnte man wiederholt in der Mathematikinformation wie etwa bei BAUMANN [1] und WALSER [1] nachlesen.
- **Mathematische Darstellungen verwenden:** Dieser Punkt ist in einem Mathematikunterricht selbstverständlich und sicher nichts Neues. Trotzdem ist nicht klar, was gemeint ist, wenn man etwa das Fach „Darstellungstheorie“ von einem allgemeineren Standpunkt betrachtet. Wikipedia erklärt: „Die Schüler sollen in der Lage sein, Darstellungen mathematischer Gegenstände eigenständig zu erzeugen und vorgegebene Darstellungen mathematisch zu analysieren.“ Auch dieser Satz bleibt unverständlich, wenn man nicht genauer wird, d. h. ihn mit Inhalten der Schularten einschränkt.
- **Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen:** Zunächst bleibt einmal völlig im Unklaren, was mit der Unterscheidung von symbolisch, formal und technisch gemeint ist. Zum anderen bleibt der Begriff für die Schule unbrauchbar, solange nicht die Grenzen seiner Einsetzbarkeit im Unterricht dokumentiert sind. Die Erläuterung von Wikipedia, die sich in diesem Zusammenhang an die alten und heute verpönten Begriffe „Wissen“ und „Können“ verweist, reicht nicht, weil auch Wissen und Können für Schüler mit Grenzen aufgeführt werden müssen.

– **Mathematisch kommunizieren:** Auch das kann nur verstanden werden, wenn aufgeführt wird, in welchem Alter welcher Schüler in welchem Rahmen dies können soll. Bei Wikipedia wird erläutert was allgemein das Wort Kommunizieren bedeutet. Das aber ist nicht das Problem. Gerade in Mathematik gibt es kein Argumentieren ohne Kommunizieren und umgekehrt.

2. Dimension: Mathematische Leitideen:
Diesen Kompetenzen werden **5 Leitideen** zugeordnet. Wikipedia schreibt hierzu: „Diese Leitideen versuchen, die Phänomene zu erfassen, die man sieht, wenn man die Welt mit mathematischen Augen betrachtet.“ Genannt werden:

– Zahl
– Messen
– Raum und Form
– Funktionaler Zusammenhang
– Daten und Zufall

Auch diese Liste ist mathematisch unvollständig, da sie für alle Schularten richtungsweisend benutzt wird und es durchaus schulartspezifische Leitideen gibt:

– In vielen Schularten sind dies einfache algebraische Strukturen, in der Sekundarstufe II könnte man von einem ersten Umgang mit dem Infinitesimalen sprechen usw., was sicher über den Begriff Zahl – wie etwa bei den alten Griechen – hinausgeht.
– Die Vollständigkeit der Zusammenstellung bleibt selbst im Hinblick auf die Erwartungen der Schulabgänger der Hauptschule zufällig, wenn man etwa an Schätzen oder Numerik (in Bezug auf Toleranzen) denkt. Es handelt sich also hier um eine Reduktion auf Bereiche, die an der Schule nicht ausreichend sind.

3. Dimension: Anforderungsbereiche:
Auch hinsichtlich der drei weiter in Kernlehrplänen benutzten **Anforderungsbereiche** kann obige Kritik wiederholt werden, d. h. auch diese Begriffe können sehr leicht durch Überforderungen der Schüler ad absurdum geführt werden. Dabei entsprechen die heutigen Anforderungsbereiche denen der früheren curricularen Lehrpläne (siehe die Klammern):

– Reproduzieren (früher Reproduktion)
– Zusammenhänge herstellen
– Verallgemeinern und Reflektieren (früher Transfer)

Alle drei Bereiche spielten schon bei KRATZ U. A. [1] eine große Rolle und wurden schon damals von den Lehrern nicht verstanden.

Der Leser möge sich an den Anfang von diesem Kapitel erinnern: Moderne Didaktik wollte allein mit den Begriffen literacy und standard die gängigen Lehrpläne ergänzen. Offenbar reicht dies nicht. So wurden für den Mathematikunterricht neben Kompetenzen und Standards noch Dimensionen, Leitideen und Anforderungsbereiche notwendig und doch bleibt die Beschreibung der Unterrichtssituation Flickwerk, das unseren immer noch guten Schülern die Möglichkeit nimmt, sich in der Schule so viel Bildung (also literacy) in Mathematik zuzulegen, um den Übergang zu einem Beruf oder Studium zu schaffen, so problematisch dies schon immer gewesen sein mag.

Beispiele für das Prüfen von Bildungskompetenzen
In Wikipedia [4] findet man unter Messung/Überprüfung von Standards (hier sind wohl die Bildungsstandards gemeint): „Das Erreichen von Standards kann in verschiedenen Formen, mit verschiedenen Instrumenten und zu verschiedenen Zwecken empirisch erhoben werden:

– **Assessment** (z. B. PIS**A**) bezeichnet dabei die Messung eines jeweils erreichten Standes der Kompetenzen zu einem bestimmten Zeitpunkt, zumeist in durchschnittlichem Zugriff bei größeren Gruppen und ohne Beachtung der zu Grunde liegenden individuellen Lernwege.“ Hierbei geht es also um die Leistung des Unterrichts und nicht um die des einzelnen Schülers. Weiter heißt es dann:

- „**Diagnostik** bezeichnet die Erfassung von Kompetenzen mit einem differenzierenden Blick auf die Unterschiede in einzelnen Lernbereichen und auf die (zumeist) individuelle Lernentwicklung“. Scheinbar geht es auch hier mehr um die Leistung des Lehrers als um die des Schülers. Interessant sind die genannten „Lernbereiche“. Was soll und kann der Leser hierunter verstehen? Was sollen Lernbereiche, wenn die Kompetenzen möglichst frei von Inhalten vermittelt werden sollen? Man hat den Eindruck, man ersetzt gewohnte Formulierungen in den einstigen Lehrplänen durch einen Schwall von Begriffen, deren Bedeutung im Dunkeln bleibt und hofft, dass dadurch möglichst viel Licht in die Schule kommt. Wikipedia [4] fährt fort:
- „**Evaluation** bezeichnet die Messung des Erreichens von Kompetenzniveaus bzw. ihrer Veränderung in Abhängigkeit von ergriffenen Maßnahmen. Dabei wird mehr über die Eignung der Maßnahmen (z. B. Unterrichtsmethoden, Materialien usw.) ausgesagt als über die Leistung des einzelnen Schülers.“

Soll man nun begrüßen, dass der einzelne Schüler von all den neuen Bewertungsmaßnahmen unbehelligt bleibt? Nun ja, es geht auch nicht um den einzelnen Schüler, sondern um das Wie des Unterrichtsgeschehens. Das ist in der Tat ein **neuer und erfreulicher Standpunkt**. Nur verstehe ich dann nicht, weshalb die einzelnen Bundesländer bei der Formulierung ihrer Kernlehrpläne nicht darauf geachtet haben, klarzustellen, wie der Schüler und wie oft er welche Prüfungen ablegen muss, um Zeugnisnoten für ihn ganz persönlich zu erhalten. Allerdings haben mittlerweile eine ganze Reihe von Didaktikern sich mit dem Prüfen von Schülern hinsichtlich der Kompetenzen befasst; stellvertretend hierfür sei erwähnt GABRIELE KAISER UND BJÖRN SCHWARZ [1].

Resümee:
Wichtigster Ausgangspunkt der Entwicklung ist wohl der PISA-Schock gewesen, der gezeigt hat, dass irgendetwas mit den Schulen nicht mehr stimmt. Der Missstand hat zu neuen Didaktikbegriffen geführt, die durchaus nicht einheitlich genutzt werden (siehe frei nach Wikipedia [2]: Jeder Professor hat seine eigene Definition, die ihm aber auch dank seiner Freiheit der Lehre zusteht). Man muss eingestehen, dass die neuen Begriffe nichts mit einer Reduktion von Können und Wissen zu tun haben, auch wenn gelegentlich einige beteiligte Lehrplanmacher diesen Anschein hervorrufen. So gibt es einen weiteren **versteckten Ausgangspunkt**, der mit der Grundidee nichts zu tun hat**:** Immer mehr Lehrer unterrichten trotz der Lehrplanreduktionen die Topics der Lehrpläne oder auch Schulbücher am Ende des Schuljahres dort, wo sie zu Ostern hätten sein sollen. Man hat leider nicht die Ursachen für das Fehlverhalten der Lehrer untersucht, sondern einfach dem Druck im Klassenzimmer nachgegeben und die Inhalte der Schule „entfrachtet“. Das hat aber mit dem Ausgangspunkt der „literacy“ absolut nichts zu tun, auch wenn gelegentlich dieser Eindruck erweckt wird.

So ist es besonders bedauerlich, wenn einem namhaften Didaktiker wie PRENZEL, der offenbar auch ein Verfechter des G8 ist, in einem Interview mit der Süddeutschen Zeitung (PREUSS [1]) bezüglich des Hinweises, dass sich die Schulfamilie in der G8 überlastet fühlt, antwortet: „Es wird oberflächlich gelehrt und gelernt. Es wird nur für die Prüfungen vermittelt und dann wieder vergessen. Dies hat sich im G8 verschärft, weil man den Stoff von neun auf acht Jahren verdichtet hat. (Hinweis der Redaktion: Das entspricht nicht den Tatsachen: Der Stoff wurde zum Teil sogar sinnlos gekürzt.) Auf dieses Problem haben wir Bildungsforscher oft aufmerksam gemacht.“
„ Wir müssen noch mal prüfen, was wirklich verstanden werden muss und was vielleicht auch vergessen werden kann….“ Schließlich wird PRENZEL nach der Zwischenfrage „Was heißt das konkret?“ genauer: „Weniger Stoff lehren, aber mehr darauf achten, was gelernt wird.“ D. h. der große Bildungsforscher kennt auch nur Lehrplanreduktionen zur Lösung der Bildungsprobleme, worunter offenbar auch er versteht, nur noch das zu lehren, was alle Schüler – insbesondere am Gymnasium – verstehen und sich merken können. Hier wird völlig übersehen: **Die Gymnasien sind und müssen auch Ausleseschulen bleiben.**

Didaktiker oder Ministeriale, denen man diesbezüglich ein falsches Verhalten vorwirft, weisen dies ab und ziehen sich auf die Bemerkung zurück, dass die zu niedrig angesetzten Standards nur zum Erklären der Kompetenzen erforderlich sind. Es wird also nicht behauptet, dass höhere zumindest weitere Standards für die Schule keine Rolle spielen. Man äußert: „Jeder Lehrer weiß als Akademiker, welche Inhalte er zu lehren hat.“ **Die Behauptung, dass moderne Kernlehrpläne Schuld an zu geringem Wissen und Können der Schulabgänger haben, ist also falsch.** Zwei Zitate sollen belegen, dass man zu Beginn der Debatte über die kompetenzorientierten

Kernlehrpläne durchaus noch der Meinung war, dass die Lehrer in der Lage sind, ohne äußere Vorschriften zu den Kompetenzen passende Inhalte zu ergänzen und damit **Können *und* Wissen** zu vermitteln. 2004 schreiben BARZEL U. A. [1]: „Die Fragen der Lernplaninterpretation resümierend darf man sagen, dass es bei den Kernlehrplänen mehr als zuvor darauf ankommt, mit Lehrern gemeinsam den Paradigmenwechsel (Ergänzung: etwa von den inhaltlichen zu den kompetenzorientierten Lehrplänen) vor Ort umzusetzen, die Praktiker zu überzeugen, die Expertise der Einzelnen zu nutzen und Lehrerinnen in ihrer Professionalität zu stärken." Eine andere Stelle aus dem gleichen Jahr zielt darauf ab, dass man dem Lehrer hierzu hinreichend Zeit zur Verfügung stellen muss. Bei BESCHERER [1] findet man den Satz: „Voraussetzung ist hierbei, dass die Bildungsstandards den Schulen bzw. den Lehrerinnen und Lehrern noch einen gewissen Freiraum für *eigene* curriculare Entscheidungen überlassen."

Hieraus ergibt sich auch heute noch eine „gewisse" **Freiheit der Lehre** an den Schulen: Der Lehrer darf ergänzen, wo er glaubt, dass dies erforderlich und möglich ist. So gibt es Bundesländer, die den einzelnen Fachbereich der jeweiligen Schulen beauftragen, unabhängig von einer übergeordneten Instanz die zu unterrichtenden Inhalte festzulegen. Diese Großzügigkeit solcher Kultusministerien erzeugt im Laufe der Zeit eine unüberschaubare Vielfalt an Wissen und Können, dass kaum mehr beurteilt werden kann, was der einzelne Schulabgänger erworben hat.
Der Lehrplan – auch der anhand von Kompetenzen – schreibt also nicht alles vor; allerdings wenn es dann um Prüfungen geht, darf nichts vorkommen, was nicht im Kompetenzplan irgendwie herausgelesen werden kann. In diesem Zusammenhang wäre eine Verordnung in allen Bundesländern sinnvoll, der man entnehmen kann, dass die in den Kompetenzplänen genannten Standards auch in Prüfungen überschritten werden dürfen.

Der neue Weg scheint ein altes Problem der Didaktik zu lösen: Da heute nur noch das, was beim Schüler herauskommt (Output) in Verordnungen festgehalten wird, scheint dies der richtige Weg zu sein, dass jeder Schüler die Chance bekommt, die bisher gelehrten „Nur"-Inhalte selbstständig ohne Hilfe eines Lehrers zu entdecken und sich zu merken. Auch hierin steckt ein Irrglaube, den ich an drei Beispielen andeuten will:

- Wenn so manch einer glaubt, Kinder können die Zahl null selbstständig entdecken, so werden die Lernenden in aller Regel dabei doch – von einem Lehrer – gezielt hingeführt werden müssen, etwa durch die Bemerkung: „Welchen Wert hat die Außentemperatur, wenn sie zunächst plus 1 Grad Celsius beträgt und um 1 Grad sinkt?" Aus nicht geklärten Umständen sind zwar einige Völker (z. B. die mittelamerikanischen Mayas) auf die Zahl null gekommen, man sollte aber nicht übersehen, dass auch heute noch bei dem gregorianischen Kalender auf das Jahr 1 vor Christus das Jahr 1 nach Christus folgt, also das Jahr null übersehen ist.
- 2000 Jahre Forschung waren nötig, bis der Mensch durch Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie den Stellenwert der Winkeleigenschaften an parallelen Geraden (durch LOBATSCHEWSKY bzw. BOLYAI) verstanden, also diesbezüglich eine Kompetenz erhalten hat.
- 3000 Jahre hat der Mensch den Satz des PYTHAGORAS gekannt, bis man ihn vermutlich gänzlich verstand und die Voraussetzungen der Geometrien überblickte (siehe z. B. MEYER [1]), in denen so gemessen werden kann. So lässt sich in sehr allgemeinen Geometrien, nämlich in endlichdimensionalen, atomaren, semimodularen Verbänden beweisen, dass die Einführung eines Senkrechtstehens $\perp$ mit der Eigenschaft aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$, den Verband modular werden lässt und damit nach BIRKHOFF [1] Seite 92 der Verband die Teilräume eines projektiven Raums darstellt oder eingebettet werden kann. Falls die Dimension größer als 2 ist, kann also der Gesamtraum mit einem Körper koordinatisiert werden und man hat nach ARTIN [1] eine Metrik, die entweder unitär oder symplektisch oder orthogonal ist. Bei letzterer entspricht die Metrik der eines verallgemeinerten Lehrsatzes von PYTHAGORAS.

Da sind gerade die Didaktiker der Mathematik so stolz auf ihre guten Verbindungen zur Psychologie und Allgemeinpädagogik und vergessen doch bei ihren Formulierungen mit Kompetenzen und Standards, dass es auch mit diesen nicht möglich sein wird, allen Schülern mit dem z. B. erreichten zehnten Lebensjahr gewisse Kompetenzen und Standards zu geben. Jedem Kind ist seine eigene Entwicklung, auch zeitlich, erlaubt. Aus diesem Grund war und ist es legitim, ein Klassenziel nicht zu erreichen. Das Kind hat dann die Chance eines Wiederholungsjahres, was in aller Regel zum gewünschten Erfolg führt. Man kann die Angewohnheit der Kernlehrpläne, Kompetenzen im Abstand von 2 Jahren zu formulieren, nicht als Berücksichtigung der Entwicklung des Jugendlichen sehen, da die akzeptablen Verzögerungen beim Entstehen von Bildung bei einzelnen Jugendlichen durchaus größere Unterschiede als 2 Jahre aufweisen können.

Auch können Lehrer bestätigen, dass es u. U. vorübergehend reicht, wenn ein Schüler zumindest auswendig so viel gelernt hat, dass er Standardaufgaben lösen kann und ihm auf diese Weise gestattet wird, ein höheres Problemniveau zu erreichen. Erfahrungsgemäß stellen sich dann häufig die zunächst nicht erreichten Kompetenzen etwas später ein.

Wie wirken sich nun diese allgemeinen Grundlagen auf moderne Lehrpläne aus?

2. Kernlehrpläne in Niedersachsen

Wenn so manch eine Formulierung in den Verordnungen für das Lehrerverhalten beim Unterrichten nicht optimal gelungen ist, so kann doch festgestellt werden, insgesamt geben die modernen Begriffe dem Unterricht inneren Halt. Auch ist es sehr erfreulich, dass die Kultusministerkonferenz erfolgreich fast in allen 16 Bundesländern sehr ähnliche Formulierungen durchsetzt und so unnötige Unterschiede in den deutschen Lehrplänen ein Ende bereitet.

Auch wenn beim Lesen der bisherigen Abhandlung eine gewisse Unzufriedenheit des Autors zu spüren ist, muss jetzt auseinander gesetzt werden, worin diese besteht. Es ist naheliegend, bei einem Vortrag an der TU Braunschweig diesbezüglich über die Situation in Niedersachsen (Niedersachsen [1] bis [5]) zu sprechen. Vorab muss allerdings betont werden, die folgende Kritik trifft im Kern ebenso die entsprechenden Lehrpläne anderer Bundesländer, z. B. Nordrhein-Westfalen. Um das Weitere halbwegs korrekt wiedergeben zu können, ist die Beschränkung auf Niedersachsen sinnvoll, man möge mein Vorgehen von der Lehrerschaft in diesem Bundesland entschuldigen.

Nach wie vor sind auch die Kernlehrpläne **Ausschreibungstexte für Schulbuchautoren**. Inwieweit diesen Autoren die hierdurch gestellte Aufgabe gelingt, zeigt dann ein eigenes Genehmigungsverfahren. Auch hierbei unterscheiden sich die einzelnen Bundesländer nur marginal. Hinsichtlich der Forderungen an einen zukünftigen Lehrplan findet man zwar hervorragend gelungene Formulierungen, nur leider findet man zu wenige Hinweise, wie diese Forderungen erreicht werden. Man erwartet – wie in der wissenschaftlichen Didaktik auch an anderer Stelle – dass der Lehrer selbstständig die mit durchaus wissenschaftlich nicht korrekten Begriffsbildungen festgeschriebenen Forderungen sehr zeitaufwändig in Unterricht verwandelt. Leider verfügt der Lehrer nicht über die hierzu erforderliche Arbeitszeit.

2.1 Kernlehrpläne

Die Wortbildung „Kernlehrpläne“ lässt zunächst vermuten, dass weitere Verordnungen – quasi im Detail – vorhanden sind. In der Tat findet man im Internet für Niedersachsen viele weitere Papiere zur Planung der einzelnen Unterrichtsstunden oder einer Sequenz aus solchen, deren Formulierungen aber erkennen lassen, dass ihnen nicht der Stellenwert eines „Lehrplans“, also einer verbindlichen Verordnung, zusteht. D. h. allein die „Kernlehrpläne“ sind verbindlich und werden deshalb im Folgenden untersucht. Man kann hier auch noch ergänzen, dass alle weiteren Empfehlungen, soweit ich sie gelesen habe, kaum mathematische Inhalte zeigen, die über die wenigen in den Kernlehrplänen genannten hinausgehen.

Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich auf die Kernlehrpläne in Mathematik für Niedersachsen. Es gibt sie entsprechend dem gegliederten Schulsystem, also für Grundschule (Niedersachsen [1]), Hauptschule (Niedersachsen [2]), Realschule (Niedersachsen [3]) und Gymnasium (bei letzterem getrennt für Sekundarstufe I (Niedersachsen [4]) und II (Niedersachsen [5])). Im Hinblick auf die Zuhörerschaft in Braunschweig werden im Weiteren die Kernlehrpläne für das Gymnasium nicht berücksichtigt, wobei aber bemerkt werden kann, dass auch hierbei ganz ähnliche Kritikpunkte zutage treten, wie sie bei den anderen Kernlehrplänen beobachtet werden können.

Alle Lehrpläne beginnen mit demselben zweiseitigen Text: „Allgemeine Informationen zu den niedersächsischen Kerncurricula“. Wenn in obigem Kapitel 1 zu lesen ist, dass man von sturem Anwenden von Wissen und Verfahren zukünftig Abstand nehmen will und sich mehr als früher um den „Output“ bei den Kindern hinsichtlich ihrer erworbenen Kompetenzen, besser Bildung, kümmern will, ist es sehr erfreulich für den Kritiker, festzustellen, dass im gemeinsamen Vorwort der niedersächsischen Kernlehrpläne zu lesen ist: „Kompetenzerwerb zeigt sich darin, dass zunehmend **komplexere Aufgabenstellungen** gelöst werden können. Deren Bewältigung setzt **gesichertes Wissen und die Kenntnis und Anwendung fachbezogener Verfahren** voraus.“ Dann folgt u. a.: „Schülerinnen und Schüler sind kompetent, wenn sie zur Bewältigung von Anforderungssituationen **auf vorhandenes Wissen zurückgreifen**, **…**“. Hierzu die folgenden Bemerkungen:

- Die komplexeren Aufgabenstellungen waren schon immer Ziel eines guten Unterrichts. Die hierzu erforderliche Fähigkeit **Strategien zu entwickeln** war auch immer schon der Knackpunkt, der hoffentlich zukünftig erfolgreicher als früher in *allen* Bundesländern verfolgt werden wird.
- Unerfreulich ist in den Kernlehrplänen von Niedersachsen, dass dieser Text für alle Schulformen gleichermaßen formuliert wird, obwohl alle Lehrer wissen, wie gewaltig die Unterschiede zwischen Grundschule und Sekundarstufe II in der Verwirklichung der genannten Ziele sind. So zeigt sich bereits auf Seite 5 all dieser Lehrpläne ihre Unzulänglichkeit: Man ist bemüht, aus dem übergeordneten Standpunkt der Kompetenzen – besser Bildung – die Probleme ohne Sachinhalte zu fixieren und schafft so den Hauptangriffspunkt für Kritik.
- Man bezieht sich zwar auf ein jeweils vorher „erworbenes Wissen“, schreibt aber im folgenden Lehrplantext nur sehr unvollständig oder gar nicht, worin dieses Wissen bestehen soll.

Die Unterschiede zwischen den Kernlehrplänen von Haupt- und Realschule (Niedersachsen [2] und [3]) sind gering; deshalb wird im Folgenden vor allem Kritik an dem Lehrplan für die Grundschule und die Realschule geübt.

2.2 Kernlehrplan für die Grundschule

Unter „1. Bildungsbeitrag des Fachs Mathematik“ findet man in (Niedersachsen [1]) „Mathematikunterricht in der Grundschule trägt durch folgende Aspekte zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei:

- Befähigung zur praktischen Lebensbewältigung
- Befähigung zur Wahrnehmung der Mathematik als Kulturgut
- Befähigung zum strukturellen Denken und zum kritischen Vernunftgebrauch
- Befähigung zum sozialen Handeln“

Unberücksichtigt bleibt hierbei, inwieweit diese Aufzählung vollständig ist. Auch im Folgetext, der versucht, die einzelnen Punkte zu erklären, wird zwar angedeutet, dass es zur Bewältigung dieser Aspekte Grenzen gibt, sie werden aber nicht aufgezeigt. Kinder wie Eltern haben vor Dingen, die sie nicht beherrschen, eine von Ehrfurcht geprägte Grundhaltung, u. U auch dann, wenn es sich nur um die Nutzung der Grundrechenarten handelt, was aber den Satz „Die Schülerinnen und Schüler *erkennen* die Mathematik als ein mächtiges, aber auch begrenztes Werkzeug zur Beschreibung der Umwelt“ nicht rechtfertigt. In der Schule und schon gar nicht in der Grundschule darf es zum Aufzeigen der „Macht der Mathematik“ kommen; und wo die Grenzen der Mathematik „zur Beschreibung der Umwelt“ liegen, weiß die forschende Mathematik bis heute nicht. **Etwas bescheidenere Formulierungen wären der Schulsituation angemessener**, was auch an anderer Stelle zu bemängeln ist. Jedenfalls wird im Folgenden zu zeigen sein, dass vieles aus dem Mathematikunterricht in der Grundschule heute das Einüben des einfachen Rechnens u. a. verhindert.

Analoges gilt für den folgenden Absatz „Befähigung zum sozialen Handeln: Die Schülerinnen und Schüler lernen im Mathematikunterricht zunehmend, Ziele im Einklang mit sich und anderen zu verfolgen….“ Sicher, auch der Mathematiklehrer trägt zu diesem Sozialverhalten bei. Das Problem ist nur, wie er dies erreicht. Hierzu findet man aber keine Hinweise. So bleibt es leider nur bei einer Absichtserklärung, die hoffentlich nicht das Abschreiben bzw. Abschreiben-lassen als soziale Handlungen versteht.

Im Kapitel 2 von Niedersachsen [1] bezieht man sich auf die in der Vorschule erworbenen Kompetenzen, ohne solche zu nennen bzw. eine Literaturstelle anzugeben, in der man nachlesen kann, worin diese bestehen. Da erfahrungsgemäß ein Lehrerkollegium erst nach 20 Jahren völlig erneuert ist, kann man wohl davon ausgehen, dass eine exakte Definition der dann erwähnten „**Hervorhebung der prozessbezogenen Kompetenzen**“ Lehrern weitgehend aus dem Studium unbekannt sind und auch bleiben, weil diese Kompetenzen im Kernlehrplan nicht definiert werden. Hierfür reichen die angegebenen Sätze im Rahmen der „Allgemeinen Informationen …“ sicher nicht, wie ich exemplarisch auseinander setzen will:

- „Fachspezifische Methoden und Verfahren kennen und zur Erkenntnisgewinnung nutzen.“ Woher soll ein Schüler aus einem Mathematikunterricht solches kennen? Seine Erfahrungen werden stets an ganz konkrete Inhalte gebunden sein. Der Lehrer kann auf sich stolz sein, wenn viele Schüler diese inhaltsbezogenen Erfahrungen bei Analogfällen anwenden können. Ich weiß, dieser Lehrplan geht von ganz konkreten Aufgaben des Grundschulunterrichts aus und verallgemeinert so, dass ein Satz entsteht, der nicht weiter verallgemeinert werden kann. Das bringt dem Kollegen für seinen Unterricht wenig, da er ja nicht erraten kann, an was der Lehrplanschreiber an dieser Stelle gedacht hat.
- „Verfahren zum selbstständigen Lernen und zur Reflexion über Lernprozesse kennen und einsetzen.“ Auch hier wäre eine bescheidenere Ausdrucksweise angebracht. Man könnte so vielleicht schreiben, um was es eigentlich geht.

Im Kapitel 2 von Niedersachsen [1] findet man mit guten Formulierungen einiges zur Unterrichtsgestaltung. Man beschreibt das Spiralprinzip beim Lernen und Lehren ohne es zu nennen. Man schreibt „Das Anknüpfen an die bereits erworbenen Fertigkeiten, Fähigkeiten und Kenntnisse, die individuell ausgebildet sind, unterstützt die Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten.“ Das ist wohl ein feines Ziel, der Lehrer weiß allerdings, dass gerade unterschiedliche Lernsituationen – und dies gerade an der Grundschule – dazu führen, dass je nach dem Lehrerverhalten entweder die „Zurückgelassenen“ oder die „Rascheren“ aussteigen und mit Unfug das Unterrichtsgeschehen erheblich stören. Eine „Bereitschaft zur Auseinandersetzung“ ist zwar ein Postulat, besteht aber nur sehr begrenzt und dann nur bei einer Gruppe der Schüler; eine solche Bereitschaft kann sich sehr schnell in Mobbing weitab von den mathematischen Inhalten verwandeln. Der Kernlehrplan postuliert indirekt in diesem Zusammenhang eine innere Differenzierung des Unterrichts, doch hat man das hierzu erforderliche Material nicht angegeben. Darüber hinaus ist eine solche Differenzierung von dem rechtzeitigen Erkennen der Situation durch den Lehrer und dann von seiner Intuition, das Richtige zu tun, abhängig. Und hierüber schreibt der Lehrplan nichts; man kann nur hoffen, dass die Lehrplanmacher seit langem diesbezügliche Fortbildung für die betroffenen Lehrer flächendeckend in ganz Niedersachsen eingerichtet haben.

Weiter heißt es: „Der Umgang mit konkretem Veranschaulichungsmaterial ermöglicht Schülerinnen und Schülern,“ – man müsste ergänzen: „im Rahmen der Grundrechenarten“ und weiter – „mentale Vorstellungsbilder zu entwickeln, die sie befähigen, auf Veranschaulichungsmittel nach und nach zu verzichten“. Selbstverständlich muss der Unterricht z. B. bei der Addition bemüht sein, bei immer mehr Schülerinnen und Schülern einer Klasse die Zurückführung auf das Auszählen von Kardinalitäten mit z. B. Mengenblättchen oder mit den Fingern zu verzichten. Die Art, wie der entsprechende Satz im Lehrplan steht, lässt aber vermuten, dass hiermit eine grundsätzliche Eigenart der Mathematik beschrieben wird. Das ist falsch, wie die forschende Mathematik immer wieder zeigt: Neue Erkenntnisse werden auch heute noch anhand von „Materialien“ entdeckt, d. h. Zusammenhänge werden exemplarisch sichtbar, die dann erst im Anschluss abstrahiert, begründet und u. U. verallgemeinert werden.

Ein bisschen weiter unten kommt ein Satz der sehr gefährlich ist und dessen **Streichung aus dem Kernlehrplan unbedingt** gefordert werden muss: „Fehler werden zugelassen, aufgenommen und als wichtig für den Lernprozess erachtet“, vermutlich in Anlehnung an die Binsenweisheit: „Aus Fehlern lernt man.“ Zu viele vorgeführte Fehler in einer Klasse erzeugen Schüler, die nicht mehr das Richtige erkennen. Sicher, Fehler müssen besprochen werden, wenn es aber zu viele Varianten werden, entsteht Verwirrung. D. h. wenn ein Lehrplan schon das Besprechen von Fehlern erwähnt, muss er auch hinzufügen, dass es ungeschickt ist, alle Fehler, die gemacht worden sind, auszubreiten. Auch werden in aller Regel sehr schnell die Namen derer bekannt, die die Fehler gemacht haben, was für den einzelnen Schüler sehr blamabel sein kann. Es ist also aus mehreren Gründen beim Vorführen von Fehlern Vorsicht angebracht.

Unter „Üben und Vertiefen" findet man u. a.: „Erst wenn Vorstellungen entwickelt sind und das Verständnis der Rechenstrategien vorliegt, können Fertigkeiten durch formales Üben automatisiert werden." Auch hier geht es um eine Wunschvorstellung, die durchaus aus Sicht der Pädagogik vernünftig ist. Lehrer mit Erfahrung aber wissen, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler so zur selben Zeit zum Formalisieren hingeführt werden können, aber durchaus unter ihnen Schüler existieren, die ein Verständnis z. B. für das Addieren erhalten, wenn sie zuerst formales Rechnen erlernt haben und dann z. B. im Rahmen einer anschließenden Anwendungsaufgabe plötzlich erkennen, was sie mit Addition erreichen.

Unklar bleibt, was für die Schüler ein „didaktisch reflektierter Einsatz" hinsichtlich der Rechnernutzung bedeutet. Tatsache ist, dass eine parallele Nutzung von Taschenrechnern oder Computern beim Erlernen der Grundrechenarten kontraproduktiv ist. Ein Lehrer kann „händisches" Addieren von Zahlen nicht als Vorteil preisen, wenn ein paar Knöpfchendrucke dies sicherer und schneller erscheinen lassen, es sei denn, man legt grundsätzlich keinen Wert mehr auf händisches Rechnen. Ganz Analoges muss hinsichtlich der Nutzung von „neuen Medien" im Mathematikunterricht der Grundschule bemerkt werden. Zunächst ist nichts zu beanstanden, wenn an einer konkreten Stelle für das Unterrichtsgeschehen z. B. ein passender Film vorgeführt wird. Den Einsatz aber von audiovisuellen und neuen Medien, wie etwa Computer grundsätzlich zu empfehlen, halte ich für eine Fehlleistung auch gegenüber der gängigen Unsitte, Kindern im Grundschulalter zu viel Fernsehen zu gestatten.

In dem Absatz „Beispiele für Aufgaben zum Bereich Darstellen" werden Methoden zum Darstellen einfacher stochastischer Untersuchungen (Würfel u. ä.) aufgeführt. Hiermit gibt man sich durchaus modern: Das, was noch vor 20 Jahren in der Kollegstufe 18-Jährigen Kopfzerbrechen machte, packt man jetzt in die Grundschule. Man übersieht die Gefahr der **Überfrachtung der Grundschule**, wenn alles was möglich ist, hineingepackt wird und dabei völlig außer Acht bleibt, dass erst in späteren Jahrgangsstufen z. B. solche Darstellungen dank des dann vorhandenen Bruchrechnens *genutzt* werden können. Schüler stellen später zu Recht fest: „Ist das wieder heute ein langweiliger Unterricht, dem Lehrer fällt nichts Neues mehr ein; das kennen wir längst schon alles aus unserer Grundschulzeit" – wirklich alles? Man kann natürlich auch kurz feststellen, die Vorwegnahme aller Highlights aus Folgeklassen ist dem späteren Lehrer gegenüber unkollegial.

Der Sinn der Basisaufgabe auf Seite 12 von Niedersachsen [1], vor allem die Gegenüberstellung von 29 + 8 und 17 + 80, bleibt mir verborgen. Erst erhebliche Ideen des Lehrers werden sie in Unterricht verwandeln. Wird das damit verbundene Mathematische nicht besser durch die Gegenüberstellung 39 + 8 und 39 + 80 gewonnen?

Da wohl auch in Niedersachsen anzunehmen ist, dass die Lehrer noch recht unsicher der neuen Ausdrucksweise mit Kompetenzen und Standards gegenüberstehen, ist Kapitel 3 von Niedersachsen [1] viel zu ungenau formuliert, weil nicht auf den unterschiedlichen Zeitablauf beim einzelnen Schüler Bezug genommen wird. So werden z. B. aufgeführt:

„Von Kompetenz kann gesprochen werden, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten nutzen, um

- auf vorhandenes Wissen zurückzugreifen bzw. sich Wissen zu beschaffen,
- zentrale mathematische Zusammenhänge zu verstehen,
- angemessene Handlungsentscheidungen zu treffen,
- bei der Durchführung der Handlungen auf verfügbare Fertigkeiten zurückzugreifen,
- Erfahrungen zu sammeln und zu angemessenem Handeln motiviert sind."

Das pädagogische Problem besteht nicht darin, als Lehrer diese Punkte bei der Klasse erreichen zu wollen, sondern darin, was man als Lehrer unternehmen kann, falls dies beim einzelnen Schüler nicht gelingt. Solche Listen führen dazu, die einzelnen Punkte im Unterricht dreimal anzusteuern und dann eben anzunehmen, dass alle Schüler endlich bei einem 4. Beispiel das Ziel ohne Hilfe erreichen. Das kann nicht der Fortschritt im Erreichen von Bildung durch Kompetenzen sein. In diesem Zusammenhang kommt es nicht von ungefähr, dass in der folgenden Graphik auf Seite 13 in Niedersachen [1] die Beziehungen *zwischen* den oben mit Punkten gekennzeichneten Inhalten weggelassen sind. Nicht die genannten Inhalte sind beim Unterrichten das Problem, sondern die Bezüge zwischen ihnen und wie gesagt die Frage: Was kann man als Lehrer unternehmen, wenn es nicht bei allen Schülern gleichzeitig klappt? Mir ist natürlich als Lehrer bekannt, dass trotz moderner Didaktik nie bei allen Schülern alle erwarteten Kompetenzen erreicht werden können. Also ergibt sich daraus eine weitere Forderung: **Wann darf der Lehrer seine Bemühungen um eine Kompetenz abbrechen?**

Schließlich kommen in **Kapitel 4** von Niedersachsen [1] „Erwartete Kompetenzen“ die eigentlichen Inhalte. Streng genommen passt die Überschrift nicht, denn auch in den vorausgegangenen Kapiteln ging es wohl um erwartete Kompetenzen. Insgesamt trifft auch hier die bereits ausgesprochene Kritik zu:

Die einzelnen Sätze des Kernlehrplans sind zu global abgefasst, somit häufig überheblich; ein Beispiel von Seite 15: „Die Schülerinnen und Schüler überprüfen mathematische Aussagen, kennzeichnen sie als richtig oder falsch und begründen dies“. Natürlich fehlt, „soweit dies im ersten Schuljahr möglich ist.“ Nur müsste man dann bei einer solchen Aussage dazusagen, was im 1. Schuljahr möglich ist; das will man nicht, weil die Grundtendenz keine Inhalte zulassen will. Also bleibt man vage, um keine Angriffsfläche zu bieten. Dabei setzt man stillschweigend voraus, dass dem Lehrer, vielleicht sogar dem Erstklässler, der Unterschied zwischen einem gesprochenen Satz und einer mathematischen Aussage klar ist; ersteres kann sinnlos sein (z. B.: Der Mond liebt Softeis.), letzteres nicht (z. B.: 2 + 3 = 7). Leider ist die Sache nicht so einfach wie diese Beispiele: Ist der Satz „Franz kann Mathematik“ eine Aussage oder nicht?

Insgesamt beschränkt man sich auch in diesem Kapitel auf das Wie des Unterrichtens, was sicher notwendig ist, aber nicht ausreicht, wenn man laufend die Inhalte, auf die sich die Bemerkungen beziehen, weglässt und darüber auch keine Hinweise gibt, welche Möglichkeiten bestehen, ein Nichterreichen der Kompetenzen auszugleichen. Letzteres war schon immer dem Geschick des Lehrenden überlassen. Frühere Lehrpläne haben aber die Inhalte sichergestellt. Da die heutige Mode gefährlich für die Gesellschaft werden kann, sollen hier kurz Stichwortartig **Inhalte** wiedergegeben werden, die in Kapitel 4 gefunden werden können:

Seite	Erwartungen bis Ende des Schuljahrgangs		Kommentar
	2	4	
15	Plus, minus, Vorgänger, Nachfolger, Dreieck, Kreis.	Summe, Differenz, Rechteck, Quader.	Was damit mathematisch gemacht wird, bleibt offen.
16	Rechenrahmen, Hunderterfeld, Zahlenstrahl.	Skizzen, Tabellen, Mehrsystemblöcke.	Dito.
17	Zählen und Messen, Sachprobleme übersetzen in Mathematik, Rechengeschichten zu einfachen Termen.	Schätzen, überschlagen von Rechnungen. Formulieren von Sachaufgaben zu Termen, Gleichungen und bildliche Darstellungen.	In welchem Zahlenraum geschieht das? Wie komplex dürfen Gleichungen sein?
19	Zerlegen der Zahlen bis 10, Bündelungen (vermutlich im Zehnersystem) hinsichtlich Lesen und Interpretieren und vergleichen von Zahlen.	Stellenwerttafel (welche?), erweiterter Zahlbereich (welcher?), Zerlegungsaufgabe einer in der Stellenwerttafel dargestellten Zahl; anwenden der Stellenwertschreibweise.	Weshalb schreibt man nicht Stellenwerttafel des Zehnsystems?
20	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division darstellen (nicht rechnen?).	→ nutzen im erweiterten Zahlenraum. Zu einer Aufgabe die Umkehr-, Tausch- und Nachbaraufgabe *nennen*, Probe, mathematische Fachbegriffe.	Division in Klasse 2? Um die Fachausdrücke geht es vermutlich erst in Klasse 4. Weshalb dieser „wissenschaftliche“ Anstrich? Warum nicht einfach: „Rechnen bis 100“ usw.

