

Gustav Vogl

## Das Umkreis-Inkreis Problem

**Zusammenfassung und Einführung:** Das Umkreis-Inkreis Problem fragt nach der Existenz von  $n$ -Ecken, deren Um- und Inkreis vorgegeben sind. Dieses ist nur lösbar, wenn die Kreisradien gewisse Bedingungen erfüllen. Das Problem ist nach dem französischen Mathematiker JEAN-VICTOR PONCELET (1788-1867) benannt, der an Stelle von Um- und Inkreis sogar Kegelschnitte betrachtet hat. Die Lösung im Fall von vorgegebenen Kreisen, das heißt das Auffinden der Bedingungsgleichungen, ist mit den Namen weiterer berühmter Mathematiker verbunden: L. EULER, N. FÜSS, C. JACOBI, A. CAYLEY, JAKOB STEINER (nach SAUVAGEOT [2]). Der erste Abschnitt behandelt Problem für Dreiecke, der nächste für Vierecke, der dritte für beliebige Eckenzahl und speziell für Sechs- und Achtecke. Abschnitt 4 bringt die Lösungen zu 12 Aufgaben.

### Satz von PONCELET:

Gegeben sei der Umkreis  $k(M, R)$  mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $R$ , sowie in seinem Inneren der Inkreis  $k(I, r)$  mit Mittelpunkt  $I$  und Radius  $r$ . Der Abstand der Mittelpunkte werde mit  $a$  bezeichnet. Dann gilt für jede natürliche Zahl  $n$  mit  $n \geq 3$ :

Genau dann, wenn eine bestimmte Polynomgleichung in den Variablen  $R, r, a$  erfüllt ist, gibt es ein  $n$ -Eck mit Umkreis  $k(M, R)$  und Inkreis  $k(I, r)$ . Ist die Gleichung erfüllt, so kann der erste Punkt des  $n$ -Ecks auf dem Umkreis beliebig vorgegeben werden.

**Man beachte:** Da der Inkreis im Inneren des Umkreises liegt, und  $R, r, a$  Strecken bzw. Streckenlängen bedeuten, gilt stets  $a < a + r < R$ .

Einen allgemeinen Beweis findet man bei SAUVAGEOT [2], Kapitel 2 und 4. Dort wird die Theorie elliptischer Funktionen verwendet, die aber jenseits der Schulmathematik liegt. Für den Fall  $n = 3$  steht in knapper Form ein Beweis bei METTLER [1], Seiten 26 - 27. Dieser benutzt keine Trigonometrie.

Obige Polynomgleichung wird in der vorliegenden Arbeit hergeleitet

$$\text{für } n = 3: \quad R^2 - a^2 = 2Rr$$

$$\text{für } n = 4: \quad (R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2) = 0$$

$$\text{für } n = 6: \quad [(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^2 = 4 \cdot (R^2 - a^2)^2 [(R - a)^2 - r^2] [(R + a)^2 - r^2]$$

$$\text{für } n = 8: \quad [(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^4 = 16r^4 (R^2 - a^2)^4 [(R - a)^2 - r^2] [(R + a)^2 - r^2]$$

Zunächst wird der Beweis von METTLER wiedergegeben, dann ein einfacher Beweis unter Verwendung von Trigonometrie vorgestellt. Mit sehr ähnlichen Methoden wird anschließend der Fall  $n = 4$  behandelt. Die Abhandlung zeigt, dass zwar mit "hoher" Mathematik allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsfragen geklärt werden, im Einzelfall aber zur konkreten Berechnung Inhalte der Schulmathematik ausreichend sind.

Kapitel 1 ist geeignet für Unterricht im Rahmen der Begabtenförderung. Die weiteren Kapitel geben Anregungen für Schülerarbeiten. Deshalb sind einige Teile nur als **Aufgaben** formuliert, deren Lösung man in Kapitel 4 findet.

**Vereinbarung:** Durchgehend werden die Bezeichnungen aus dem oben formulierten Satz verwendet.

# 1. Dreiecke

Mit dynamischer Geometriesoftware kann man leicht folgende Spezialfälle ausprobieren:

Wenn die Kreise konzentrisch sind, also  $a = 0$ , sind für  $n = 3$  alle Lösungen des Umkreis-Inkreis-Problems gleichseitige Dreiecke und  $r = \frac{R}{2}$  (Abb. 1). Für  $0 < a < R - r$  gibt es zwei gleichschenklige Lösungen (Abb. 2 und 3).

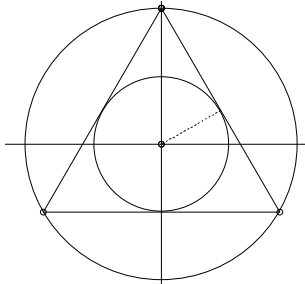


Abb. 1

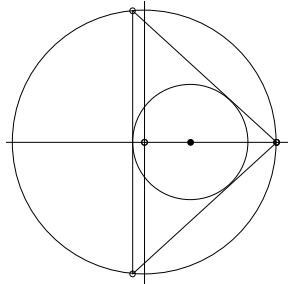


Abb. 2

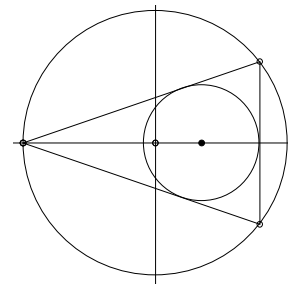


Abb. 3

*Aufgabe 1:* Eine geeignete Planfigur gelingt folgendermaßen: Man forme  $R^2 - a^2 = 2Rr$  in eine äquivalente Gleichung um, die es ermöglicht, den Satz von PYTHAGORAS anzuwenden. Dann konstruiere man zu vorgegebenem  $r$  und  $a$  mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks den Umkreisradius  $R$  und zeichne eine symmetrische und zwei weitere nicht zueinander symmetrische Lösungen des Umfang-Inkreis-Problems für Dreiecke ein.

## 1.1 Beweis nach METTLER

Ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis von METTLER ist der Umfangswinkelsatz<sup>1</sup>.

### Umfangswinkelsatz 1.1:

$AB$  sei Sehne im Kreis  $k$  mit Mittelpunkt  $M$ . Von  $M$  aus gesehen erscheint sie unter einem Winkel  $\mu \leq 180^\circ$ , dem so genannten Mittelpunktswinkel.  $P$  sei ein weiterer Punkt, der nicht auf der Gerade  $AB$  liegt.  $\varphi$  bezeichne den Innenwinkel bei  $P$  im Dreieck  $ABP$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:  $P$  und  $M$  liegen auf derselben Seite von  $AB$  beziehungsweise auf verschiedenen Seiten. Dann gilt:

$P$  liegt genau dann auf der Kreislinie  $k$ , wenn  $\varphi = \frac{\mu}{2}$

(1. Fall) beziehungsweise  $\varphi = 180^\circ - \frac{\mu}{2}$  (2. Fall).

*Aufgabe 2:* Zeichne zum Kreis  $k(M, R)$  mit  $R = 4,0$  cm, einer Sehne  $\overline{AB}$  der Länge 6,0 cm und zeichne drei Dreiecke  $ABC$  so, dass  $C$  auf dem Kreis zweimal oberhalb und einmal unterhalb von  $\overline{AB}$  liegt.  $\gamma$  sei jeweils der Innenwinkel vom Dreieck  $ABC$  und  $\mu$  der dazugehörige Zentrumswinkel (bei  $M$ ).

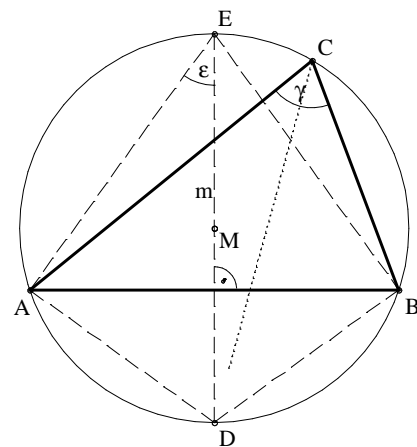


Abb. 4

<sup>1</sup> Den Beweis findet man in der Schulbuchliteratur vor 2000.

- a) Miss oder berechne  $\gamma$  und  $\mu$ .  
 b) Zeichne in A die Tangente  $t$  an den Kreis und bestimme  $\sphericalangle(t, AB)$ .

Der Umfangwinkelsatz hat in der ebenen Geometrie eine zentrale Bedeutung.

*Aufgabe 3:* Beweise: Der Satz 1.1 schließt den Satz vom THALESkreis ein.

Als wichtige Folgerung von Satz 1.1, die später mehrfach verwendet wird, ergibt sich:

**Satz von der Winkelhalbierenden 1.2:**

Jede Halbierende eines Dreieckswinkels und die Mittelsenkrechte der jeweils gegenüber liegenden Dreiecksseite schneiden sich auf dem Umkreis.

*Beweis:*

Im gegebenen  $\triangle ABC$  (siehe Abb. 4) wird die Mittelsenkrechte  $m$  zu  $AB$  betrachtet. Sie schneidet den Umkreis in  $D$  und  $E$ , wobei  $E$  auf derselben Seite von  $AB$  wie  $C$  liege. Es wird gezeigt, dass die Winkelhalbierende von  $\gamma$  ebenfalls durch  $D$  geht:

Betrachtet man  $\varepsilon$  als Umfangswinkel über der Sehne  $AD$ , so liefert Satz 1.1, dass  $\sphericalangle ACD = \varepsilon$ . Aus Symmetriegründen ist  $\varepsilon$  Umfangswinkel über der Sehne  $DB$  und folglich  $\sphericalangle DCB = \varepsilon$ . Das bedeutet, dass  $DC$  den Winkel  $\gamma$  halbiert.

Nach diesen Vorarbeiten kommen wir in mehreren Schritten zum Beweis von METTLER:

**Satz 1.3:**  $\triangle ABC$  sei eine Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems.  $P$  auf dem Umkreis bezeichne den Mittelpunkt des Bogens zu  $AB$  gegenüber von  $C$ . Dann liegt der Inkreismittelpunkt  $I$  auf dem Kreis  $k(P, |\overline{PA}|)$ .

*Beweis* (vgl. Abb. 5):

Da  $P$  auf der Mittelsenkrechten zur Sehne  $\overline{AB}$  liegt, ist  $\sphericalangle BPA$  der Mittelpunktswinkel von  $k(P, |\overline{PA}|)$ . Die Innenwinkel von  $\triangle ABC$  seien  $\alpha, \beta, \gamma$ . Also ist  $\sphericalangle AIB = 180^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2})$ .

Nach Satz 1.1 ist  $\sphericalangle BPA = 180^\circ - \gamma$ , also

$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BPA$ . Erneut mit Satz 1.1 folgt

$I \in k(P, |\overline{PA}|)$ .

Im nächsten Satz wird die Aussage  $I \in k(P, |\overline{PA}|)$  bereits zur schwachen Voraussetzung der Bedingungsgleichung für die Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems.

**Satz 1.4:**  $AB$  sei Sehne im Umkreis  $k(M, R)$  und berühre  $k(I, r)$ .  $P$  sei der Mittelpunkt des Umkreisbogens, den  $AB$  vom Inkreis trennt. Dann gilt:

$I \in k(P, |\overline{PA}|) \Leftrightarrow R^2 - a^2 = 2Rr$ .

