Karlhorst Meyer

Themen, die bis jetzt in der „Mathematikinformation“ fehlen

Als Herausgeber will ich Ihnen nach Rücksprache mit den anderen Herausgebern andeuten, welche Änderungen an der Zeitschrift Mathematikinformation sinnvoll wären und ohne Aufwand realisiert werden könnten.[1] Es geht also nicht um eine völlige Neuordnung der Zeitschrift, sondern nur um eine durchaus mögliche Erweiterung.

1. Vorbemerkungen

Das Hauptanliegen der Zeitschrift seit ihrer Gründung 1981 ist, den Übergang vom Gymnasium zur Hochschule zu erleichtern. Hierbei geht es nicht in erster Linie um die Unterstützung der Jugendlichen, die sich einem mathematischen Studium verschreiben, sondern vielmehr um diejenigen, die ein Mathematik *anwendendes* Studium ergreifen wollen. Die Zeitschrift spricht die betroffenen Schüler[2] über ihre Lehrer an, sie ist also bemüht, Lehrern Materialien an die Hand zu geben, die es ihnen erlauben, einen geeigneten Ergänzungsunterricht zu geben. Neben reinen Lehrerinformationen stehen hierbei zwei Zielrichtungen im Zentrum:

1. Viele Gebiete der Mathematik stehen zwischen Gymnasium und Hochschule, die die Hochschule nicht unterrichten will oder auch kann, und die das Gymnasium noch nie unterrichtet hat oder nicht mehr unterrichtet, was u. U. an der Hochschule noch gar nicht aufgefallen ist. Diese Gebiete liefern interessante Themen für den Schulunterricht, ohne dass hierdurch das eigentliche „Normal“-Curriculum berührt wird. Z. B. werden komplexe Zahlen heute am Gymnasium praktisch nicht mehr gelehrt, aber etwa beim Studium der Elektrotechnik ab 1. Semester vorausgesetzt.
2. Viele Studenten im 1. Semester fühlen sich vom Tempo der Mathematikvorlesungen erschlagen. Sie können der Vorlesung nicht folgen, sie werden abgehängt und begreifen deshalb nicht, was die Vorlesung mit ihrem Studium zu tun hat. Hier ist es Aufgabe des Gymnasiums die Unterrichtsdichte bis zur Reifeprüfung so zu steigern, dass das Niveau einer Anfängervorlesung erreicht wird. Wenn das heute im Normalunterricht – aus welchen Gründen auch immer – nicht geschehen kann, **muss** das Gymnasium vor allem in der Sekundarstufe II für die an einem Mathematik anwendenden Studium interessierten Schüler einen entsprechenden Ergänzungsunterricht einrichten. Hierfür gibt es nicht nur die Möglichkeit eines jahrgangsübergreifenden „Mathematikseminars“ wie etwa am Gymnasium Starnberg, aus dem dann diese Zeitschrift hervorging, sondern manch anderes, wie das heute in nahezu allen Bundesländern vorgesehen ist:
   - Intensivierungsstunden, bei denen die Klasse zweigeteilt wird, damit in kleineren Gruppen unterrichtet werden kann, wobei eine Gruppe „besserer“ Schüler gebildet wird. Ich weiß, solches findet man in vielen Verordnungen, nur leider wird dieser Wunsch angefangen vom Lehrermangel bis hin zu Schulforum, Elternbeiräten u. a. dahingehend verändert, dass in beiden Gruppen nur Nachhilfe hinsichtlich eines ohnedies zu schwachen Curriculums ausgeführt wird.
   - Arbeitsgemeinschaften in Mathematik entsprechend dem oben genannten Mathematikseminar.
   - Seminare in der Sekundarstufe II.
   - Binnendifferenzierung ist zwar zunächst für Lehrer sehr zeitaufwändig, lohnt sich aber, weil so im Normalunterricht Begabte gefördert werden. Curricula für Binnendifferenzierung sollten deshalb von Didaktikern an den Hochschulen, von Staatsinstituten und u. U. von älteren Kollegen entworfen werden und in der Mathematikinformation zur Diskussion gestellt werden.

[1] Gleichnamiger Vortrag auf dem 18. Forum für Begabungsförderung in Mathematik 2014 an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe.
[2] Die Damen mögen dem Autor verzeihen, wenn er – nach Duden – stets die maskuline Form allein wählt, um den Text leichter lesbar zu gestalten.

Insgesamt kann so Begabtenförderung an den Gymnasien betrieben werden, auch wenn es nicht gleich eine Hochbegabtenförderung in Mathematik sein wird, wie dies etwa bei der Vorbereitung für die Mathematik-Olympiade vom „Bezirkskomitee Chemnitz“ [1] der Fall ist.

Eine letzte Vorbemerkung muss noch gesagt werden: Immer wieder glauben Lehrer, es wäre Hochschullehrern durchaus möglich, die Studenten der Anfangssemester dort abzuholen, wo sie sich mit ihrem Wissens- und Erfahrungsstand, den sie am Gymnasium erhalten haben, befinden. Leider vergessen diese Kollegen, dass die Begrenzung der Studiendauer und der Auftrag, die Studenten an die Forschung heranzuführen, eine Übernahme der am Gymnasium möglichen Lernziele (Kompetenzen) durch die Hochschule nicht gestattet. D. h.: Das Gymnasium muss all die Gebiete lehren, die elementar sind und/oder in der Vergangenheit unterrichtet worden sind. Würde dies zum Teil von den Hochschulen bei Einhaltung der Regelstudienzeiten übernommen, könnte das nur durch Abstriche beim Heranführen an die Forschung geschehen, was sich in einem Land, das von der Forschung lebt, katastrophal auswirken würde.