21	Kleines 1 x 1 automatisiert. Prüfen durch Schätzen, Kopfrechnen oder Anwendung der Umkehraufgabe. Finden von Rechenfehlern.	Beherrschen des kleinen 1x1, Division auch mit Rest. Finden, erklären und korrigieren von Rechenfehlern.	Das Ziel „Erklären von Rechenfehlern" ist eine Absichtserklärung, die nur in seltenen Fällen vom Schüler erreicht werden kann.
22	Einfache kombinatorische Aufgaben handelnd und zeichnerisch lösen.	Einfache kombinatorische Aufgaben durch Probieren oder systematisch lösen.	s. u.
23	Längen, Geldwerte, Zeitspannen, **korrektes Zeichnen** von Strecken, Messfehler begründen.	Längen, Volumina, Geldwerte, Gewichte, Zeitspannen.	Besser: Unkorrektes Zeichnen! Gemeint ist wohl **ordentliches** Zeichnen.
24	**Maßeinheiten** für Geld, Längen, Zeitspannen auch betreff Zusammenhänge.	Verschiedene Schreibweise für Maße und Umrechnungen zwischen ihnen. Einfache Brüche. **Rechnen** mit Größen, Überschlag.	24 ist unnötig: Wie will man Messfehler (siehe 23) bestimmen, wenn man keine Maßeinheiten zur Verfügung hat? Im Fach Mathematik wird man wohl im Gegensatz zum Fach Geschichte mit Maßeinheiten *rechnen*.
25	**Offene Aufgaben** mit mehreren Lösungen.	Rechnen mit **Näherungswerten**, Überprüfen von Rechenergebnissen auf Fehler.	s. u. Redet man hier von Rundungsfehlern oder Rechenfehlern?
26	Orientierung im Raum und Lagebeziehungen, Falten.	Landkarten u. a., bauen und falten nach Vorschriften.	Gut und unvermeidbar!
27	Sortieren von Würfel, Quader, Kugel nach Eigenschaften, Erstellung einfacher Modelle, **Freihandzeichnungen ebener Figuren.**	Fachbegriffe wie Ecke, Seite, Kante, Fläche, senkrecht, parallel, rechter Winkel, Netze von Körpern, vergleichen von Darstellungen (z. B. Schrägbild, Bauplan, Würfelnetz). **Mit Einheitsflächen Flächen auslegen**, Flächeninhalt, Umfang, Bauen von Würfelgebäuden.	Gut ist, wenn sich die Schule mehr als bisher ums Freihandzeichen bemüht. Da aber Kindern heute das Zeichnen weitaus schwerer fällt als früher, wäre es gut, sie zunächst am Lineal „festhalten zu lassen". S. u.
28	Muster, Achsensymmetrie.	Eigenschaften der **Achsensymmetrie, Gitternetze** zum Verkleinern und Vergrößern.	Die beiden halbfetten Begriffe haben hoffentlich nichts miteinander zu tun.
29	Beschreiben von Gesetzmäßigkeiten geometrischer und arithmetischer Muster (Folgen).	→ hierzu bei inner- und außermathematischen Kontexten; systematisches Verändern solcher Muster.	Auch hier ist nur ein Aufgabentyp der heutigen Grundschule fixiert.
30	Daten und Tabellen	Funktionale Zusammenhänge erkennen und beschreiben. Einfache proportionale Zusammenhänge	o. k.
31-32	Daten und Zufall: Datenerfassung und deren Darstellung in Tabellen bei	→ Häufigkeiten (Balken- und Säulendiagramm), Daten eines Diagramms bewerten,	Ohne Bruchrechnen halte ich dies für verfrüht. Ich behaupte, dass die genannten Ziele

Beobachtungen, Beschreibung der Eintrittswahrscheinlichkeit bei einer Beobachtung.	qualitativer Vergleich von Wahrscheinlichkeiten und Gewinnchancen, Würfeln mit 2 Würfeln.	nur ein kleiner Bruchteil einer Klasse erreicht.

Aus obiger Tabelle ergeben sich die folgenden Hinweise:

- Immer wieder werden Ziele für den Unterricht angegeben, die von allen Schülerinnen und Schüler erreichbar sein sollen; doch alle Beteiligte wissen, dass dies nicht möglich ist. Die **Wunschziele** werden heute klarer als früher formuliert, was aber nicht unmittelbar zur Folge hat, dass man sie dann leichter erreichen kann. Hierzu gehört mehr. Deshalb handelt es sich auch bei diesen Kernlehrplänen nur um **Ausschreibungstexte für Autoren**. Man hofft, dass es diesen gelingen möge, einen Unterricht damit so auszuarbeiten, dass diese Ziele erreicht werden.
  Das ist aber immer noch ein Irrtum: Jede Klasse ist anders, auch jeder Lehrer. Diese „fatale“ Situation verlangt nicht nur *eine* Ausarbeitung des Unterrichtsgeschehens, sondern beliebig viele, damit für jede Unterrichtssituation Material im Schulbuch zu finden ist und dann auch die Übergänge zwischen den einzelnen Verfahren erkennbar sind und die Lehrbuchvorschläge realisiert werden können. D. i. ein Verlangen, das den Verlagen und Autoren wirtschaftlich unmöglich ist.
- Vergleicht man den Lehrplan mit gängigen Schulbüchern kann man sich nicht des Eindrucks erwehren, dass im Kernlehrplan **jeder Aufgabentyp** durch eine eigenständige Formulierung **fixiert** wird. Das scheint der Vorteil der neuen Lehrpläne zu sein: Lehrbuchautoren können keine Aufgabenmöglichkeit außer Acht lassen. In Wirklichkeit wird die heutige Situation festgeschrieben und damit eine **Weiterentwicklung verhindert**. Offenbar stört dies eine Lehrplankommission nicht, da sie wohl davon ausgeht, dass auch die neuen **Lehrpläne nicht allzu lange gelten** werden.
- Es ist bedauerlich, dass man Autoren wie auch Lehrern nicht zutraut, selbstständig das erforderliche **Aufgabenmaterial mit hinreichendem Umfang** zu entwerfen und deshalb hierzu Vorschriften erlässt.
- Gerade unter dem letzten Aspekt sind kombinatorische Aufgaben im Schulalltag eine gute Abwechslung, was aber in der Grundschule nicht heißen kann, dass **Kombinatorik Unterrichtsthema** wird.
- **Prüfungen in Testform, offene Aufgaben** und so genannte **Kapitänsaufgaben** waren damals in Klasse 9 eine der Ursachen des PISA-Schocks. Sicher ist es gut, wenn heute diese Aufgabentypen in den Schulalltag einfließen. Der im Lehrplan Niedersachsen [1] auf Seite 25 vorhandene Komparativ „offener“ ist aber auch in diesem Zusammenhang sinnlos. Die im Lehrplan als Beispiel genannte Aufgabe: „Was kann man bei gegebenen Einzelpreisen für eine feste vorgegebene Gesamtsumme kaufen?“ kann nicht als offen bezeichnet werden, nur weil es mehrere Lösungen gibt. Dieses Aufgabenbeispiel ist zwar an sich gut, der Lehrplan verleitet aber mit seinem Begriff „offenere Aufgabe“ manchen Lehrer, bereits in Klasse 1 eine echte offene Aufgabe zu stellen und damit Kinder nicht nur zu verwirren, sondern auch für die Zukunft zu verprellen.
  Hierzu eine offene Aufgabe vermutlich aus Japan: Der Schüler kennt Vierecke, d. h. Figuren, bei denen jeweils zwei von vier Punkten durch eine Verbindungsstrecke verbunden sind und keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Spezielle Vierecke hat der Schüler noch nicht kennen gelernt. Dann gibt der Lehrer die folgende Aufgabe zu Beginn einer Unterrichtsstunde:
  „Betrachte ein Viereck, bei dem jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind. Ein solches Viereck heißt Parallelogramm. Untersuche alle Zusammenhänge, die dir auffallen, und versuche diese mit dem bisherigen Wissen zu begründen.“
- Die **Geometrieziele**, die bis Ende der Klasse 4 zu erreichen sind, werden alle einem äußerst umstrittenen Lehrplan der Klassen 5 und 6 der früheren Gymnasien entnommen. Hier zeigt sich das Bemühen der heutigen Grundschule, möglichst viele Themen des Gymnasiums zu behandeln und damit vorwegzunehmen. Wie man im gymnasialen Unterricht erfahren hat, bringt dies nichts: Wer nur den Begriff des Senkrechtstehens erfährt, ihn aber nicht laufend anwendet, vergisst ihn schnell. Das ist wohl auch gar nicht gemeint. Der Lehrplan will vermutlich nur abzielen auf das aufeinander senkrecht stehen zweier benachbarter Rechteckseiten; ansonsten wird der Begriff vermutlich nicht mehr verwendet. Gymnasiallehrer sind überzeugt, der Erfolg der Grundschule wäre größer, wenn man auf den **Einbau von späteren Inhalten in den Grundschulunterricht verzichten** könnte; dann wäre mehr Zeit zum Üben der Grundrechenarten vorhanden. Das gilt natürlich auch hinsichtlich des Auslegens einer Fläche mit Einheitsquadraten, dessen Stellenwert erst zu Tage tritt, wenn man via Dezimalzahlen in der Lage

ist, auch den **Flächeninhalt von Nichtquadraten** anzunähern, also – sehr hochtrabend erklärt – das Integral als mathematisches Hilfsmittel vorzubereiten. Bekanntermaßen gibt es hier auch Kritiker des Gymnasiums, die darauf hinweisen, dass der Begriff Integral eigentlich nur im Mathematikstudium hinreichend erklärt werden kann, also nicht einmal Anwender wie Ingenieure umfassend kennen lernen und deshalb das Integral aus dem Gymnasium zu entfernen sei.

2.3 Kernlehrplan für die Realschule

Auch dieser Lehrplan ist ein **Ausschreibungstext** für Schulbuchautoren, vielleicht sogar für ein Buch mit dem Titel „Was ein Lehrer berücksichtigt, um ein guter Lehrer zu sein." So verwundert es nicht, wenn in einem großen Bereich die obigen Bemerkungen hinsichtlich Niedersachsen [1] zutreffen. Jedem, der schon einmal vor einer Klasse versucht hat, Mathematik so zu lehren, dass sie anschließend bei den Schülern abgeprüft werden kann, wird die Bemerkungen des Kernlehrplans zunächst schätzen. Dann aber stellt sich heraus, dass hier nur Anstöße gegeben werden, deren Durchführung, d. h. der eigentliche Unterricht, im Dunkeln bleibt. Auch wird der praktizierende Lehrer – und das gilt nicht nur für den Realschullehrer sondern auch für den Hauptschullehrer (weil Niedersachsen [2] und [3] weitgehend gleich sind) – nicht über die Arbeitszeit verfügen, um ohne Hilfe von außen, sei es durch ein gutes Lehrbuch oder auch anderem, seinen Unterricht adäquat zu gestalten.

Wenn die folgende Bemerkung bereits in 2.2 zu finden ist, muss sie nochmals wiederholt werden: Die einzelnen Sätze auch von Niedersachsen [3] sind viel zu hoch angesetzt; etwas **mehr Bescheidenheit** wäre angemessen. So findet man hinsichtlich der individuellen Förderung der einzelnen Schüler auf Seite 7 von Niedersachsen [3]: „Dies geschieht u. a. durch ….. **Begründen von Aussagen**." Das klingt prima; leider weiß man schon aus Zeitgründen an Realschulen (und erst recht an Hauptschulen), dass nur in wenigen Fällen ein Begründen möglich ist.

Diese fehlende „**Bescheidenheit**" wurde auch schon 2006 z. B. von HELMUT LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN in [1] bemängelt, wenn man dort liest: „Im Konsortium des Schweizer Projekts zur „Harmonisierung der obligatorischen Schule" sind von den FachdidaktikerInnen …. unterschiedliche Aspekte des Kompetenzbegriffs als besonders wichtig betont bzw. eher als unwichtig oder unbrauchbar zurückgewiesen worden. Verglichen mit Lernzielen wurden Kompetenzen als „komplexer", „eher übergeordnet", „allgemeiner", „abstrakter", „eher situationsbezogen-exemplarisch und (im schlimmsten Fall) als „eher vage" charakterisiert. Allen diesen Begriffen ist gemeinsam, dass sie das Konstrukt „Kompetenz" und in der Folge das der Kompetenzmodelle und das der Bildungsstandards als „**irgendwie abgehoben**" charakterisieren."
Die von mir postulierte Bescheidenheit müsste sich dann auch in den Kompetenzbereichen der Folgeseiten zeigen, z. B. dadurch, dass man Grenzen für diese Bereiche angibt, in denen sie an der Schule sinnvoll sind. Dann würden auch die Unterschiede zwischen Haupt- und Realschule deutlich.

Ein Hinweis wäre sinnvoll, dass z. B. die genannten prozessbezogenen Kompetenzbereiche nicht frei von **Überschneidungen** sind. So kann man über und mit Mathematik mit anderen nur *argumentieren*, wenn man mit ihnen *kommuniziert* und dabei Mathematik *darstellt*. Und wenn man schon in einem Lehrplan für die Realschule von Begründen spricht, sollte man betonen, dass hiermit ein Argumentieren gemeint ist. M. E. hat SCHMIDT-THIEME 2006 in [1] hierüber ähnlich geschrieben.

Ein großer nachgriechischer Fortschritt in der Mathematik um 1500 ist die Entdeckung der arabischen Algebra (etwa in der Schrift „Coß" von ADAM RIES siehe RAINER GEBHARDT [1]). So musste man rechnerische Zusammenhänge nicht länger mühsam mit Umgangssprache (wie noch bei EUKLID) wiedergeben, weil man jetzt die Zusammenhänge formal durch Symbole in der Sprache der Algebra wiedergeben konnte. Was soll also die Aufzählung „**Symbolische, formale und technische Elemente**", was ist der Unterschied zwischen „symbolisch" und „formal" und was sind dann noch „technische Elemente" der Mathematik? Meint man damit die Algorithmen? Spätestens an dieser Stelle wäre man gut beraten gewesen, einen mathematischen Logiker hinzuzuziehen. Ein etwas anderer Ansatz ist in Niedersachsen [3] auf Seite 25 zu finden: Man nennt dort Taschenrechner und Computer die technischen Elemente der Mathematik. Elemente der Mathematik sind das nicht, wohl aber nützliche Werkzeuge, die erstaunlich schnell sind. Auffallend ist an den vorliegenden Texten aus Niedersachsen, dass

„symbolisch" und „formal" fast immer parallel auftreten, also auch den Lehrplanautoren der Unterschied zwischen diesen Begriffen unklar gewesen ist. Der folgende Satz (in Niedersachsen Realschule [3] auf Seite 25) bleibt Mathematikern unklar: „Formale Elemente sind ein besonderes Werkzeug der Mathematik, um komplexe Sachverhalte mathematisch prägnant auszudrücken und im entsprechenden mathematischen Modell zu operieren."

Ganz Analoges gilt für die Aufzählung der „inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche": Zahlen kommen aus Mengen mit Operationen, sonst sind es keine Zahlen; d. h. die Verwendung des zusätzlichen Begriffs „Operationen" beweist, dass hier angenommen wird, Lehrer sind keine Fachleute, obwohl gerade über diesen Zusammenhang *alle* angehenden Lehrer für Mathematik Vorlesungen hören. Zahlen dokumentieren in der Anwendung stets Größen abgesehen von einigen Ausnahmen, dann vor allem in der Zahlentheorie. D. h. nicht die Größen erzielen eine Kompetenz sondern vor allem die Anwendung der Zahlen *samt* ihren Operationen. Dies geschieht stets in Wechselwirkung mit dem Messen, worunter der Lehrplan offenbar ein handwerkliches Messen versteht. Denn kaum kann der Lehrplan hierunter ein mathematisches Messen verstehen, wobei dann ein recht unterschiedliches Messen zu beobachten wäre, je nachdem man hierunter z. B. ein geometrisches (durch die Verallgemeinerungen des Lehrsatzes von PYTHAGORAS) oder ein maßtheoretisches meint.

Auch der Terminus „Funktionaler Zusammenhang" (offenbar eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs) kann an der Schule kaum zur Kompetenz werden, da solches etwa bei BOURBAKI [1] – nicht unumstritten – „nur" auf über 300 Druckseiten definiert wird.

Auf Seite 8 findet man die „**Kompetenzentwicklung**". Hierbei werden wortreich zwei Wahrheiten beschrieben: Die Kompetenzentwicklung braucht viel Zeit und gelingt in aller Regel nur durch stetes Wiederholen von früherem Unterrichtgeschehen. Leider findet man darauf keinen Hinweis, wie man beim einzelnen Schüler und dann noch in einer Gruppe oder in einer Klasse diese Entwicklung erreichen kann. Als Außenstehender hätte ich mir wenigstens eine einschlägige Literaturliste gewünscht.

Auch in Niedersachsen [3] kommt der Lehrplan auf den „**Umgang mit Medien**" zu sprechen. Es gibt auch hier eine Abfolge von Begriffen, deren Bedeutung aber nicht allgemein anerkannt irgendwo zu finden ist. Man spricht von einem gezielten Einsatz moderner Medien und meint wohl damit Fernsehen, Internet und PC. Leider vergisst man einige wesentlichen Hinweise:

- Ohne Zweifel vermittelt das Fernsehen auch Bildung (oder wie man heute sagt Kompetenzen); leider werden hierbei häufig nicht allgemein anerkannte Zusammenhänge u. a. dargestellt. D. h. Lehrer, die Fernsehen nutzen, müssen darauf achten, sich unabhängig von einer Sendung zu informieren, bzw. die Grenzen des Wahrheitsgehalts zu überprüfen und nach dem Film mit der Klasse hierüber sprechen.
- Man kann gar nicht oft genug Schüler vor den im Internet dargestellten Zusammenhängen usw. warnen. Jeder Autor, dem eine Publikation von Verlagen aus welchen Gründen auch immer abgelehnt worden ist, kann seinen Text unangefochten ins Internet stellen. Dies gilt auch für mathematische Abhandlungen, nicht selten sind hierbei lückenhafte bis falsche Begründungen zu finden.
- Oft fehlen in den Sätzen der Kernlehrpläne nur kleine Wörter, die aber entscheidend sind. So liest man hier den Satz „Elektronische Werkzeuge und Medien xx erweitern das mathematische Arbeiten." Bei xx fehlt nur „können".

Schließlich ist am Ende der Seite 9 die Rede von einem „selbstständigen Kompetenzaufbau"; so etwas gibt es, man denke nur an den Terminus „ein Leben langes Lernen", bei dem wenigstens zum Teil ein selbstständiger Kompetenzaufbau erforderlich ist. Doch sollte man eine solche Formulierung sehr detailliert besprechen. Nach meiner Meinung als Lehrer beherrschen diese Selbstständigkeit an der Schule in aller Regel nur Hochbegabte, also bis zu 1% der Gymnasiasten; alle anderen brauchen die betreuende Hand eines Lehrenden.