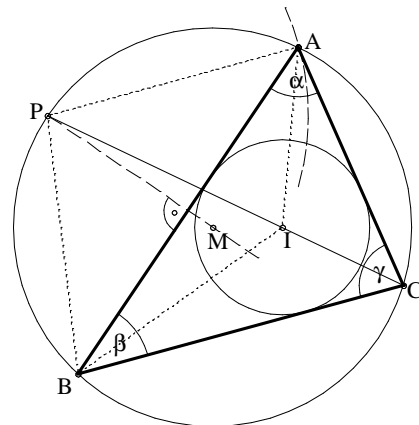


Abb. 5

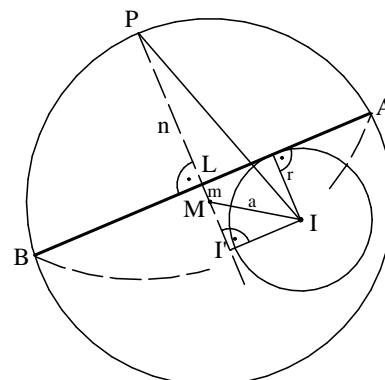


Abb. 6

*Beweis:* Entsprechend Abb. 6 sei  $L$  der Mittelpunkt von  $AB$ ,  $n = |PL|$ ,  $m = |ML|$  und somit  $n = |PL| = R - m$ .

$I'$  sei der Fußpunkt des Lotes von  $I$  auf die Mittelsenkrechte zu  $AB$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |PA|^2 &= n^2 + |AL|^2 = n^2 + R^2 - m^2 = \\ &= (R - m)^2 + R^2 - m^2 = 2R^2 - 2Rm \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{und } |PI|^2 &= |PI'|^2 + |I'I|^2 = (n + r)^2 + |MI|^2 - |MI'|^2 = (R - m + r)^2 + a^2 - (r - m)^2 = \\ &= R^2 + 2R(r - m) + a^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit (1) und (2) folgt:

$$I \in k_P \Leftrightarrow |PI|^2 = |PA|^2 \Leftrightarrow R^2 + 2R(r - m) + a^2 = 2R^2 - 2Rm \Leftrightarrow R^2 - a^2 = 2Rr.$$

Damit ist gezeigt: Wenn  $\triangle ABC$  das Umkreis-Inkreis-Problem löst, so gilt  $R^2 - a^2 = 2Rr$ . Denn nach Satz 1.3 liegt  $I$  auf dem Kreis um  $P$  durch  $A$  und nach Satz 1.4 folgt die Gleichung.

Nun ist umgekehrt zu zeigen, dass die Gleichung viele Lösungen ermöglicht:

**Satz 1.5:** Wenn die Gleichung  $R^2 - a^2 = 2Rr$  erfüllt ist, so gibt es zu jedem Anfangspunkt  $A$  auf dem Umkreis eine Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems.

*Beweis:*

Man legt von  $A$  aus Tangenten an  $k(I, r)$  (siehe Abb. 7). Ihre Endpunkte auf  $k(M, R)$  seien  $B, C$ .  $\triangle ABC$  hat also den Umkreis  $k(M, R)$ . Es ist zu zeigen, dass  $k(I, r)$  Inkreis von  $\triangle ABC$  ist. Die Innenwinkel seien  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Aufgrund der Konstruktion von  $\triangle ABC$  ist sicher  $AI$  Winkelhalbierende von  $\alpha$ .

Weil nach Voraussetzung die Gleichung erfüllt ist, liegt nach Satz 1.4 der Punkt  $I$  auf dem Kreis  $k(P, |\overline{PA}|)$ , wobei  $P$  der Mittelpunkt des Bogens zu  $AB$  ist. Nun argumentiert man wie im Beweis von Satz 1.3. Als Umfangswinkel im Kreis  $k(M, R)$  ist

$\sphericalangle BPA = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$ ,

weil  $P$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $AB$  liegen.

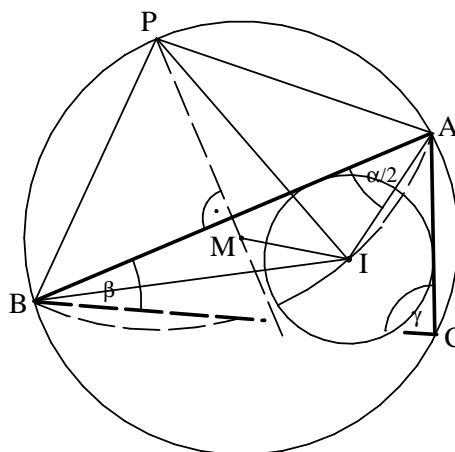


Abb. 7

Im Kreis  $k(P, |\overline{PA}|)$  ist  $\sphericalangle BPA$  Mittelpunktswinkel, also  $\sphericalangle AIB = 180^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle BPA = 180^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})$  als Umfangswinkel im Kreis  $k(P, |\overline{PA}|)$ .

In  $\triangle ABI$  sind nun schon zwei Winkel bekannt und es folgt  $\sphericalangle ABI = \frac{\beta}{2}$ . Also ist auch  $BI$  Winkelhalbierende.

Als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender von  $\triangle ABC$  ist  $I$  Inkreismittelpunkt dieses Dreiecks. Nach Konstruktion ist daher  $k(I, r)$  Inkreis von  $\triangle ABC$ .

## 1.2 Trigonometrischer Beweis

Die eben vorgeführte Methode von METTLER hat eine keineswegs naheliegende Einsicht über die Lage des Inkreismittelpunkts (siehe  $k(P, |\overline{PA}|)$  in Satz 1.4) verwendet. Deshalb wird im Folgenden ein direkter Zugang

unter maßvoller Verwendung von Trigonometrie dargestellt, zunächst ein Spezialfall, dann der allgemeine Fall, um das Problem beim Viereck in Kapitel 2 zu lösen. Es werden Sinus- und Cosinussatz benötigt, außerdem ein Additionstheorem sowie dessen Spezialfall, die Umrechnung auf doppelte Winkel.

**Satz 1.6:** Das Umkreis-Inkreis-Problem hat genau dann eine gleichschenklige Lösung mit  $|\overline{AI}| \geq R$  (vgl. Abb. 8), wenn  $R^2 - a^2 = 2Rr$ .

*Aufgabe 4:* Prüfe mit einer Zeichnung, ob die Behauptung möglich sein kann. Überprüfe hierbei auch, ob die Bedingung  $|\overline{AI}| \geq R$  notwendig ist.

*Beweis zu Satz 1.6:*

Mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  werden die Innenwinkel von  $\triangle ABC$  bezeichnet, wobei  $\beta = \gamma$ . Die Bedingung  $|\overline{AI}| \geq R$  hat  $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ ,  $\alpha < 90^\circ$  zur Konsequenz.

Um ein derartiges Dreieck zu konstruieren, legt man den Punkt A auf der Symmetrieachse fest und legt von A aus die Tangenten an den gewünschten Inkreis. B und C sind die zweiten Schnittpunkte der Tangenten mit dem vorgegebenen Umkreis. Eine Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems erhält man genau dann, wenn die Strecke BC von I den Abstand r hat. K sei der Schnittpunkt von BC mit der Symmetrieachse. Dann lautet die Bedingung  $|\overline{KI}| = r$ .

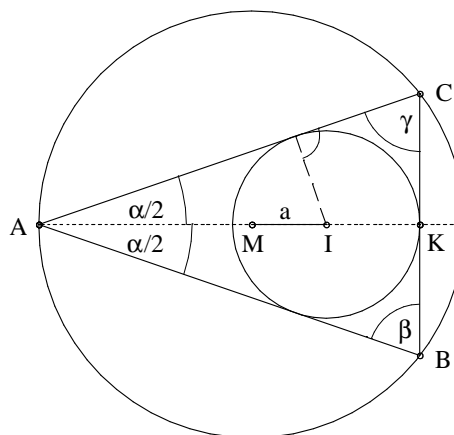


Abb. 8

Aus  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{|\overline{AI}|}$  und  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  folgt

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{AI}|^2 - 2r^2}{|\overline{AI}|^2} = \frac{(R+a)^2 - 2r^2}{(R+a)^2}. \quad (1)$$

Nach dem Umfangswinkelsatz zu BC ist  $\sphericalangle BMC = 2\alpha$ , also ist  $\alpha$  Innenwinkel bei M im rechtwinkligen  $\triangle KMB$ . Es ergibt sich  $|\overline{KM}| = R \cos \alpha$ ,  $|\overline{KI}| = |\overline{KM}| - a = R \cos \alpha - a$ .

Die Bedingung für die Lösbarkeit des Umkreis-Inkreis-Problems lautet jetzt  $R \cos \alpha - a = r$ . Wegen (1) ist

dies äquivalent zu  $R \cdot \frac{|\overline{AI}|^2 - 2r^2}{|\overline{AI}|^2} - a = r$

$$\begin{aligned} R \cdot (|\overline{AI}|^2 - 2r^2) - a \cdot |\overline{AI}|^2 &= r \cdot |\overline{AI}|^2 \\ |\overline{AI}|^2 (R - a - r) &= 2Rr^2 \\ (R + a)^2 (R - a - r) &= 2Rr^2. \end{aligned}$$

Die im Satz behauptete Gleichung lässt sich durch Ausklammern herleiten:

$$\begin{aligned} 0 &= (R + a)^2 (R - a) - (R + a)^2 r - 2Rr^2 \\ 0 &= (R + a)(R^2 - a^2) - (R^2 + a^2)r - 2Rra - 2Rr^2 \\ 0 &= a(R^2 - a^2 - 2Rr) + R(R^2 - a^2) + r(-R^2 - a^2 - 2Rr) \\ 0 &= a(R^2 - a^2 - 2Rr) + [R(R^2 - a^2 - 2Rr) + 2R^2r] + [r(R^2 - a^2 - 2Rr) - 2R^2r] \\ 0 &= (a + R + r)(R^2 - a^2 - 2Rr) \end{aligned}$$

Die erste Klammer ist positiv, also kann nur die zweite gleich 0 sein. Und deren Verschwinden ist äquivalent zur behaupteten Lösbarkeit des Umkreis-Inkreis-Problems.

**Satz 1.7:** Zu einem beliebig vorgegebenen Punkt A des Umkreises hat das Umkreis-Inkreis-Problem genau dann eine Lösung ABC, wenn  $R^2 - a^2 = 2Rr$ .

*Aufgabe 5:* Überprüfe zeichnerisch anhand des Ergebnisses der Aufgabe 4, ob Satz 1.7 gültig sein kann.

*Beweis zu Satz 1.7:*

Man benutzt die bisherigen Bezeichnungen. O. B. d. A. sei  $I \neq M$ , I rechts von M,  $R > r$  und der Anfangspunkt A liege auf dem Kreis  $k(M, R)$  oberhalb von MI. G bezeichne den zweiten Schnittpunkt der Geraden AI mit dem Umkreis, G' den auf  $k(M, R)$  diametral gegenüberliegenden Punkt, F den Fußpunkt des Lotes von I auf  $GG'$ ,

$\varphi := \sphericalangle(MI, MA)$ ,  $\omega := \sphericalangle(MI, MG')$ . Offenbar gilt  $0 \leq \varphi$ ,  $\omega \leq 180^\circ$ . Außerdem wird

$\varepsilon := \sphericalangle MAI = \sphericalangle IGM$  benötigt.  $\varepsilon$  kann als Umfangswinkel zur Sehne  $G'A$  aufgefasst werden. Nach dem Umfangswinkelsatz ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß und wir erhalten  $\omega = \varphi + 2\varepsilon$ .

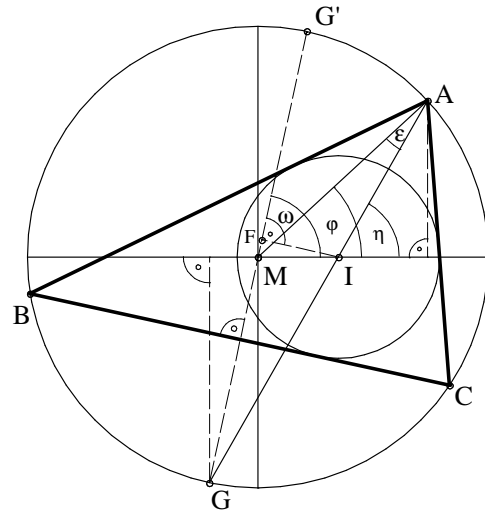


Abb. 9

Die Punkte B, C erhält man durch von A aus an den Inkreis gelegte Tangenten. AI ist jetzt Winkelhalbierende bei A.  $\triangle ABC$  löst das Umkreis-Inkreis-Problem genau dann, wenn der Abstand  $d(BC, I) = r$  beträgt.