2. Neue Themen für die Mathematikinformation

Hinsichtlich der neuen Vielfalt des Ergänzungsunterrichts sind weitere einschlägige Themen für Publikationen in der Mathematikinformation (im Folgenden abgekürzt: MI) unerlässlich:

2.1 Binnendifferenzierung

Trigonometrie ist ein klassisches Thema der gymnasialen Mathematik und wird heute am Gymnasium sträflich vernachlässigt. Ein Teil der im Lehrplan verschwundenen Inhalte kann den begabten Schülern im Normalunterricht nebenher durch Sonderaufgaben und anhand von Arbeitsblättern gelehrt werden. Sicher, es wird Inhalte geben, die nur in einem Zusatzunterricht vermittelt werden können. Die Publikation sollte klarstellen, was im Unterricht durch Binnendifferenzierung geht, was den Begabten in eigenen Sonderstunden gelehrt werden muss. Bei der Ausarbeitung sollten die trigonometrischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert werden. Die dazugehörigen Umkehrfunktionen verlangen eine Einschränkung auf Hauptwerte. Leider kennen Rechner diese nur als so genannte Normhauptwerte und liefern so gelegentlich falsche Ergebnisse. D. h. der Nutzer der Arcusfunktionen muss genau über die Hauptwerte Bescheid wissen (siehe HEMME [1]). Anwender der Trigonometrie benutzen Gleichungen mit den trigonometrischen Funktionen; abgesehen von einfachsten Fällen wird man solche nur mit Hilfe der **A**dditionstheoreme lösen können. Die Meinung vieler Kultusministerien, letztere müsse man nicht mehr unterrichten, da sie in jeder Formelsammlung (oft über 1000 Druckseiten) der Ingenieure zu finden seien, ist abwegig, da kaum einer, der Probleme mit einer goniometrischen Gleichung hat, auf die Idee kommt, in der Formelsammlung unter dem Buchstaben **A** zu suchen. In einer Zeit der Weltraumfahrt muss man auch die Anwendungen aus dem Bereich der sphärischen Trigonometrie wieder wenigstens einigen Schülern lehren.

Raumgeometrie wird seit Jahren im Schulunterricht vernachlässigt. Welche Anregungen kann man guten Schülern durch Binnendifferenzierung geben, was kann ihnen nur in einer Zusatzstunde gelehrt werden? In LANGE UND MEYER [1] wird hierzu gezeigt, dass nicht die alten Fehler der Darstellenden Geometrie gemacht werden brauchen; trotzdem aber gilt es, das alte Problem zu lösen: Wie überlegt, berechnet und konstruiert man in einer zweidimensionalen Ebene den dreidimensionalen Raum? Der erforderliche Unterricht kann durchaus auch anhand einer Zeichensoftware aufgebaut werden.

Im **Gleichungslösen** könnten die guten Schüler der Jahrgangsstufe 9 mehr erfahren als die übrige Klasse. Das alte Schulbuch MEYER U. A. [3] gibt hierzu Anregungen. Eigentlich kann man im Schulunterricht alle händischen Verfahren zum Lösen von Gleichungen kennen lernen, wie dies etwa auch bei den Wettbewerben zu beobachten ist. Hinsichtlich der immer größeren Nutzung von Rechnern wäre es sinnvoll, schon in Klasse 9 auf die damit verbundenen numerischen Probleme zu sprechen, ohne gleich die Näherung von NEWTON zu nutzen.

Heute fehlt in der Mittelstufe der meisten Bundesländer ein adäquater Unterricht mit **Vektoren.** Auch hier kann für gute Schüler in den Klassen 8 und 9 durch Binnendifferenzierung ein Teil anhand von Arbeitsblättern gelehrt werden. Man führt Vektoren als Verschiebungen ein. Zentrische Streckungen führen zur Multiplikation mit einem Skalar. Der Satz des PYTHAGORAS führt zum Skalarprodukt. So werden wenigstens bei einigen Schülern Vorkenntnisse erzeugt, wie sie heute vor der Sekundarstufe II fehlen.

Viele Bundesländer haben die **Abbildungsgeometrie** zugunsten der Kongruenzgeometrie vergessen. Interessant wäre der Versuch, ob man nicht parallel zur üblichen Vorgehensweise auf Arbeitsblättern den Begabten das Begründen mit Spiegelungen usw. beibringen kann, um zu zeigen, dass beide Wege ihre Berechtigung haben: Einmal ist der eine, dann wieder der andere Weg der bequemere und vor allem kürzere und damit auch genauere.

In manchen – vielleicht bald in allen – Bundesländern fehlt der **Grenzwertbegriff**. Wer macht Vorschläge, die zeigen, wie man durch Binnendifferenzierung wenigstens einigen Schülern die Epsilontik beibringen kann? Hierzu ist allerdings erforderlich, frühzeitig mit der Vorbereitung zu beginnen. D. h. parallel zum Algebraunterricht muss jeweils auf das Lösen von dazugehörigen Betragsungleichungen eingegangen werden.

Ohne Zweifel hat man erst dann den Wunsch – auch als Schüler –, den Grenzwertbegriff zu algebraisieren, also durch Epsilontik zu fixieren, wenn man bereits über gewisse **Vorerfahrungen** verfügt. Diese sind aber schon seit langem „entfrachtet“ worden, angefangen von der Schnecke die am ersten Tag 1 m weit läuft, müde wird und am Folgetag nur noch die Hälfte schafft usw. und weiteren Inhalten: Welchen Stellenwert hat die Kreisrektifikation von ARCHIMEDES, anschauliche Verwendung des Prinzips von CAVALIERI u. a. Es wäre deshalb notwendig, wenn ein Lehrer solche Vorerfahrungen unter Umständen auch für eine Binnendifferenzierung zusammenstellt und damit wieder in Erinnerung bringt.

Wer erklärt sich bereit, einen Artikel für eine Binnendifferenzierung über Aufgaben zu schreiben, die zeigen, dass die Vektorgeometrie auch an der Schule zur **Lösung von nicht linearen Problemen** benutzt werden kann, wie z. B. bei der Erzeugung gekrümmter Flächen (vgl. hierzu MEYER [1])?

2.2 Themen im heutigen Ergänzungsunterricht

Die meisten von Ihnen geben heute im Rahmen der Intensivierungsstunden bis hin zu den Seminaren in der Oberstufe Ergänzungsunterricht. Schreiben Sie uns doch, **was Sie im Ergänzungsunterricht lehren** bzw. wie weit Sie die ursprüngliche Idee erfüllen, die Klasse zweizuteilen in eine Gruppe, die Nachhilfe bekommt (hier fragt sich auch, welcher Art diese Nachhilfe ist), und in eine Gruppe, bei der anschließend an das Normalcurriculum Wissen und Können weitergeführt bzw. vertieft werden.

Der heute kompetenzorientierte Unterricht wird häufig dahingehend falsch verstanden, dass Lehrer glauben, dass nur noch die durch die Standards formulierten mathematischen Inhalte zu unterrichten sind. In Wirklichkeit haben die Schöpfer der neuen Terminologie durch Standards den Lehrstil fixieren wollen, der natürlich nicht auf irgendwelche Inhalte beschränkt ist, sondern nur an Beispielen erklärt, wie es gemacht werden soll (vgl. MEYER [4]). Auf meine Frage nach den in Kernlehrplänen fehlenden mathematischen Inhalten hat sich eine Vertreterin des Kultusministeriums aus NRW auf der 15ten Tagung „Begabungsförderung in Mathematik“ in Aachen 2010 sinngemäß wie folgt geäußert: „Man kann doch annehmen, dass die Lehrer als gut ausgebildete Akademiker wissen, was man zu lehren hat.“ Es besteht der Verdacht, dass im Augenblick der ursprünglich für anderes vorgesehene Ergänzungsunterricht benutzt wird, die fehlinterpretierten Lehrpläne zu ergänzen.

Will man also schon bald erfolgreiche Kritik am neuen Stil der Lehrpläne üben, so sind Kurzveröffentlichungen über Ihr Vorgehen im Unterricht unerlässlich. Helfen Sie mit, um aus der Sackgasse, in die wir hineingeraten sind, wieder herauszukommen.

Hier möchte ich auch die bayerische Panne Herbst 2013 mit dem Probeabitur erwähnen. Bis jetzt sind in nahezu allen Bundesländern die Reifeprüflinge auf die Nutzung eines Taschenrechners gedrillt worden; jetzt plötzlich soll es genauso gut ohne Taschenrechner gehen. Offenbar gibt man hier dem Drängen der Technischen Universitäten nach, die schon immer ohne solche Hilfsmittel ihre Vordiplomprüfungen durchgeführt haben. Als Grund wurde angegeben, dass bei Berechnungen ohne technische Hilfsmittel das Schätzen, das jeder Ingenieur beherrschen sollte, im Vordergrund steht. Da bis jetzt in den Reifeprüfungen zum Teil umfangreiche TR-Rechnungen durchzuführen waren, sollte man in der MI u. U. mehrere Arbeiten schreiben, in welcher Form **Schätzvorgänge** (auch Skizzen) die Nutzung eines Taschenrechners vermeiden helfen.

2.3 Kritik

Immer wieder fallen schlechte **Formulierungen in Lehrbüchern und -plänen** auf. Weshalb schreiben Sie nicht eine kurze Notiz und weisen auf solche Fälle hin? Ich gebe hierzu ein Beispiel: In einem Kernlehrplan findet man den folgenden Satz ohne weitere Einschränkung:

„Immer, wenn der Lösungsansatz für eine Aufgabe dem Bearbeiter nicht offensichtlich ist oder ihm Lösungsverfahren nicht zur Verfügung stehen, liegt ein mathematisches Problem vor.“

Das kann man auch so verstehen: „Ich habe immer Ärger mit meiner Frau und weiß nicht wie ich dieses Problem lösen kann, also ist es ein mathematisches.“ Dieser Schluss ist sicher falsch.

Die Herausgeber der MI würden sich auch über mehr Zuschriften hinsichtlich **erschienener Artikel** freuen. Scheuen Sie sich nicht, auch **negative Kritik** zu schreiben.

Man kann eine Begabungsförderung nicht innerhalb von einem oder zwei Jahren betreiben, in denen man eine bestimmte Klasse hat. Begabungsförderung ist eine Aufgabe, die zumindest einen ganzen Fachbereich etwas angeht. Erst gemeinsam kann man erreichen, dass einige Schüler innerhalb ihrer gesamten Schulzeit gefördert werden. Wie man die hier angesprochenen Probleme in einem Fachbereich löst, wäre eine Publikation wert, damit andere diese Lösung nachahmen oder auch kritisieren können. Das Wort „Kritik“ hat einen schlechten Beigeschmack, vergessen Sie nicht, Kritik kann auch positiv sein, vor allem unter dem Aspekt, dass es höchste Zeit ist, dass die praktizierenden Lehrer anfangen, über ihre Probleme zu sprechen und auch zu schreiben.

2.4 Öffentliche Kritik auch an der Grundschule

Seit 23 Jahren pflegt die Mathematikinformation unter anderem Kontakte zu Hochschulen, aber auch zu Wirtschaft und Industrie. Wir haben so manche Kritik am bestehenden Schulsystem erfahren und wiederholt den Standpunkt der Universitätsmathematiker und auch anderer Vorschläge zur Verbesserung der Situation veröffentlicht. Weshalb ist das bis heute kaum hinsichtlich der Grundschule bei durchaus berechtigten und nicht berücksichtigten Wünschen der Gymnasiallehrer geschehen? Helfen Sie mit, nicht nur Sitzungen mit Grundschullehrerinnen wegen des anstehenden Probeunterrichts zu halten, sondern auch Ihre **Wünsche an die Grundschule** – schriftlich – zu äußern.

Solche Kritik kann durchaus verschieden ausfallen. So hat kürzlich der Bayerische Philologenverband [1] durch eine Umfrage unter 1 246 bayerischen Lehrerinnen und Lehrern der Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik Kritik an der Grundschule gezeigt. Die Fragen hinsichtlich der Vorbereitung auf die gymnasiale Mathematik waren:

1. Die an der Grundschule vermittelten Rechenfähigkeiten haben nachgelassen.
2. Die in den letzten Jahren an der Grundschule eingeführten methodisch-didaktischen Neuerungen (neue Subtraktionsmethode etc.) haben einen positiven Effekt auf die Rechenkompetenz gehabt.
3. Das Kopfrechnen spielt an der Grundschule bedauerlicherweise eine immer geringere Rolle.

Man konnte in 6 Stufen antworten:

- keine Auswahl,
- stimme voll und ganz zu,
- stimme überwiegend zu,
- teils/teils,
- stimme eher nicht zu und
- stimme überhaupt nicht zu.

Zugegeben, die Fragen wie der Antwortstil waren sehr freundlich; wie weiter unten gezeigt wird, hätte man durchaus im Fach Mathematik konkreter werden können. Die Antworten haben nicht überrascht:

Zu 1. 20,4% der Befragten ziehen sich auf das angebotene „teils/teils" zurück, wohingegen nur 10,8% die Frage mit „stimme eher nicht oder überhaupt nicht zu" antworteten. Also 68,8% sind mit der derzeitigen Situation nicht zufrieden.

Zu 2: 84,2% sehen keinen positiven Effekt der Neuerungen.

Zu 3: 74,9% stimmen der gemachten Feststellung zu.

Bei der dargestellten Situation fragt sich nur: Weshalb ist so selten über diese Missstände zu lesen?

Wenn ich oben angedeutet habe, dass Begabtenförderung nicht die Aufgabe eines einzelnen Lehrers ist, sondern das ganze Kollegium betrifft, gilt Analoges auch für die Grundschule. Um Begabung nicht verkümmern zu lassen, ist es u. a. wichtig, die Begabten stets durch Fordern zu fördern. Wie sieht es nun mit einer solchen Förderung an der Grundschule aus? Ich weiß, ich schreibe im Folgenden nur über einen einzelnen Fall, ich bin aber überzeugt, wenn Sie mithelfen, werden wir bald darüber hinaus Kritik an anderen Büchern zur Verfügung haben. Ich will im Folgenden auch zeigen, wie eine solche Kritik aussehen kann und werde an dieser Stelle etwas detaillierter:

Im **Grundschulbuch** RINKENS, HÖNISCH U. A. [1] für die Klasse 4 findet man Aufgaben, die als besonders schwer gekennzeichnet sind, die also als Förderung von Begabten anzusehen sind. Bei etwa 1000 Aufgaben in diesem Buch habe ich 12 für die Begabtenförderung gekennzeichnete gefunden. Berücksichtigt man, dass in jeder Probe jeweils von 5 bis 6 gestellten Aufgaben eine für die „Übertrittschüler" gestellt worden ist, hat das Buch eindeutig zu wenige Förderaufgaben. Darüber hinaus scheint mir nicht beachtet worden zu sein, dass stets beim Üben – auch bei den begabteren Schülern – ein höheres Niveau als beim Prüfen erreicht werden sollte. Es folgen alle von mir gefundenen Beispiele in diesem Buch:

Aufgabe 5 auf Seite 30: Ein Gebilde aus 6 bzw. 7 Würfeln ist gegeben und dann kommen verschiedene Ansichten hierfür mit der Frage: Welche Ansicht gehört nicht zu dem Würfelgebäude?

Lösung: Eine Ansicht z. B. gehört zum Spiegelbild der Anordnung und scheidet damit aus.

Bemerkung: Dieser Aufgabentyp ist vermutlich abgeleitet aus Fragestellungen der Mathematik-Olympiade, kommt also aus der Hochbegabtenförderung. Die Aufgabe hat 4 leichtere Voraufgaben, d. h. der Bearbeiter wird an die Aufgabe herangeführt und damit ist es kein Problem der Begabtenförderung mehr, wenn diese Voraufgaben durchgeführt worden sind. Es bleibt Hochbegabtenförderung, wenn diese Aufgabe ohne Voraufgaben Prüfungsfrage ist. Aussortieren von Hochbegabungen ist aber nicht Aufgabe der Grundschule.
Bei Aufgaben für eine Begabungsförderung hat man stets das Problem, dass man über das außerschulische Wissen des Prüflings nicht Bescheid weiß und so für manchen eine als schwer angesteuerte Frage nicht das erwartete Problemniveau darstellt.

Aufgabe 5a) auf Seite 31: Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge 10 cm und es wird gefragt: Wie viele kleine Würfel der Kantenlänge 1 cm (2 cm) passen in den Würfel.

Bemerkung: Die Aufgabe 5a hat Voraufgaben, die das Problem im Kontext des Buches leichter werden lassen. Aufgabe 5a im Zusammenhang mit den zuvor stehenden Aufgaben ist aber dann keine Begabtenförderung mehr.

Aufgabe 5 auf Seite 46: Die Kinder würfeln mit einem Spielwürfel. Jeder darf vorher eine Karte ziehen, die jeweils klärt, wann man nach dem Würfeln einen Gewinnpunkt bekommt. Die Karten zeigen hierfür die folgenden „Regeln“:

Regel A: Wenn die Zahl gerade ist. Regel B: Wenn die Zahl durch 3 teilbar ist.
Regel C: Wenn die Zahl kleiner als 5 ist. Regel D: Wenn die Zahl größer als 5 ist.
Regel E: Wenn die Zahl kleiner als 1 ist.

Dann kommen 5 Fragen, z. B. b) Marcel hat eine 3 gewürfelt und erhält einen Punkt. Welche Karte könnte er gezogen haben? c) Lena hat nacheinander die Augenzahlen 2, 3, 5, 5 und 6 gewürfelt und dafür nur einen Punkt bekommen. Welche Karte hat sie gezogen?

Im Fall Lena wird der Hinweis gegeben, eine Tabelle (Regel | Wurfergebnisse) anzulegen.

Diese Aufgabe hat keine Voraufgaben und stellt eine angemessene Förderung dar.

Aufgabe 6 Seite 68: Eine ganze Buchseite befasst sich mit dem Kauf von Theaterkarten. Man findet einen Sitzplan für die Preisgruppen und eine Preisliste hierfür. Dann kommt die „schwere“ Aufgabe:
Eine Viertelstunde vor Vorstellungsbeginn wurden die Karten für den halben Preis verkauft. Am 6. Februar wurden noch 70 Karten der Preisgruppe 1 und je 40 Karten der Preisgruppe 2 und 3 verkauft.
a) Wie viel Euro wurden mit diesen ermäßigten Karten noch eingenommen?
b) Wie viele Plätze bleiben noch frei?

Bemerkung: Die Frage b) kann man anhand der Voraufgabe 5, die sich ebenfalls auf das Datum 6. Februar bezieht, lösen.

Aufgabe 5 Seite 79: Jedes Ergebnis hat die Quersumme 27: a) $414 \cdot 216$ usw.

Bemerkung: Beispiele dieser Art sollten aus den folgenden Gründen vermieden werden:

– Was macht der Lehrer, wenn der Schüler als Antwort schreibt: „Bei dieser Aufgabe fehlt die Frage. Ich ergänze sie: Hast Du heute Nacht gut geschlafen? Und antworte: Ja.“
– Die Fragestellung lässt vermuten, dass man die Quersumme des Produkts den Faktoren ansehen kann. Das ist aber nicht der Fall. In Folge werden mathematisch begabte Schüler an dieser Frage hängen bleiben, sich ewig besinnen, was dahinter stecken könnte. Ist die Aufgabe Teil einer Probe führt das unter Umständen dazu, dass der Begabte keine weiteren Fragen beantwortet und unverdientermaßen schlecht beurteilt wird. Sicher, dem cleveren Schüler passiert dies nicht. Besser wäre es, wenn man etwa formulieren würde: Berechne $414 \cdot 216$. Hat dein Ergebnis die Quersumme 27?

Lehrer sollten unbedingt vermeiden, bei Schülern wie auch Eltern den Eindruck zu erwecken, der „Clevere“ ist besser als der „Intelligente“.

Unvollständige Fragen findet man relativ häufig in Grundschulbüchern der Mathematik, weil man offenbar glaubt, hierbei „offene“ Aufgaben zu stellen:

Aufgabe 7 Seite 86: Vergleiche
Dann kommen Zeichnungen z. B. unter der Teilfrage a) zwei verschieden große Schoko-Creme-Gläser usw.