Auf den Seiten 10 bis 13 aus Niedersachsen [3] wird sehr ausführlich mit sehr hohen Erwartungen über „Die Rolle der Aufgaben" gesprochen. Hierbei geht es nicht nur um den „Output" beim Schüler sondern auch beim Lehrer. So ist die „Leistungsfeststellung" vor allem für den Schüler wichtig, während die „Qualitätssicherung" für ihn nicht die gleiche Rolle spielt, sondern mehr den Lehrer angeht. Es werden 3 Aufgabentypen unterschieden, die in etwa der früheren Unterscheidung von Reproduktion (Typ I), Verknüpfungen solcher (Typ II) und Transfer (Typ III) entsprechen und heute als „Technische Aufgaben“, „Rechnerische Problemlöse- und Modellierungsaufgaben“ und schließlich als „Begriffliche Problemlöse- und Modellierungsaufgaben“ gekennzeichnet werden. Ohne Grund ist im Kernlehrplan der mittlere Aufgabentyp nur auf Textaufgaben der Algebra ohne geometrische Probleme eingeengt. Beim letzten Typ findet man den erklärenden Satz: „…bei der Bearbeitung der Aufgaben muss ein Zusammenhang zwischen bereits erworbenen Kompetenzen hergestellt werden (dieser Zusammenhang darf sich nicht erst *nach Durchführung eines Algorithmus erschließen, vielmehr …)*“ Der kursiv gesetzte Teil wäre m. E. in der folgenden Form besser: „**nur** nach Durchführung *eines* Algorithmus erschließen, vielmehr ….“ Wie in früheren Lehrplänen wird z. B. der dritte Aufgabentyp nicht in Bezug zu einer Schülergruppe gesetzt. Dies ist hinsichtlich der unterschiedlich vorhandenen Kompetenzmengen bei den einzelnen Schülern erforderlich; denn was Transfer für den „normal“ begabten Schüler ist, wird z. B. in aller Regel für Hochbegabte kein Transfer sondern nur Reproduktion sein. Hochbegabte interessieren sich für Mathematik so sehr, dass sie sehr viel Können und Wissen außerschulisch beziehen und man als Außenstehender eigentlich den Umfang ihrer Kompetenzen nicht mehr beurteilen kann. Ich würde es deshalb begrüßen, wenn man diese Klassifikation an den *Kompetenzen des Durchschnittsschülers der jeweiligen Klasse* festmachen könnte, denn auch verschiedene Klassen werden sich diesbezüglich nicht gleich verhalten, weil solches z. B. davon abhängig ist, was der einzelne Lehrer in seiner Klasse gelehrt hat (siehe auch Kapitel 4.4).

Ganz wichtig scheint mir auch noch, die Aufgabenmengen dieser verschiedenen Typen in ihrer Häufigkeit festzulegen. Hinsichtlich der Zielsetzung der Realschulen würde ich diese Aufgabentypen I, II, III gemäß I : II : III = 50 : 30 : 20 verteilen.

Fehlt solches, kann man immer wieder die folgende Lehrerhaltung beobachten: Typ I ist primitiv, hierüber reden wir nicht, Typ II kann ohnedies jeder an unserer Schule; deshalb befassen wir uns vor allem mit Typ III.

Bei der in Niedersachsen [3] Seite 11 folgenden Liste der Förderung von prozessbezogenen Kompetenzen durch Aufgaben von Typ II und III ist die Rede von

- mathematischer Relevanz: Wer entscheidet dies? Gerade hinsichtlich der an Reifeprüfungen in Hessen geübten Kritik durch BAUMANN [1] und WALSER [1] handelt es sich zumindest bei so genannten Modellierungsaufgaben um einen sehr vagen und gefährlichen Begriff.
- Authentizität gegenüber dem Lernenden und damit von der Bereitschaft des Schülers, den angestrebten Modellbezug zu akzeptieren. Wäre es nicht fürchterlich, wenn man dies bei unterschiedlichen Menschen in einer gleichen Form im Unterricht erreichen könnte? Schon allein wegen Kompetenzen, die die Schüler außerhalb der Schule erwerben, wird solches nicht möglich sein.
- Wenn das fragwürdige Mathematisieren an Schulen ins Zentrum des Unterrichts gestellt wird und nur noch am Rande das eigentliche Problemlösen bearbeitet wird, geht die Unterrichtsstunde im Diskutieren unter, ist abgelaufen, ohne dass die Klasse zu einem befriedigenden Ergebnis gekommen ist.

Auf Seite 11 unten wird eine gut gemeinte Problemstellung mit Foto eines Schusters mit einem riesigen Schuh gezeigt, nach dessen Größe gefragt wird:

„Lösung 1“, die keine ist: Schaut man nicht genau genug hin, so ist die Lösung optimal, wenn man nichts rechnen muss. So kommt man zu der Lösung: Der Schuh steht der Kamera wesentlich näher als der Schuster; deshalb handelt es sich um einen völlig normalen Schuh eines erwachsenen Mannes. Das ist gar keine mathematische Aufgabe, sondern eine für Lebenskünstler, die gelernt haben, überall ohne spezielles Sachwissen mitzureden.
Lösung 2: Der Schuster hält aber mit seiner linken Hand den Schuh. Vorausgesetzt hier ist keine Trickserei, so kann man jetzt die Schuhlänge als Vielfaches des Handrückens erkennen usw.
Hinweis: Diese Aufgabe kann nicht als ein besonders schwieriges Beispiel – wie im Lehrplan geschehen – bezeichnet werden.

Auf Seite 13 findet man einiges zu „Erwartete Kompetenzen“. Hier kann die bereits in 2.2 genannte Kritik abermals angebracht werden. Allerdings gibt es beim Lehrplan für die Realschule einen sehr erfreulichen Zusatz:

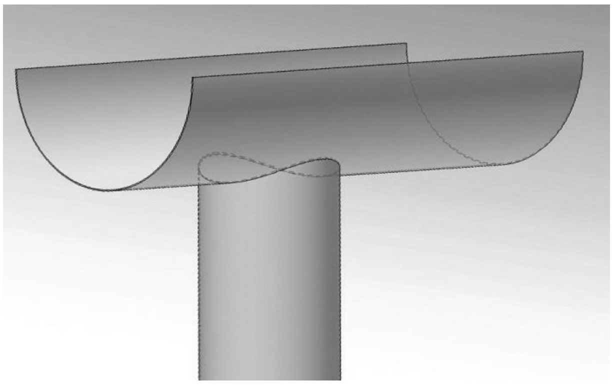
„Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler erhalten die Möglichkeit, über den Erwartungen liegende inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen systematisch aufzubauen." Bedauerlicherweise kann man dem Folgetext nicht entnehmen was hier in Erwägung gezogen wird, bzw. wie der Lehrer eine weitere innere Differenzierung seines Unterrichts bewältigen kann.

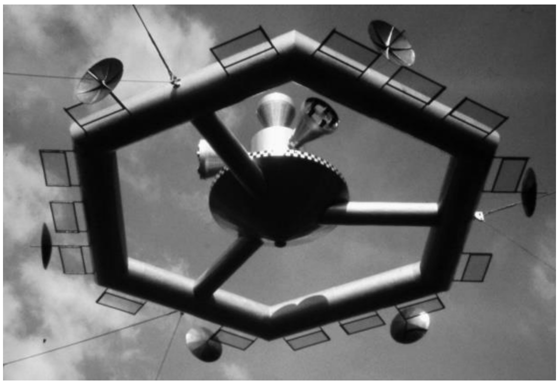
Auf den Seiten 14 und 15 aus Niedersachsen [3] wird einiges zu dem häufig benutzten Begriff „Modellieren" geschrieben. Liest man diese Lehrpläne, so liegt die Vermutung nahe, dass „Modellieren" in der Mathematik etwas zu tun hat mit dem Annähern der Wirklichkeit durch ein „Modell", von dem bekannt ist, dass seine Funktionen durch bereits bekannte mathematische Kalküle dargestellt werden. Lehrer können also einen einschlägigen Unterricht nur dann geben, wenn sie erfahren haben, was ein „Modell" ist. Ich konnte in den Lehrplänen keine befriedigende Definition hierfür finden. Mein grau unterlegter Satz kann dies nicht sein, da auch er den Begriff „Modell" nur in andere – hier nicht definierte – Begriffe übersetzt. Nimmt man die Sätze der Seiten 14 und 15 ernst, so postuliert dieser Text vom Lehrer wie auch Schüler immer noch Unmögliches, wenn man einmal davon absieht, wie schlecht die einzelnen Sätze erklären. So findet man z. B. unter Kernkompetenz: „Schülerinnen und Schüler verbinden Realsituationen mit mathematischen Modellen." Hierzu findet man in der Spalte „zusätzlich Ende Schuljahrgang 10": „Schülerinnen und Schüler nähern sich der **Realsituation** durch Verknüpfung mehrerer Modelle genauer an." Hierzu ein Beispiel eines Blechschlossers:

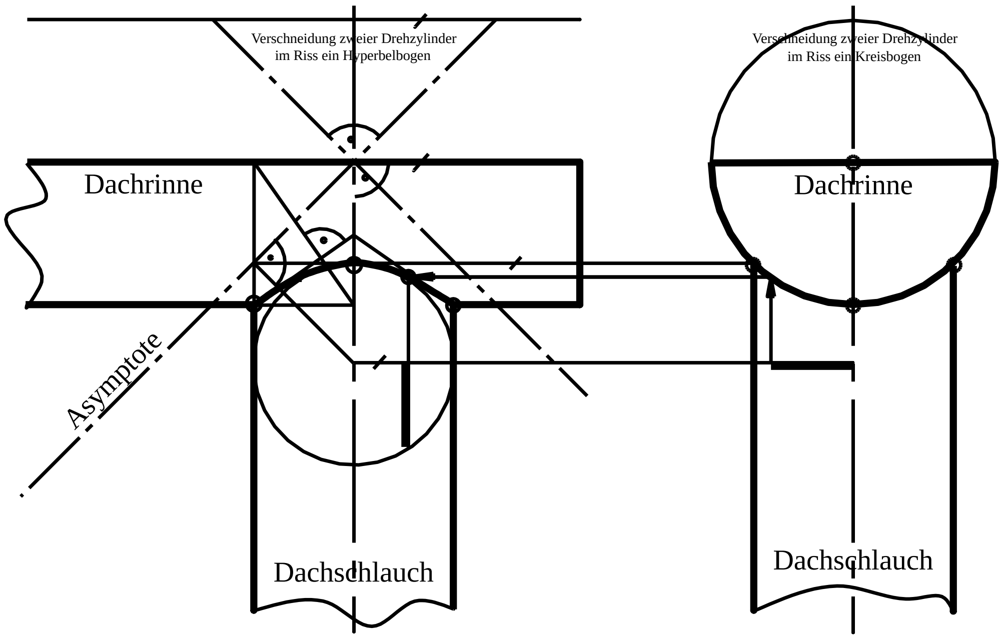
Problem: Ein Dachschlauch wird in eine Dachrinne eingepasst.

Lösung 1 des Blechschlossers: Er nimmt die Blechschere und schneidet so lange Blech weg, bis anschließend mit dem Lötkolben ein dichter Übergang zwischen den beiden Teilen hergestellt werden kann.
Er passt also diese beiden Teile durch Probieren ein.

Lösung 2 des Professors für Geometrie: Dachrinne wie Dachschlauch sind Rotationszylinder (also Flächen zweiter Ordnung), deren Verschneidung (eine Raumkurve vierter Ordnung) gesucht und mit Mathematik konstruiert wird. Da beide Zylinder samt Verschneidungskurve abwickelbar sind, kann man vor der Herstellung der Zylinder die jetzt abgewickelte Verschneidungskurve in der Ebene zuschneiden und dann den angeschnittenen Dachschlauch wie die angeschnittene Dachrinne herstellen und schließlich verbinden. Man betrachte hierzu die folgenden Abbildungen:







Auch ohne Diskussion ist klar, die zweite Lösung ist genauer als die erste. Kann man nun daraus schließen, dass dadurch die zweite Lösung der *Realsituation* näher kommt? Sicher nein. Die Lösung des Blechschlossers ist *realer*, weil sie eine erheblich kleinere Arbeitszeit hat aber auch *geringere* Kompetenzen verlangt.

Ganz anders muss das Problem behandelt werden, wenn man eine Raumstation ins Weltall schießen will und jedes unnötige Gramm Transportgewicht zu vermeiden ist. Hier ist die Lösung des Professors die bessere Lösung. Kann ein 15-jähriger Schüler eine solche Gewichtung *von sich aus* durchführen? Nein; das kann auch nicht seine Aufgabe sein.

1. Aus diesem Grund sollte man – wie überall in den modernen Lehrplänen – konkret klarstellen, was gelehrt werden soll und nicht hoffen, dass dem Lehrer die Andeutung einer durchaus dazugehörigen philosophischen Hintergrundtheorie ausreicht, zu erahnen, was er lehren soll.
2. Man kann nicht über „Output“ reden, ohne den „Input“ festzulegen.
3. Die vage Formulierung der modernen Lehrpläne – und das gilt selbstverständlich nicht nur für Niedersachsen – redet die Schule schön und verkennt dort die heutige Realsituation.
4. Der Stil, in dem die Lehrpläne verfasst werden, gibt die unerlaubten Möglichkeiten, zum einen den Schüler durch übertriebene Zielsetzung des Lehrplans zu überfordern und zum anderen, die der Gesellschaft dienlichen Ziele bei zu vielen Schülern nicht zu erreichen.

3. Was geht an der Schule, was geht nicht? Beispiele

Die fachliche Ausbildung muss dem Lehrer in Zukunft noch mehr als heute den Blick über den Rand seines Lehrplans ermöglichen. Wissen und Fähigkeiten aus dem Studium sind erforderlich, die in aller Regel über die unmittelbar zu unterrichtenden Details hinausgehen. Deshalb ist für alle Lehrberufe ein Studium erforderlich, das Grundlagen für die spätere Berufsausübung schafft aber auch eine **zukünftige Weiterentwicklung des Berufs** ermöglicht.

Dieses Wissen darf einerseits nicht dazu führen, immer mehr in den Unterricht zu packen; andererseits soll es helfen, die Grenzen des eigenen Handelns aber auch Möglichkeiten zu erkennen, wann mühelos Ergänzungen zum eigentlichen Unterricht zu nutzen sind. Man möge den Autor entschuldigen, wenn er bei den folgenden Beispielen in die Kompetenzvermittlung am Gymnasium hineingerät. Er hofft hierbei, dass trotzdem die Analogien zum Unterricht an Grund-, Haupt- und Realschule sichtbar werden.

3.1 Gleichungslösen

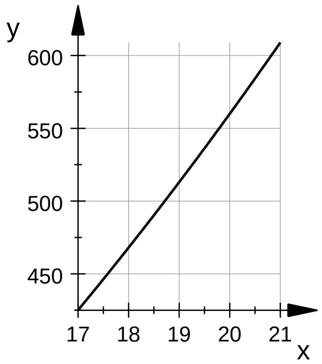
3.1.1: Gleichungslösen geschieht nach Rezepten, die man lernen muss, und ist das Anwenden von Verfahren, die im Laufe von 1000 Jahren entwickelt worden sind. Man lehrt die Verfahren und doch kann man damit nicht alle Gleichungen lösen. Wie EVARISTE GALOIS (1811-1832) zeigte, kann man eine allgemeine algebraische Gleichung vom Grad 5 nicht mehr exakt sondern eben nur näherungsweise lösen. D. h. Näherungsmethoden sind weitaus allgemeiner als die Verfahren zum Lösen von Gleichungen. Früher hat man am Gymnasium das Näherungsverfahren von NEWTON gelehrt, das allerdings schon sehr viele Voraussetzungen erwartet, wenn man es als Schüler anwenden will. Dabei geht das näherungsweise Gleichungslösen heute mit Rechnern (auch Taschenrechner) viel einfacher und kann wohl auch Hauptschülern unterrichtet werden (vgl. MEYER U. A. [1]):

Gezieltes Raten einer Nullstelle mit beliebiger Genauigkeit: Selbstverständlich handelt es sich bei dem folgenden Beispiel nicht um das erste, das der Schüler im Unterricht kennen lernt:

Aufgabe 3.1.1.1: Finde eine Lösung der Gleichung $x^2 + 8x = 500$.

Lösung:
Grobe Wertetabelle für die nebenstehende Skizze:

x	20	19	18
$x^2 + 8x$	560	513	468



Weitere Werte sind zunächst nicht erforderlich, da offenbar $x^2 + 8x > 560$ für x > 20 und $x^2 + 8x$ < 468 für Werte x < 18 gefunden werden, wenn man sich nicht zu weit entfernt von dem Intervall [18; 20]. Der Zeichnung entnimmt man, eine Lösung ist zwischen 18 und 19 zu vermuten. Damit hat man auf 1 genau das Ergebnis gefunden; d. h.: Es gilt: $18 < x < 19$.
Man „rät“ weiter:

x	19	18,5	18,7	18,8
$x^2 + 8x$	513	490,25	499,29	503,84
Vergleich mit 500	x zu groß	x zu klein	x zu klein	x zu groß
Schlussfolgerung		18,5< x<19,0	18,7< x<19	18,7< x<18,8

Damit hat man die Lösung auf Zehntel genau gefunden. Selbstverständlich kann dieses Verfahren weitergeführt und so eine Lösung mit beliebiger Genauigkeit angegeben werden. Zeichnet man die obige Skizze in einem größeren x-Bereich, so kann man auch die weitere Lösung näherungsweise finden.

3.1.2: Die Umkehrungen der beiden Rechenoperationen Addition und Multiplikation werden in der Grundschule schon mit dem Lösen von Gleichungen in Verbindung gebracht. Früher war es eine gute Tradition des gymnasialen Anfangsunterrichts auf die Erfahrungen der Schüler aus der Grundschule zurückzugreifen und zu analogisieren, bevor man in der Jahrgangsstufe 7 zu Beginn des Algebraunterrichts das Lösen von Gleichungen über den Begriff „Äquivalenzumformung“ fundamentierte:

So findet man auch heute noch Aufgaben in den Schulbüchern der Grundschule, die man in Analogie mit überschaubaren kleinen Zahlen durch Raten löst:

Aufgabe 3.1.2.1: Mit welcher Zahl muss man 12 multiplizieren um 156 zu erhalten?

Lösung (analog zu MEYER U. A.*[1]):* Der Schüler findet selbstständig die analoge Frage: Mit welcher Zahl muss man 2 multiplizieren um 6 zu erhalten?
Bemerkungen: Der Schüler wählt für die Analogie die Zahl 1 als Teiler nicht, weil ihm diese Zahl „zu einfach" ist; das Ergebnis der Multiplikation muss gerade und größer als 2 sein; 4 wählt er nicht, weil diese Zahl die „unschöne" Eigenschaft $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$ hat. Also ist 6 die erste – für das Verfahren – brauchbare Zahl.
Fortführung der Lösung: Der Schüler rät als Lösung die Zahl 3 und fragt sich, welchen Zusammenhang gibt es noch zwischen den nun bekannten Zahlen 2 und 6 und der gesuchten Zahl 3; er findet $6 : 2 = 3$.
In Analogie zu dieser Überlegung ergibt sich die Lösung für obiges Problem: $156 : 12 = 13$. Schließlich macht der Schüler die Probe $12 \cdot 13 = 156$ und erfährt, dass deshalb die Division Umkehrung der Multiplikation genannt wird.

Jeder Schüler, der diese Gedankenkette schließen kann, hat wohl eine gewisse Kompetenz, weil die Überlegungen auch in den anderen Fällen einfacher Gleichungen zu einer Lösung führen (siehe MEYER U. A. [1]). Überraschend war für mich, dass eine durchaus in Mathematik gute Schülerin in Klasse 6 des Gymnasiums diesen Schluss in der folgenden Form nicht ausführen konnte, obwohl sie bereits an der Grundschule hinsichtlich Kompetenzen unterrichtet worden war:

Aufgabe 3.1.2.2: Berechne die absolute Häufigkeit einer Ziehung der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ und einem Stichprobenumfang von 96.

Lösung: Die Schülerin fand $\frac{1}{6} = \frac{x}{96}$, was bedeutet: Mit welcher Zahl muss man 6 multiplizieren um 96 zu erhalten? Letzteres aber erkannte sie nicht mehr und konnte deshalb das Problem nicht lösen.

Diese Schülerin zeigt zweierlei:

1. Das Überprüfen der Kompetenzen einer Person ist genauso schwierig, wie das früher mit der Überprüfung der Lernziele war. D. h. die neuen Begriffe haben diesbezüglich wenig, vielleicht nichts, gebracht.
2. Der Umfang der hierzu gehörigen Aufgabenbeispiele in den Grundschulbüchern ist offenbar zu gering, um Kindern einschlägige Kompetenzen zu geben. Man vermisst auch im Folgeschuljahr hinreichend viele Aufgaben zur Wiederholung des vorher Gelehrten. Selbstverständlich sind solche Maßnahmen für Hochbegabte nicht erforderlich, aber auch an der Grundschule sollte berücksichtigt werden, dass die Fortführung unserer High-Tech-Gesellschaft allein mit Hochbegabten nicht möglich sein wird. Man muss also möglichst viele Schüler fördern (nicht nur fordern), um hinreichend viele „Gebildete" (literated) zu bekommen.

