Roland Schröder

Kalkül oder Prozess –
Das Problem des „modernen“ Mathematikunterrichtes

1. Wesenszüge der Mathematik

Die elektronischen Rechenwerkzeuge haben den Kalkül trivialisiert. Das war nicht zu vermeiden. Vermeidbar aber war der Paradigmenwechsel im Mathematikunterricht im Gefolge eines verfehlten Einbaus des Kalküls in das Gebäude der Mathematik. Die Mathematik selbst hat nämlich durch den Einzug der neuen Werkzeuge ihr Wesen nicht verändert. Gewiss, sie ist wieder einmal gewachsen, aber dem Kalkül wurde (zumindest außerhalb der Mathematikdidaktik) keine revolutionär neue Rolle zugewiesen.

Zum Wesen der Mathematik gehört unter anderem, dass sie aufeinander aufbaut. Soweit es den Kalkül betrifft steht am Anfang nach wie vor die Addition, auf die dann die Subtraktion zurückgeführt wird. Die Multiplikation entsteht aus der Addition gleicher Summanden und die Division wird auf die Multiplikation zurückgeführt. Und so weiter. Dieser rekursive Charakter des Aufbaus der Mathematik ist einer ihrer wichtigsten Wesenszüge. Das haben (außerhalb der Schulmathematik) auch die neuen Werkzeuge nicht weggewischt. Die wesenseigene Rekursion erleben wir gleichzeitig in der mathematischen Begriffsbildung:

Ein Gedanke verdichtet sich zu einem Begriff, der dann wiederum Gegenstand eines neuen Gedankens wird. Der Mathematik-Lernende kann eines Tages so gut Addieren, dass er nicht mehr auf Additionsmodelle (Pfeile, disjunkte Mengen, Weiterzählen) zurückgreifen muss. In dieser Phase ist der Begriff der Addition geeignet, in einen neuen Gedanken (Multiplizieren, Subtrahieren) eingebaut zu werden. Das geht gerade beim Mathematiklernen so weiter und immer so weiter. Insofern baut der Lernende das Gebäude der Mathematik angeleitet durch einen versierten Lehrer noch einmal nach. Im Zuge dieses Lernprozesses bedarf es – mit den Worten der Semiotik – einer „Vergegenständlichenden Abstraktion“. Begriffe sind Abstraktionen und ihre vollständige Verinnerlichung zwecks Einbau in weiterführende Gedanken kann als „Vergegenständlichung“ angesehen werden: Der Begriff wird zum Gegenstand des neuen Gedankens.

Den rekursiven Aufbau der Mathematik haben die elektronischen Werkzeuge außerhalb der Schulmathematik, wie gesagt, nie in Frage gestellt. Der Kalkül ist sozusagen der Rekursionsanfang und ist es bis heute geblieben. Die moderne Schulmathematik möchte „weg vom Kalkül“. Das ist schon deshalb ein abwegiges Unterfangen, weil damit der Rekursion ihr Anfang genommen wird. Jenseits des Kalküls, sozusagen an einem vom Kalkül getrennten Ort, sieht die moderne Schulmathematik den „Prozess“. Hätte die moderne Mathematikdidaktik wirklich verstanden, was Rekursion bedeutet, hätte sie wissen können, dass es keinen vom Rekursionsanfang getrennten Ort geben kann: Der Prozess der Addition gleicher Summanden ist wiederum Kalkül. Jeder Rekursionsschritt ist Basis des nächsten. Gibt es einen Grad an Komplexität eines Kalküls, der es erlaubt, nun in eine neue, vom Kalkül abgetrennte, Begriffskategorie zu wechseln? Die moderne Mathematikdidaktik glaubt, diesen Ort gefunden zu haben: Das Modellieren. Ihr Credo „Weg vom Kalkül – hin zum Prozess“ ist also so zu verstehen:

Das Rechnen macht ein Werkzeug, Unterrichtsgegenstand ist das Modellieren. Schluss mit der Rekursivität des Denkens. Mathematik wird neu erfunden. Die neuen Werkzeuge machen es angeblich ebenso möglich wie erforderlich.

2. Beispiele aus dem Schulalttag

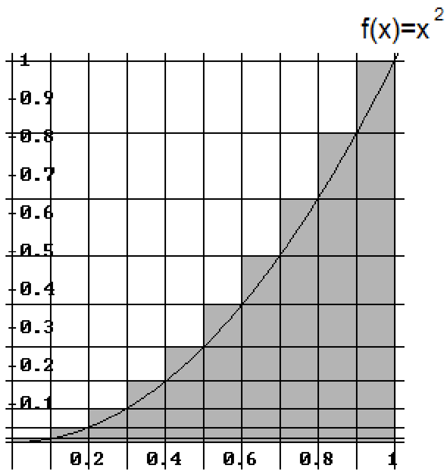
Soweit zum „ideologischen Überbau“, nun zu konkreten Beispielen. Es gab Zeiten, in denen war der infinitesimale Prozess zentrales Oberstufenthema. Integral- und Differentialrechnung wurden durch einen Kurs über Folgen und Reihen gründlich vorbereitet. Zentraler Kalkül war der „Kalkül des kontrollierten Fehlers“. Am Wege zu den neuen Begriffen „Differential“ und „Integral“ standen „Differenzenquotient“ und „Ober/ Untersumme“. Die Ziele „Steigung in einem Punkt“ und „Flächeninhalt bei krummliniger Begrenzung“ wurden über Verkleinerung eines kontrollierbaren Fehlers angestrebt und erreicht. Das alles war Kalkül vom Feinsten. Aber nicht genug damit: Beim Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten wurde früher auf ganz elementaren Mittelstufenkalkül zurückgegriffen. Der Differenzenquotient musste auf den Grenzübergang „vorbereitet“ werden, sodass der Nenner keinen gegen Null strebenden Faktor mehr enthielt (oder ganz verschwand). Für $f(x) = x^3$ hieß das:

$$DQ = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + h(3x + h^2)$$

Heute meint man, dass dieser Kalkül für die vergegenständlichende Abstraktion der Begriffe „Differenzenquotient“ und „Differentialquotient“ nicht mehr beherrscht werden müsse. Ein selbständiger Transfer auf Differenzenquotienten anderer Potenzfunktionen wird nicht mehr verlangt. Stattdessen wird in CAS-gestützten Kursen sehr schnell zum maschinellen Ableiten übergegangen und nur mit GTR ausgerüstet, werden Schüler gebeten, die Ableitungsregeln einfach auswendig zu lernen, als seien es englische Vokabeln oder Geschichtszahlen.

Und hier beginnt das eigentliche Problem des „modernen“ Mathematikunterrichtes. Die Mathematik kommt daher, wie eine Ansammlung von Fakten (dazu gehören dann auch die mit Verfallsdatum behafteten Bedienungsanleitungen für das elektronische Rechenwerkzeug). Die Begriffe werden – so meint man heute – über die Bedienung von Automaten für den weiteren Unterrichtverlauf verfügbar gemacht und nicht mehr über ihre Vertiefung und Wiederholung. Damit sind die Begriffe keine vergegenständlichenden Abstraktionen mehr. Ironischer Weise sollen die Schüler dann miteinander über Mathematik sprechen. Wie geht das, wenn kein Begriffsverständnis aufgebaut wurde?

Ein zweites Beispiel:
Zusammen mit nebenstehender Skizze erhalten die rechnerbewehrten Schüler einer 11. Klasse die Aufgabe: „Berechnen Sie den Inhalt der grau unterlegten Fläche!“



Die Erfahrung lehrt, dass die Schüler erkennen, dass eine Summe von Rechtecksflächen gefordert ist. Die Höhen der Rechtecke versuchen die meisten Schüler auf der senkrechten Achse abzulesen. Der Lehrer weist darauf hin, dass hier Funktionswerte abzulesen sind. Dann beginnen fast alle Schüler, jede einzelne Rechtecksfläche auf mehrere Stellen hinter dem Komma auszurechnen und aufzuaddieren. Über Rechenvereinfachungen wird nicht nachgedacht. Rechnen erledigt ja – so das neue Credo – das elektronische Werkzeug. Der Lehrer, dem das aber nicht genügt, schreibt an die Tafel:

$0{,}1\cdot0{,}1^2+0{,}1\cdot0{,}2^2+0{,}1\cdot0{,}3^2+0{,}1\cdot0{,}4^2+0{,}1\cdot0{,}5^2+0{,}1\cdot0{,}6^2+0{,}1\cdot0{,}7^2+0{,}1\cdot0{,}8^2+0{,}1\cdot0{,}9^2+0{,}1\cdot1{,}0^2$.

Was nun folgt, ist reiner Kalkül einschließlich Rechenvereinfachungen und der sollte beherrscht werden, wenn der Unterricht auf angemessene Begriffsvorstellungen ausgerichtet ist. Der Transfer dieses Kalküls auf n Rechtecksflächen über einem Intervall [0, a] sollte danach ebenfalls gelingen.

3. Beispiele (noch) außerhalb des Schulalltags

Die DMV hat eine Fachgruppe Computeralgebra eingerichtet in der mit OStR Jan Müller, ein „Fachexperte Schule“, und mit Prof. Dr. Gilbert Greefrath, ein „Fachexperte Lehre und Didaktik“, benannt wurden. In der Halbjahresschrift dieser Fachgruppe, dem „Computeralgebra-Rundbrief“ haben die beiden Fachexperten eine Aufgabe veröffentlicht [1], die trotz aller Bedenken hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades als exemplarisch für einen sinnvollen CAS-Einsatz angesehen werden kann:

> Berechne die Zahl $\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}}+\sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}$. Vertraust du dem Ergebnis? Könnte ein Rundungs- oder Rechenfehler vorliegen? Was meinst du?

Schüler, die einen simplen (nicht algebrafähigen) Taschenrechner einsetzen, erhalten eine Antwort, die sie zufriedenstellen dürfte, wenn nicht die Zusatzfragen gestellt wären und Zweifel gegenüber TR-Ergebnissen überhaupt thematisiert wurden. Wer aber CAS einsetzt, erhält vermutlich ein Ergebnis in C außerhalb R und kann folglich die Aufgabe samt Zusatzfragen nicht ohne weitere Termumformungskenntnisse lösen. Greefrath/Müller leiten die Schüler in einem 9 Schritte-Gang bis zur Lösung, der einiges an mathematischen Kenntnissen abverlangt. Sie fordern den Schüler/die Schülerin auf, folgende Schritte zu begründen:

1) Aus $a = 11 + 4\sqrt{29}$ folgt $x = \sqrt[3]{11+4\sqrt{29}} + \sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}0 = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{22-a}$
2) $x^3 = a + 3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 \sqrt[3]{22-a} + 3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{22-a}\right)^2 + 22 - a$
3) $x^3 = 22 + 3\left(\sqrt[3]{a^2(22-a)} + \sqrt[3]{a(22-a)^2}\right)$
4) $a^2 = 585 + 88\sqrt{29}$ und $(22-a)^2 = 585 - 88\sqrt{29}$
5) $x^3 = 22 + 3\left(\sqrt[3]{-3773 - 1327\sqrt{29}} + \sqrt[3]{-3773 + 1327\sqrt{29}}\right)$
6) $x^3 = 22 - 21\left(\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}} + \sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}\right)$
7) $x^3 = 22 - 21x$
8) Schnittpunktbestimmung aus Graphen zu den Teiltermen x^3 und 22 – 21x. Vermutung x = 1
9) Probe für x = 1

An dieser Aufgabenstellung einschließlich Lösungsvorschlag fällt einiges auf:

- Ein besonderes Gewicht, wird auf die Hinterfragung des Ergebnisses gelegt (siehe dazu auch die nachfolgende Aufgabe der Fachhochschule Aachen).
- Es erfordert ein überragendes methodisches Geschick des Unterrichtenden, die Schüler hier nicht einfach über 9 Hürden zu ziehen.
- „Wie kommt man auf den Ausgangsterm?“ „Wie kommt man auf den Lösungsweg?“ Schülerfragen dieser Art sind heute kaum noch zu erwarten und können nur auf den Hintergrund umfassender mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten (einschließlich Kalkülkenntnisse) gestellt und nur bei vertiefter Sachkenntnis beantwortet werden.
- CAS kann hier bei der Lösung zwar assistieren, profunde Kenntnisse der Termumformung und damit des Kalküls bleiben dennoch unerlässlich.

Zum Abschluss sei auf die schon angedeutete Hinterfragung von Computerergebnissen eingegangen. Diese fristet im Schulunterricht ein Schattendasein. Vier Professoren der Fachhochschule Aachen im Fachbereich Luft – und Raumfahrttechnik mit den folgenden Lehrgebieten:

Prof. Dr. Hans-Joachim Blome (Raumfahrttechnik und technische Dynamik),
Prof. Dr. Klaus-Gerd Bullerschen (Angewandte Mathematik),
Prof. Dr. Josef Mertens (Strömungslehre, insbesondere Aerodynamik und Gasdynamik) und
Prof. Dr. Christa Polaczek (Mathematik)
haben dazu „Empfehlungen zum Einsatz computerunterstützter Berechnungen in der Schulausbildung“ [2] verfasst, in welchen man insbesondere folgendes Gleichungspaar findet:

$$x = (1+10^{-20}+10^{-21}-1)\cdot 10^{22}$$
$$y = (1-1+10^{-20}+10^{-21})\cdot 10^{22}$$

Ein Taschenrechner nennt $x = 0$ und $y = 110$, obwohl theoretisch $x = y$ gilt. Kommutativ- und Distributivgesetz machen jeden Rechnereinsatz überflüssig und liefern das richtige Ergebnis. Die Kalkülkenntnisse der Schüler sollten mindestens dafür ausreichen, dass zuerst das Gehirn und dann die Rechenmaschine eingeschaltet werden kann.

4. Literatur

Greefrath, Gilbert; Müller,Jan [1] "Computeralgebra in der Schule - Stand der Dinge!?" in "Computeralgebra Rundbrief" Nr. 51, 2012, Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM

Blome, Hans Joachim; Bullerschen, Klaus- Gerd; Mertens, Joseph: Polaczek, Christa [2] "Empfehlungen zum Einsatz computergestützter Berechnungen in der Schulausbildung", Fachhochschule Aachen, persönliche Zusendung durch die Mitautorin Christa Polaczek

Anschrift des Autors:
Roland Schröder
Dehningstraße 26
29223 Celle

Angenommen am 22. Februar 2014