Nach dem Satz von der Winkelhalbierenden ist  $GG'$  die Mittelsenkrechte zu  $BC$ . Weiter ist nach dem Umfangswinkelsatz  $\sphericalangle BMC = 2\alpha$ , also  $d(BC, M) = R \cos \alpha$ ,  $d(BC, I) = d(BC, M) \pm |MF| = R \cos \alpha + a \cos \omega$ . (Abb. 9 zeigt den Fall  $\omega < 90^\circ$ , die Rechnung ist aber auch für  $\omega \geq 90^\circ$  vorzeichenrichtig; denn dann liegt F nicht mehr oberhalb der x-Achse.) Satz 1.7 ist also bewiesen, wenn die Gleichung des Satzes äquivalent ist zu  $R \cos \alpha + a \cos \omega = r$ . (2)

Wie im Beweis zu Satz 1.6 ist  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{|\overline{AI}|^2 - 2r^2}{|\overline{AI}|^2}$ . (3)

Der Sinussatz in  $\triangle MIA$  liefert  $a \sin \varphi = |\overline{AI}| \sin \varepsilon$ , (4)

Projektion auf  $MA$  in  $\triangle MIA$  liefert  $a \cos \varphi + |\overline{AI}| \cos \varepsilon = R$ . (5)

Mit (4) und (5) und dem Additionstheorem für  $\omega = \varphi + 2\varepsilon$  folgen die äquivalenten Umformungen

$$\begin{aligned} a \cos \omega &= a \cos \varphi \cos 2\varepsilon - a \sin \varphi \sin 2\varepsilon \\ &= a \cos \varphi \cdot (1 - 2\sin^2 \varepsilon) - 2a \sin \varphi \sin \varepsilon \cos \varepsilon \\ &= (R - |\overline{AI}| \cos \varepsilon)(1 - 2\sin^2 \varepsilon) - 2|\overline{AI}| \sin^2 \varepsilon \cos \varepsilon \\ &= (R - |\overline{AI}| \cos \varepsilon) - 2R \sin^2 \varepsilon \\ &= (R - |\overline{AI}| \cos \varepsilon) - 2R \left(\frac{a}{|\overline{AI}|} \sin \varphi\right)^2 \\ &= a \cos \varphi - 2 \frac{Ra^2}{|\overline{AI}|^2} \sin^2 \varphi = \frac{a}{|\overline{AI}|^2} [|\overline{AI}|^2 \cos \varphi - 2Ra(1 - \cos^2 \varphi)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Der Cosinussatz in  $\triangle MIA$  lautet  $|\overline{AI}|^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi$  (7) und somit ergibt sich zu (6) äquivalent

$$a \cos \omega = \frac{a}{|\overline{AI}|^2} [(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi) \cos \varphi - 2Ra + 2Ra \cos^2 \varphi] = \frac{a}{|\overline{AI}|^2} [(R^2 + a^2) \cos \varphi - 2Ra]. \quad (8)$$

Setzt man (3) und (8) in (2) ein, so hat man jetzt zu prüfen:

$$R \cdot \frac{|\overline{AI}|^2 - 2r^2}{|\overline{AI}|^2} + \frac{a}{|\overline{AI}|^2} [(R^2 + a^2)\cos \varphi - 2Ra] = r$$

$$\Leftrightarrow |\overline{AI}|^2(R-r) - 2Rr^2 + (R^2 + a^2)a \cos \varphi - 2Ra^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (R^2 + a^2 - 2Ra \cos \varphi)(R-r) - 2Rr^2 + (R^2 + a^2)a \cos \varphi - 2Ra^2 = 0 \quad \text{wegen (7).}$$

Diese Gleichung lässt sich wie im Beweis zu Satz 1.6 faktorisieren:

$$0 = a \cos \varphi (-2R^2 + 2Rr + R^2 + a^2) + R(R^2 + a^2 - 2a^2) + r(-R^2 - a^2 - 2Rr)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -a \cos \varphi (R^2 - a^2 - 2Rr) + [R(R^2 - a^2 - 2Rr) + 2R^2r] + [r(R^2 - a^2 - 2Rr) - 2R^2r]$$

$$\Leftrightarrow 0 = (-a \cos \varphi + R + r)(R^2 - a^2 - 2Rr)$$

Die erste Klammer ist positiv. Deshalb ist das Umkreis-Inkreis-Problem mit Anfangspunkt A genau dann lösbar, wenn  $R^2 - a^2 = 2Rr$ .

**Aufgabe 6:** Mit den Bezeichnungen der Abb. 9 sei  $\eta$  der Winkel zwischen MI und IA, also  $\eta = \varepsilon + \varphi$ . Man zeige:

$$\text{a) } \sin \omega = \frac{R^2 - a^2}{|\overline{AI}|^2} \cdot \sin \varphi$$

$$\text{b) } \sin(2\eta) = \frac{R^2}{|\overline{AI}|^2} \sin(2\varphi) - \frac{2Ra}{|\overline{AI}|^2} \sin \varphi$$

**Aufgabe 7** (vgl. Abb. 10): Man zeige im Spezialfall AB parallel zu MI:

$$\text{a) } |\overline{Q_2I}| = |\overline{Q_2A}| \quad (\text{Dies entspricht dem}$$

Ansatz von METTLER.)

b) Man folgere mit dem Satz von PYTHAGORAS (bei  $\Delta MIQ_2$ ) und dem Kathetensatz (bei  $\Delta Q_2Q_4A$ ), dass  $R^2 - a^2 = 2Rr$  gilt.

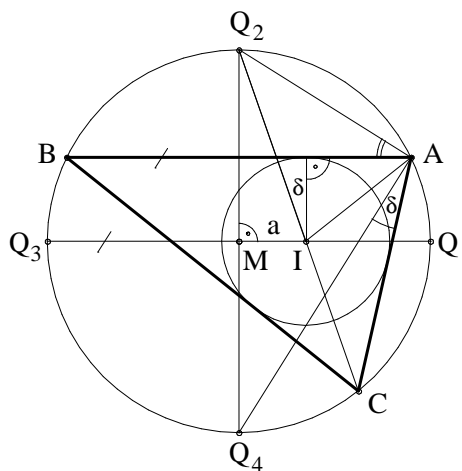
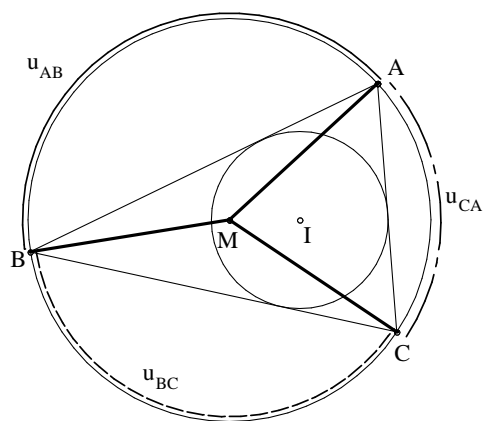


Abb. 10

**Bemerkung:** Die elementargeometrische Behandlung des Umkreis-Inkreis-Problems entwertet nicht die Methoden im eingangs erwähnten Buch von SAUVAGEOT [2]:

1. So kann in einem ersten Schritt bewiesen werden, dass die Lösbarkeit des Umkreis-Inkreis-Problems nicht vom Anfangspunkt abhängt. Demzufolge lässt sich die äquivalente Gleichung aus einem symmetrischen Spezialfall herleiten.

2. Elliptische Funktionen sind das adäquate Hilfsmittel für Probleme mit exzentrischen Kreisen. Sie ermöglichen nach [2], einen Mittelpunktswinkel bezüglich des Inkreismittelpunkts umzurechnen in einen Mittelpunktswinkel bezüglich des Umkreismittelpunkts (vgl. die komplizierte Formel in Aufgabe 6.b)). Dabei stellt sich heraus, dass alle Mittelpunktswinkel (bezüglich M) einer n-Eck-Lösung gleich groß sind, wenn sie in einem Winkelmaß gemessen werden, das durch die spezielle Funktion sinus amplitudinis ( $\text{sn}(u)$ ) definiert wird (siehe Abb. 11).



$$u_{AB} = u_{BC} = u_{CA} = \frac{1}{3} \text{ der reellen Periode von } \text{sn}(u)$$

Abb. 11

Ein ganz anderer, aber reizvoller Aspekt des Umkreis-Inkreis-Problems ist die Suche nach ganzzahligen Lösungen der jeweils erforderlichen Gleichung. Dabei kann man folgenden bekannten Satz verwenden:

**Satz 1.8:** Die Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  (9)

ist nur dann mit positiv natürlichen, teilerfremden Zahlen  $x, y, z$  erfüllbar, wenn eine der Zahlen  $x, y$  gerade und die beiden anderen Zahlen ungerade sind. Wenn z. B.  $y$  gerade ist, erhält man die Lösungen durch  $z = u^2 + v^2$ ,  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ , wobei  $u, v$  teilerfremd,  $u > v$  und genau eine von ihnen gerade ist.

Bemerkung: Man beachte, dass die teilerfremden Lösungen  $x, y, z$  auch paarweise teilerfremd sind. Das wird von der Gleichung erzwungen. Zahlentripel  $x, y, z$  mit  $x^2 + y^2 = z^2$  heißen **PYTHAGORÄISCHE**.

*Beweis:* Die Zahlen  $x, y, z$  können nicht alle drei gerade sein, weil sie teilerfremd sind. Aus demselben Grund können auch nicht genau zwei gerade sein (siehe Bemerkung). Es können auch nicht alle drei ungerade sein, denn wenn zwei Zahlen ungerade wären, müsste die dritte Zahl gerade und nicht ungerade sein. Das gleiche Argument hat auch zur Folge, dass die einzige gerade Zahl nicht  $z$  sein kann, weil dann  $x^2 + y^2$  durch 4 teilbar wäre, aber  $x^2 + y^2$  als Summe zweier ungerader Zahlen nur durch 2 teilbar ist. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.

Wir setzen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass  $y$  unter den teilerfremden Zahlen  $x, y, z$ , welche die Gleichung erfüllen, die gerade Zahl ist. Umstellung der Gleichung (9) liefert

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 = \frac{1}{4}(z^2 - x^2) = \frac{z+x}{2} \frac{z-x}{2} \text{ mit zwei ganzzahligen Faktoren } a := \frac{z+x}{2}, b := \frac{z-x}{2}.$$

Diese sind teilerfremd, denn ihr größter gemeinsamer Teiler (abgekürzt: ggT) würde auch  $a + b = z$  und  $a - b = x$  teilen. Die Zahlen  $x$  und  $z$  sind aber teilerfremd.

Weil das Produkt der teilerfremden Zahlen  $a, b$  gleich einer Quadratzahl ist, sind  $a$  und  $b$  selbst Quadrate:

$$\frac{z+x}{2} = u^2, \quad \frac{z-x}{2} = v^2. \text{ Nun müssen } u \text{ und } v \text{ ebenfalls teilerfremd sein. } u > v \text{ ist trivial. Weil } u^2 + v^2 = a + b = z$$

und  $z$  ungerade ist, ist von den Zahlen  $u^2, v^2$  genau eine gerade. Dasselbe gilt für  $u$  und  $v$ .

Zuletzt ist noch zu prüfen, ob bei vorgegebenen  $u, v$  mit den angegebenen Eigenschaften die Definition  $z = u^2 + v^2$ ,  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$  immer zu einer Lösung der Gleichung führt:  $x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = z^2$ .

*Aufgabe 8:* Man zeige, dass sich alle Lösungen von  $R^2 - a^2 = 2Rr$ , mit positiven, ganzen und teilerfremden Zahlen  $R, r, a$ , auf folgende Weise erhalten lassen:

Durchlaufen  $u$  und  $v$  die natürlichen Zahlen, wobei  $u, v$  teilerfremd,  $u > v$  und genau eine von ihnen gerade ist, so ist

$$R = (u + v)^2, r = 2uv, a = u^2 - v^2 \quad \text{Lösung mit } R, a \text{ ungerade, } r \text{ gerade,}$$

$$R = 2u^2, r = u^2 - v^2, a = 2uv \quad \text{Lösung mit } R, a \text{ gerade, } r \text{ ungerade.}$$

## 2. Vierecke

**Satz 2.1:** Das Umkreis-Inkreis-Problem für Vierecke ist mit beliebigem Anfangspunkt  $A$  genau dann lösbar, wenn  $(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2)$ .

*Aufgabe 9:* Man berechne für  $R = 4,0$  cm und  $a = 1,0$  cm aus der Formel von Satz 2.1 die Größe  $r$ . Man überprüfe anhand einer Zeichnung, ob diese Daten zu einer Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems bei Vierecken führen und überzeuge sich, dass hiermit keine Lösung für das Umkreis-Inkreis-Problem bei Dreiecken gegeben ist.



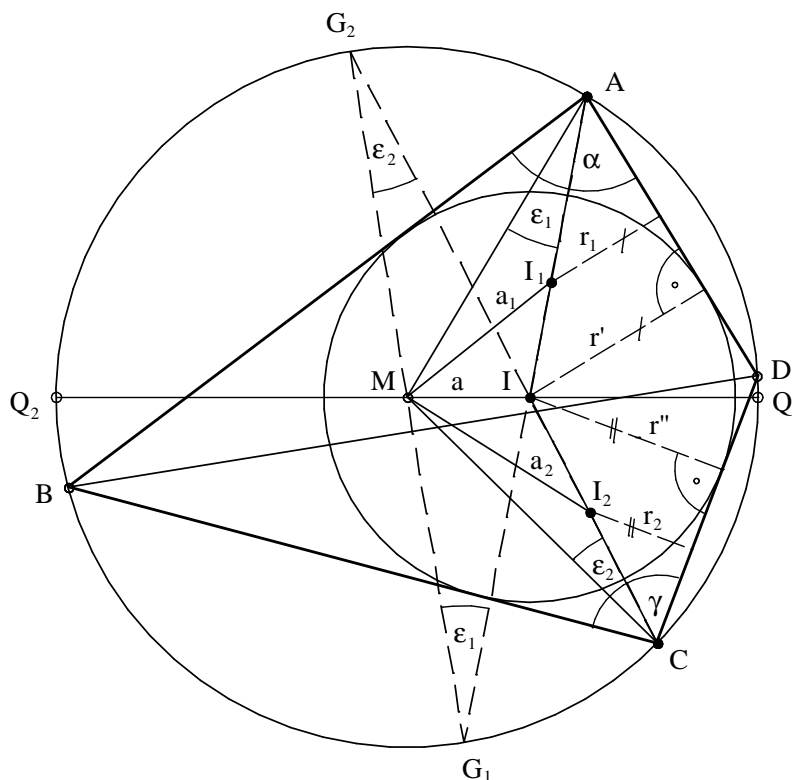


Abb. 12

*Beweis zu Satz 2.1:*

1. Geht man von einem beliebigen, dem Kreis  $k(M, R)$  einbeschriebenen Viereck  $ABCD$  aus, so ist keineswegs klar dass es einen Inkreis besitzt. Deshalb ist die Abbildung 12 etwas irreführend. Das Teildreieck  $\triangle ABD$  hat jedenfalls den Inkreis  $k_1(I_1, r_1)$ , ebenso Teildreieck  $\triangle BCD$  den Inkreis  $k_2(I_2, r_2)$ . Kandidat für den Inkreismittelpunkt des Vierecks ist der Schnittpunkt  $I$  der Winkelhalbierenden  $AI_1$  und  $CI_2$ . Durch zentrische Streckung mit Zentrum  $A$  entsteht aus  $k_1(I_1, r_1)$  ein Kreis  $k'(I, r)$ , der die Vierecksseiten  $AB$  und  $AD$  berührt. Durch zentrische Streckung mit Zentrum  $C$  entsteht aus  $k_2(I_2, r_2)$  ein Kreis  $k''(I, r'')$ , der die Vierecksseiten  $CB$  und  $CD$  berührt.  $ABCD$  löst das Umkreis-Inkreis-Problem genau dann, wenn  $r' = r''$ .

2. Die Winkelhalbierende  $AI_1$  schneide den Umkreis in  $G_1$ . Nach dem Satz von der Winkelhalbierenden liegt  $G_1$  auf der Mittelsenkrechten zu  $BD$ . Ebenso schneidet  $CI_2$  den Umkreis in  $G_2$  und  $G_2$  liegt auf derselben Mittelsenkrechten. Insbesondere ist  $M \in \overline{G_1G_2}$ . Analog zum Beweis von Satz 1.7 sei  $\varepsilon_1 = \sphericalangle MAI_1 = \sphericalangle AG_1G_2$  und  $\varepsilon_2 = \sphericalangle I_2CM = \sphericalangle G_1G_2C$ .

3.  $M$  und  $I$  liegen auf einer Sehne  $\overline{Q_1Q_2}$ . Somit ist nach Konstruktion  $I$  Schnittpunkt der Sehnen  $\overline{AG_1}$ ,  $\overline{CG_2}$ ,  $\overline{Q_1Q_2}$ . Der Sehnensatz besagt, dass bei allen Sehnen eines Kreises  $k(M, R)$ , die sich im selben Punkt  $I$  schneiden, das Produkt der Sehnenabschnitte gleich ist. Also gilt

$$|AI| \cdot |IG_1| = |CI| \cdot |IG_2| = |Q_1I| \cdot |IQ_2| = (R - a)(R + a) = R^2 - a^2. \quad (1)$$

4.  $ABCD$  ist Sehnenviereck. Deshalb ergänzen sich die Innenwinkel  $\alpha$  (bei  $A$ ) und  $\gamma$  (bei  $C$ ) zu  $180^\circ$ . Da  $AI$  und  $CI$  Winkelhalbierende sind, gilt  $\frac{r'}{|AI|} = \sin \frac{\alpha}{2}$  und  $\frac{r''}{|CI|} = \sin \frac{\gamma}{2} = \sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \cos \frac{\alpha}{2}$ .

Mit (2) ergibt sich  $r' = |AI| \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2 - a^2}{|G_1I|} \sin \frac{\alpha}{2}$  und analog  $r'' = |CI| \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2 - a^2}{|G_2I|} \cos \frac{\alpha}{2}$ , oder

$$r' |G_1I| = (R^2 - a^2) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad r'' |G_2I| = (R^2 - a^2) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

und nach Quadrieren

$$(R^2 - a^2)^2 = r'^2 |G_1I|^2 + r''^2 |G_2I|^2. \quad (4)$$

(2) mit (4) gelten stets für Sehnenvierecke ABCD.

Falls  $r' = r'' = r$  erfüllt ist, folgt aus (4):

$$(R^2 - a^2)^2 = r^2 |G_1I|^2 + r^2 |G_2I|^2 \quad (5)$$

5. Angenommen das Sehnenviereck ist auch Tangentenviereck, d. h.: Das Viereck ABCD löst das Umkreis-Inkreis-Problem; nach 1. ist dann  $r' = r'' = r$  und (5) gilt.

Nach dem Cosinussatz in  $\Delta MG_1I$  bzw.  $\Delta MIG_2$  findet man:

$$a^2 = R^2 + |G_1I|^2 - 2R |G_1I| \cos \varepsilon_1 = R^2 + |G_2I|^2 - 2R |G_2I| \cos \varepsilon_2$$

Löst man dies nach  $|G_1I|$  bzw.  $|G_2I|$  auf und setzt in (5) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} (R^2 - a^2)^2 &= r^2[-R^2 + a^2 + 2R |G_1I| \cos \varepsilon_1] + r^2[-R^2 + a^2 + 2R |G_2I| \cos \varepsilon_2] = \\ &= 2r^2(-R^2 + a^2) + 2Rr^2(|G_1I| \cos \varepsilon_1 + |G_2I| \cos \varepsilon_2). \end{aligned}$$

In  $\Delta G_1G_2I$  ist nun aber

$$|G_1I| \cos \varepsilon_1 + |G_2I| \cos \varepsilon_2 = |G_1G_2| = 2R.$$

Dies führt zu

$$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2[(-R^2 + a^2) + 2R^2] = 2r^2(R^2 + a^2).$$

6. Sind umgekehrt zwei Kreise  $k(M, R)$  und  $k(I, r)$  so gegeben, dass  $k(I, r)$  innerhalb von  $k(M, R)$  liegt und der Abstand der Mittelpunkte  $a$  die Gleichung

$$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2) \quad (6)$$

erfüllt. Dann ist im Folgenden zu zeigen, dass zu beliebigem Anfangspunkt  $A$  ein Sehnenviereck ABCD von  $k(M, R)$  existiert, das auch Tangentenviereck von  $k(I, r)$  ist (siehe Abb. 13):

Zuerst werden von  $A$  aus Tangenten an den Inkreis gelegt und dadurch die Endpunkte  $B$  und  $D$  auf  $k(M, R)$  definiert.  $AI$  ist dann Winkelhalbierende zu  $\alpha$ , die  $k(M, R)$  in  $G_1$  trifft.  $G_1M$  hat den Punkt  $G_2$  mit  $k(M, R)$  gemeinsam.  $C$  sei dann der Schnittpunkt von  $G_2I$  mit  $k(M, R)$ . Das Viereck ABCD hat  $k(M, R)$  als Umkreis, und berührt  $k(I, r)$  wenigstens mit den Seiten  $AB$  und  $AD$ ; das heißt im Sinne von 5.  $r' = r$ .

(7)

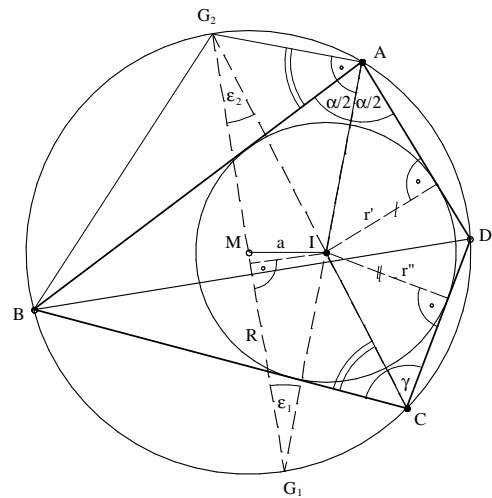


Abb. 13

Da  $\Delta G_2G_1A$  bei  $A$  rechtwinklig ist und im Sehnenviereck  $\gamma = 180^\circ - \alpha$  gilt, erhält man mit dem Umfangswinkelsatz  $\sphericalangle ICB = \sphericalangle G_2CB = \sphericalangle G_2AB = \sphericalangle G_2AG_1 - \sphericalangle BAG_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$ , das heißt,  $CI$  halbiert den Winkel  $\gamma$ .