Der zweite Punkt macht deutlich: Wenn die Grundschule erfolgreicher werden will, muss das Übungsmaterial in Mathematik ausgebaut werden und hierzu manch ein heute angestrebtes Ziel (die wie bei 3.2 bis in die ehemalige Jahrgangsstufe 10 des Gymnasiums hineinreichen) reduziert werden. Das gilt nicht nur im Fach Mathematik sondern auch z. B. im Fach Englisch, denn auch hier kann leider das Gymnasium nicht bereits vorhandene Kenntnisse aus der Grundschule voraussetzen (siehe Bayerischer Philologenverband e. V. [1]). Ein Grundsatz für die Grundschule sollte sein: **Weniger Inhalte der Folgeschule lehren und dafür das Gelehrte stärker üben.**

3.2 Stellenwertsysteme

Man rechnet händisch im Zehnersystem. So ist es Aufgabe der Grundschule, diese Schreibweise zu lehren und damit zu rechnen. Wahrscheinlich zeigen Lehrer weltweit das hierzu erforderliche „Häufeln" und wie man weiß, fast alle Menschen beherrschen dies ein Leben lang. Im Sinne der angestrebten modernen Lehrpläne handelt es sich hierbei nicht um den Erwerb einer Kompetenz. Eine solche kann wohl erst erworben werden, wenn man das

Sosein von Stellenwertsystemen erfasst hat, d. h. der Lehrer seinen Schülern anhand von anderen Stellenwertsystemen auseinandergesetzt hat, dass das „Häufeln“ auch anders geschehen kann. Der Unterricht führt dann zu der Frage, wie man möglichst elegant zwischen den verschiedenen Systemen wechseln kann, was natürlich in einer Tabelle zu dem Nebeneinanderstellen *vor allem gängiger* Schreibweisen für denselben Zahlenwert führt. Man beachte hierzu die gängigen Systeme, die im Folgenden unterlegt sind:

Zehnersystem	Zweiersystem	Fünfersystem	Sechsersystem	Sechzehnersystem
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	3	3	3
Usw.				
16	10000	31	24	10
Usw.				

Man kann auch noch auf die dabei verbundenen Vor- und Nachteile zu sprechen kommen, insbesondere, dass beim Sechzehnersystem die Ziffern nicht ausreichen usw. Die folgende Prüfungsfrage ist dann aber unmöglich, weil sie zu einer Zeit (3. Jahrgangsstufe) gestellt worden ist, in der dem Schüler nicht nur der Begriff Potenz sondern auch der Divisionsalgorithmus gefehlt haben. Das ist wohl der Grund, dass solches einst am Gymnasium erst in der Jahrgangsstufe 10 gelehrt worden ist.

> *Aufgabe 3.2.1:* Schreibe die im Zehnersystem gegebene Zahl 129 im Dual-, Hexadezimal- und Dreizehnersystem.

Zum Verfahren: Man fragt jeweils, welche höchste Potenz b^n der Basiszahl b in 129 enthalten ist und führt dann die Division $129: b^n = a_n + r_n$ aus, wobei r_n der Rest mit $r_n < b^n < 129$ bedeutet. Dieser Schritt wird so lange ausgeführt bis $r_i < b$ erreicht wird. Für den letzten erhaltenen Wert $r_i \neq 0$ schreibt man $r_i = a_i$. Alle weiteren formalen Schritte würden dann $r_j = 0$ für $j = i, i-1, \ldots, 0$ ergeben. Man findet $129 = a_n b^n + \ldots\ldots + a_0$ mit $0 \leq a_i < b$. 129 entspricht also im b-System $a_n a_{n-1} \ldots a_0$.
Die erwartete Schülerlösung im Fall des Hexadezimalsystems: Man schreibt $16, 16 \cdot 16 = 256 > 129$, wobei durch „schriftliche Multiplikation $16 \cdot 16$ zu rechnen ist. Dann zieht man 16 mehrfach von 129 ab und zählt wie oft dies geht und erfährt so $129 = 8 \cdot 16 + 1$. Dies schreibt man im Hexadezimalsystem als 81.
Man beachte: Diese Aufgabe wird heute an Grundschulen auch so gewählt, dass der Schüler noch die „normalen“ Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ durch A, B, C, D, E, F ergänzen muss.
Da in der genannten Prüfung der Jahrgangsstufe 3 noch weitere 5 durchaus ebenso aufwändige Aufgaben aus dem Gesamtstoff gestellt worden sind, hat der Schüler zum Lösen dieser Aufgabe maximal 5 Minuten Zeit. D. h. hiermit werden die Hochbegabten aussortiert, was sicher nicht die Aufgabe der Grundschule sein kann.

Kritik: Wenn ein Schüler die erwartete Lösung findet, muss man ihn nicht mehr das Divisionsverfahren lehren. Auch wäre es sinnvoll, wenn der Schüler bereits die erforderlichen Potenzen der Basen auswendig gelernt hätte. Dies ist Grund genug, erst in einer späteren Jahrgangsstufe im Rahmen des Potenzrechnens auf dieses Problem zu sprechen zu kommen, zudem dann die gezeigte Umformung vom Dezimal- ins Hexadezimalsystem hinsichtlich des parallel verlaufenden Informatikunterrichts zum willkommenen Anwendungsbeispiel wird.

3.3 Die Länge eines Kurvenstücks

Die Kreisrektifikation nach ARCHIMEDES war am Gymnasium eine zeitaufwändige Sache, die singulär blieb, wenn man einmal von analogen räumlichen Problemen (z. B. Herleitung des Kugelvolumens u. a.) absieht, die schon seit langem weggefallen sind, weil man ja heute an der Schule zur Raumgeometrie ein gestörtes Verhältnis hat. Wann ein Kurvenstück eine Länge hat, klärt die Integralrechnung. Nun hat der Schüler ein Kurvenstück z. B. aus Draht und er kann es zu einer Geraden biegen, wodurch sich anschaulich die Länge nicht ändert. Und so kann man die Länge mit einem Lineal messen, auch wenn man absolut keine Ahnung von Integral- oder Maßtheorie hat. Sicher ist solches auch an der Hauptschule möglich.

Was machte man einst mit der Kreismessung? Man ersetzte den Kreis durch z. B. eingeschriebene, reguläre Vielecke, weil man ja wusste, dass der Kreis eine Länge hat. Das Wesentliche des Verfahrens – was nie im Unterricht zu Tage kam – war die Regularität des einbeschriebenen Vielecks. Damit könnte man bei jeder Kurve, die eine Länge hat, diese allein *durch Zählen bestimmen*: Man geht die Kurve mit einem Stechzirkel ab und zählt wie oft dies möglich ist. Es besteht auch kein Zweifel, dass man als Gesamtlänge u. U. einen zu kleinen Betrag erhält und ein „Abschreiten" der Kurve längs gleich langen Tangentenstücke (was technisch etwas schwieriger ist!) u. U. eine zu große Gesamtlänge ergibt und die zu messende vermutlich zwischen diesen beiden Werten liegt. Dieses Verfahren können Schüler fast ohne Hilfe entdecken und sich merken. Auch versteht man sofort, dass die Genauigkeit unter anderem von der Schrittlänge des Stechzirkels abhängt. Ganz nebenbei bemerkt hat ein solcher Unterricht einen guten Bezug zu Handwerksberufen.

Beginnt man so, kann man anschließend – so man will – am Gymnasium den Spezialfall Kreis mit der ARCHIMEDIschen Kreisrektifikation durchführen und dann die Kreiszahl π für viele Schüler verständlich ohne Messung bestimmen.

3.4 Lehrsatz des PYTHAGORAS ohne Wurzeln?

Viele Berufe brauchen diesen Satz; z. B.: Schreiner, Zimmerleute, Maurer, Schlosser, Dreher und andere Handwerker, aber auch Ingenieure, Naturwissenschaftler, sogar Mediziner, z. B. beim Entfernen eines Eisensplitters anhand von RÖNTGENaufnahmen in zwei zueinander senkrecht stehenden Ebenen.

Schon lange war man bemüht, aus dem Lehrplan Inhalte, die reiner Lernstoff waren, zu entfernen und so hat man kurze Zeit in Bayern an den Hauptschulen zwar noch den Lehrsatz des PYTHAGORAS gelehrt, aber die Wurzeln „entfrachtet".

Ich will hier gar nicht auf die mathematische Bedeutung des Satzes von PYTHAGORAS zu sprechen kommen, sondern nur die Frage stellen, was man ohne Wurzeln mit ihm machen kann. Berechnungen kann man mit ihm nicht mehr anstellen, da ja solche stets mit Wurzeln verbunden sind. Freilich, man kann sich auf den Standpunkt stellen, die Gleichung $x^2 = 25$ muss ein Schüler auch ohne Wurzelkenntnisse lösen können. Dies gilt vor allem dann, wenn er weiß, dass Streckenlängen stets positiv sind. Was ist aber mit $x^2 = 24$, hat das auch eine Lösung? Es mag Taschenrechner geben, mit denen man über inv, x^2 zu einer Lösung kommt. Ein guter Weg ist das nicht. Kompetenz wird mit einer solchen Blackbox sicher nicht erreicht.

Also wird sich der Unterricht ohne Wurzeln vor allem in den Übungsbeispielen mit den äquivalenten Formen (Satz des EUKLID und Höhensatz) zum Satz des PYTHAGORAS befassen und ansonsten die Flächengleichheit von Rechtecken untersuchen. Hiermit wird man aber den Erfordernissen der Anwender nicht gerecht. So muss man also doch als Lehrer an der Hauptschule in irgendeiner Form eine abgeschwächte Theorie der Wurzeln vermitteln, um das Ziel zu erreichen. Was ist dann unerlässlich?

Man wird mit der üblichen Überlegung beginnen, dass sowohl das Quadrat einer negativen wie auch einer positiven Zahl positiv ist. Das bedeutet: $x^2 = a$ ist nur für nicht negative a lösbar und hat dann abgesehen von $a = 0$ zwei verschiedene Lösungen, wobei die positive $\sqrt{a}$ geschrieben wird (man beachte hierbei die Willkür). Man klärt, wie man die Wurzeln auf dem Taschenrechner findet. Auf alle weiteren Regeln des Wurzelrechnens verzichtet man zunächst und untersucht sie erst, wenn ein Problem diesbezügliches erwartet.

3.5 Ergonomie beim Unterrichten unverzichtbar

In den 80ern des vergangenen Jahrhunderts war es am Gymnasium in Bayern üblich – vermutlich fehlgeleitet durch ARTIN [1] – den Strahlen- oder Vierstreckensatz erst nach der Behandlung der zentrischen Streckungen (analog zu ARTINs Dilatationen) zu lehren. Man musste so viermal den Strahlensatz beweisen, bis man ihn endgültig hatte. Ging man als Lehrer den umgekehrten Weg (zuerst der Strahlensatz und dann die zentrische Streckung), wie dies früher üblich war, so sparte man nahezu 2 Monate Geometrieunterricht und hatte Unterrichtszeit für weiteres gewonnen, um z. B. gelegentlich methodische Experimente zu wagen, zumindest aber Kompetenzen, wie sie ungeschrieben schon immer vorhanden waren, zu vertiefen.

Das klingt gut. Was aber muss man als Lehrer tun, um hierbei den Überblick nicht zu verlieren, d. h. plötzlich festzustellen, dass die Unterrichtszeit nicht mehr ausreicht, um im Schuljahr noch das volle Lehrplanpensum zu erreichen?

Ich habe im Zusammenhang mit dem Lehrplan und dem eingeführten Schulbuch für jede Jahrgangsstufe einen Verteilungsplan angelegt und das funktioniert auch heute noch, auch wenn man das Wort Lehrplaninhalte offiziell vermeidet.

Das Schuljahr hat in aller Regel 28 volle Unterrichtswochen (die unvollständigen Wochen, also Wochen mit Ferienbeginn oder Feiertagen habe ich weggelassen, da diese gelegentlich so liegen, dass u. U. die 4 Wochenstunden Mathematik alle oder zumindest bis auf eine ausfallen). Bei 5 verpflichtenden Proben im Schuljahr entfallen jeweils für die Wiederholung, Durchführung der Probe und anschließende Besprechung mindestens eine ganze Schulwoche. So bleiben für das Unterrichten 23 volle Wochen, auf die der Stoff zu verteilen ist. Auf 23 Zeilen habe ich in einer Tabelle den Stoff untergebracht, dann mit der Schere die 5 Wochen mit Proben eingeschnitten (weil diese in aller Regel nicht a priori festgelegt werden können) und anschließend in der Spalte „Datum“ für das entsprechende Jahr die Wochendaten eingetragen. So hat man die Gewähr jeweils genau zu erkennen, ob man als Lehrer das Soll im Unterricht erfüllt hat.

Übrigens haben wir im Fachbereich Mathematik auf diese Weise auch kranke und längere Zeit abwesende Kolleginnen und Kollegen – natürlich unentgeltlich – ersetzen können.

Kompetenzen, die u. U. bei Schülern erst nach Jahren erreicht werden, sind bezüglich solcher Listen kontraproduktiv, da sie dem Lehrer die Erstellung einer solchen Zeiteinteilung unmöglich machen. Er kann zwar seine Schülernamen gegen die zu erwerbenden Kompetenzen in einer Grafik abtragen und so dokumentieren, welche Schüler wann welche Kompetenz erreicht haben, das trifft aber nicht die genannte Zeiteinteilung. Spielt hier etwa die Meinung eine Rolle, dass es unwesentlich ist, welche Mathematik man lehrt, wichtig ist nur, überhaupt Mathematik zu lehren? Dass diese Meinung falsch ist, kann man heute schon bei vielen Schulabsolventen z. B. beim Bruchrechnen feststellen. Zu viele beherrschen das Bruchrechnen nicht. Noch aber empfindet die Gesellschaft solches als einen erheblichen Fehler der modernen Schule. Schließlich muss man auch in der weiterführenden Schule (u. U. Universität) wissen, auf welche gelehrten Inhalte man aufbauen kann, wenn nicht die vorher besuchte Schule überflüssig werden soll.

Ergonomie spielt in allen Unternehmen, nach meiner Meinung auch an den Schulen, eine entscheidende Rolle.

3.6 Differentialquotienten

Mir bleibt unverständlich, weshalb am Gymnasium in nahezu allen Bundesländern der Differentialquotient keine Schreibweise für die Ableitungen mehr ist. Steht $\lim_{x_2 \to x} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(x) = \frac{df}{dx}$ zur Verfügung, könnte man ohne Probleme, z. B. bei der theoretischen Behandlung der Pendel in der Oberstufe, die Bedingungsgleichungen so hinschreiben, dass sie als Differentialgleichungen erkennbar sind, und so manch ein Student könnte sich im 1. Semester erinnern, solches schon einmal im Physikunterricht der Schule gesehen zu haben:

Beispiel physikalisches Pendel: Zum Zeitpunkt t wird die Masse m mit der Rückstellkraft $-ax$ um $x(t)$ ausgelenkt (Man stelle sich vor: a ist eine Federkonstante), dann gilt die Gleichung $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -ax$.

Viel zu selten gibt es diesen „Anhang“ am Gymnasium. Hier zeigt sich, dass sich die Kolleginnen und Kollegen zu sehr von den Formulierungen des Lehrplans einschüchtern lassen, was vermutlich gar niemand will.

Unterrichtszeit kostet dies zunächst keine, wenn man erklärt, dass LEIBNIZ statt der Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ geschrieben hat und sich darunter die so genannten Monaden vorstellte; d. h. die Differentiale dx und dy daran erinnern sollten, dass es sich hierbei um unendlich kleine Differenzen handelt. Wie praktisch die LEIBNIZsche Schreibweise ist, kann man bei der Kettenregel erkennen; leider lehrt man diese und ihre Umkehrung beim Integrieren (Substitutionsmethode) in vielen Bundesländern auch nicht mehr. So gibt es kein händisches Integrieren mehr und auch an anderer Stelle ist der Analysisunterricht für Lernende durch Kürzungen so lückenhaft und vor allem für intelligente Schüler unverständlich geworden, dass es fraglich ist, ob Analysis heute am Gymnasium noch sinnvoll ist (siehe SONAR [1]).

3.7 Grenzwerte

Wie in MEYER [2] berichtet wird, ist im Mathematikseminar für gute Schülerinnen und Schüler am Gymnasium Starnberg schon einmal Differentialgeometrie betrieben worden, ohne dass auf die Entstehung der Grenzwerte eingegangen worden ist, weil z. B. VAN DER WAERDEN [1] gezeigt hat, mit welchen Eigenschaften der Differentialquotient als Operator z. B. auf den gebrochen rationalen Funktionen wirkt und mit diesen Eigenschaften axiomatisch eingeführt werden kann. Die Schüler konnten also auf dieser Funktionsklasse differenzieren. Leider stellte sich dann im Seminar heraus, dass die interessanten Kurven und Flächen (wie Flächen 2. Ordnung) die trigonometrischen Funktionen benötigen, die aber so nicht erfasst werden, weil die Ableitungen für Sinus und Cosinus fehlen. Deshalb wurden die zugehörigen Ableitungen den Schülern nur mitgeteilt. Insgesamt war dieser Weg nicht zeitsparend. Es wäre wohl nicht zeitaufwändiger gewesen, Grenzwerte und hieraus die Ableitungen zu definieren.

Dieser Hinweis zeigt, dass es durchaus Experimente gibt, die zeigen, wie ein mathematischer Inhalt (Grenzwert) vermieden werden kann, wenn man an anderer Stelle einen sonst nicht erforderlichen Aufwand betreibt. Insgesamt aber spielen Stetigkeit und Differenzierbarkeit in den Anwendungen auch des Gymnasiums eine solch große Rolle, dass ein Verzicht auf die Grenzwert-Herleitung – wie heute in den meisten Bundesländern vollzogen – nur bedeuten kann, an der Schule auf die Analysis ganz zu verzichten und damit die gymnasiale Oberstufe im Fach Mathematik abzuschaffen. Ich stelle mich hier ganz bewusst auf den Standpunkt des Braunschweiger Professors Dr. SONAR [1].

Es gibt also nur einen Weg für die Schule: Grenzwertdefinition zu verstehen, auf ihre Anwendung Stetigkeit zu sprechen kommen – hierzu sind hinreichende Kenntnisse von unstetigen Funktionen erforderlich – und dann die Differenzierbarkeit zu untersuchen, wobei es auch darauf ankommt, stetige aber nicht differenzierbare Funktionen kennen zu lernen. Gerade in Letzterem sind unverzeihliche Fehler gemacht worden, da man zwar über die Begriffe sprach, sie aber nicht hinreichend durch Beispiele gegeneinander absicherte. Dies könnte aber in wenigen Minuten durch geeignete Skizzen erreicht werden. D. h. die bis heute stattgefundene Reduktion der Analysis ist zeitlich marginal, verursacht aber, die Theorie dem Schüler unverständlich werden zu lassen. Welch eine bewunderungswürdige Pädagogik!

3.8 Determinanten

In einigen Bundesländern, auch Niedersachsen, werden Matrizen und Determinanten gelehrt, wobei auch heute noch trotz Ausrichtung auf Kompetenzen im anschließenden Studium zu beobachten ist, dass etwa Determinanten von den Schülern nicht „verinnerlicht“ worden sind:

Innerhalb der ersten Semesters werden viele Studenten in Technischer Mechanik mit Funktionaldeterminanten konfrontiert. Kaum ein Student kann sich vorstellen, dass man Determinanten von Elementen ausrechnen kann, die keine Zahlen sind und so Determinanten als Funktionen existieren. Weshalb lässt man im Schulunterricht nicht auch einmal – völlig ohne Zusammenhang – eine Determinante aus Funktionen ausrechnen? Das kostet nicht mehr als 10 Minuten Unterrichtszeit. Das wären 10 Minuten, die den Einstieg in die Technische Mechanik für angehende Ingenieure und Naturwissenschaftler wesentlich erleichtern würden.

3.9 Resümee

Hat man **fachlich** – d. h. nicht nur didaktisch, pädagogisch, psychologisch und philosophisch – gut **ausgebildete Lehrer**, die täglich über den Lehrplanrand schauen können, spielen die Fehler und die verworrenen Ansichten des Lehrplans eine untergeordnete Rolle, weil sie dann der zukünftigen Bildung der Gesellschaft nicht unbedingt schaden. Auch wenn hierdurch so manches gerettet werden kann, muss man zugeben, dass heute bei all dem Nichtwissen und Nichtkönnen (verbunden mit einschlägigen Kompetenzen) die in Kapitel 3 dargestellte Methode nicht ausreicht, die vielen beobachteten Lücken bei den Schulabgängern – auch außerhalb der Mathematik – zu schließen.

4. Komplexe Aufgaben

4.1 Aufgabenorientierte Kompetenzdefinition

Die bisherige Auseinandersetzung verdeutlicht, dass Kernlehrpläne – besser wohl Lernzielpläne – mithilfe der nicht präzise genug definierten Begriffe Kompetenz und Standardziel ohne weiter erforderliche Inhalte wiedergegeben werden. Häufig sind für Lehrer und auch andere die formulierten Postulate unklar. Deshalb haben wohl SCHOTT UND AZIZI GHANBARI [1] (nach Wikipedia [2]) 2008 als erste vorgeschlagen, durch Aufgabenbeispiele zu verdeutlichen, wie abgeprüft werden kann, ob Schüler gewisse Kompetenzen erreicht haben.

Diese Idee ist nicht neu: Analoges gab es schon um 1990 in dem in Deutschland zentral durchgeführten **Medizinertest** an den Gymnasien: Damit Lehrer zusammen mit Medizinern nicht jedes Jahr aufs Neue Aufgaben für diesen Eignungstest entwerfen müssen, haben über Jahre hinweg angehende Abiturienten diesen Test mit immer denselben Aufgaben absolviert. Deshalb wurden die hierzu erforderlichen Unterlagen geheim gehalten, d. h. – streng bewacht – in besonderen Koffern transportiert.

Immerhin gab es kurzfristig einen Lehrplan in Nordrhein-Westfalen [1], der nur auf Aufgaben zur Kompetenzüberprüfung ausgerichtet war. Hier hat man gleich die Aufgaben im Internet öffentlich gemacht und nun gab es die Schwierigkeit, wie sich der einzelne Lehrer in den Folgejahren jeweils adäquates Material für seine Prüfungen beschaffen kann, nachdem die Musteraufgaben in keinem Koffer versperrt waren. Bereits 2010 habe ich bei der Bundestagung von Begabtenförderung Mathematik e. V. an der RWTH Aachen in einem Poster an diesem Vorschlag heftigste Kritik geübt. Insbesondere ein Beispiel, das auf HERGET zurückgehen soll, zeigt deutlich, dass allein mit Musteraufgaben die zunächst gute Idee der Kompetenzen nicht verwirklicht werden kann, vor allem dann nicht, wenn sowohl die Kompetenzen wie auch die Aufgaben zu vage formuliert werden:

> *Aufgabe:* Zur Überprüfung der Geometriekenntnisse nach Klasse 10 am G8 zeigt man ein Foto von einem Heißluftballon mit der Aufforderung, das Volumen der Luft im Ballon abzuschätzen.

Lösung 1: Ein Schüler, der Mathematik kennen gelernt hat, schätzt anhand der dargestellten Personen (Höhe etwa 2 m) den Durchmesser des Ballons, die Höhe der beteiligten Kugelkalotte und die Höhe des die Kugelkalotte berührenden Kegels und addiert dann die Volumina der Teile. Arbeitszeit ca. 1 Stunde.
Lösung 2: Ich war dann über die angegebene Musterlösung für Klasse 10 überrascht: Der Schüler sollte den Ballon durch *einen* Quader annähern und dessen Volumen anhand einer Schätzung bestimmen. Arbeitszeit ca. 5 Minuten.

Kritik: Man darf eine Aufgabe nicht so formulieren, dass je nach Lösungsweg und/oder Können solch unterschiedliche Arbeitszeiten entstehen, vor allem dann nicht, wenn die Aufgabe als Muster für die Überprüfung von Kompetenzen angesehen wird.

4.2 Transfer durch verknüpfte Kompetenzen

Mit dem Wort Transfer wird der Wunsch nach komplexen Fragestellungen verknüpft; das ist nichts Neues sondern seit den curricularen Lehrplänen um 1960 in Deutschland eine gewünschte Veränderung des Unterrichtsalltags. Dieser Wunsch besteht nicht nur in Sekundarstufe II am Gymnasium sondern in allen Schularten. Weit verbreitet ist die Meinung, dass sich nur durch komplexe Fragestellungen – auch in Prüfungen – nachweisen lässt, inwieweit Schüler Mathematik verstanden und verinnerlicht haben, damit sie auch bei ungewohnten Problemen erkennen, wie sie ihre Erfahrungen beim Erstellen von Strategien einbringen können. Freilich, zufrieden waren die Lehrer noch nie mit ihren diesbezüglichen Lehrerfolgen; d. h. sie waren glücklich, wenn sie nicht enttäuscht worden waren und wenigstens einige Schüler die Transferaufgabe einer Prüfung richtig gelöst hatten.

So findet man immer wieder seit 1960 Schulbücher, die solche Aufgaben als „schwierig" gekennzeichnet haben. Um zu demonstrieren, dies alles ist auch Thema an der Grundschule, ist in MEYER [5] unter „2.4 Öffentliche Kritik auch an der Grundschule" Aufgaben mit höheren Anforderungen aus „Welt der Zahl" für die Klasse 4 (RINKENS, HÖNISCH U. A. [1]) in einer Bearbeitung für Bayern untersucht worden. Man hätte auch jedes andere Schulbuch mit „gehobenen" Aufgaben nehmen können.

In „Welt der Zahl" findet man unter etwa 1000 Fragestellungen 12 gehobene Aufgaben. In den Proben, die die Schüler auf Grund dieses Buches geschrieben haben, gehörte jeweils 1 von 5 Fragestellungen zu solchen gehobenen Aufgaben. Das ist ein Missverhältnis: Man hätte eigentlich mehr Aufgaben üben sollen, als man dann abprüft. Ähnliches gilt für das Niveau der Prüfungsaufgaben: In aller Regel sollte man beim Üben ein höheres Niveau erreichen als man dann abprüft, was bei diesen Prüfungen nicht eingehalten worden ist. „Welt der Zahl" ist hinsichtlich Schülerförderung – insbesondere im Blick auf die weiterführenden Schulen – kein empfehlenswertes Buch.

Aufgaben formulieren ist eine Kunst, die Lehrer im Laufe ihres Berufes irgendwann zu beherrschen lernen. Und doch stellt man etwa als Fachbetreuer oder Herausgeber von Schulbüchern immer wieder fest, dass eine gestellte Aufgabe nicht korrekt formuliert worden ist. Immer wieder kann man dann als Gegenargument hören, dass bewusst eine „offene Aufgabe" formuliert worden ist, da man leicht den Fehler begeht zu glauben, dass „nicht korrekt" und „offen" Synonyme sind. Dieser Fehler wäre eine eigene Publikation in der „Mathematikinformation" wert.

Es kommt aber auch das Umgekehrte vor: Ich habe eine Aufgabe in Trigonometrie formuliert und wollte, dass die Aufgabe – sehr komplex – mit dem Cosinussatz gelöst wird. Aber meine Schüler waren schlauer als ich: Sie erkannten, dass eine Lösung in wenigen Schritten mit dem Lehrsatz des PYTHAGORAS möglich war. Gerade deshalb fiel es mir dann leicht, auch für diesen Weg die ursprünglich vorgesehene Punktzahl voll zu vergeben.

Will man komplexe Aufgaben formulieren, spielen die Vorerfahrungen und das Vorwissen der Schüler eine entscheidende Rolle. In aller Regel geht der Aufgabenentwerfer hierbei von dem aus, was er von seiner Klasse glaubt zu wissen. Hier kann man sich aber gewaltig täuschen, da in aller Regel vor allem an Mathematik interessierte Schüler über außerschulische Erfahrungen mit Mathematik und auch über Wissen verfügen, das u. U. weit über das im eigentlichen Unterricht vermittelte hinausgeht. So werden rasch – ohne dass es der Lehrer bemerken kann – komplexe Transferaufgaben zu Routineaufgaben. Hierzu ein Beispiel:

FRANK FÖRSTER [1] berichtet über einen Grundschüler in der von ihm veranstalteten „Lernwerkstatt" an der TU Braunschweig: In einem Filmdokument sieht man den Schüler, wie er sehr geschickt Zahlenreihen addiert. Beim späteren Befragen des Schülers stellt sich heraus, dass seine Mutter ihm den Additionstrick von GAUSS bei der Summation einer arithmetischen Zahlenfolge gezeigt hat; schließlich hat GAUSS in Braunschweig gelebt.

Umso höher der außerschulische Bildungsgrad eines Schülers ist, desto schwieriger wird es, für ihn unbekanntes komplexes Transfermaterial zu finden. Das gilt auch für die Hochbegabtenförderung des Bundeswettbewerbs Mathematik und im verstärktem Maße für die Mathematik-Olympiaden:

Da zumindest in den ersten beiden Hausaufgaben-Runden des Bundeswettbewerbs der Schüler sämtliche vorhandenen Unterlagen benutzen kann und hierzu nahezu beliebig viel Zeit zur Verfügung steht, erleichtert dies die Arbeit der Aufgabensteller. Drei Runden der Mathematik-Olympiade hingegen sind Klausurwettbewerbe; deshalb müssen die Aufgabensteller davon ausgehen, Probleme zu stellen, die ein Schüler im Mittel in ca. 60 Minuten ohne Benutzung von Unterlagen lösen kann. So werden die Möglichkeiten für Transferprobleme stark eingeschränkt und es gibt offenbar nur einen begrenzten Umfang an Inhalten wie auch Strategien, die man in einschlägigen Aufgabensammlungen im Inland wie auch Ausland finden, also üben kann.

Wettbewerbe benutzen komplexe Aufgaben zur Auswahl der besten Schüler, Vorbild für den Schulalltag können sie aber gerade deswegen nicht sein: Was nutzt es der Gesellschaft, wenn so die sechs besten unter allen deutschen Schülern für die Internationale Mathematik-Olympiade durch viele Klausuren ausgewählt werden, wenn nachweisbar die Gesellschaft heute 33% der Reifeprüflinge für naturwissenschaftliche Berufe benötigt?

Es reicht auch nicht, das höchstens halbe Prozent Hochbegabter anhand von Prüfungen auszusortieren. Deshalb müssen Lehrer angefangen von der Grundschule bis hin zu den Universitäten lernen, nicht nur Hochbegabte zu finden sondern **möglichst viele Jugendliche *optimal* zu fördern**, damit die High-tech-Gesellschaft erhalten bleibt. Hinsichtlich der Wirtschaftsverhältnisse in Mitteleuropa sollte jedes Mittel zum Erreichen dieses Ziels recht sein. Am Gymnasium gilt allerdings auch, dass es nicht angeht, Lehrpläne so zu gestalten, dass nur noch das gelehrt wird, was *alle* Schüler verstehen können, denn dann wäre das Gymnasium keine **Ausleseschule** mehr – oder besser: dann könnte man z. B. in Mathematik nicht mehr lehren, was letztlich nur solche Schüler benötigen, die ein Mathematik anwendendes Studium ergreifen wollen. D. h. die Auslese bezieht sich auf ganz bestimmte Folgeausbildungen. Diese Auslese hat sich durch Tradition eingeschliffen und entwickelt sich laufend weiter.

Beim Lesen der Kernlehrpläne habe ich nicht den Eindruck, dass diese Problematik bereits bei Lehrplanmachern angekommen ist.

Man erweckt heute immer wieder den Eindruck, dass die Entwicklung einer Strategie bei mathematischen Problemen wichtiger als das damit verbundene Wissen ist. Diesen Eindruck erzeugen nicht nur die modernen Kernlehrpläne, sondern auch Lehrer bis hin zu denen, die Vorbereitungsunterricht für Wettbewerbe geben. Man kann aber **keine mathematische Strategie aufstellen, ohne Wissen** zu haben, das klärt, wo es Strategien gibt und welche Kalküle zu den Strategien herangezogen werden können.

Die **Wissensvermittlung** unterscheidet sich fundamental von der **Strategienlehre** (Beweistheorie?, Kategorientheorie?): Das mathematische Wissen lehrt man seit dem 19ten Jahrhundert nicht mehr gebunden an Einzelphänomenen, sondern man entwickelt je nach Schulstufe mehr oder weniger exakt mathematische Theorien, weil dies zeitsparend ist. Was Strategien sind und wie man sie findet, hat die Mathematik – ausgenommen von Einzelfällen (z. B. Widerspruchbeweis, Schubfachprinzip, vollständige Induktion u. a.) – bis heute nicht grundsätzlich klären können. So gilt im Wesentlichen: Der erfahrene Lehrer führt seinem Schüler eine geeignete Folge von Strategien vor, bis der Schüler allmählich anfängt eigenständig solche zu entwickeln. Hierbei hatte es der antike Lehrer einfacher als der moderne, da in der Antike der Lehrer nur *einen* Schüler hatte; die Schulprobleme bestehen heute vor allem darin, dass innerhalb der Klassen die Bereitschaft, dem Lehrer geistig zu folgen, und das Vermögen, laufend Neues aufzunehmen (ein Leben lang?), immer divergenter wird. So sind die heutigen Schulprobleme in Wirklichkeit **Gesellschaftsprobleme**.

Meines Erachtens fehlen heute anerkannte Methoden, die die alten Tugenden wieder gewährleisten:

– Immer wieder lobt man Mathematik-Olympioniken, mit welcher **Ausdauer** sie bei mathematischen Problemen ausharren. Bei ihnen ist diese Ausdauer passend und gelenkt von ihrem Hobby Mathematik. Man sollte aber bei Jugendlichen, die nicht dieses Hobby haben, wenigstens versuchen, ein wenig ihren **Fleiß** und ihren **Willen** zu locken, wenn es um den Schulalltag geht. Gut wäre auch, Methoden zu haben, die bei den Schülern ein bisschen **Ehrgeiz** im Hinblick auf Mathematik wecken, wenn es schon zum guten Ton gehört, den Ehrgeiz aller Sportler – auch derer, die sich mit Mathematik abgeben, – zu bewundern.

- Der Wille zur **Ordnung**, Pünktlichkeit u. v. m. erleichtern das Sich-Einleben in die Mathematik. Hierzu gehört auch eine saubere Schrift, wodurch viele Rechenfehler u. a. zu vermeiden wären.
- Lehrer sind keine Maschinen, die bessere Schüler bei Prüfungen aussortieren. Lehrer bemühen sich tagtäglich um die Erweiterung des Könnens und der Fähigkeiten möglichst vieler ihrer Schüler.

Hinweise hierzu habe ich in den Kernlehrplänen keine gefunden oder läuft dies dort unter dem vagen Begriff des „Sozialen Handelns"?

Der Gesellschaft fehlen bis heute Ideen, wie man wieder die bei Jugendlichen fehlenden Grundtugenden und ihren Ehrgeiz, frühzeitig möglichst viel zu lernen, Erfahrungen zu sammeln u. a. gewinnt. So muss man eigentlich die Idee eines Händlers loben, der nach ROBERT GAST [1] jedem Schüler für jede Zeugnisnote 1 zwei Euro und für jede 2 einen Euro versprach, wenn er ihm sein Jahreszeugnis vorlegt. Offenbar haben einige Schüler samt der sie begleitenden Eltern hiervon Gebrauch gemacht, bis eine Mutter klagte, weil der Händler das Zeugnis kopierte, was sicher eine verständliche Handlung war, um nicht ein zweites Mal für dieses Zeugnis zahlen zu müssen. Erfreulich ist, dass sämtliche Gerichte bis hin zum Bundesgerichtshof die Klage abwiesen. Man kann also nicht behaupten, außerhalb der Schulen unternimmt die Gesellschaft nichts. Zurück zu den Problemen der Schulen:

Beides, **das Entwickeln von Strategien *und* das mathematische Wissen**, muss dem Lernenden im Unterricht gegeben werden. Diese sehr nahe liegende These wird leider sowohl von den praktizierenden Lehrern wie auch den Didaktikern nicht intensiv genug in der heutigen *öffentlichen Diskussion* herausgestellt. Das ist wohl die Hauptursache, wenn Journalisten und Politiker das Verhalten von Lehrern missverstehen. Es reicht eben nicht, in Spezialzeitschriften – wie im vorliegenden Fall – seine Meinung als Lehrer usw. kund zu tun. Alle Lehrer angefangen vom Kindergarten bis hin zur Universität sollten endlich beginnen, in Tageszeitungen, Rundfunk und Fernsehen präsent zu sein. Ich weiß, die Presse ist nicht besonders freundlich, wenn es um Mathematik geht. So müssen wir sie z. B. immer wieder mit auch gleich lautenden Leserbriefen bombardieren. Geschieht dies oft genug, so zeigt die Erfahrung, dass solche auch einmal gedruckt werden. Fangen wir endlich an, zumindest Leserbriefe zu schreiben.

4.3 Bemerkungen zur Benotung

Aufgabentexte zu entwerfen und gerecht zu bewerten sind Haupthürden, denen sich jeder Lehrer stellen muss. Ganz Entsprechendes gilt dann für die Benotung einer Prüfung. Hier kann man nur den Vorgesetzten empfehlen, regelmäßige Fortbildung insbesondere für die jüngeren Kollegen durchzuführen.

Ganz übel wird es, wenn man hierbei dem Lehrer überflüssige Korsetts anlegt:

- Jede Probearbeit muss insgesamt – wohl in Anlehnung an die Reifeprüfung – mit 100 Punkten bewertet werden.
- Aus scheinbaren Gründen einer Arbeitserleichterung bekommen Parallelklassen dieselben Fragestellungen; so muss jeder Lehrer vielleicht nur einmal im Jahr eine Prüfungsaufgabe entwerfen. Leider bedeutet das dann nicht, dass der Prüfungsentwerfer auch alle Prüfungen korrigiert. Ganz im Gegenteil, bei mehreren Korrektoren braucht man viele Absprachen, ja man muss die Prüfungen u. U. sogar gemeinsam in einem Raum korrigieren. Ganz übel wird die Idee, wenn man gleich in *einem* Landkreis an allen Schulen jede Prüfung einheitlich durchführt und dann der einzelne Lehrer vielleicht nur alle 10 Jahre einmal mit dem Entwurf einer Prüfung zu tun hat.
  Hier wird vor allem ein vermutlich ungeschriebener Grundsatz übersehen: **Wer lehrt, prüft auch.** Man übersieht einfach wesentliche Unterschiede zwischen Klassen, Lehrern und Unterrichtsgeschehen:

- Lehrer, die einen guten, dichten und auch sonst optimalen Unterricht geben, erreichen u. U. in ihren Klassen größere Erfolge als andere, können dann in Prüfungen von ihren Klassen mehr verlangen und auch noch strenger benoten.
- Wenn sich etwa aus organisatorischen Gründen immer wieder an Gymnasien zu viele Wiederholer in einer einzelnen Klasse wiederfinden, kann das die Leistungsfähigkeit gerade hinsichtlich der Kompetenzen erheblich nach oben wie auch nach unten verändern. Ganz Analoges gilt für Klassen mit Neubürgern. So gibt es z. B. mindestens ein Gymnasium, das von deutschen Schülern gemieden wird, weil die Türken dort so gut sind, dass Deutsche angeblich keine Chance mehr haben.
- Es wäre schon hilfreich, wenn die Lehrplanmacher Hinweise geben könnten, wie viel Prozent der Aufgaben sie unter
    - Reproduzieren,
    - Zusammenhänge herstellen,
    - Verallgemeinern und Reflektieren

  erwarten. Um Ungerechtigkeiten hierbei zu vermeiden, könnte man vielleicht noch etwas dazuschreiben: Unter welchen Bedingungen man hiervon um wie viel abweichen kann.
- Es gibt Orte in Deutschland mit Gymnasialklassen, in denen 25% der Schüler Kinder von Universitätsprofessoren sind und bei 80% mindestens ein Elternteil Naturwissenschaftler ist. Wenn man sich dann bei den Prüfungen zum Übertrittzeugnis der Grundschule am Landesdurchschnitt von 21% Übertrittschülern ans Gymnasium orientiert, ist das eine weitere Ungerechtigkeit.

Zum letzten Punkt will ich ein Beispiel unter dem Aspekt von Kapitel 4.2 geben:
Angenommen, in einer Klasse sind alle Sonderaufgaben aus RINKENS U. HÖNISCH [1] neben 1000 weiteren Aufgaben im Unterricht behandelt. Die Sonderaufgaben (siehe MEYER [5]) beherrschen nur 3 Schüler, sie bekommen hierfür Note 1; alle anderen 22 Schüler können sie nicht lösen. Angenommen, die 1000 anderen Aufgaben werden in aller Regel dank Rechenfehlern, Leichtsinn u. a. von den guten Schülern im Schnitt mit Note 2, von den anderen mit Note 3 bearbeitet. Dann wird das Ergebnis einer Prüfung mit 5 etwa gleich gewichteten Aufgaben wie folgt ausfallen:

Anzahl der Sonderaufgaben	0	1	2
Anzahl der übrigen Aufgaben	5	4	3
Durchschnittsnoten der guten Schüler	2,00	1,80	1,60
Durchschnittsnoten der nicht so guten Schüler	3,00	3,60	4,20
Zu erwartender Klassendurchschnitt	2,88	3,38	3,89

Diese Liste zeigt, wie wichtig hierzu eine Stellungnahme im Kernlehrplan wäre. Selbstverständlich wäre im Kernlehrplan auch eine Angabe zum Verhältnis der Aufgaben, in denen es nur um Reproduktion geht, und solchen, in denen Kompetenzen verknüpft werden, für den Klassendurchschnitt und damit für den Aufgabensteller wichtig.

Man müsste auch angeben, wie man zu einer gerechten Punkteverteilung für die Aufgaben kommt. Ich selbst als Gymnasiallehrer habe mich hierbei immer danach gerichtet, wie viel Zeit ich für die Einzelaufgaben benötige, um eine *vollständige* Bearbeitung *zu schreiben*. Dann bin ich davon ausgegangen, dass ich meine Lösung viermal so schnell wie ein Schüler schreiben kann. Man möge aber beachten, dass diese Norm u. U. nicht auf andere Lehrer wie auch Schularten passt.

Zuerst korrigiert und bewertet man eine Prüfung mit Punkten für die ganze Klasse. Dann sieht man sich die daraus entstehende Punkteverteilung an und vergleicht diese mit dem Eindruck, den man von seiner Klasse hat. Selbstverständlich spielen jetzt auch noch ganz andere Aspekte eine Rolle, wie etwa „wie viel Unterricht“ ist vor der Probe ausgefallen u. a. Dann erst werden die Notengrenzen festgesetzt.

Immer wieder beobachtet man, dass bei Probearbeiten sogar ein halber Punkt bei einer Gesamtpunktzahl von 30 Punkten darüber entscheidet, ob ein Schüler die bessere oder schlechtere Note bekommt. Hierbei wird vergessen, dass dann nicht mit 6 sondern mit 60 Notenstufen benotet wird. Das ist ungerecht; deshalb ist nach Festsetzung der Notengrenzen wichtig, sich alle Grenzfälle nochmals anzusehen und dann bei den Grenzfällen zu entscheiden, welcher Schüler **um ein Sechstel** besser oder schlechter ist.

Die hier nur kurz umrissene Fortbildung für Gymnasiallehrer in Mathematik deutet bereits die Ungerechtigkeit an, dieselbe Probe in Parallelklassen oder gar in einem Landkreis durchzuführen.

Man darf allerdings nicht übersehen, dass die Durchführung einer vom Schulamt kommenden einheitlichen Probe etwa für alle Grundschulen eines Landkreises vor allem durch ein scheinbares Rechtsempfinden heutiger Eltern verursacht worden ist. Ohne Rücksicht und vor allem ohne **Vertrauen zum Lehrer** des Kindes werden von Eltern fragwürdige Wunschnoten durch Maßnahmen bis hin zu Mobbing „erkämpft". Der einzelne Lehrer fühlt sich sicherer, wenn der Prüfungstext und die Benotung von einem – in der Anonymität verborgenen – Schulamt kommen. Wie ich oben gezeigt habe, stecken auch in diesem Verfahren viele Ungerechtigkeiten. Hiermit wird u. a. ein unnötiger Arbeitszeitaufwand getrieben, der eigentlich hinsichtlich der ohnedies stark strapazierten Lehrberufe nicht zu verantworten ist. Man sollte deshalb durchaus wieder dem einzelnen Lehrer das Prüfen überlassen, aber dafür in Sprechstunden oder Klassenelternabenden mit einer höchst zulässigen Transparenz den beschriebenen **Benotungsstil erklären**. Eltern verstehen dann, dass ihre Kinder nicht nur beim Lehrer gut aufgehoben sind, sondern der Lehrer bemüht ist, **Noten unter dem Aspekt höchster Gerechtigkeit zu vergeben**.

Freilich, jedem Lehrer sind schon beim Korrigieren und Benoten Fehler unterlaufen. Man darf sich deshalb nicht scheuen, in solchen Fällen Korrekturen und Benotung nach Oben zu ändern. Das kann juristisch kein begünstigender Verwaltungsakt sein, weil ja vorher eine Note falsch angesetzt worden ist. Man darf allerdings bei einem entdeckten Korrekturfehler keine Note verschlechtern. Auch sollten Korrekturfehler usw. selten sein. Ganz tragisch ist es, wenn eine Prüfungsfrage nicht korrekt formuliert wird und einige Schüler dies entdecken und sehr kluge Stellungnahmen oder Ergänzungen der Frage vornehmen. Hier sollte man die Gesamtpunktanzahl um die für diese Frage vorgesehene Punktanzahl verkleinern und den Schülern, die sich richtig verhalten haben, trotzdem die vorgesehene Punktzahl für die Frage geben. D. h.: Theoretisch könnte es dann passieren, dass ein Schüler mehr als 100% der Punkte erreicht.

All diese Dinge sind für das Zusammenleben von Eltern, Schülern und Lehrern wichtig. So ist es sehr eigenartig, dass die kompetenzorientierten Lehrpläne so detailliert auf das Wie des Unterrichtens eingehen und doch viele heute sehr ernst zu nehmende Probleme nicht berücksichtigen.

5. Konsequenzen hinsichtlich der kompetenzorientierten Lehrpläne

5.1 Ausbildung der Lehrer

Immer ausgefeilter wird die Ausdrucksweise der Didaktik. Man bekommt den Eindruck, das Lehrerdasein ist weitgehend unabhängig vom Lehrfach und vor allem von Philosophie, Sprachgefühl, Psychologie und Allgemeinpädagogik geprägt. In Wirklichkeit bemühen sich die Kernlehrpläne nur um einen einheitlichen **optimalen Stil des Unterrichtens**, der zunächst nicht berücksichtigt, was gelehrt werden kann und soll. Das heißt: Die Lehrer selbst müssen in ihrem Studium gut über die neuen Errungenschaften in der Didaktik ihrer Fächer unterrichtet werden, sie müssen aber auch für die Zukunft hinreichend z. B. im Fach Mathematik gebildet sein. Nur so wird es den Lehrern in ihrer Berufsausübung gelingen, ohne Hilfe von außen die Ideen der Kernlehrpläne als Unterrichtsskelett mit Fleisch, also Stoff ihrer Fächer, auch in Zukunft zu füllen. Leider gibt es hierzu kaum handfeste Vorschläge in den Kernlehrplänen.

An diesem Zustand wird sich offenbar in naher Zukunft nichts ändern, wenngleich ich seit Jahrzehnten Staatsinstitute, Hochschullehrer, pensionierte Lehrer und solche die sich im Schulalltag „freigeschaufelt" haben, also Zeit haben, aufgefordert habe, einschlägiges Material für die einzelne Unterrichtsstunde schriftlich bereitzustellen und damit die praktizierenden Lehrer zu entlasten. Zusammen mit anderen habe ich hierfür die Zeitschrift „Mathematikinformation" ins Leben gerufen, um solche Vorschläge zu diskutieren.

Einer solchen selbstständigen Unterrichtsgestaltung kann aber ein einzelner Lehrer nur nachkommen, wenn er über ein enormes Wissen und Können in seinem Fach, also hier in Mathematik, verfügt. Hierzu muss er extrem vielseitig und vorausschauend sein Studium gestalten und auch später mathematisch arbeiten und publizieren. Nur der Besuch vieler Fachvorlesungen gibt die hierzu erforderliche Freiheit. Vorlesungen in Didaktik reichen sicher nicht, auch wenn sie unverzichtbar sind. So sehe ich mit Sorgen, dass vor allem bei Lehrern für das Gymnasium und die Realschule der rein fachliche Studienanteil zugunsten der Didaktik immer kleiner wird. Das sollte sich wieder ändern.

5.2 Lehrplan contra Lehrer?

Was sind nun die eigentlichen Ursachen, dass man heute so detailliert den Stil des Unterrichtens in Kernlehrplänen festlegen muss und auf die Inhalte des Unterrichtens zugunsten des Stils verzichtet? Wie oben bereits erwähnt, ist es nicht neu, zukünftig den „Output" bei den unterrichteten Schülern mehr als in der bisherigen Schulpraxis im Blick zu haben. Man sollte aber nicht vergessen: **Jeder Output verlangt einen Input** und letzterer muss stets größer als ersterer sein, wenn der Output nicht bei zu vielen Schülern als leer erkannt werden soll.

Aber im Grunde ist dies alles doch schon immer so gewesen; weshalb sind dann heute hierfür neue Lehrpläne erforderlich? Kann es sein, dass man **überhaupt kein Vertrauen mehr zu seinen Lehrern** hat und es deshalb nicht mehr ausreicht, den „Lehrplan" einer Jahrgangsstufe für sie in 6 Zeilen wie vor 1960 zu formulieren?

Wenn das Vertrauen nicht mehr besteht, dann aber muss man sofort beginnen, auch den **dazugehörigen „Input" zu formulieren**, wie dies schon lange alle Abnehmer der Absolventen, angefangen von Handwerksmeistern und ihren Organisationen über die Wirtschaft und Industrie bis hin zu den Hochschulen (siehe u. a. in der vorliegenden Zeitschrift KLOUTH [1], MEYER [3] und [4], SONAR [1], TRATSCH [1]) mit Recht bemängeln. Denn sie alle haben längst beobachtet, dass das, was heute noch **Output ist, zwar ausmacht, was man früher Bildung nannte, was aber nicht für die Bedürfnisse unserer Gesellschaft ausreicht und auch nie ausgereicht hat**. Hierbei spielt sicher auch das Verhalten der Lehrerschaft einschließlich ihrer Organisationen eine Rolle: Man zeigt zu wenig Interesse an dem, was die Abnehmer der Schüler von der Schule erwarten. Es ist wichtig, endlich eine **Diskussion mit diesen Abnehmern** zu beginnen und zu klären, welche Erwartungen berechtigt und erfüllbar sind und welche nicht. Die Gespräche dürfen nicht einmalig sein, sondern sie müssen zukünftig zum schulischen Alltag gehören, wenn sich die Gesellschaft und ihre Schule weiter entwickeln wollen.

Viele Lehrer glauben zu wissen, dass bei zu vielen Schülern all das nicht mehr erreicht werden kann, was eben heute als „Output" erwartet wird. Sie vergessen den Spruch „Man muss so manchen – auch den Jugendlichen – zu seinem Glück zwingen." Bezogen auf Unterricht bedeutet dies: Es ist durchaus legitim, einzelne Schüler anzuregen, ein bisschen eifriger zu sein, u. U. auch einen angemessenen Druck auf gewisse Schüler auszuüben, sie damit anzuregen, ihren Output zu vergrößern. Für Lehrer ist es sehr befriedigend, wenn Schüler die Mathematik, die sie benutzen, verstehen und die neuen Lehrpläne beschränken die Inhalte scheinbar so, dass zunächst angenommen werden kann, die verbleibenden Inhalte gehören zum verstandenen Output aller Schüler; aber die Erfahrung zeigt, dass manche Menschen innerhalb eines gewissen Bereichs Mathematik durchaus **richtig anwenden** können, auch wenn sie nicht **alles verstanden** haben. Die Arbeit der Ingenieure zeigt tagtäglich, dass man mit Erfolg Ergebnisse einer mathematischen Theorie einsetzen, also z. B. ein Integral berechnen kann, ohne diese Theorie bis ins Letzte verstanden zu haben, also genau zu wissen, was ein Integral ist. So kann ein Grundschüler z. B. durchaus 3 + 4 berechnen, ohne dies genau verstanden zu haben. Bleibt es ja i. Allg. auch dem Lehrer verborgen, was diese Rechnung mit den Axiomen des PEANO zu tun hat.

Juristisch schaffen die Kernlehrpläne einen für die Schulverwaltung günstigen Unterricht; denn jeder Lehrer, der sich nicht an den Kernlehrplan hält, also einen scheinbar schlechten Unterricht gibt, kann zukünftig verklagt werden. Ob die neuen Lehrpläne hinsichtlich des Outputs wirksamer als frühere werden, bleibt wegen der obigen, bekannten Beobachtungen fraglich. Ein Papier kann nur bedingt helfen, vor allem dann, wenn es so viele Fragwürdigkeiten insbesondere missverständlicher Formulierungen enthält. Eine andere Idee könnte aber weiterhelfen:

Schon an früherer Stelle (siehe MEYER [3] ff Seite 70) kann der Vorschlag in der vorliegenden Zeitschrift nachgelesen werden, in den Fachgruppen **weisungsbefugte Fachbetreuer** einzuführen, die nicht nur via Fachkonferenzen fortbilden, nicht nur den einzelnen Lehrer beurteilen sondern **vor allem betreuen**. Es gibt weltweit kein Unternehmen das für tausende akademischer Mitarbeiter nur einen weisungsbefugten **Fach**vorgesetzten (am Kultusministerium) hat, wie das immer noch in den meisten Bundesländern im Fall der Gymnasien zu beobachten ist. Der Schulleiter ist hierzu überfordert, da er nur in 2 höchstens 3 Fächern kompetent ist. Analoges gilt an den anderen Schularten, bei denen in aller Regel ein Schulrat den Fachvorsitz hat, der vor allem in den Flächenstaaten der Bundesrepublik weit vom Schulort entfernt ist. Weisungsbefugte Fachbetreuer würden dann all die Mühen mit dem Formulieren der Kompetenzen usw. überflüssig machen.

5.3 Welche Kenntnisse – nicht Kompetenzen – führen zur erfolgreichen Schule

Leider findet man die folgende Meinung: „Was gehen mich als Lehrer die Bedürfnisse der Handwerksberufe oder gar Studienrichtungen an? Ich bin ein examinierter Lehrer, habe zwei Staatsexamen mit Erfolg abgelegt und weiß seit Jahrzehnten, wie und was man unterrichtet. Über das Wie des Unterrichts lasse ich mit mir nicht reden, die Inhalte lasse ich verändern, vor allem dann, wenn „entfrachtet“ wird und ich weniger lehren muss“. Als Beispiele zu den Unterrichtsstilen hat der Autor Frontalunterricht, Frageunterricht, selbstständiges Entdecken im Unterricht, mengenorientierter Unterricht, Fächerübergriff usw. bis hin zu einem kompetenzorientierten Unterricht erlebt; all diese Unterrichtsstile haben bestenfalls einen Teil der Lehrer begeistert. Bei neuem Unterrichtsstoff, wie etwa nach 20 Jahren Mengenlehre (die mathematisch keine war), konnte man bei ihrer „Abschaffung“ z. B. an Gymnasien feststellen, dass sie nur wenige Kollegen praktiziert haben. Deshalb waren diese Lehrer bei der Abschaffung der so genannten Mengenlehre froh, dass ihr eigener Unterricht wieder „legal“ geworden war. Die Modehaltungen hinsichtlich des Unterrichtsstils wurden zwar stets von allen Lehrern zur Kenntnis genommen, aber da sie schon immer wussten, dass es keinen Königsweg zur Mathematik gibt, nahmen sie die Neuerungen nicht allzu ernst, **mischten die Unterrichtsformen** und hielten *gerade deshalb* einen guten Unterricht.

Ändern sich wirklich unsere Bedürfnisse hinsichtlich der Erwartungen an den Mathematikunterricht nicht? Doch, man stellt heute im Unterricht fest, Kinder passen nicht gut genug auf. Häusliche Erziehung aber auch Vor- und Nachbereitung existieren praktisch nicht mehr. Lernfähigkeit geht gegen null. Ähnliches gilt für den Willen zum Lernen, wie man auch an Äußerungen der folgenden Art in einer Jahrgangsstufe 10 zu hören bekommt: „Dr. Meyer, weshalb geben Sie in Mathematik immer noch Hausaufgaben, kein anderer Lehrer unserer Klasse verlangt solches.“

Bereits weiter oben wird darauf hingewiesen, dass ein scheinbar überfüllter Lehrplan vor allem die Bereitschaft zu Lehrplanänderungen verursacht, aber jede Kürzung manchmal schon drei Jahre später erneut zum Wunsch einer weiteren Kürzung führt, weil Lehrer abermals innerhalb der Unterrichtszeit mit den verbliebenen Inhalten nicht fertig werden. Sicher spielt diese Beobachtung bei neuen Lehrplänen eine Rolle, nicht nur weitere Kürzungen anzustreben sondern gleich nur möglichst wenige Inhalte im Lehrplan zu fixieren. Man sollte sich endlich bewusst machen, dass **jede „Entfrachtung“** des Lehrplans – vor allem wenn solche von Schullaien, z. B. Politikern – vorgenommen werden, **alte erprobte Überlegungen zerreißt** und damit durch die Entstehung von Lücken im Curriculum für den nicht ganz so guten Schüler keine Entlastung sondern eine **Belastung** erzeugt.

Man möge nicht übersehen, diese Stoffreduktionen sind im Mathematikunterricht nicht erst seit 10 Jahren existent; sie sind zumindest im gymnasialen Bereich seit 1900 nachweisbar und immer noch geht es mit dem Reduzieren weiter. Hier muss allerdings zugegeben werden, dass um 1900 keine eigentlichen Reduktionen stattgefunden haben, sondern manch ein Lehrgebiet der Mathematik nur gegen ein zukünftig erforderliches – wie etwa in den so genannten Meraner Plänen bei der Schaffung der Analysis am Gymnasium – ausgetauscht worden ist.

Man kann auch in vielen Fällen den Schritt zu einem erforderlichen Umfang des Inputs nicht mehr durchführen, wenn heute – wie etwa in NRW – Dinge im Unterricht eine Rolle spielen, die weitab vom eigentlichen Fachunterricht sind, aber so zeitraubend durchgeführt werden, dass das eigentliche Thema – wie im Folgenden der Satz des PYTHAGORAS – nur noch am Rande des Unterrichtsgeschehens stehen. So liest man bei HANS-JÜRGEN ELSCHENBROICH [1]: „Die Medienberatung NRW…. hält folgende Lernmethoden-Kompetenzen für fundamental: Strukturieren, Recherchieren, Kooperieren, Produzieren, Präsentieren. Diese kann man zu den jeweiligen fachspezifischen Kompetenzbereichen als einen zusätzlichen, über die Fächer hinweg gleichen Kompetenzbereich auffassen.“ Weiter heißt es dann: „Dies soll am Beispiel einer Unterrichtsreihe zur Satzgruppe des PYTHAGORAS verdeutlicht werden:
Strukturieren: Die Schüler erstellen eine Mindmap zur Satzgruppe des PYTHAGORAS, die die Sätze und Anwendungen gliedert und vernetzt.
Recherchieren: Mit Hilfe von Suchmaschinen im Internet, in digitalen und klassischen Bibliotheken tragen die Schüler Informationen zum Leben des PYTHAGORAS und zu den Pythagoräern zusammen.
Kooperieren: In Stationen-Lernen, Arbeitsgruppen oder Partnerarbeit bearbeiten die Schüler konventionelle und elektronische Arbeitsblätter, entdecken Zusammenhänge und entwickeln Begründungen, vertiefen Themen z. B. zu Anwendungen, zum Beweisen, zur Geschichte des Satzes von PYTHAGORAS.
Produzieren: Zu den Arbeitsblättern erstellen Schüler Konstruktionen, geometrische Puzzels, Lernplakate oder Webseiten.
Präsentieren: Vom Vorstellen der Hausaufgaben und Lösungen der Arbeitsblätter innerhalb der Klasse geht die Spannweite bis zur Präsentation von Produkten an einem Tag der offenen Tür oder auf der Schul-Webseite für eine größere Öffentlichkeit.“

Einmal ganz abgesehen davon, dass man solches *gelegentlich* – und das ist wohl der Hauptunterschied zu den Vorschlägen aus NRW – schon 30 Jahre vor den kompetenzorientierten Lehrplänen gemacht hat, muss man sich allerdings bei der obigen Liste fragen, wie viel Prozent der Unterrichtszeit wirklich noch für den eigentlichen Lehrsatz und seine äußerst vielseitigen Anwendungen übrigbleiben.

Bekannt ist schon immer, dass der „gute“ Lehrer rascher und wirksamer lehrt als der „weniger gute“. Hierbei fragt man sich nur, wie man feststellt, welcher Lehrer „gut“ oder „schlecht“ ist bzw. für welche Schüler wirkt sich dann ein solches Urteil aus? Bis jetzt hat man mit Lehrplänen die Schule via Lehrinhalte steuern wollen, der Erfolg wurde immer kleiner. Jetzt hat man eine neue Idee, mit Lehrplänen den **Unterrichtsstil und Unterrichtsablauf zu lenken**. Die Bedenken hierbei liegen auf der Hand: Ist es sinnvoll, eine Lehrmethode – wie auch bei früheren Stiländerungen – **allen Schülern und Lehrern konform** aufzudrängen? Wäre es nicht sinnvoller, wenn jeder Lehrer seinen eigenen Stil in Zusammenarbeit mit einem Vorgesetzten vor Ort optimieren könnte und dafür die Möglichkeiten besäße, rasch einen Stil- oder Ausdruckswechsel durchzuführen, wenn dies seine Schüler erfordern?

Ist es für die Gesellschaft in ihrem Streben nach einem noch besseren Leben akzeptabel, wenn kaum Lehrinhalte landesweit oder gar bundesweit fixiert sind und so der Abnehmer der Schüler nicht mehr wissen kann, was er beim einzelnen Mitarbeiter oder Schüler erwarten darf oder nicht? Heute schon ist z. B. an den Fachhochschulen nicht mehr erkennbar, welche Kenntnisse und Erfahrungen der einzelne Student aus der Vorschule Gymnasium mitbringt.

Hier sollen keine Schuldigen gesucht oder gar angeprangert werden, weil sich der ganze Berufsstand angefangen vom Erzieher im Kindergarten bis hin zum Hochschulprofessor nicht für die Erfordernisse der die Schüler abnehmenden Instanzen interessiert. So haben z. B. nur 2 Didaktiker bei ca. 230 Vorträgen der Bundestagung 2011 der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik über Probleme der beruflichen Bildung vorgetragen, obwohl heute noch ein Großteil unserer Schüler einen Mathematik abhängigen Beruf ergreift.

Man hat aber auch in Schulstufen zu viele Dinge aufgenommen, die früher eine oder zwei Stufen höher angesiedelt waren und wundert sich jetzt, dass Schüler damit überfordert werden, weil z. B. keine Zeit mehr für die Vermittlung der klassischen Bereiche im Unterricht vorhanden sind:

Grundschule: Erforderliche Lehrinhalte sind immer noch Rechnen mit natürlichen Zahlen, Lesen, Schreiben (literacy!!) und hoffentlich auch Schönschreiben, damit wieder mehr Schüler als heute wenigstens ihre eigene Schrift lesen können. Die Raffinessen wie Spiegelungen, Verfremden bei Stellenwertsystemen u. a., die heute ins Curriculum der Grundschulmathematikbücher eingebaut sind – und auch geprüft werden – sollten reduziert werden, auch auf die Gefahr hin, dass mehr Schülern als bisher an weiterführende Schulen übertreten.

Hauptschule und Berufsschule: Die Hauptschule wird immer wieder als Restschule bezeichnet, in Wirklichkeit hat diese Schulart die große Aufgabe, auf die Lehrberufe vorzubereiten. Nur kümmert sie sich immer noch zu wenig um die Erwartungen der Lehrberufe. Auch viel zu wenige Didaktiker an deutschen Hochschulen (siehe oben) haben sich mit diesem Bereich befasst (abgesehen von weniger Ausnahmen, z. B. früher BLUM UND STRÄßER [1], heute KAISER [1] und RAWE [1]). Auch wenn man wichtige Sätze der Mathematik für Handwerksberufe bereitstellen muss, kann es an der Hauptschule wie auch Berufsschule nicht angehen, solches in Kopie des gymnasialen Unterrichts anzupacken. Man muss hier in Zusammenarbeit mit den Handwerksberufen **eigene Wege** finden und gehen.

Auch **Gymnasien** sollten sich neben dem Wechsel der Begriffe aus der Didaktik mehr um die Belange der Vor- und Folgeschulen kümmern. Es geht nicht an, dass Anfänger an weiterführenden Schulen in manchen Grundschulen kaum den Divisionsalgorithmus kennen gelernt haben (weil er erst nach Erstellung des Übertrittzeugnisses im Unterricht vorkommt), dafür aber Zahlen im Hexadezimalsystem berechnen können (siehe oben). Verstärkt gilt die Forderung nach Förderung von „Übertrittschülern“ von Gymnasien an Hochschulen: Gymnasiallehrer sollten sich endlich darum bemühen zu erfahren, was in den Eingangssemestern der **Mathematikanwender** von den ehemaligen Schülern erwartet wird, wenn man weiterhin von einer allgemeinen Hochschulreife sprechen will. Die Hochschulen selbst können nicht die Lücken der Gymnasien schließen, wenn sie auch in Zukunft Studenten in einer Regelstudienzeit an die Forschung heranführen wollen und sollen.

Man möge bedenken, noch haben Lehrer aller Schularten ein ungutes Gefühl, wenn es um die neuen Lehrpläne geht. Nutzen wir dieses Gefühl. Die Abnehmer der Schulabsolventen klagen zwar mittlerweile heftig über den beschleunigten **Rückgang im Output**, insbesondere hinsichtlich der Bundesländer, die sich schon längere Zeit mit der neuen Begriffswelt befassen. Wenn dieser Trend anhält, wird in 20 Jahre ein endgültiger Rückgang der Wirtschaft unumgänglich sein. Erste Folgen sind bereits zu beobachten, wenn Industriebetriebe bevorzugt Reifeprüflinge statt Hauptschulabgänger als Auszubildende (Lehrlinge) einstellen. Noch sind wir eine reiche Gesellschaft, die eine vorübergehende Wirtschaftsflaute überstehen kann, d. h. noch ist es für Änderungen nicht zu spät. Ein endgültiger Rückgang kann noch vermieden werden.

Man muss in Zukunft stärker als bisher berücksichtigen, dass vermutlich schon heute die neue Gängelung des Unterrichtsstils verbunden mit zu geringer Bezahlung und den sonstigen Veränderungen unserer Gesellschaft keine hinreichende Anzahl von Studienbewerbern für die Lehrerberufe der Mathematik und der Naturwissenschaften zur Folge haben. Also sollte man auch deshalb zumindest das Gängelband Kompetenzorientierung zerschneiden.

5.4 Was ist naheliegend?

Hier muss auf den Ausgangspunkt der deutschen Entwicklung, der so genannten KLIEME-Expertise (siehe KLIEME U. A. [1]), eingegangen werden, die wohl im Auftrag des Bundesministeriums für Bildung und Forschung erstellt worden ist und die entscheidend die Entwicklung der Kernlehrpläne angestoßen hat. Aus KLIEME U. A. [1] werden einige Stellen zitiert:

- Unter „2.1 Was in dieser Expertise unter „Bildungsstandards“ verstanden wird“ heißt es dort u. a.: „Die Kompetenzen werden so konkret beschrieben, dass sie in Aufgabenstellungen umgesetzt und prinzipiell mithilfe von *Testverfahren* erfasst werden können. Bildungsstandards stellen innerhalb der Gesamtheit der Anstrengungen zur Sicherung und Steigerung der Qualität schulischer Arbeit ein zentrales Gelenkstück dar. Schule und Unterricht können sich an den Standards **orientieren**.“

D. h. die Standards allein legen nicht fest, was unterrichtet wird, sie orientieren nur. Leider scheinen das viele Bundesländer beim Formulieren ihrer Kernlehrpläne bzw. bei der Lehrerfortbildung übersehen zu haben. Weiter heißt es in der KLIEME-Expertise:

– „Bildungsziele geben allerdings nur recht generelle Erwartungen wieder. Damit sie pädagogisch umgesetzt werden können, benötigt man ein Medium, in dem sich die Ziele spezifizieren und definieren lassen. Dieses Medium sind in der Tradition **die Lehrpläne, aktuell sollen sie um Kompetenzmodelle ergänzt werden**." Es ist also nicht die Rede davon, bestehende Lehrpläne zu ersetzen, sondern *nur* zu ergänzen. Man kann auch unter dem Aspekt von Kompetenzen Mathematik nur lehren, wenn man *nicht nur* mathematische Inhalte *sondern auch* mathematische Strategien zur Verfügung hat, auf die der Schüler bei Bedarf zurückgreifen kann.
– Auf Seite 17 oben findet man unter (a): „ Ohne Bezug auf allgemeine Bildungsziele wären Kompetenzanforderungen reine Willkür oder bloße Expertenmeinung. Erst die Orientierung an diesen Zielen legitimiert die Bestimmung von erwünschten Niveaustufen und die daraus resultierenden Testverfahren. Insbesondere sollen die Standards **von einem Verständnis des Bildungsauftrags der jeweiligen Fächer ausgehen**, das expliziert werden muss."
  Da nun einmal die Schulen u. a. auch in Mathematik nicht nur Allgemeinbildung vermitteln sondern auf Berufe und/oder Ausbildungen (z. B. an der Hochschule) vorbereiten, sind sie durch die Expertise verpflichtet, sich auch weiterhin um die Bedürfnisse der Abnehmer der Schüler zu kümmern, was man leider bei vielen Kernlehrplänen vermisst. Ähnliche Hinweise findet man auch unter „2.2 Merkmale guter Bildungsstandards" unter: „*Fokussierung:* Die Standards **decken nicht die gesamte Breite des Lernbereiches** bzw. Faches in allen Verästelungen ab, sondern konzentrieren sich auf einen Kernbereich." Weiter heißt es unter: „*Verbindlichkeit:* Sie (Anm. die Bildungsstandards) drücken die **Mindestvoraussetzungen** aus, die von *allen* Lernern erwartet werden. Diese Mindeststandards müssen schulformübergreifend für alle Schülerinnen und Schüler gelten." Schließlich findet man unter „Differenzierung" den Hinweis: „Für die Qualitätsentwicklung insgesamt ist wichtig, über das Mindestkriterium hinaus **höhere Anforderungen insbesondere an leistungsstarke** Schülerinnen und Schüler zu richten." Aus diesem Satz lässt sich die Berechtigung eines gegliederten Schulwesens herleiten.

So kommt die vorgelegte Untersuchung zu den folgenden Ergebnissen:

1. Die didaktischen Ideen, die der Ausgangspunkt der Bildungsstandards sind, bemühen sich um einen besseren Unterricht.
2. Die Umsetzung dieser Ideen nur anhand von Kernlehrplänen ist unzureichend.
3. Trotz der bekannten bildungspolitischen Unterschiede zwischen den einzelnen Bundesländern sind alle aufgefordert, neben den mittlerweile vorhandenen Kernlehrplänen auch die in der KLIEME-Expertise genannten inhaltlichen Lehrpläne so zu formulieren, damit sie die Wünsche realisieren, wie sie an Grundschule bis hin an das Gymnasium herangetragen werden.
4. Schulbücher, die den vollen Wortlaut der KLIEME-Expertise – also sowohl einem Kernlehrplan wie auch einem inhaltlichen Lehrplan – entsprechen, sind in Auftrag zu geben.
5. Eine für alle Lehrer verpflichtende Fortbildung erklärt, weshalb die vorhandenen Kernlehrpläne durch inhaltliche ergänzt werden müssen.
6. Die derzeit zur Verfügung stehende Vorlesungszeit für Lehrer bei der *rein fachlichen* Ausbildung außerhalb der Didaktik, Pädagogik und Psychologie ist nicht ausreichend hinsichtlich der heute bereits vorhandenen Erwartungen. Sie muss vor allem unter dem Aspekt einer zukünftigen Weiterentwicklung der Schule erhöht werden.
7. Wenigsten in einer Übergangszeit ist es erforderlich, die Fachkenntnisse von Hochschullehrern bei den Formulierungen von Verordnungen und Lehrplänen zu nutzen.

7. Literatur

Artin, E.	[1]	Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc., New York 1964
Barzel, Büchter, Hubmann,Leuders	[1]	Unterrichtsentwicklung mit standardorientierten Lehrplänen und Lernstandsmessungen, Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, div verlag franzbecker, Hildesheim,Berlin, Seiten 69 bis76
Baumann, Astrid	[1]	Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben“ anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009, Mathematikinformation Nr.55 (2011), Seiten 15 bis 23
Bayerischer Philologenverband e. V.	[1]	Umfrage: Große Skepsis über Effektivität mancher Lehrplanreformen an der Grundschule, Das Gymnasium in Bayern, Heft 1-2013, Seiten 22 bis 27
Bescherer, Christine	[1]	Horizontale Differenzierung von Bildungsstandards im internationalen Vergleich, Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, div verlag franzbecker, Hildesheim,Berlin, Seiten 89 bis92
Birkhoff, Garrett	[1]	Lattice Theory, Third Edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1973
Bloom, Benjamin S.	[1]	Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich („Taxonomy of educational objectives“, 1974), 5. Auflage, Beltz Verlag, Weinheim 1976, ISBN 3-407-18296-1
Blum Werner, Sträßer Rudolf	[1]	Mathematik in der Teilzeit-Berufsschule, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 12 (1980), Hefte 3 und 4
Bourbaki, Nicolas	[1]	Éléments de Mathématique, La Theorie des Ensembles, Hermann Paris 1939
Elschenbroich, Hans-Jürgen	[1]	Lernmethoden-Kompetenzen, aus CD Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Seiten 179 bis 182
Förster, Frank	[1]	Begabtenförderung in der Mathematischen Lernwerkstatt Braunschweig (und im normalen Unterricht), Vortrag des 17. Forums für Begabungsförderung in Mathematik an der PH Karlsruhe März 2014
Gast, Robert	[1]	Zwei Euro für jede Eins, Süddeutsche Zeitung vom 4. 4. 2014
Gebhardt, Rainer	[1]	Einblicke in die Coß von Adam Ries, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart – Leipzig und Verlag der Fachvereine Zürich 1994
Kaiser G., Schwarz B.	[1]	Modellierungskompetenzen – Entwicklung im Unterricht und ihre Messung, aus CD Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Seiten 56 bis 58
Kaiser, Hansruedi	[1]	Prozentrechnen in der Berufsbildung: Kann man Lernende überhaupt darauf vorbereiten? aus CD Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Gesellschaft der Didaktik der Mathematik
Klieme u. a.	[1]	Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards, Arbeitspapier des Deutschen Instituts für Internationale Pädagogische Forschung, Frankfurt a. M. 2003
Klouth, Richard	[1]	Grußwort des Präsidiums der DMV anlässlich des 15. Forums für Begabunsgförderung in Mathematik an der TU Berlin, Mathema-

tikinformation Nr. 57 (2012), Seiten 3 – 5

Kultusminister-Konferenz [1] www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in schulen/ bildungsstandards...Oktober 1997

Kratz [1] Curricularer Lehrplan, Bayern

Linneweber-Lammerskitten, Helmut [1] Bildungsstandards in Mathematik: allgemein, abstrakt, exemplarisch oder vage?, aus CD Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Seiten 351 bis 354

Meyer [1] Verbandstheoretische Orthogonalität, Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie Tome II, Roma Accademia Nazionale di Lincei 1976, Seiten 281bis 311

[2] Klassische Differentialgeometrie im Mathematikseminar des Gymnasiums, Förderung von Jugendlichen in der Mathematik, Verlag K. H. Bock Bad Honnef 1993, Seiten 59 bis 67

[3] Über Ursachen des Niedergangs der Mathematikvermittlung an Schulen und ihre Behebung, Mathematikinformation Nr. 56 (2012), Seiten 61 – 78

[4] Zukunft der Hochschulreife im Schulfach Mathematik, Mathematikinformation Nr. 59 (2013), Seiten 44 – 60

[5] Themen, die bis jetzt in der „Mathematikinformation“ fehlen, Mathematikinformation Nr. 61 (2014)

Meyer u. a. [1] Brennpunkt Mathematik 5, Schroedel Schulbuchverlag Hannover 1992

Neubrand, Michael [1] Informationen zum PISA-Projekt, Beiträge zum Mathematikunterricht 1999, div verlag franzbecker, Hildesheim, Berlin, Seiten 389 bis 392

[2] Die Konzepte „mathematical literacy“ und „mathematische Grundbildung“ in der PISA-Studie, Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, div verlag franzbecker, Hildesheim, Berlin, Seiten 454 bis 457

Niedersachsen [1] Kernlehrplan für die Grundschule 2006

[2] Kernlehrplan für die Hauptschule 2006

[3] Kernlehrplan für die Realschule 2006

[4] Kernlehrplan für das Gymnasium Sek.I 2006

[5] Kernlehrplan für das Gymnasium Sek.II 2009

Nordrhein-Westfalen [1] Kernlehrplan 2009?

Preuss, Roland [1] “Das bringt die Qualität sicher nicht voran“, Süddeutsche Zeitung 5./6. 4. 2014, Seite 2

The Oxford Universal Dictionary Illustated [1] Volume I, Third Edition, International Learning Systems C.L. London 1961

Rawe, Benjamin [1] Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung – Ein Förderprojekt für die Hauptschule, aus CD Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Gesellschaft der Didaktik der Mathematik

Rinkens, Hönisch u. a. [1] Welt der Zahl 4, Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig 2008

Schmidt-Thieme, Barbara [1] Unmathematisches Argumentieren im Mathematikunterricht, CD Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Seiten 78 bis 81

Schott und Azizi Ghanbari [1] Kompetenzdiagnostik, Kompetenzmodelle, kompetenzorientierter Unterricht, Waxmann Münster 2008, ISNB 978-3-8322-6175-7

Sonar, Thomas [1] Der langsame Tod der Analysis, Mathematikinformation Nr. 57 (2012), Seiten bis 13

Tratsch, Gernot [1] Notstand Mathematik, ein Projekt der IHK Braunschweig, Mathematikinformation Nr. 55 (2011), Seiten 51 – 65

van der Waerden, L [1] Algebra 2. Teil, 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955

Walser, Hans [1] Die Modellierung des schönen Scheins, Mathematikinformation Nr. 55 (2011) Seiten 3 bis 14

Wikipedia [1] Literacy, www.en.wikipedia.org/wiki/Literacy

[2] Kompetenz (Pädagogik), www.wikipedia.org/wiki/Kompetenz

[3] Bildungsstandards Mathematik, www.de.wikipedia.org(wiki/Bildungsstandards_Mathematik

[4] Bildungsstandards, www.de.wikipedia.org/wiki/Bildungsstandards

Bildnachweis:
Seite 20 Konstruktion links: Dachschlauch mit Rinne, Silke Hartmann
Seite 20 Foto rechts: IVA 1965 München Weltraumstation, Foto Meyer

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg