Errata

Zu E. Müller:
Ungewöhnliche Gleichungssysteme bei der Mathematik-Olympiade
MI Nr. 38, Seite 43-52, Lösungsweg zu Aufgabe 3.3, Seite 48, 2. Abschnitt:

Red.: Das Folgende ist nur ein Teil der Lösung.

Durch Probieren erhält man die ganzzahlige Lösung $v = -3$, nach Division durch den entsprechenden Linearfaktor $(v + 3)$ verbleibt das Polynom $u^2 - 3u + 7 = (u - 3/2)^2 + 19/4$ ohne reelle Nullstellen. Jede reelle Lösung t von (3) liefert einen reellen Wert $v = t + 1/t$. Daher können sich die verbleibenden reellen Lösungen von (3) nur aus dem Wert $v = t + 1/t = -3$ ergeben, diese Gleichung für t hat die Lösungen $\left(-3+\sqrt{5}\right):2$ und $\left(-3-\sqrt{5}\right):2$. Somit sind alle reellen Nullstellen von (3) gefunden.

Die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems ergeben sich nun aus (2) und $y = tx$:
$t = 1$: Lösungen $\left(\sqrt{22}\middle|\sqrt{22}\right)$ und $\left(-\sqrt{22}\middle|-\sqrt{22}\right)$,
$t = -1$: Lösungen $\left(\sqrt{20}\middle|-\sqrt{20}\right)$ und $\left(-\sqrt{20}\middle|+\sqrt{20}\right)$,
$t = \left(-3+\sqrt{5}\right):2$ ergibt nach (2) $x^2 = 21 + t^3 = 12 + 4\sqrt{5} = \left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$; also hat man die Lösungen
$\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\middle|-\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$ und $\left(-\sqrt{10}-\sqrt{2}\middle|+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$.
$t = \left(-3-\sqrt{5}\right):2$; analog erhält man die Lösungen
$\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\middle|-\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$ und $\left(-\sqrt{10}+\sqrt{2}\middle|+\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$.
Diese Lösungen erfüllen auch obige Plausibilitätsbedingung, dass mit (a|b) auch (b|a) Lösung ist.

Anmerkung: Um zu zeigen, dass dies tatsächlich Lösungen sind, wäre die Probe durchzuführen. Im Folgenden seien k und m reelle Zahlen mit Quadrat 1 (also jeweils 1 oder -1).
Die Probe, die hier nicht durchgeführt wird, würde aus den folgenden Identitäten für alle gültigen Werte von k und m folgen:

$$\left(k\sqrt{22}\right)^5 = 21\left(k\sqrt{22}\right)^3 + \left(k\sqrt{22}\right)^3$$
$$\left(k\sqrt{20}\right)^5 = 21\left(k\sqrt{20}\right)^3 + \left(-k\sqrt{20}\right)^3$$
$$\left(k\sqrt{10}+m\sqrt{2}\right)^5 = 21\left(k\sqrt{10}+m\sqrt{2}\right)^3 + \left(-k\sqrt{10}+m\sqrt{2}\right)^3$$

Die ersten beiden Beziehungen für die Lösungen für $t = 1$ und $t = -1$ sind einfach nachzuweisen, die dritte zeigt man z. B. durch folgende Äquivalenzumformungen. Hierbei sei $n = k/m$, also $n^2 = 1$:

$$\left(k\sqrt{10}+m\sqrt{2}\right)^5 = 21\left(k\sqrt{10}+m\sqrt{2}\right)^3 + \left(-k\sqrt{10}+m\sqrt{2}\right)^3,$$

$$4k^5\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+n\right)^5 = 2k^3\sqrt{2}\left(21\left(\sqrt{5}+n\right)^3 + \left(-\sqrt{5}+n\right)^3\right);$$ weil $k^5 = k^3$ gilt, ist letzteres äquivalent zu:

$$2\left(\sqrt{5}+n\right)^5 - 21\left(\sqrt{5}+n\right)^3 = \left(n-\sqrt{5}\right)^3,$$
$$\left(\sqrt{5}+n\right)^3\left(2\left(\sqrt{5}+n\right)^2 - 21\right) = \left(n-\sqrt{5}\right)^3,$$
$$\left(8\sqrt{5}+16n\right)\left(12+4n\sqrt{5}-21\right) = 16n - 8\sqrt{5},$$ weil $n^2 = 1$ ist; hierzu äquivalent sind die folgenden Zeilen
$$\left(\sqrt{5}+2n\right)\left(4n\sqrt{5}-9\right) = 2n - \sqrt{5}$$ und
$$2n - \sqrt{5} = 2n - \sqrt{5}.$$

Anschrift des Autors:
Dr. Eric Müller
Kirchdorfer Straße 10
78052 Villingen-Schwenningen-Marbach