Nun sei (wie bisher)  $\sphericalangle IG_1G_2 =: \varepsilon_1$  und  $\sphericalangle G_1G_2I =: \varepsilon_2$ . Beachtet man den rechten Winkel an  $G_1G_2$  so gilt

$$|G_1I| \cos \varepsilon_1 + |G_2I| \cos \varepsilon_2 = |G_1G_2| = 2R. \quad (8)$$

(6) wird algebraisch äquivalent umgeformt zu  $(R^2 - a^2)^2 = 2r^2[(-R^2 + a^2) + 2R^2]$  und  $2R$  ersetzt durch (8):

$$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(-R^2 + a^2) + 2Rr^2(|G_1I| \cos \varepsilon_1 + |G_2I| \cos \varepsilon_2) =$$

$$= r^2[-R^2 + a^2 + 2R |G_1I| \cos \varepsilon_1] + r^2[-R^2 + a^2 + 2R |G_2I| \cos \varepsilon_2] \quad (9)$$

Man wendet den Cosinussatz auf  $\Delta MG_1I$  bzw.  $\Delta MG_2I$  an und erhält:

$$a^2 = R^2 + |G_1I|^2 - 2R |G_1I| \cos \varepsilon_1 = R^2 + |G_2I|^2 - 2R |G_2I| \cos \varepsilon_2$$

Setzt man dies in (9) ein, so bekommt man (5):

$$(R^2 - a^2)^2 = r^2 |G_1I|^2 + r^2 |G_2I|^2$$

Da sich die Winkelhalbierenden von  $\alpha$  und  $\gamma$  in  $I$  schneiden gilt nach (4):  $(R^2 - a^2)^2 = r'^2 |G_1I|^2 + r'^2 |G_2I|^2$

Weil nach (7)  $r = r'$  ist, folgt durch Vergleich der letzten Gleichungen  $r = r'$ . Also sind  $CB$  und  $CD$  Tangenten an  $k(I, r)$  und damit  $ABCD$  Tangentenviereck.

*Aufgabe 10:* Man zeige für Sehnentangentenvierecke  $ABCD$  mit Inkreis  $k(I, r)$ :

$$r = \sqrt{\frac{|AI|^2 \cdot |CI|^2}{|AI|^2 + |CI|^2}} = \sqrt{\frac{|BI|^2 \cdot |DI|^2}{|BI|^2 + |DI|^2}} \quad \text{Hinweis: Gleichung (5) im Beweis von Satz 2.1.}$$

*Aufgabe 11:* a) Man konstruiere ein Drachenviereck  $ABCD$ , dessen Ecken  $A, B, C$  ein gleichseitiges Dreieck bilden und das einen Umkreis  $k(M, R)$  und einen Inkreis  $k(I, r)$  besitzt.

b) Man zeige  $|BI| = 2r$  und  $|DI| = \frac{2r}{\sqrt{3}}$  und folgere  $R = r(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $a = r(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$ .

Mit diesen Ergebnissen prüfe man die Gleichung von Satz 2.1.

### Ganzzahlige Lösungen:

*Aufgabe 12:* Man kann mit einem Rechner ganzzahlige Tripel  $(R | a | r)$  durch „gezieltes Raten“ finden.

Hierbei geht man von positiven ganzzahligen  $R$  und  $a \geq 1$  aus und prüft, ob  $r = \sqrt{\frac{(R^2 - a^2)^2}{2(R^2 + a^2)}}$  eine natürliche Zahl ist. Weshalb kann man sich auf  $R, a, r$  mit  $ggT(R, a, r) = 1$  beschränken?

**Satz 2.2:** Man erhält alle teilerfremden positiven Zahlen  $R, r, a$ , die zu Lösungen des Umkreis-Inkreis-Problems für Vierecke gehören, durch

$$R = (u^2 + v^2)(u^2 - v^2 + 2uv),$$

$$r = 4uv(u^2 - v^2),$$

$$a = (u^2 + v^2) |u^2 - v^2 - 2uv|,$$

wobei  $u, v$  die natürlichen Zahlen durchlaufen,  $u > v$  teilerfremd und genau eine von ihnen gerade sind.

*Beweis:*

Die zum Umkreis-Inkreis-Problem für Vierecke gehörende Gleichung  $(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2)$  ist äquivalent zu  $R^4 - 2R^2a^2 + a^4 = 2r^2R^2 + 2r^2a^2$ . Ergänzt man auf beiden Seiten  $r^4 + 4R^2a^2$  und stellt um, so erhält man

$$(R^2 + a^2 - r^2)^2 = (r^2)^2 + (2Ra)^2. \quad (10)$$

Wenn  $R, r, a$  teilerfremd sind, gilt das noch keineswegs für die Quadrate  $(R^2 + a^2 - r^2)^2$ ,  $(r^2)^2$  und  $(2Ra)^2$  in (10). Ein gemeinsamer ungerader Primteiler  $p$  von  $R^2 + a^2 - r^2$ ,  $r^2$  und  $2Ra$  wäre auch Teiler von

$R^2 + a^2 = R^2 + a^2 - r^2 + r^2$  und  $(R + a)^2 = R^2 + a^2 - r^2 + r^2 + 2Ra$  also  $R + a$ . Da  $R$  und  $a$  teilerfremd vorausgesetzt sind, müsste  $p$  als Teiler von  $2Ra$  genau eine der Zahlen  $R$  oder  $a$  teilen, also sicher nicht  $R + a$ . Das ist ein Widerspruch!  $ggT(R^2 + a^2 - r^2, r^2, 2Ra)$  ist also höchstens eine Potenz von 2.

**1. Fall:**  $r$  ungerade

Dann ist  $ggT(R^2 + a^2 - r^2, r^2, 2Ra) = 2^0 = 1$ . Satz 1.8 liefert den Ansatz

$$R^2 + a^2 - r^2 = u_1^2 + v_1^2 \quad (11.1)$$

$$r^2 = u_1^2 - v_1^2 \quad (11.2)$$

$$2Ra = 2u_1v_1 \quad (11.3)$$

worin  $u_1, v_1$  teilerfremd sind und genau eine dieser Zahlen gerade ist. Aus der Gleichung (11.2) folgt

$u_1^2 = r^2 + v_1^2$ , worin  $r, u_1$  ungerade, also  $v_1$  gerade sein muss. Somit ergibt sich erneut

$$u_1 = u^2 + v^2 \quad (12.1)$$

$$r = u^2 - v^2 \quad (12.2)$$

$$v_1 = 2uv \quad (12.3)$$

Aus (11.3), folgt wegen (12.1) und (12.3)  $Ra = u_1v_1 = (u^2 + v^2) \cdot 2uv$ . (13)

Addiert man (11.1) und (11.2), so erhält man mit (12.1)  $R^2 + a^2 = 2u_1^2 = 2(u^2 + v^2)^2$ .

Multiplikation mit  $R^2$  ergibt wegen (13)  $2R^2(u^2 + v^2)^2 = R^4 + 4u^2v^2(u^2 + v^2)^2$ .

Hiermit berechnet man

$$[R^2 - (u^2 + v^2)^2]^2 = R^4 - 2R^2(u^2 + v^2)^2 + (u^2 + v^2)^4 = -4u^2v^2(u^2 + v^2)^2 + (u^2 + v^2)^4 = (u^4 - v^4)^2$$

und schließlich  $R^2 = (u^2 + v^2)^2 \pm (u^4 - v^4)$ ,  $R^2 = 2u^2(u^2 + v^2)$  oder  $R^2 = 2v^2(u^2 + v^2)$ .

Dies ist unmöglich. Denn nach (12.1) ist  $u^2 + v^2 = u_1$  ungerade, so dass in  $R^2$  der Faktor 2 nicht geradzahlig oft auftritt. Der 1. Fall scheidet also aus.

## 2. Fall: r gerade

Nun ist  $R^2 + a^2 - r^2$  wegen (10) gerade, also  $R^2 + a^2$  gerade. Weil  $R, r, a$  teilerfremd sind, müssen  $R$  und  $a$  beide ungerade sein, somit auch  $Ra$ . Deshalb ist  $\text{ggT}(R^2 + a^2 - r^2, r^2, 2Ra) = 2^1 = 2$ .

Mit  $h := \frac{R^2 + a^2 - r^2}{2}$  folgt  $h^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (Ra)^2$ , (14)

wobei wegen Satz 1.8 die Werte von  $h$  und  $Ra$  ungerade sind, aber  $\frac{r}{2}$  gerade ist. (15)

Man erhält den Ansatz

$$h = u_1^2 + v_1^2 \quad (16.1)$$

$$Ra = u_1^2 - v_1^2 \quad (16.2)$$

$$\frac{r^2}{2} = 2u_1v_1 \quad (16.3)$$

Darin sind  $u_1, v_1$  teilerfremd, eine der beiden Zahlen ist gerade, die andere ungerade. Aus (16.3) erkennt man, dass die gerade Zahl den Faktor 2 doppelt so oft wie  $\frac{r}{2}$  enthält.

a) Wir nehmen zunächst an, dass diese Zahl  $u_1$  ist. Aus (16.1) und (16.2) ergibt sich

$$u_1^2 = \frac{1}{2}(h + Ra) = \frac{1}{4}(R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra) = \frac{1}{4}[(R + a)^2 - r^2] \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{R + a}{2}\right)^2 = u_1^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Mit  $d := \text{ggT}\left(\frac{R + a}{2}, u_1, \frac{r}{2}\right)$  folgt  $\left(\frac{R + a}{2d}\right)^2 = \left(\frac{u_1}{d}\right)^2 + \left(\frac{r}{2d}\right)^2$  (17)

mit teilerfremden Zahlen, von denen  $\frac{R + a}{2d}$  und  $\frac{r}{2d}$  ungerade sind, während  $\frac{u_1}{d}$  gerade sein muss.

Erneut setzt man mit teilerfremden Termen an

$$\frac{R + a}{2d} = u^2 + v^2 \quad \frac{r}{2d} = u^2 - v^2 \quad \frac{u_1}{d} = 2uv$$

$$R + a = 2d(u^2 + v^2) \quad (18.1)$$

$$r = 2d(u^2 - v^2) \quad (18.2)$$

$$u_1 = 2duv \quad (18.3)$$

Aus (16.3) und (18.2) folgt  $4u_1v_1 = r^2 = 4d^2(u^2 - v^2)^2$ ,  $v_1 = \frac{d^2(u^2 - v^2)^2}{2duv}$ . Zusammen mit (18.3) folgt aus (16.2)

$$Ra = 4d^2u^2v^2 - \frac{d^2}{4u^2v^2}(u^2 - v^2)^4.$$

Dies und (18.1) führen zu  $R^2 + a^2 = (R + a)^2 - 2Ra = 4d^2(u^2 + v^2)^2 - 2[4d^2u^2v^2 - \frac{d^2}{4u^2v^2}(u^2 - v^2)^4]$

$$\text{und} \quad R^2 + a^2 = \frac{2d^2}{4u^2v^2} [8u^2v^2(u^2 + v^2)^2 - 16u^4v^4 + (u^2 - v^2)^4] = \frac{2d^2}{4u^2v^2} (u^2 + v^2)^4. \quad (19)$$

Dies und (18.2) setzt man in die Gleichung von Satz 2.1 ein:

$$(R^2 - a^2)^2 = 2r^2(R^2 + a^2) = 2 \cdot 4d^2(u^2 - v^2)^2 \cdot \frac{2d^2}{4u^2v^2} (u^2 + v^2)^4 = \frac{4d^4}{u^2v^2} (u^2 - v^2)^2 (u^2 + v^2)^4,$$

$$R^2 - a^2 = \frac{2d^2}{uv} (u^2 - v^2)(u^2 + v^2)^2. \quad (20)$$

Addition von (19) und (20) ergibt schließlich

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{2} [(R^2 + a^2) + (R^2 - a^2)] = \frac{d^2}{4u^2v^2} (u^2 + v^2)^2 [(u^2 + v^2)^2 + 4uv(u^2 - v^2)] = \\ &= \frac{d^2}{4u^2v^2} (u^2 + v^2)^2 [u^2 - v^2 + 2uv]^2. \end{aligned} \quad (21)$$

In (21) sind  $u^2 + v^2$ ,  $u^2 - v^2$ ,  $uv$  teilerfremd. Deshalb ist  $4u^2v^2$  Teiler von  $d^2$ , das heißt  $d = \delta \cdot 2uv$ . Man erhält

$$R = \delta \cdot (u^2 + v^2) (u^2 - v^2 + 2uv) \text{ und aus (18.2) } r = \delta \cdot 4uv(u^2 - v^2) \text{ sowie aus (18.1)}$$

$$a = (R+a) - R = \delta \cdot (u^2 + v^2) [4uv - u^2 + v^2 - 2uv] = \delta \cdot (u^2 + v^2) (-u^2 + v^2 + 2uv).$$

Da  $R$ ,  $r$ ,  $a$  teilerfremd vorausgesetzt sind, muss  $\delta = 1$  sein, und die Ergebnisse entsprechen der Behauptung. Man beachte: Aus  $u > v > 0$  folgt  $u^2 - v^2 + 2uv > 0$ .

b) Nun ist noch zu überlegen, wie diese Rechnung aussieht, wenn nicht  $u_1$  sondern  $v_1$  gerade ist: Statt

$$u_1^2 = \frac{1}{2} (h + Ra) \text{ rechnet man mit } v_1^2 = \frac{1}{2} (h - Ra) \text{ und kommt analog auf } \left(\frac{R-a}{2d}\right)^2 = \left(\frac{v_1}{d}\right)^2 + \left(\frac{r}{2d}\right)^2 \quad (17)$$

Die Ergebnisse (18) und (19) bleiben unverändert und somit auch die Formeln für  $R$  und  $r$ . Nur für  $a$  erhält man  $a = R - (R - a) = (u^2 + v^2) (u^2 - v^2 - 2uv)$ , was die Betragsstriche in der Formulierung des Satzes erklärt.

Für  $u = 2$ ,  $v = 1$  erhält man das Zahlenbeispiel  $R = 35$ ,  $r = 24$ ,  $a = 5$ .

### 3. Weitere Vielecke

Der Umkreismittelpunkt sei  $M(0|0)$ , der Inkreismittelpunkt sei  $I(a|0)$ . Jede Seite des  $n$ -Ecks, das das Umkreis-Inkreis-Problem löst, ist Teil einer Tangente von der Ecke  $P(x_p|y_p)$  des  $n$ -Ecks an den Inkreis. Ihre Geradengleichung lautet  $y = m(x - x_p) + y_p$ , (1)

wobei  $m$  die Steigung der  $n$ -Eck-Seite bezeichnet. Man beachte, dass für einen Punkt des Umkreises gilt

$$y_p^2 = R^2 - x_p^2 \quad (2)$$

Die HESSEsche Normalform für die Geradengleichung (1) lautet:

$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} [-m(x - x_p) + 1(y - y_p)] = 0$  und ihr Abstand vom Kreismittelpunkt  $I$  ist

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |-m(a - x_p) + 1(0 - y_p)| = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |m(x_p - a) - y_p| \quad (3)$$

**Hinweis:** Im Folgenden werden umfangreiche Rechnungen nicht durchgeführt. Ebenso werden die Überlegungen weggelassen, die klären, ob die verwendeten Nenner nicht null werden können.

Als Bedingung für  $m$  formt man (3) unter Beachtung von (2) um in

$$m^2 - 2m \frac{(x_p - a)y_p}{(x_p - a)^2 - r^2} + \frac{R^2 - x_p^2 - r^2}{(x_p - a)^2 - r^2} = 0. \quad (4)$$

Wir betrachten nun ein  $n$ -Eck, das Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems ist, und legen ohne Beschränkung der Allgemeinheit die erste Ecke  $P_0(R|0)$  auf die positive  $x$ -Achse.  $m_0$  sei die Steigung von  $P_0P_1$ ,  $m_1$  sei die Steigung von  $P_1P_2$  und so weiter. Im Punkt  $P_i(x_i|y_i)$  treffen sich die Tangenten an den Inkreis mit Steigung  $m_{i-1}$  und  $m_i$ . Beide Steigungen lösen die quadratische Gleichung (4) mit  $P = P_i$ . Deshalb ist ihr Produkt gleich dem konstanten Term in (4):

$$m_{i-1} \cdot m_i = \frac{R^2 - x_i^2 - r^2}{(x_i - a)^2 - r^2} =: P_i \quad (5)$$

Nun zum zweiten Schnittpunkt des Umkreises mit der Tangente durch  $P_i$  (Steigung  $m_i$ ): Das heißt, bei gegebenem  $P_i$  und  $m_i$  wird eine Bedingung für die Koordinaten von  $P_{i+1}$  gesucht. Wir verwenden (1) und (2):

$$\begin{aligned} 0 &= R^2 - x^2 - (m_i(x - x_i) + y_i)^2 = \\ &= -m_i^2(x - x_i)^2 - 2m_i(x - x_i)y_i + R^2 - x^2 - y_i^2 = \\ &= -m_i^2(x - x_i)^2 - 2m_i(x - x_i)y_i + x_i^2 - x^2 = \\ &= (x - x_i)(-m_i^2(x - x_i) - 2m_iy_i - x - x_i) \end{aligned}$$

Die erste Klammer wird bei  $P_i$  null. Also ist die Nullstelle der zweiten Klammer gleich der gesuchten  $x$ -Koordinate von  $P_{i+1}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} m_i^2(x_{i+1} - x_i) + 2m_iy_i + x_{i+1} + x_i &= 0 \\ (m_i^2 + 1)x_{i+1} &= (m_i^2 - 1)x_i - 2m_iy_i \end{aligned} \quad (6)$$

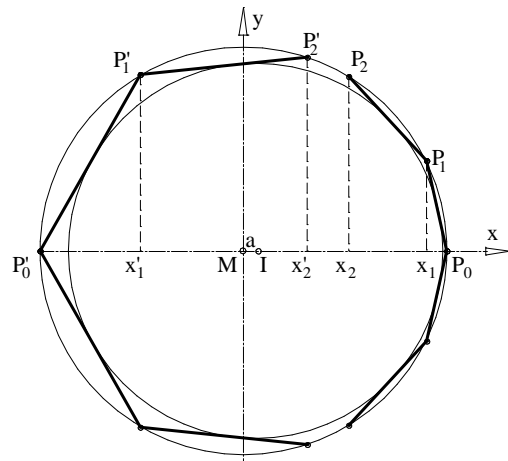


Abb. 14

Setzt man als bekannt voraus, dass die Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems nicht vom Anfangspunkt abhängt, so wird man die äquivalente Gleichung aus einem symmetrischen Spezialfall ableiten. Dies soll hier für gerades  $n$ , speziell für das Sechseck und Achteck skizziert werden:

**Satz 3.1:** Die dem Umkreis-Inkreis-Problem äquivalente Gleichung lautet für das

$$\text{Sechseck:} \quad [(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^2 = 4(R^2 - a^2)^2 [(R - a)^2 - r^2] [(R + a)^2 - r^2],$$

$$\text{Achteck:} \quad [(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^4 = 16r^4 (R^2 - a^2)^4 [(R - a)^2 - r^2] [(R + a)^2 - r^2].$$

*Beweis:* In dem zur  $x$ -Achse symmetrischen Fall (vgl. Abb. 14) gibt es einen zweiten Eckpunkt, der mit  $P'_0(-R|0)$  bezeichnet werden kann. Von diesem aus werden die Eckpunkte  $P'_1, P'_2$  usw. benannt und  $m'_0, m'_1, \dots$  seien die Steigungen von  $P'_0P'_1, P'_1P'_2, \dots$

Die Formeln (4), (5), (6) sind entsprechend zu übertragen ( $m'$  statt  $m$ ,  $x'_i, y'_i$  statt  $x_i, y_i$ ). Um ein geschlossenes Vieleck zu erhalten, muss gelten

$$\text{für ein Sechseck:} \quad P_2 = P'_1, \quad (7)$$

$$\text{für ein Achteck:} \quad P_2 = P'_2. \quad (8)$$

Für das Folgende werden abkürzende Bezeichnungen eingeführt:

$$N_0 := (R - a)^2 - r^2, \quad N'_0 := (R + a)^2 - r^2, \quad (9)$$

$$K := (m_0^2 - 1)R - (m_0^2 + 1)a, \quad K' := -(m'_0{}^2 - 1)R - (m'_0{}^2 + 1)a, \quad (10)$$

$$K_1 := K^2 - (m_0^2 + 1)^2 r^2, \quad K'_1 := K'^2 - (m'_0{}^2 + 1)^2 r^2. \quad (11)$$

Man beachte auch, dass  $m_0 < 0$  und  $m'_0 > 0$  sind.

$$\text{Mit } P = P_0 \text{ und } P = P'_0 \text{ folgt aus (4)} \quad m_0^2 = \frac{r^2}{N_0} \quad \text{bzw.} \quad m'_0{}^2 = \frac{r^2}{N'_0}. \quad (12)$$

Insbesondere ist  $N_0 > 0$ .

$$\text{Aus (6) folgt} \quad x_1 = R \frac{m_0^2 - 1}{m_0^2 + 1}, \quad \text{bzw.} \quad x'_1 = -R \frac{m'_0{}^2 - 1}{m'_0{}^2 + 1}.$$

$$\text{Durch Einsetzen in (1) folgt} \quad y_1 = -\frac{2R m_0}{m_0^2 + 1}, \quad \text{bzw.} \quad y'_1 = +\frac{2R m'_0}{m'_0{}^2 + 1}.$$

Nach einer langen hier weggelassenen Rechnung erhält man

$$p_1 = -\frac{m_0^2}{K_1} (K_1 + 4RK) \quad \text{bzw.} \quad p'_1 = -\frac{m'_0{}^2}{K'_1} (K'_1 - 4RK').$$

Mit (9), (10), (11) und (12) folgt:

$$p_1 + 1 = \frac{(R-a)^2}{N_0^2 K_1} [(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)] \quad \text{bzw.} \quad p'_1 + 1 = \frac{(R+a)^2}{N'_0{}^2 K'_1} [(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)], \quad (13)$$

$$p_1 - m_0^2 = \frac{2 m_0^2}{N_0 K_1} (R-a)^2 (R^2 - a^2) \quad \text{bzw.} \quad p'_1 - m'_0{}^2 = \frac{2 m'_0{}^2}{N'_0 K'_1} (R+a)^2 (R^2 - a^2). \quad (14)$$

$$\text{Aus (5) folgt} \quad m_1 = \frac{p_1}{m_0}, \quad \text{bzw.} \quad m'_1 = \frac{p'_1}{m'_0}.$$

Wieder aus (6) folgt unter Verwendung der Formeln für  $m_1, m'_1, x_1, y_1, x'_1, y'_1$ :

$$x_2 = \frac{R}{(m_0^2 + 1)(p_1^2 + m_0^2)} [(m_0^2 - 1)(p_1^2 - m_0^2) + 4 m_0^2 p_1]$$

$$x'_2 = \frac{R}{(m'_0{}^2 + 1)(p'_1{}^2 + m'_0{}^2)} [(m'_0{}^2 - 1)(p'_1{}^2 - m'_0{}^2) + 4 m'_0{}^2 p'_1]$$

Schließlich werden noch die Steigungen  $\mu$  von  $P_0 P_2$  und  $\mu'$  von  $P'_0 P'_2$  benötigt. Man berechnet

$$\mu^2 = \left( \frac{y_2}{x_2 - R} \right)^2 = \frac{R^2 - x_2^2}{(R - x_2)^2} = \frac{R + x_2}{R - x_2} = \frac{m_0^2 (p_1 + 1)^2}{(p_1 - m_0^2)^2}$$

$$\mu = -\frac{m_0 (p_1 + 1)}{p_1 - m_0^2} < 0 \quad \text{und} \quad \mu' = -\frac{m'_0 (p'_1 + 1)}{p'_1 - m'_0{}^2} > 0. \quad (15)$$

Wir kommen zum Abschluss des Beweises:

*Achteck:*  $\Delta P'_0 P_0 P_2$  ist bei  $P_2 = P'_2$  rechtwinklig. (8) kann man deshalb ersetzen durch  $\mu \cdot \mu' = -1$ , was nach (15) äquivalent zu  $m_0 m'_0 (p_1 + 1) (p'_1 + 1) = -(p_1 - m_0^2) (p'_1 - m'_0{}^2)$  mit negativem  $m_0$  ist.

Nach (12), (13) und (14) ist  $\mu \cdot \mu' = -1$  äquivalent zu  $[(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^2 = 4r^2(R^2 - a^2)^2 \sqrt{N_0 N'_0}$ , oder quadriert wegen (9) äquivalent zu

$$[(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^4 = 16r^4 (R^2 - a^2)^4 [(R - a)^2 - r^2] [(R + a)^2 - r^2].$$

*Sechseck:*  $\Delta P'_0 P_0 P_2$  ist bei  $P_2 = P'_1$  rechtwinklig. (7) kann man deshalb ersetzen durch  $\mu \cdot m'_0 = -1$ , was nach (15) äquivalent ist zu  $m_0 m'_0 (p_1 + 1) = p_1 - m_0^2$ ; man findet wie beim Achteck durch Anwendung von (12),

(13) und (14)  $[(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)] = -2 (R^2 - a^2) \sqrt{N_0 N'_0}$  und hat mit (9) und Quadrieren gefunden

$$[(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2)]^2 = 4(R^2 - a^2)^2 [(R - a)^2 - r^2] [(R + a)^2 - r^2].$$

**Bemerkung 1:** Beim Viereck hätte man  $P_1 = P'_1$ , also  $m_0 m'_0 = -1$  äquivalent zu  $r^4 = N_0 N'_0$  und deshalb  $r^4 = (R - a)^2 (R + a)^2 - 2r^2(R^2 + a^2) + r^4$  also  $(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2) = 0$ .

Auch beim Dreieck kann man die Gleichung in ähnlicher Form angeben:

$$(R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2) = 2r^2(R^2 - a^2).$$

**Bemerkung 2:** Die Methoden dieses Kapitels erscheinen - insbesondere bei kleiner Eckenzahl - einfacher als die in den vorangehenden Kapiteln. Auch für die ungerade Eckenzahl  $n = 3$  sind sie anwendbar. Wenn es also nur um das Auffinden der Gleichung geht, ist die Rechnung mit Tangentensteigungen sinnvoll. Der entscheidende Nachteil ist, dass man bei der analytischen Methode von einer symmetrischen Lage der Ecken ausgeht. Dass bei Gültigkeit der Gleichung zu jedem Anfangspunkt dann eine Lösung des Umkreis-Inkreis-Problems existiert, folgt nur aus Eigenschaften der transzendenten Funktion  $\text{sn}(u)$ , wie schon bei Satz 1.7 bemerkt. Vor allem für  $n = 3$  und  $n = 4$  lässt sich das Problem elementar behandeln.

## 4. Lösung der Aufgaben

### zu Aufgabe 1:

$$R^2 - a^2 = 2Rr \Leftrightarrow R^2 - 2Rr = a^2 \\ \Leftrightarrow (R - r)^2 = r^2 + a^2$$

Ein rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Katheten  $r$  und  $a$  hat also die Hypotenuse  $R - r$ . Streckenaddition mit  $r$  liefert  $R$ . Man zeichnet ein Dreieck  $IMT$  mit  $\sphericalangle IMT = 90^\circ$  und den Katheten  $a$  und  $r$ . Dann ist  $|\overline{MT}| = R - r$ . Auf dem Strahl  $[MT]$  trägt man von  $T$  aus  $r$  ab. Der Endpunkt liegt auf dem Kreis um  $M$  mit Radius  $R$  (siehe Abb.15).

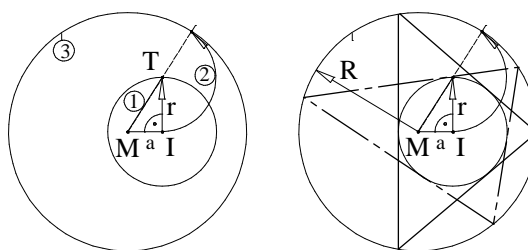


Abb. 15

### zu Aufgabe 2:

Auf dem Kreis mit Radius 4cm trägt man von einem beliebigen Punkt  $B$  aus mit einem Kreisbogen 6,0 cm ab und erhält  $A$ .

a) Bei  $M$  misst man  $\mu = 97^\circ$ , bei den Kreispunkten  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  die Winkel  $49^\circ$  bzw.  $131^\circ$ .

Aus dem Teildreieck von  $\triangle ABM$  folgt  $\sin \frac{\mu}{2} = \frac{3}{4}$  und

damit  $\frac{\mu}{2} = 48,590 \dots^\circ$ . Aus dem gleichschenkligen

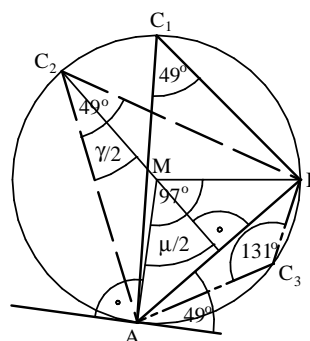


Abb. 16

Dreieck  $AMC_2$  folgt  $\gamma = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\mu}{2}\right) = 48,590 \dots^\circ$ . Die Abweichung von  $\gamma = \frac{\mu}{2}$  kommt von unvermeidbaren Zeichnungsungenauigkeiten.

b) Die Tangente  $t$  erhält man als Lot zu  $AM$ .  $\sphericalangle(t, AB)$  ist der so genannte Sehnentangentenwinkel. Er ist immer gleich  $\frac{\mu}{2}$ , weil hier die Winkelschenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen.

**zu Aufgabe 3:** Wenn die Sehne  $AB$  den Umkreismittelpunkt enthält, ist der Mittelpunktswinkel



$$\mu = \sphericalangle AMB = 180^\circ, \text{ also } \gamma = \frac{\mu}{2} = 90^\circ.$$

#### zu Aufgabe 4:

Nachdem man entsprechend Aufgabe 1 einen passenden Um- und Inkreis vorliegen hat liefert die Konstruktion von Abb. 8 einen Punkt K, der im Rahmen der Zeichengenauigkeit auf dem Inkreis liegt. Die Voraussetzung  $|AI| \geq R$  ist nicht notwendig. Denn auch mit  $|AI| < R$  scheinen Lösungen möglich zu sein (Abb.17).

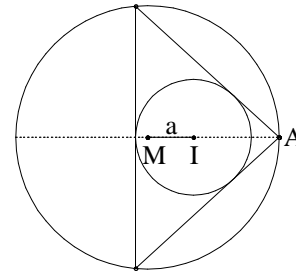


Abb. 17

#### zu Aufgabe 5:

Am besten arbeitet man hier mit dynamischer Geometrie-Software. Nachdem man Abbildung 8 konstruiert hat, zeichnet man einen weiteren Kreis um I mit variablem Radius (gesteuert mit dem Punkt V). R und a bleiben fest, aber die Gleichung ist nicht mehr erfüllt. Auch der Punkt A sollte zu A' auf dem Umkreis verschiebbar sein. Man erhält nun Dreiecke, die die Umkreis-Inkreis-Bedingung deutlich verletzen.

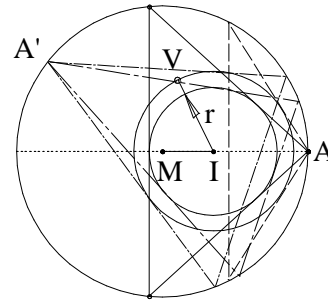


Abb. 18

#### zu Aufgabe 6:

Man verwendet

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad (1)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha \quad (2)$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (3)$$

und den Cosinussatz in  $\triangle IAM$  (siehe Abb. 19):

$$a^2 = R^2 + |AI|^2 - 2R|AI| \cos \varepsilon \quad (4)$$

Lösung zu a): Aus (1), (3) und (2) folgt:

$$\sin \omega = \sin(\varphi + 2\varepsilon) =$$

$$= \sin\varphi (1 - 2\sin^2 \varepsilon) + \cos\varphi \cdot 2\sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon$$

Mit (4) und (5) aus dem Beweis zu Satz 1.7 folgt:

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \sin \varphi (1 - 2\sin^2 \varepsilon) + \frac{R - |AI| \cos \varepsilon}{a} \cdot 2 \frac{a \sin \varphi}{|AI|} \cos \varepsilon = \sin \varphi (1 - 2\sin^2 \varepsilon + \frac{2R}{|AI|} \cos \varepsilon - 2\cos^2 \varepsilon) = \\ &= \sin \varphi \left( \frac{2R}{|AI|} \cos \varepsilon - 1 \right) = \sin \varphi \frac{2R \cos \varepsilon - |AI|}{|AI|} = \sin \varphi \frac{2R |AI| \cos \varepsilon - |AI|^2}{|AI|^2} = \sin \varphi \frac{R^2 - a^2}{|AI|^2} \end{aligned}$$

Lösung zu b):

Weil  $\eta = \varphi + \varepsilon$  (Außenwinkel in  $\triangle IAM$ ) und  $\omega = \varphi + 2\varepsilon$  sind (siehe die Abb. 19), folgt  $2\eta = \omega + \varphi$ . Mit (1) und dann mit dem Ergebnis zu a) erhält man:

$$\sin(2\eta) = \sin(\omega + \varphi) = \sin \omega \cdot \cos \varphi + \cos \omega \cdot \sin \varphi = \frac{R^2 - a^2}{|AI|^2} \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \cos \omega \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Hieraus folgt mit (7) aus Beweis zu Satz 1.7: } \sin(2\eta) = \frac{R^2 - a^2}{|AI|^2} \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{(R^2 + a^2) \cos \varphi - 2Ra}{|AI|^2} \sin \varphi =$$

$$= \frac{2R^2}{|AI|^2} \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{2Ra}{|AI|^2} \sin \varphi = \frac{R^2}{|AI|^2} \sin(2\varphi) - \frac{2Ra}{|AI|^2} \sin \varphi$$

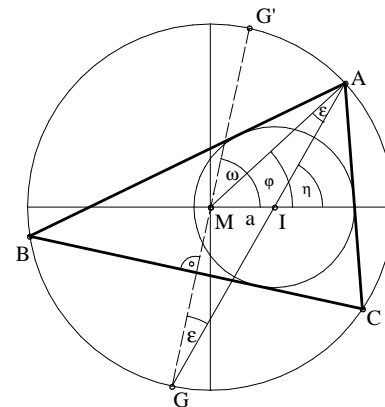


Abb. 19

**zu Aufgabe 7:**

Nach dem Umfangswinkelsatz sind in Abb. 20 die mit einfachem dicken Bogen markierten Winkel bei A und  $Q_2$  gleich  $\delta$ . Ebenso sind die mit doppeltem Bogen markierten Winkel gleich  $\frac{\gamma}{2}$ , weil CI Winkelhalbierende von  $\gamma$  ist. Als Wechselwinkel an Parallelen ist auch der bei I markierte Winkel gleich  $\delta$ . Als Wechselwinkel ist auch  $\eta = \frac{\alpha}{2}$ .

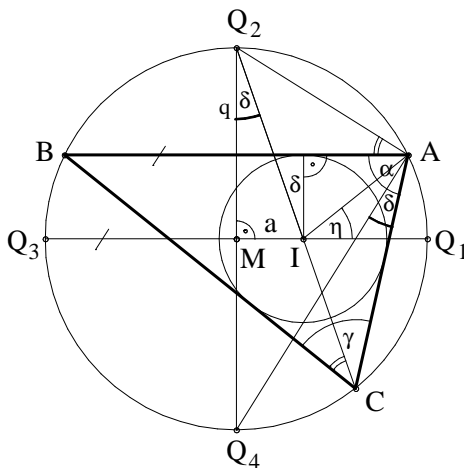


Abb. 20

*Lösung zu a):*

Es genügt zu zeigen, dass in  $\Delta IAQ_2$  die Winkel bei

I und A gleich groß sind:  $\sphericalangle Q_2AI = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$ .

$\Delta Q_2Q_4A$  ist ein rechtwinkliges Dreieck im THALES-

Kreis. Deshalb gilt bei A:  $\sphericalangle Q_2AC = 90^\circ + \delta$  und andererseits  $\sphericalangle Q_2AC = \frac{\gamma}{2} + \alpha$ . Es folgt  $90^\circ + \delta = \frac{\gamma}{2} + \alpha$  und damit  $\sphericalangle AIQ_2 = \delta + (90^\circ - \eta) = \delta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} + \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle Q_2AI$ .

*Lösung zu b):*

Zunächst gilt nach Pythagoras  $R^2 + a^2 = |Q_2I|^2 = |Q_2A|^2$ , letzteres nach a). (1)

Im rechtwinkligen  $\Delta Q_2Q_4A$  gilt  $|Q_2A|^2 = 2R \cdot q$ , wobei q den Hypotenusenabschnitt unter  $Q_2A$  bezeichnet.

Da nun AB Tangente an den Inkreis und senkrecht zu  $Q_2Q_4$  ist, folgt  $q = R - r$ ,  $|Q_2A|^2 = 2R \cdot (R - r)$ . (2)

Zusammengefasst ergeben (1) und (2)  $a^2 = |Q_2A|^2 - R^2 = 2R \cdot (R - r) - R^2 = R^2 - 2Rr$

und  $R^2 - a^2 = 2Rr$ .

**zu Aufgabe 8:**

Wie bei der Lösung zu Aufgabe 1 verwenden wir die Gleichung  $(R - r)^2 = r^2 + a^2$ , die zu  $R^2 - a^2 = 2Rr$  äquivalent ist. Nach Satz 1.8 gibt es zwei Fälle: r gerade, a und R-r ungerade bzw. a gerade, r und R-r ungerade. Im ersten Fall liefert der genannte Satz  $R - r = u^2 + v^2$ ,  $r = 2uv$ ,  $a = u^2 - v^2$ , woraus auch  $R = (R - r) + r = (u + v)^2$  folgt. Im zweiten Fall erhält man  $R - r = u^2 + v^2$ ,  $a = 2uv$ ,  $r = u^2 - v^2$ , woraus auch  $R = (R - r) + r = (u^2 + v^2) + (u^2 - v^2) = 2u^2$  folgt. In beiden Fällen sind u, v beliebige natürliche Zahlen, die den in Satz 1.8 genannten Bedingungen genügen.

Für  $u = 2$  und  $v = 1$  erhält man die Lösungen  $R = 9$ ,  $r = 4$ ,  $a = 3$  und  $R = 8$ ,  $r = 3$ ,  $a = 4$ .

**zu Aufgabe 9:**

Für  $R = 4,0$  cm und  $a = 1,0$  cm folgt nach Satz 2.1  $r \approx 2,6$  cm.

Hierzu sind in Abb. 21 zwei Vierecke eingezeichnet, deren Ecken auf  $k(M, R)$  liegen und die  $k(I, r)$  berühren.

Das strichpunktierte Dreieck berührt zwar mit zwei Seiten  $k(I, r)$  schneidet aber mit seiner dritten Seite diesen Kreis, obwohl die Ecken auf  $k(M, R)$  liegen

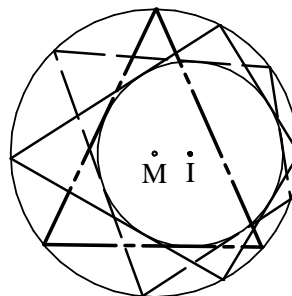


Abb. 21

**zu Aufgabe 10:**

Aus Gleichung (5) des Beweises zu Satz 2.1 folgt  $1 = (r \frac{|G_1I|}{R^2 - a^2})^2 + (r \frac{|G_2I|}{R^2 - a^2})^2$ , also mit (1) aus dem selben

Beweis  $1 = r^2 \left( \frac{1}{|AI|^2} + \frac{1}{|CI|^2} \right)$  und daraus die Behauptung für  $|AI|$  und  $|CI|$ . Für die Strecken  $|BI|$  und  $|DI|$  muss Entsprechendes gelten.

**zu Aufgabe 11:**

a) Zuerst konstruiert man das gleichseitige Dreieck und seinen Umkreis, sodann den Punkt D. Die Symmetrie des Drachenvierecks hat zur Folge, dass die Summe gegenüberliegender Seiten gleich ist und ABCD somit einen Inkreis besitzt. Dessen Mittelpunkt I ist der Schnitt von BD mit der Halbierenden von  $\sphericalangle DCB$ .

b) Bei A und C hat das Viereck rechte Winkel (Satz von THALES). Mit den Berührungspunkten E und F des Inkreises erhält man ein Quadrat AEIF. Aus  $30^\circ = \sphericalangle EBI = \sphericalangle FID$  (F-Winkel an parallelen Geraden) und  $\sin 30^\circ = 0,5$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  folgt

$$|BI| = 2r \text{ und } |DI| = \frac{2r}{\sqrt{3}}. |BD| = 2R \text{ ist trivial.}$$

Es folgt  $R = \frac{1}{2} (|BI| + |DI|) = r(1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$  und schließlich

$$a = |BI| - |BM| = 2r - R = r(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Nun berechnet man  $R^2 - a^2 = r^2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ,  $R^2 + a^2 = r^2 \cdot (2 + \frac{6}{9})$ , so dass gilt  $(R^2 - a^2)^2 = \frac{16}{3} r^4 = 2r^2 (R^2 + a^2)$ .

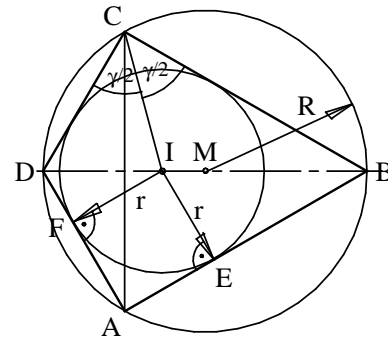


Abb. 22

**zu Aufgabe 12:**

Um zu zwei der Größen R, a, r die dritte zu finden, wird die Kenntnis von R und a vorausgesetzt und r gemäß

$r = \sqrt{\frac{(R^2 - a^2)^2}{2(R^2 + a^2)}}$  berechnet. Der symmetrische Fall  $a = 0$  ist in diesem Zusammenhang nicht von Interesse. Im

Folgenden können also R und a als natürliche Zahlen vorausgesetzt werden. Damit r eine natürliche Zahl wird, muss unter der Wurzel ein Quadrat einer solchen stehen. Da der Zähler dieses Bruches dies erfüllt, muss auch der Nenner eine Quadratzahl sein. Da hier ein Faktor 2 steht, muss  $R^2 + a^2$  eine gerade Zahl sein. Weil nur das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade und einer geraden Zahl gerade ist, sind also die beiden Größen R und a entweder beide gerade oder beide ungerade. Man beachte  $R > a$ .

r ist dann rational; z. B. führt  $(R | a | r) = (7 | 1 | 4,8)$  zu dem ganzzahligen Lösungstriplett  $(70 | 10 | 48)$ . Man kann sich also beim Programm auf die Untersuchung von  $2(R^2 + a^2)$  beschränken; vielleicht erhält man alle ganzzahligen Lösungen, unter Umständen mehrfach. Man kann noch mehr Ordnung in die gefundenen Triplett bringen:

Man reduziert das Triplett auf einen Anfangswert  $R_0, a_0, r_0$ , indem man das gefundene Triplett durch  $\text{ggT}(R, a, r)$  dividiert. So hat man eine ganze Menge Triplett  $(nR_0 | na_0 | nr_0)$  mit natürlichen Zahlen n gefunden. Im vorliegenden Fall ist  $\text{ggT}(70, 10, 48) = 2$  und man erhält ein „Anfangstriplett“  $(35 | 5 | 24)$ .

Um möglichst viele solche Triplett zu finden, führt man ein so genanntes „gezielte Raten“ durch, das man vom Gleichungslösen bereits kennt.

| a | $R > a$ | $2(R^2 + r^2)$ | $(R   a   r)$             | $(R   a   r) \in \mathbb{N}^3$ | mit $\text{ggT}(R, a, r) = 1$ |
|---|---------|----------------|---------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 3       | 20             |                           |                                |                               |
| 1 | 5       | 52             |                           |                                |                               |
| 1 | 7       | 100            | $(7   1   \frac{48}{10})$ | $(70   10   48)$               | $(35   5   24)$               |

| a    | $R > a$ | $2(R^2+r^2)$ | $(R   a   r)$                 | $(R   a   r) \in \mathbb{N}^3$ | mit $\text{ggT}(R, a, r) = 1$ |
|------|---------|--------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1    | usw.    | Kein Quadrat |                               |                                |                               |
| 1    | 41      | 58           | $(41   1   \frac{1682}{58})$  | $(2378   58   1682)$           | $(1189   29   841)$           |
|      | usw.    |              |                               |                                |                               |
| 2    | 4       | 40           |                               |                                |                               |
| 2    | 6       | 80           | /                             |                                |                               |
| 2    | 8       | 136          |                               |                                |                               |
| 2    | 10      | 208          |                               |                                |                               |
| 2    | 12      | 296          |                               |                                |                               |
| 2    | 14      | 400          | $(14   2   \frac{192}{20})$   | $(280   40   192)$             | $(35   5   24)$ siehe oben    |
|      | usw.    |              |                               |                                |                               |
| 2    | 82      | 13456        | $(82   2   \frac{6728}{116})$ | $(9512   232   6728)$          | $(1189   29   841)$           |
| usw. |         |              |                               |                                |                               |

$(35 | 5 | 24)$  bzw. die anderen Tripel mit  $\text{ggT} = 1$  kommen beliebig oft vor, weil in diesen Fällen die Ausgangsgrößen  $R$  und  $a$  durch zentrische Streckung mit einem natürlichen Streckungsfaktor auseinander hervorgehen. In der Praxis führt man dies anhand eines Programms mit dem PC durch.

## 5. Kommentar

Die vorliegende Arbeit wurde begonnen, als es noch Leistungskurse in Bayern gab. Zumindest Teile davon hätten dann in Form von Referaten erarbeitet werden können. Entsprechen ist sie nun im Rahmen der Begabtenförderung (Pluskurse und ähnliches) einsetzbar.

In 1.1 wird mit dem Umfangswinkelsatz und dem Pythagoräischen Lehrsatz gearbeitet, in 1.2 dasselbe Ergebnis mittels Trigonometrie erreicht. Kenntnis von Sinus- und Cosinussatz sowie der Additionstheoreme ist nötig. Mit dynamischer Geometriesoftware lässt sich vieles experimentell untersuchen. Ein Exkurs über PYTHAGORÄISCHE Zahlentripel (Satz 1.8 und Aufgabe 8) rundet das Kapitel ab.

Der zweite Abschnitt fußt auf dem ersten und behandelt Vierecke mit einfachen trigonometrischen Rechnungen. Zusätzlich benötigt man den Sehnensatz und Grundlagen über Sehnen- und Tangentenvierecke. Der zahlentheoretische Teil ist vollständig durchgerechnet. Aufgabe 12 dürfte für Informatik-Interessierte reizvoll sein. Abschnitt 3 arbeitet mit Geradengleichungen, auch in HESSEScher Normalform, und entspricht methodisch eher der Literatur [2]. Zu den Formeln für Sechseck und Achteck gelangt man mit algebraischen Umformungen, die wegen ihres Umfangs aber nur skizziert sind.

## 6. Literatur

- [1] Mettler, Martin: Vom Charme der verblassten Geometrie, MONOID-Reihe, Verlag Eurobit, Temeswar 2000
- [2] Sauvageot, Francois: Petits problèmes de géométries et d'algèbre, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2000

*Anschrift des Autors:*  
Gustav Vogl  
Wendelsteinstraße 4  
83043 Bad Aibling

Die Abhandlung wurde am 1. Oktober 2013 angenommen.