Bemerkung: Wie bewertet der Lehrer die folgende Antwort: „Man sieht zwei Gläser, ein größeres und damit schwereres und auch teuereres und ein kleineres und damit leichteres und somit auch billigeres“.
Die Frage sollte lauten: Mutter kauft immer die dargestellten Waren ein. Ist es preislich günstiger, laufend die kleinere Packung oder die größere zu kaufen?
Zur Didaktik: Fall c) kann nicht entschieden werden, weil nicht feststeht, um wie viel die größere Packung mehr Inhalt als die kleinere hat. Das ist gut so. Besser wäre es allerdings, wenn man auch ein Beispiel gegeben hätte, bei dem die kleinere Packung „auf Dauer“ die preiswertere gewesen wäre.

Aufgabe 5, Seite 94: Setze Klammern. Das Ergebnis soll immer 10 000 sein.
a) 12 500 : 5 + 15 000 : 2   b) 56 000 – 16 000 : 4   c) usw.

Bemerkung: Ausgerechnet schon beim ersten Beispiel funktioniert die Aufforderung „Setze Klammern“ nicht. Die Frage sollte lauten: „Setze **falls nötig** Klammern.“ Aber auch dann sollte man nicht gleich beim ersten Beispiel keine benötigen.

Aufgabe 3, Seite 115: Aufgabe ohne Rest. Jedes Ergebnis hat die Quersumme 14.
a) 27420 : 30   b) usw.

Bemerkung: Was ist eine Aufgabe ohne Rest? Es müsste heißen: „Division ohne Rest“. Wenn man sich in Zukunft schon mehr um den „Output“ der Schüler kümmern will, geht es in Mathematik auch um eine in etwa exakte Ausdrucksweise des Schülers. Sie erreicht man aber nur allmählich, wenn der Lehrer sich selbst exakt ausdrückt.

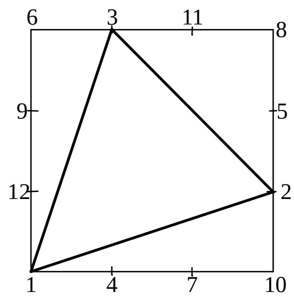
Aufgabe 3, Seite 117: Zuerst findet man in einem Kasten, dass ein Schwertwal 15 m in der Sekunde schafft. Unmittelbar anschließend kommt die Frage: Berechne die Geschwindigkeit des Schwertwals.

Bemerkung: Das mag witzig sein. Manche lachen eben über Kapitänsaufgaben. Pädagogisch ist dieses Verhalten sicher nicht; denn der begabte Schüler wird krampfhaft suchen, was er übersehen hat, und sich dann ärgern, dass er so wenig clever (siehe oben) war. Will man das als Lehrer wirklich?

Aufgaben 3 und 4, Seite 119: Es geht bei beiden Aufgaben um einen Ratenkauf mit Anzahlung. Man möchte die Brüche Drittel und 5%, was noch als der 20. Teil (wohl besser nach Duden: 20ste Teil) erklärt wird, unterbringen.

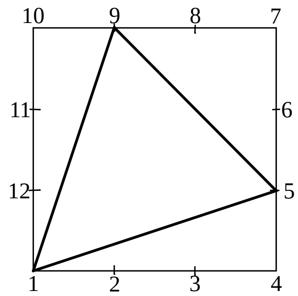
Bemerkung: Ich bezweifle, dass ein Ratenkauf eines Wohnmobils bzw. einer Wohnzimmereinrichtung neun- bis zehnjährige Kinder interessiert. Hier muss es andere Beispiele geben.

Nach Aufgabe 5, Seite 125: Jetzt hat das Quadrat 7,5 cm Seitenlänge. Teile die Seiten in drei gleiche Teile, nummeriere wie im Bild. Zeichne von Punkt 1 über Punkt 2 und Punkt 3 nach Punkt 1 zurück. ….
a) Wie lang ist eine einzelne Strecke? …



Die Formulierung gefällt mir überhaupt nicht, wie man den nachfolgenden Bemerkungen entnehmen kann; ich verbessere:

Aufgabe: Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 7,5 cm. Teile die Seiten jeweils in drei gleich lange Teile und nummeriere sie wie in der nebenstehenden Zeichnung. Zeichne von Punkt 1 über Punkt 5 nach Punkt 9 und nach Punkt 1 zurück **jeweils Strecken mit dem Lineal.**
a) Miss jede einzelne Strecke.
b) usw.



Bemerkungen:

– Die ursprüngliche Nummerierung ist sinnlos, da der Schüler ja zunächst gar nicht wissen kann, was anschließend gezeichnet wird.

– Den Vorspann habe ich etwas geändert, da mir die geometrische Ausdrucksweise der Autoren zu wenig exakt war: Meine „Strecken mit dem Lineal“ fehlen in der Angabe; offenbar aber ist der Begriff „Strecke“ in einer Klasse 4 bekannt, wie die Frage a) zeigt.
  Diese Ergänzung ist wichtig, denn die „Mathematiker“ kennen z. B. zwischen zwei endlich weit entfernten Punkten Kurven der Länge unendlich, auch wenn sie keinen Pol haben! Man denke etwa an eine Schneeflockenkurve.
– Die Frage a) ist schlecht formuliert: Im Mathematikunterricht wird i. Allg. berechnet; hiermit bleibt u. U. ein nachdenklicher Schüler hängen und besinnt sich zu lange, was er tun kann. Dem Lehrer ist natürlich klar, dass man nur mit dem Lehrsatz des PYTHAGORAS die gewünschten Längen berechnen kann, was dem Schüler noch nicht bekannt ist, also kann er nur messen. Solche Probleme hat der adhoc-Schüler nicht; er misst ohne lange zu überlegen und macht das auch noch, wenn er später eigentlich den Satz des PYTHAGORAS anwenden sollte. Hat der adhoc-Schüler eine Kompetenz mehr als der nachdenkliche?

Ganz Analoges kann zur folgenden Aufgabe gesagt werden:

Aufgabe 3, Seite 128: Ein Balkendiagramm (hier weggelassen) zeigt die Sonnenstunden pro Jahr für ausgewählte Orte und Städte an. Ordne mit den Ergebnissen die Städte den Balken zu.
a) $327 \cdot 8 - 942$ b) usw.

Bemerkung: Also, wenn eine solche Zuordnung halbwegs sinnvoll sein soll, muss das Ergebnis der Rechnung und damit auch die Formel bei a) die Benennung Stunden haben. Was soll aber dann die Rechnung? Soll das eine Modellierung sein, wenn man irgendeine wilde Rechnung mit einer naturwissenschaftlichen Beobachtung verbindet?

Weitere MI-Themen im Zusammenhang mit der Kritik an der Grundschule:

– Welche **Fähigkeiten im Rechnen und in der Geometrie** erwarten Gymnasiallehrer von der Grundschule? Hierzu gehört auch der Umgang mit dem Zeichengerät hinsichtlich eines „genauen“ Zeichnens.

– Immer wieder wenden sich Eltern begabter Kinder im Alter unter 10 Jahren an Begabtenförderung Mathematik e. V. und hätten gern Unterlagen zur Förderung ihrer Kinder. In diesem Zusammenhang sollte man endlich für die MI eine Überarbeitung der Unterlagen des **„Bezirkskomittees Chemnitz“ für die Klassen 3, 4 und 5** (siehe KÖNIG [1], KÖNIG UND PÖRNIG [1] und ´PÖRNIG [1])[3] durchführen. Die Erlaubnis hierfür kann beschafft werden.

– Die **Namengebung der geometrischen Formen** ist für Kinder nicht immer einsichtig, wenn etwa behauptet wird: Der Kühlschrank ist ein Quader, hat also Rechtecke als Seitenflächen (siehe auch MEYER U. A. [2], Seite 127). Hier geht es zunächst um einen Lehrinhalt der Grundschule, der aber sehr viel mit Mathematik zu tun hat und leider vollausgebildete Mathematiker an der Grundschule fehlen. Das Ganze hat mit dem Modewort „Modellieren“ zu tun. In aller Regel muss man beim Übersetzen einer Beobachtung hinsichtlich Vorhersagen in Mathematik an der Realität Abstriche machen. Die Abstriche werden in aller Regel immer weniger, je genauere mathematische Untersuchungen möglich sind. Es gibt hierzu aber auch Gegenbeispiele (siehe MEYER [4]).

– Diese Kritik wird über die Grundschule hinausführen, wenn man berücksichtigt, dass ein aufgehängtes Kettenstück zwar wie eine Parabel aussieht, aber mathematisch eben dann doch keine ist, sondern eine Kettenlinie. Gerade bei diesem Beispiel ist etwa die Genauigkeit bei der **Bestimmung der Länge** der Kette durch einen Schüler weitgehend unabhängig davon, ob man von einer Parabel oder einer Kettenlinie ausgeht. Der Schüler kann die Kurve nur aus Draht herstellen, aufbiegen und dann messen.

[3] Alle zu beziehen über Herrn Dr. Helmut König, W.-Verner-Straße 82, 09120 Chemnitz

– Schätzen kann man in aller Regel Längenmaße. Soll man aber ein Volumen schätzen, so wird das Volumen rechnerisch aus den Schätzungen von Längen hergeleitet. Hat ein Grundschüler gerade die Volumenberechnung eines Quaders erfahren, wird er das Volumen einer Kugel – sehr ungenau – durch eine Würfelberechnung schätzen. Ein Ingenieur sollte diese Schätzung wohl mit der Formel für das Kugelvolumen in Verbindung bringen. Wie trügerisch die Frage nach dem **Volumen eines fotografierten Heißluftballons** ist, hat der einstige Kernlehrplan NRW gezeigt: Man erwartete in Klasse 10!, dass der Schüler mit einem Quader approximiert. In Bayern und Baden-Württemberg wäre das zu wenig gewesen, hier hätte man schon das Volumen von Kugelkalotte und Kegelstumpf mit einbeziehen müssen. Da der erste Weg etwa 5 Minuten, der zweite Weg sicher mehr als 60 Minuten dauert, wird hier der Schüler mit mehr Wissen bestraft, was völlig unpädagogisch ist.

Ich habe oben Kritik an der Art der Fragen für gehobene Aufgaben geübt. Aufgabenkultur ist aber vor allem bei der Begabtenförderung weiterführender Schulen nicht alles, auch wenn dies immer wieder auch bei Hochbegabtenförderung so vermutet wird, denn Mathematik wird nur punktuell durch Aufgaben vermittelt. Man sollte zukünftig grundsätzlich nicht mehr nur Aufgaben zur Förderung der Begabung stellen, sondern viel öfter in einem übergeordneten Unterricht versuchen, geeignete mathematische **Theorien im Zusammenhang** zu vermitteln.

3. Anspruchsvolle Themen

Auch anspruchsvolle Themen stehen seit langem aus; es wäre sehr freundlich, wenn sich einige Lehrer damit befassen könnten:

– Der Mensch überlegt oft anhand von Modellen, also mit Vorstellungen. Letztere kommen häufig von mathematischen Anwendungen, die sich zunächst nur sehr mühsam mathematisch behandeln lassen. Allmählich erst wird aus diesen rudimentären Anfängen eine mathematische Theorie.
Ähnlich ist oft unser Vorgehen an der Schule; wenn ich jetzt gleich zu einer sehr hohen Theorie greife, so muss dieses Beispiel nicht unbedingt der Ausgangspunkt der erwarteten Abhandlung sein:
Der Schüler lernt das Integrieren am Gymnasium **ohne zu diesem Zeitpunkt verstehen** zu können, was das Integral eigentlich ist. Genauso ist es in der Geschichte gewesen: ARCHIMEDES hat bereits bei seiner Kreisrektifikation ein Integral berechnet; viele solche Beispiele sind im 17ten und 18ten Jahrhundert hinzugekommen bis endlich die „Sache“ genauer, auch allgemeiner, formuliert werden konnte. Man möge beachten, ich kann mich hier durch den historischen Ablauf kürzer fassen, es wird aber bei diesem Thema keine historische Aufarbeitung erwartet. Es geht vielmehr darum: Auch bei dem nicht fundierten Integrieren der Schule kann man doch mit den Regeln arbeiten, ohne sie – denken Sie an den Hauptsatz der Integral- und Differenzialrechnung – aus einer allgemeingültigen Definition herzuleiten.

– Viele Bundesländer lehren heute nur noch die Rechenregeln beim Differenzieren, ohne diese mit Grenzwertbetrachtungen zu begründen. Wenn man sich auf die **Eigenschaften des Differenzierens von gebrochen rationalen Funktionen** beschränkt, ist dies in einem gewissen Sinn auch mathematisch sauber, wie VAN DER WAERDEN [1] gezeigt hat. Ja, man kann damit auch noch halbwegs begründen, wie der Differenzialquotient mit der Steigung einer Kurventangente zusammenhängt. Freilich, zu den Ableitungen der transzendenten Funktionen kommt man so nicht. Ich bin mir sicher, dass dieser Zusammenhang für viele Kollegen interessant wäre, weil sie damit erkennen könnten, wo die Grenze der modernen Lehrpläne liegt.

– Noch redet man am Gymnasium über Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Gut wäre es, wenn eine Veröffentlichung neben den bekannten Beispielen von Unstetigkeiten usw. neue **Beispiele unstetiger bzw.**

nicht differenzierbarer Funktionen brächte, die man am Gymnasium behandeln zumindest zeichnen kann.

Es wäre sehr wünschenswert, wenn einige Lehrerkolleginnen oder –kollegen zur Feder greifen würden, damit ihr hohes Wissen der Allgemeinheit zur Verfügung gestellt wird und so mehr praktizierende Lehrer als bisher in der Mathematikinformation publizieren. Die Herausgeber versichern, sie werden beim Formulieren stets helfend zur Seite stehen.

Literatur

Bayerischer Philologenverband e. V. [1] Umfrage: Große Skepsis über Effektivität mancher Lehrplanreformen an der Grundschule, Das Gymnasium in Bayern, Heft 1-2013, Seiten 22 bis 27

Hemme [1] Trigonometrie und Studierfähigkeit, Ergänzung zu MI Nr.49, Mathematikinformation Nr. 53 (15. September 2010) Seite 3

König, Helmut [1] Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 – eine Anleitung für AG-Leiter, Bezirkskomitee Chemnitz 1996

König H. und Pörnig L. [1] Arbeitsgemeinschaften Klasse 3 – eine Anleitung für AG-Leiter, Bezirkskomitee Chemnitz 1999

Lange Stefan und Meyer Karlhorst [1] Kegelschnitte I, Mathematikinformation Nr. 31 (1999), Seiten 3 bis 53

[2] Lösungen zu Kegelschnitte I, Mathematikinformation Nr. 33 (2000), Seiten 3 bis 61

Meyer, Karlhorst [1] Kegelschnitte II, Mathematikinformation Nr. 34 (2001), Seiten 5 bis 16

Meyer u. a. [2] Brennpunkt Mathematik 5, Schroedel Schulbuchverlag GmbH Hannover 1992

[3] Brennpunkt Algebra 9, Schroedel Schulbuchverlag GmbH Hannover 1992

Meyer, Karlhorst [4] Zum Thema kompetenzorientierter Unterricht, Mathematikinformation Nr. 62 (Januar 2015)

Pörnig, Lutz [1] Arbeitsgemeinschaften Klasse 4 – eine Anleitung für AG-Leiter, Bezirkskomitee Chemnitz 1999

Rinkens, Hönisch u. a. [1] Welt der Zahl 4, Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers GmbH, Braunschweig 2008, Bayernausgabe

van der Waerden, B. L. [1] Algebra Band II, 3. Auflage, Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg