

Karлhorst Meyer

## Cubus simus, ein chiraler ARCHIMEDischer Körper

In KELLER UND MEYER [1] werden zwar die beiden chiralen ARCHIMEDischen Körper erwähnt, nicht aber ihre Geometrie behandelt, was in der vorliegenden Arbeit im Fall des Cubus simus nachgeholt werden soll. Man findet in KELLER UND MEYER [1] einiges zur Geometrie der ARCHIMEDischen Körper, aber die Darstellung ist mathematisch nicht sauber, weil diese Körper über die Eigenschaften ihrer **Raumecken** definiert werden, dann aber Eigenschaften benutzt werden, die nicht streng aus den definierenden Eigenschaften hergeleitet werden. Dieses Vorgehen entspricht zwar dem Geometrieunterricht, wird aber vermutlich nicht alle Kolleginnen und Kollegen zufrieden stellen.

Im Folgenden will sich der Autor bemühen, diese Lücke wenigstens beim Cubus simus zu schließen. Hierbei geht es nicht allein um eine wissenschaftlich saubere Darstellung sondern vor allem darum, Wege zu einer solchen aufzuzeigen. Nicht jeder angedeutete Weg kann mit den Mitteln der Schule zu Ende gegangen werden, da er meist in algebraischen Ungetümen endet, deren Bearbeitung die hierfür erforderliche Anstrengung nicht lohnt. Näheres findet man im Kapitel 3: Schule und Cubus simus.

### 1. Aufbau und Eigenschaften der Raumecke (3,3,3,3,4)

Aus KELLER UND MEYER [1] (Definition 4.1.2) wird wiederholt:

**Definition 1.1:** Die ARCHIMEDischen Körper sind konvexe Polyeder, deren sämtliche Kanten die Länge  $s$  haben. Die Flächen sind also regelmäßige konvexe Vielecke. Zu je zwei Ecken gibt es eine Bewegung<sup>1</sup> des Körpers auf sich, die die Ecken ineinander überführt. Die Körper werden nach ihrem Eckenaufbau charakterisiert. Sie haben  $e$  Raumecken,  $k$  Kanten und  $f$  ebene Flächenstücke.

**Zusatz zu Definition 1.1:** Die Winkel zwischen angrenzenden kongruenten Vielecken einer Raumecke sind gleich groß. Damit liegen die Endpunkte der sich in der Raumecke schneidenden Kanten auf einem Kreis.

In Kapitel 2.4 wird gezeigt, dass diese Voraussetzung nicht notwendig ist.

(3,3,3,3,4) bedeutet also einen Körper (dessen Existenz und Eindeutigkeit zunächst ungeklärt ist), dessen sämtliche Raumecken aus vier gleichseitigen Dreiecken und einem Quadrat aufgebaut sind.

Das beteiligte Quadrat wird zunächst längs einer Diagonalen halbiert. Es entsteht der Körper der Abbildung 1. Von einer Raumecke  $S$  gehen 5 Kanten der Länge  $s$  weg. Zwischen jeweils 2 benachbarten Kanten liegen viermal  $60^\circ$ -Winkel und einmal ein  $90^\circ$ -Winkel. Die Endpunkte der Kanten sind alle von der Ecke der betrachteten Raumecke gleich weit entfernt und liegen deshalb auf einem Kreis, dessen Radius  $r$  in Abhängigkeit der Kantenlänge  $s$  bestimmt werden soll.

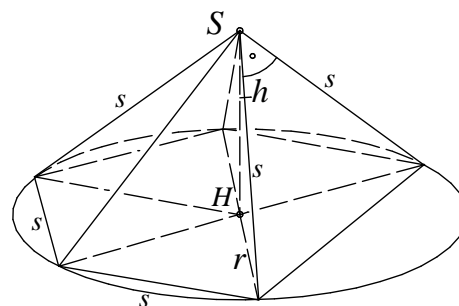
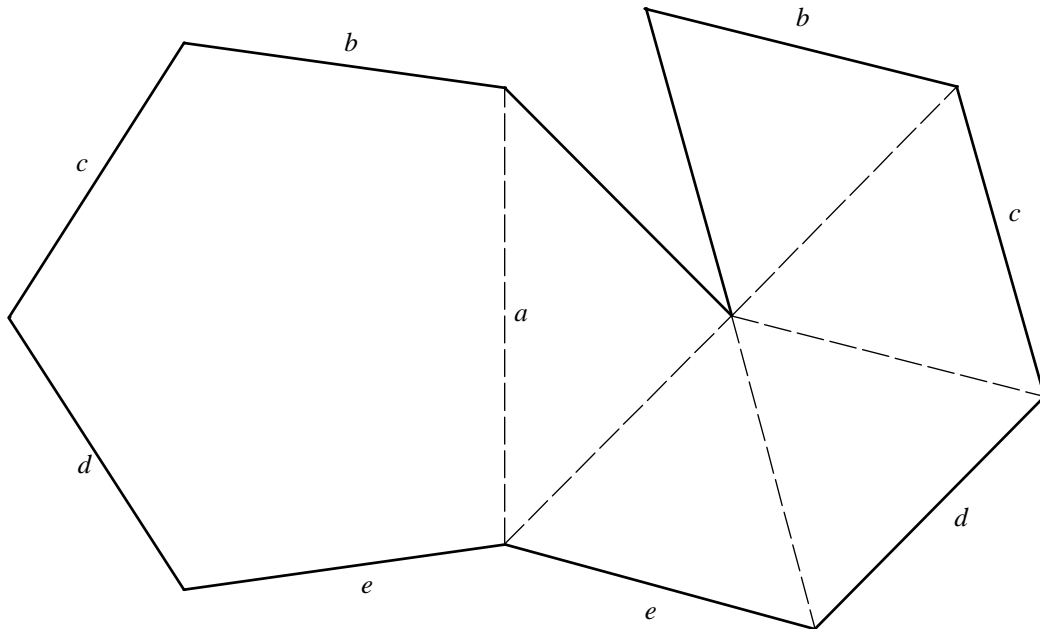


Abb. 1: Die Raumecke *chiral*

<sup>1</sup> eigentliche, also deren Determinante 1 ist und deren Spiegelungszerlegung eine gerade Anzahl von Spiegelungen hat.

Da ein Weg, diesen Körper zu basteln, darin besteht, dass man sich eine hinreichende Anzahl solcher Pyramiden beschafft, wird in Abbildung 2 eine Abwicklung dieser Pyramide angegeben.

*Hinweis:* Für die Konstruktion dieser Abbildung fehlt noch die passende Theorie, die erst anschließend auseinander gesetzt wird.



*cubussi4*

Abb. 2: Die Abwicklung einer Raumecke  
*chir2*

### 1.1 Herleitung der Winkel des Basisfünfecks:

Das Fünfeck hat offenbar eine Symmetrieachse; deshalb gilt es zu untersuchen (siehe Abbildung 3)

$$2\alpha + \frac{\beta}{2} = 180^\circ \text{ und damit}$$

$$\sin 2\alpha = \sin \left( 180^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = \sin \frac{\beta}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}r} \quad (1)$$

$$\text{und } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}. \quad (2)$$

Aus Letzterem folgt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{r} \sqrt{1 - \frac{s^2}{4r^2}} = \\ &= \frac{s}{2r^2} \sqrt{4r^2 - s^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Mit (1), (2) und (3) folgt:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{s}{r^2} \sqrt{4r^2 - s^2} \sqrt{1 - \frac{s^2}{4r^2}} (4r^2 - s^2) = \\ &= \frac{s}{2r^4} \cdot \sqrt{4r^2 - s^2} \cdot \sqrt{4r^4 - 4r^2 s^2 + s^4} = \frac{s}{2r^4} \cdot \sqrt{4r^2 - s^2} \cdot (2r^2 - s^2) = \frac{s}{r\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{4r^2 - s^2} = \frac{r^3 \sqrt{2}}{2r^2 - s^2}$$

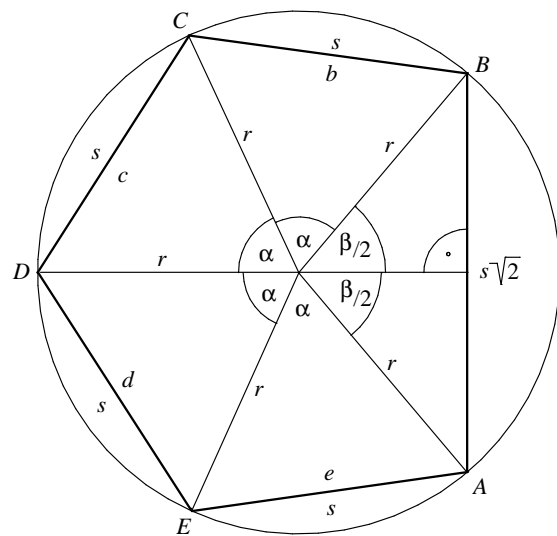


Abb.3: Das Basisfünfeck

Man quadriert und erhält  $4r^2 - s^2 = \frac{2r^6}{4r^4 - 4r^2s^2 + s^4}$ .

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen findet man:

$$14r^6 - 20r^4s^2 + 8r^2s^4 - s^6 = 0$$

Da davon ausgegangen werden kann, dass  $s \neq 0$  ist, folgt:  $14\left(\frac{r}{s}\right)^6 - 20\left(\frac{r}{s}\right)^4 + 8\left(\frac{r}{s}\right)^2 - 1 = 0$ .

Setzt man  $x := \left(\frac{r}{s}\right)^2 > 0$ , so erhält man die Nullstellenuntersuchung der reellen Funktion

$$y = 14x^3 - 20x^2 + 8x - 1. \quad (4)$$

Das ist eine Funktion vom Grad 3, die mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Man überprüft rasch, dass Zahlen wie  $0, \pm 1, \pm 2$  usw. keine Lösungen sind.

Man kann (z. B. mit Mathematikinformation Nr. 50) die komplexen – und damit die reellen – Nullstellen dieser Funktion finden; der Rechenaufwand ist nicht unerheblich. Deshalb wird ein anderer Weg vorgeführt, der auch zeigt, wie man die an der Schule breit getretene Kurvendiskussion besser nutzen kann:

- Der Koeffizient 14 beim kubischen Glied obiger Gleichung zeigt, dass die  $y$ -Werte des Graphen der Funktion von  $-\infty$  nach  $+\infty$  verläuft.

- $y' = 42x^2 - 40x + 8 = 0$  liefert bei  $x = \frac{2}{3}$  bzw.  $x = \frac{2}{7}$  relative Extremwerte und damit bei  $x = \frac{10}{21}$  einen Wendepunkt.

- Mit dem Taschenrechner stellt man fest, dass die dazugehörigen Extrema (ca.  $-0,02$  und  $-0,4$ ) beide negativ sind. Deshalb muss die reelle Nullstelle bei  $x > \frac{2}{3}$  zu finden sein.

- Durch gezieltes Einsetzen in  $y = 14x^3 - 20x^2 + 8x - 1$  findet man die nebenstehende Tabelle mit dem gerundeten Ergebnis  $x = 0,862$ , das man auch noch genauer angeben kann.

$x$	$y$	Urteil
1	1	zu groß
0,9	0,206	zu groß
<b>0,8</b>	-0,232	zu klein
0,86	-0,007	zu klein
<b>0,863</b>	0,007	zu groß
0,862	0,002	zu groß
<b>0,8615</b>	!0,00002	zu klein

Die Kurvendiskussion zeigt, dass es genau eine reelle Lösung mit der Näherung  $x = \left(\frac{r}{s}\right)^2 \approx 0,862$  gibt; also hat man  $\frac{r}{s} \approx 0,928$  gefunden.

Mit einem Taschenrechner<sup>2</sup>, der kubische Gleichungen lösen kann, findet man  $\frac{r}{s} \approx 0,928191378$ . (5)

Wenn  $h$  die Höhe der untersuchten Pyramide und  $\omega$  der Neigungswinkel der Kanten gegen das Basisfünfeck ist, gilt  $h = \sqrt{s^2 - r^2} = s \cdot \sqrt{1 - x} \approx s \cdot 0,372103165$ . (6)

Nach (1) und (4) gilt  $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}r} \approx \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 0,928191378} \approx 0,761811408$ , also  $\beta \approx 99,24829791^\circ$ . (7)

Nach (2) und (4) gilt  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r} \approx \frac{1}{2 \cdot 0,928191378} \approx 0,538682013$ , also  $\alpha \approx 65,18792552^\circ$ . (8)

**Aufgabe 1.1:** Anhand der Abbildung 3 finde man eine Gleichung für  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ; löse sie näherungsweise.

<sup>2</sup>Mitteilung von HANS WALSER

**Aufgabe 1.2:** Man berechne  $r$ ,  $\cos \alpha$ ,  $h$  und  $\cos \beta$  exakt als Funktionen von  $\cos \alpha$ .

Für das Folgende ist es bequem, wenn man die Aufteilung der Grundfläche der Pyramide noch anders berechnet. Nach (2) gilt  $\frac{s}{r} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$  und deshalb mit einem Additionstheorem

$$\frac{1}{x} = \frac{s^2}{r^2} = 4 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) = 2(1 - \cos \alpha).$$

$$\text{Aus der Formel (4) folgt dann: } \frac{14}{8(1-\cos \alpha)^3} - \frac{20}{4(1-\cos \alpha)^2} + \frac{8}{2(1-\cos \alpha)} - 1 = 0$$

Durch Multiplikation beider Gleichungsseiten mit  $8(1 - \cos \alpha)^3$  findet man:

$$14 - 40(1 - \cos \alpha) + 32(1 - \cos \alpha)^2 - 8(1 - \cos \alpha)^3 = 0$$

Durch Ausmultiplizieren und Kürzen beider Seiten mit 2 folgt hieraus:

$$4\cos^3 \alpha + 4\cos^2 \alpha - 1 = 0 \quad (9)$$

Hängt man z. B. an die Kante  $\overline{DE}$  in den Abbildungen 1 oder 2 ein Quadrat unter dem richtigen Winkel gegenüber dem gleichseitigen Dreieck an, so vermutet man an einem Modell, dass nun die Ebenen der beiden Quadrate zueinander in einem rechten Winkel stehen. Das soll im Folgenden zunächst mit dem Taschenrechner nachgewiesen werden:

In **1.2.** werden die Winkel zwischen den beteiligten Flächen berechnet, dann wird unter **1.3** ein weiteres Quadrat an die 5-seitige Pyramide angesetzt und schließlich mit **1.4** der Winkel zwischen den beiden Quadraten untersucht. Schließlich wird in **1.5** ein exakter Beweis hierfür geliefert.

### 1.2 Herleitung der Winkel zwischen den Flächen einer Raumecke:

In Abbildung 4 zeigt sich das Basisfünfeck  $ABCDE$  in wahrer Größe.  $S$  sei die Pyramidenspitze und  $H$  der Höhenfußpunkt.

I. Man betrachtet in Abbildung 4 den Winkel  $\beta_1$  zwischen einem Quadrat und einem angrenzenden gleichseitigen Dreieck. Die beiden Flächen haben z. B. die Kante  $AS$  gemeinsam. Die Geraden  $EF$  und  $FT$  in dem Dreieck  $EFT$  stehen auf der Schnittkante senkrecht. Der zwischen ihnen liegende Winkel ist dann der gesuchte. Weil die beiden Geraden auf der Strecke  $AS$  senkrecht stehen, müssen sie durch deren Mitte gehen.  $E$  und  $T$  liegen im Basisfünfeck. Hieraus lassen sich die wahren Längen der Strecken  $EF$  und  $FT$  berechnen:

$$|\overline{EF}| = s \cdot \sin 60^\circ = \frac{s}{2} \sqrt{3} \quad (10)$$

$$|\overline{FT}| = \frac{s}{2} \quad (11)$$

Letzteres, weil Dreieck  $ABS$  rechtwinklig und  $F$  die Mitte von der Kathete  $AS$  ist.

Die wahre Größe von  $|\overline{ET}|$  zeigt sich in der Abbildung 4. Nach (7) und (6) gilt:

$$|\overline{ET}| = u + v = r \cdot \left( \cos \alpha + \cos \frac{\beta}{2} \right) \approx$$

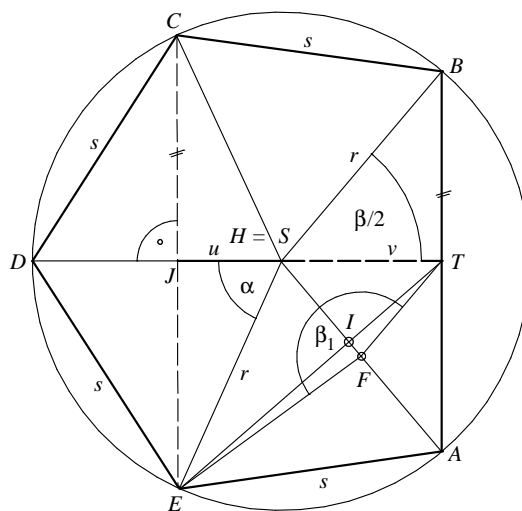


Abb.4: Zwischenwinkel  $\beta_1$

$$\approx r \cdot (0,419643377 + 0,647798871) \approx r \cdot 1,067442248 \approx s \cdot 0,990790691 \quad (12)$$

$$|\overline{JE}| = r \cdot \sin \alpha \approx s \cdot 0,928191378 \cdot \sin 65,18792552^\circ \approx s \cdot 0,842509162 \quad (13)$$

$$|\overline{ET}| = \sqrt{|\overline{JT}|^2 + |\overline{JE}|^2} \approx s \sqrt{0,990790691^2 + 0,842509162^2} = s \cdot 1,300572136 \quad (14)$$

Der Cosinussatz liefert  $\beta_1$ :  $\cos \beta_1 = \frac{(|\overline{EF}|)^2 + (|\overline{FT}|)^2 - (|\overline{ET}|)^2}{2|\overline{EF}| \cdot |\overline{FT}|} \approx \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 1,300572136^2}{\sqrt{3} \cdot 0,5} \approx -0,798461428$  d. h.

$$\beta_1 \approx 142,9834298^\circ \quad (15)$$

**Aufgabe 1.3:** Man berechne  $\cos \beta_1$  als Funktion von  $\cos \alpha$ .

II. Nun wird der Winkel  $\beta_2$  zwischen zwei gleichseitigen Dreiecken, die eine Kante gemeinsam haben, betrachtet, wie dies etwa zwischen den Dreiecken  $ASE$  und  $ESD$  der Fall ist (siehe Abb. 5): Die Geraden  $DK$  und  $KA$  in den Dreiecken stehen auf der Schnittkante senkrecht. Der zwischen ihnen liegende Winkel  $\beta_2$  ist dann der gesuchte. Weil die beiden Geraden auf der Strecke  $ES$  senkrecht stehen, müssen sie durch deren Mitte gehen.  $D$  und  $A$  liegen im Basisfünfeck. Hieraus lassen sich die wahren Längen der Strecken  $DK$  und  $KA$  berechnen, da es sich um Höhen in gleichseitigen Dreiecken der Kantenlänge  $s$  handelt:

$$|\overline{DK}| = |\overline{KA}| = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (16)$$

Da aus Symmetriegründen  $CE \perp AB$  und  $DH \perp AB$  gilt dies auch für  $EH \perp AD$ . Hieraus bekommt man mit (4) und (5) die folgende Rechnung:

$$|\overline{AD}| = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha \approx 2s \cdot 0,928191378 \cdot \sin 65,18792552^\circ \approx s \cdot 1,685018325 \quad (17)$$

Aus (14) und (15) erhält man  $\beta_2$  mit Hilfe des Cosinussatzes:

$$\cos \beta_2 = \frac{(|\overline{DK}|)^2 + (|\overline{KA}|)^2 - (|\overline{AD}|)^2}{2|\overline{DK}| \cdot |\overline{KA}|} = \frac{2(|\overline{DK}|)^2 - (|\overline{AD}|)^2}{2 \cdot (|\overline{DK}|)^2} \approx \frac{2 \cdot \frac{3}{4} - 1,685018325^2}{2 \cdot \frac{3}{4}} \approx -0,892857837$$

$$\text{d. h. } \beta_2 \approx 153,2345877^\circ \quad (18)$$

**Aufgabe 1.4:** Man berechne  $\cos \beta_2$  als Funktion von  $\cos \alpha$ .

### 1.3 Das Ansetzen eines weiteren Quadrats $DELN$ an eine fünfseitige Pyramide $ABCDES$

an der Kante  $DE$ . Möglich wäre dies auch bei  $CD$ . Weshalb dies nicht möglich ist, klärt Aufgabe 1.6. Hier und im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die in 1.2 berechneten Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  universell sind. *Cubussiö*

*chir4*

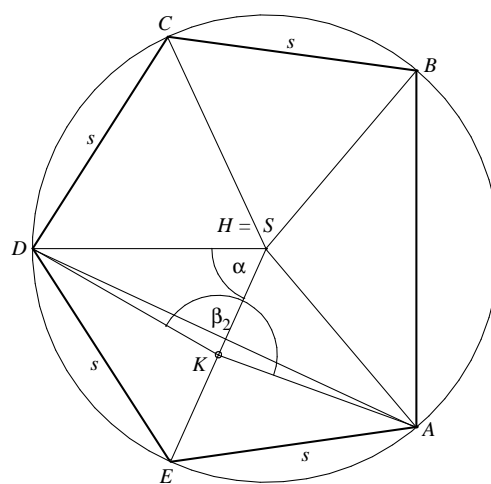


Abb. 5: Zwischenwinkel  $\beta_2$

Die Konfiguration der Abbildung 6 stelle man sich so vor, dass die Grundfläche  $ABCDE$  der Pyramide horizontal liegt. Zukünftig nennen wir diese Ebene kurz Grundebene. Das Quadrat  $ABS.$ , von dem man nur die Hälfte sieht, ist dann – wie alle Seitenflächen der Pyramide ! verzerrt. Das anzuhängende Quadrat  $DELN$  ist ebenfalls verzerrt, da aber die Kante  $DE$  horizontal liegt, erscheinen in dieser Ansicht an allen Ecken rechte Winkel. Der Winkel zwischen dem gleichseitigen Dreieck  $DES$  und dem Quadrat  $DELN$  wird  $\beta_1$  sein (siehe Formel (15)). Dieser Winkel liegt z. B. über  $WS$ . Deshalb stellt man sich eine auf der Grundebene senkrechte Ebene durch  $WS$  vor, die in die Grundebene geklappt wird. Hierbei „steigt“  $S$  um  $h = |\overline{S_1S}| = s \cdot 0,372103165$  (siehe Formel (5)).  $S_1W$  ist also die Höhe im gleichseitigen Dreieck  $DES$ .

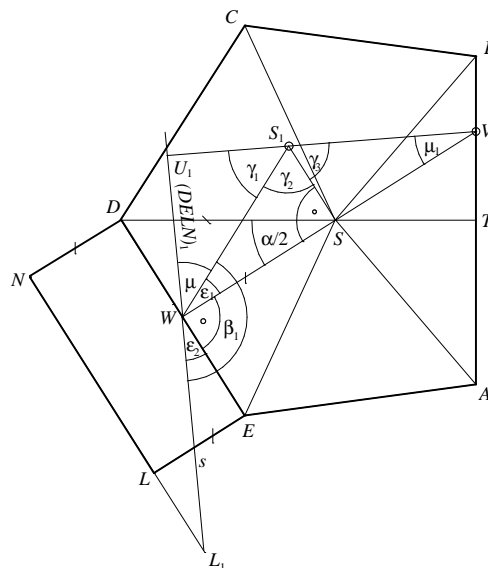


Abb.6 Ansetzen eines weitere Quadrats

In dieser Ansicht kann man an  $S_1W$  antragen  $\beta_1 = 142,9834298^\circ$  (siehe (15)). Fasst man diese Umklappung wieder als Orthogonalprojektion auf, so stellt  $S_1W$  das Dreieck  $SDE$ ,  $WL_1$  (mit der Länge  $s$ ) das Quadrat  $DELN$  und  $WS$  einen Teil der Pyramiden-grundfläche dar.  $S_1W$  ist Höhe im gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge  $s$ ; man erhält  $|\overline{S_1W}| = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , somit ist  $\sin \varepsilon_1 = \frac{h}{s \cdot \sqrt{3}} \cdot 2 \approx \frac{0,372103165 \cdot 2}{\sqrt{3}}$  und damit  $\varepsilon_1 \approx 25,44647498^\circ$ . (19)

Damit erhält man  $\varepsilon_2 = \beta_1 - \varepsilon_1 - 90^\circ \approx 142,9834298^\circ - 25,44647498^\circ - 90^\circ \approx 27,53695482^\circ$ . (20)

Gleichzeitig erfährt man, wie „tief“ das angefügte Quadrat unter die Grundflächen hinabreicht.

**Aufgabe 1.5:** Man berechne  $\cos \varepsilon_1$  als Funktion von  $\cos \alpha$ .

#### 1.4 Der Winkel zwischen den Ebenen der Quadrate $ABS.$ und $DELN$

A. Die nächste Untersuchung geschieht unter dem folgenden Aspekt: Wenn zwei „in der Nähe“ liegende Quadrate des Polyeders zueinander senkrecht stehen, muss die Normale auf der einen Fläche parallel zu einer Geraden sein, die ganz in der anderen Fläche liegt.

In der Umklappung von Abbildung 6 verlängert man  $WS$  bis zum Schnittpunkt  $V$  mit  $AB$  und verbindet  $V$  mit  $S_1$ . In der Orthogonalprojektion auf diese Umklappung ist  $WL_1$  die jetzt projizierende Ebene  $DELN$ , gekennzeichnet als  $(DELN)_1$ . Der Schnittpunkt von  $VS_1$  mit  $(DELN)_1$  sei  $U_1$ .

Man befasst sich jetzt mit den Winkeln  $\mu$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  und  $\mu_1$  der Abbildung 6; hier werden Winkel definiert, für die offenbar die folgende Gleichung gilt:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 180^\circ$$

Falls gilt  $\gamma_1 = 90^\circ - \mu$ , erhält man:

$$\gamma_1 = 90^\circ - \mu = 90^\circ - (180^\circ - \beta_1) = \beta_1 - 90^\circ = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\gamma_2 = 90^\circ - \varepsilon_1$$

$$\gamma_3 = 90^\circ - \mu_1$$

Aus diesen 4 Gleichungen folgt:  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 90^\circ - \varepsilon_1 + 90^\circ - \mu_1 = 180^\circ$

Dann wäre  $\mu_1 = \varepsilon_2$ .

Da aber ein Schenkel des einen Winkels auf einem Schenkel des anderen Winkels senkrecht steht, muss dies auch für die beiden anderen Schenkel gelten, da der Drehsinn der beiden Winkel bezogen auf die aufeinander

senkrecht stehenden Schenkel der gleiche ist. Damit ist bei  $U_1$  ein rechter Winkel und  $U_1V$  ist ein Lot auf die Ebene von  $DELN$  durch  $S_1$ , das in  $V$  die Grundebene erreicht, also in der Ebene von  $SAB$ . liegt. Die Umkehrung dieser Überlegung gilt auch. Offenbar gilt also:  $\mu_1 = \varepsilon_2$  ist genau dann erfüllt, wenn die beiden Quadrate in aufeinander senkrechten Ebenen liegen.

D. h. entweder beweist man  $\mu_1 = \varepsilon_2$  oder man zeigt die Orthogonalität. Beides kann aufgrund der nur bis auf eine gewisse Genauigkeit gegebenen Werte für  $\alpha$  und  $\beta$  hier nicht exakt begründet werden. Da der Rechenweg für  $\mu_1 = \varepsilon_2$  der kürzere zu sein scheint, wird er hier beschrieben:

Berechnung von  $\mu_1$ :

In Abbildung 6 sieht man  $|\overline{SA}| = r$ , den Grundriss von  $ST$  und von  $SV$  in wahrer Größe; deshalb hat der Grundriss von  $SV$  die Länge  $\frac{r \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ . In der Umklappung sieht man  $\mu_1$  in wahrer Größe; deshalb gilt

$$\tan \mu_1 = \frac{h}{r \cdot \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{h \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{r \cdot \cos \frac{\beta}{2}} \approx \frac{0,372103165 \cdot \cos \frac{65,18792552^\circ}{2}}{0,9281911378 \cdot \cos \frac{99,24829791^\circ}{2}} \approx 0,5213877098$$

und damit  $\mu_1 = 27,53695504^\circ$ , (22)

letzteres wegen der bereits gefundenen Ergebnisse (5), (6), (7) und (8) mit einer 10-stelligen Dezimalangabe. Nach (20) gilt  $\varepsilon_2 = 27,53695482^\circ$ , also immerhin auf 5 Nachkommastellen eine Übereinstimmung. Diese Genauigkeit gibt Anlass zu der Vermutung:

**Satz 1.1:** Zwei benachbarte Quadrate des Polyeders (3,3,3,3,4) stehen aufeinander senkrecht.

**Hinweise:**

1. Der hier eingeschlagene Weg hat den Vorteil, dass man sich den umgeklappten Schnitt gut vorstellen kann; dies gilt vor allem dann, wenn man sich anhand der berechneten Größen eine maßstabgetreue Zeichnung gefertigt hat, die dann auch dazu dient, neu berechnete Werte zu kontrollieren.
2. In Wikipedia [1] bzw. KÖLLER [1] findet man die exakte Lösung  $t := \cos \alpha = \frac{1}{6} \left( \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} - 2 \right)$ , wobei darauf hingewiesen wird, dass  $2t + 1$  die **Tribonacci-Konstante** ist, d. h. der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n}$  für die Glieder einer so genannten Tribonacci-Folge mit der Rekursionsformel  $t_{n+3} = t_n + t_{n+1} + t_{n+2}$  und dem Anfang  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 1$  und  $t_3 = 2$ .  
D. h. die obigen Rechnungen können sehr rechenaufwendig aber „exakt“ durchgeführt werden. Interessiert man sich aber für Ergebnisse, muss man wegen der vielen Wurzeln dann doch zum Rechner greifen. So hat sich der Autor für den aufgezeigten Weg entschlossen, falls eine Lehrerin oder ein Lehrer in einer Arbeitsgemeinschaft diesen Weg gemeinsam mit Schülerinnen und Schülern gehen wollen.
3. Nochmals zur letzten Zeichnung: Man hätte völlig analog ein zweites Quadrat an die Seite  $CD$  hängen können. Beides ist gleichzeitig aber nicht möglich (siehe Aufgabe 1.7). Fügt man nur bei  $CD$  ein Quadrat an, so kann der oben beschriebene Körper durch keine eigentliche Bewegung (mit Determinante 1) in den nun entstandenen übergeführt werden. Bereits hier erkennt man:

**Satz 1.2:** Es gibt mindestens zwei verschiedene ARCHIMEDISCHE Körper (3,3,3,3,4), die nur durch eine Spiegelung (uneigentliche Bewegung) ineinander übergeführt werden können.

**Aufgabe 1.6:** Weshalb kann man in Abbildung 6 nicht an  $EA$  oder  $BC$  ein zweites Quadrat anhängen? Weshalb können in  $CD$  und  $DE$  Quadrate nicht angefügt werden?

**Aufgabe 1.7:** Man vergleiche die hier erreichten numerischen Ergebnisse mit denen der Aufgabenlösungen (siehe Kapitel 5), wenn nach Wikipedia [1]  $\cos \alpha = \frac{1}{6} \left( \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} - 2 \right)$ .

B. Ein anderer Weg zur Begründung von Satz 1.1 wäre der folgende:

Man stellt sich in Abbildung 6 auf der Linie  $DT$  eine auf der Ebene  $ABCDE$  senkrechte Ebene vor, auf der man die Gesamtkonfiguration orthogonal projiziert. In der folgenden Abbildung 7 wird aber diese Projektion nicht wieder in die Ebene  $ABCDE$  umgeklappt, sondern darüber als eigener Riss gezeichnet. Man spricht dann auch von einem *Aufriss* zum bereits vorhandenen *Grundriss*  $ABCDE\dots$

Im Grundriss sieht man in wahrer Größe die Standfläche  $ABCDE$  der Pyramide  $SABCDE$ . Das beteiligte Quadrat  $SAGB$  mit seinem Diagonalschnittpunkt  $T$  ist dieses Mal vollständig gezeichnet, ebenso das angehängte zweite Quadrat  $DELN$  mit seinem Diagonalschnittpunkt  $\bar{T}$ .

Im Aufriss sieht man das Quadrat  $SAGB$  projizierend als die Strecke  $SG$ . Die Grundebene der Pyramide zeigt sich als Strecke  $DT$ . Die Strecken  $DS$  und  $SG$  zeigen sich in den wahren Größen  $s$  bzw.  $s \cdot \sqrt{2}$ . Die Höhe  $h$  sieht man ebenfalls in wahrer Größe.  $P$  sei der Schwerpunkt des Dreiecks  $SDE$ .  $M$  sei der Schnittpunkt der Verlängerung der Pyramidenhöhe  $h$  mit dem Lot  $TM$  auf der Quadratebene  $SAGB$ , das ebenfalls in wahrer Größe im Aufriss zu sehen ist.

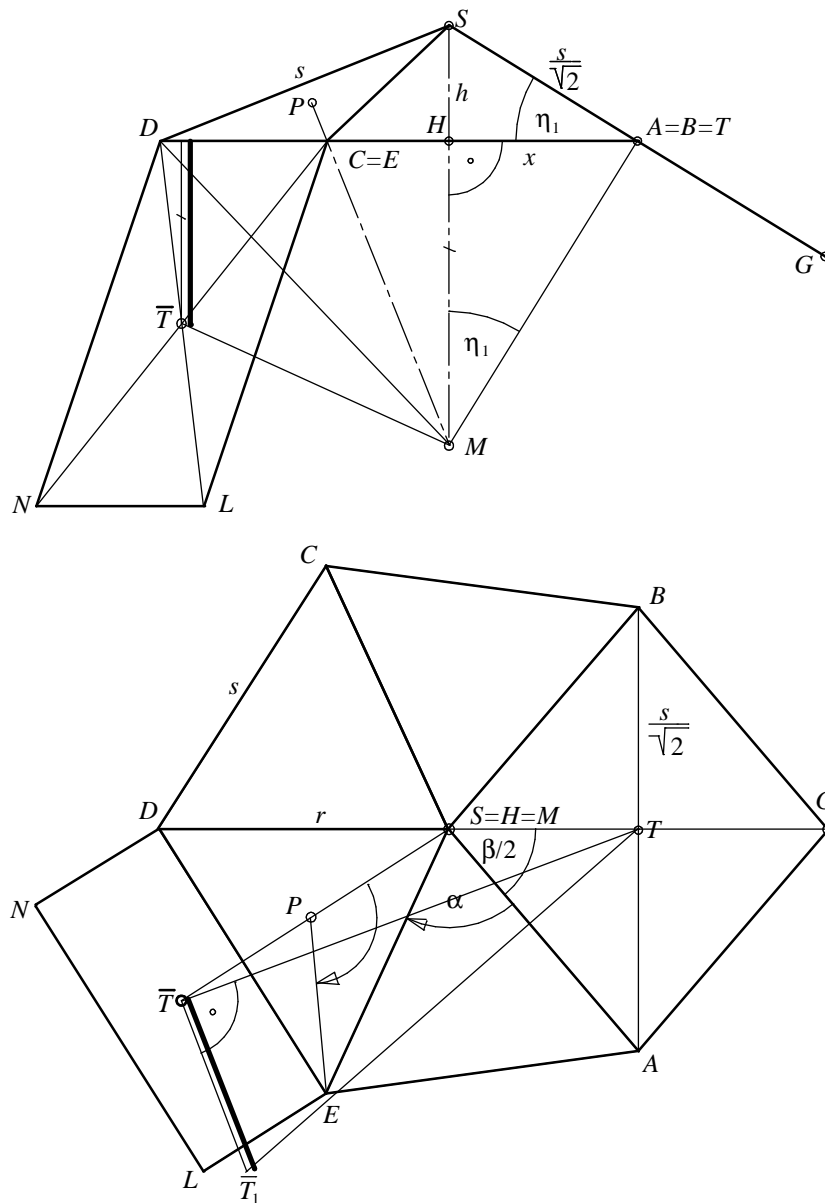


Abb.7: Zwei Drehungen



Im Grundriss der Abbildung 7 sieht man in einer Umklappung die wahre Größe von  $|\overline{T\bar{T}}|$  als  $|\overline{T\bar{T}_1}|$ . Im Folgenden wird u. a. nachgewiesen  $|\overline{MT}| = |\overline{MT}|$ , letzteres im Aufriss in wahrer Größe. Zeichnet man das Eck  $TMT$  in wahrer Größe, so kann man bei  $M$  durch Messung einen rechten Winkel feststellen.

Aus Drehsymmetriegründen (um die Achse  $SA$ ) treffen sich alle Mittellote zu  $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}, \overline{SE}$  jeweils in den Ebenen  $SHA, SHB$  usw. in einem Punkt  $M$  auf  $SH$ . Alle Punkte  $S, A, B, C, D, E$  haben deshalb von  $M$  die gleiche Entfernung. Die Gesamtkonfiguration zerfällt deshalb in drei- und vierseitige Pyramiden, deren Höhen zu den Grundflächen auch alle durch  $M$  gehen. Deshalb gilt:

**Satz 1.3:** Es gibt auf  $SH$  einen Punkt  $M$ , von dem alle Ecken die gleiche Entfernung haben. Auch die die Pyramide begrenzenden Dreiecksflächen haben zu  $M$  konstanten Abstand.

$M$  stellt sich später als der Mittelpunkt der Umkugel des Gesamtkörpers heraus. Wegen der unterschiedlichen Abstände der Quadrate und der Dreiecke von  $M$  gibt es keine Inkugel.

Dreht man in Abbildung 8 das Quadrat  $SAGB$  um  $SM$  um den Winkel  $\alpha$  auf das 2- Quadrat  $DELN$  zu, so geht z. B. die Strecke  $SA$  über in die Dreieckseite  $SE$ . Anschließend dreht man das Quadrat um  $MP$  um  $120^\circ$  in die Lage  $DELN$ . Hierbei geht  $SE$  über in  $ED$ . Bekanntlich kann man jede Drehung um  $\alpha$  um eine Achse  $a$  ersetzen durch zwei Spiegelungen an Ebenen durch  $a$ , wobei die beiden Ebenen den Winkel  $\alpha : 2$  einschließen. Da diese Ebenen in Abbildung 8 projizierend sind, kann man sie wie folgt wählen:

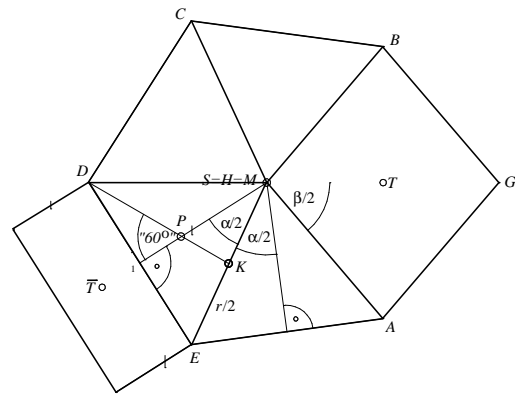


Abb. 8: Ergebnis zweier Drehungen cubuss19

1. Drehung: Man spiegle zuerst an  $SME$  und dann an  $SMP$ .
2. Drehung: Man spiegle zuerst an  $SMP$  und dann an  $DMP$ .

Da bekanntlich das zweimalige Spiegeln an derselben Ebene die identische Abbildung ist, erhält man als Gesamtergebnis das Produkt der Spiegelung an  $SME$  und anschließender Spiegelung an  $DMP$ . Da diese beiden Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist das Produkt dieser zwei Spiegelungen eine Umwendung ( $180^\circ$ -Drehung) an  $KM$ . D. h. verbindet man  $T$  mit seinem Bild  $\bar{T}$ , so steht die Verbindungsstrecke  $|\overline{T\bar{T}}|$  auf der Achse  $KM$  senkrecht und wird von ihr halbiert.

**Satz 1.4:** Zwei „benachbarte“ Quadrate werden durch eine Umwendung an der Geraden  $KM$  (siehe die Abbildung 8) ineinander übergeführt.

**1.5 Beweis von Satz 1.1:**

Man schneidet aus der Pyramide den Teil  $SEATH$  heraus, damit man die Umwendung Achse  $KM$  und die „Zentrale“  $SHM$  gut sehen kann. Dann projiziert man  $T$  orthogonal auf die Ebene  $EMS$  zu  $U$ . Damit ist die Ebene durch  $T$ , die senkrecht auf  $KM$ , der Umwendung Achse  $KM$  der Abbildung  $T \rightarrow \bar{T}$  steht, projizierend als  $UQ$  sichtbar, wobei  $UQ \perp KM$ . Die Ebene  $EMS$  der Abbildung 9 wird untersucht, um den Winkel  $\bar{T}MT$  zu berechnen.

Deshalb findet man in Abbildung 10 die gegensei-

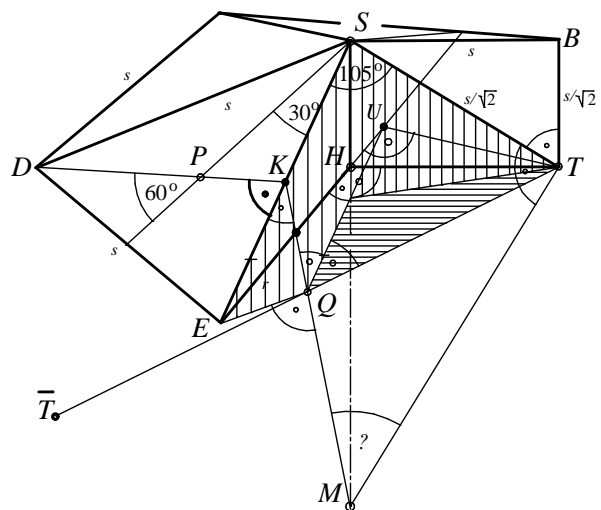


Abb. 9: Angeschchnittene Pyramide cubuss17

tige Lage der beteiligten Strecken genauer:

Die Lotebene durch  $T$  zu  $KM$  ist in der Darstellung projizierend, weil dies  $UT$  ist. Die Lotebene schneidet  $KM$  in  $Q$ .  $a + b = r$ ,  $s$ ,  $U\bar{U}$  und  $SHM$  sind in wahrer Größe zu sehen. Man beachte:  $ES$  ist zu  $U\bar{U}$  parallel. Alle Dreiecke von Abbildung 10 sind ähnlich.

$$\text{Zur Erinnerung: } h^2 = s^2 - r^2 \quad (23)$$

Dann gilt wegen der Ähnlichkeiten für

$$f := |\overline{KM}|: \quad \frac{f}{s:2} = \frac{r}{h} \text{ und damit } f = \frac{rs}{2h}, \quad (24)$$

$$\frac{d}{s:2} = \frac{h}{r}, \text{ also } d = \frac{hs}{2r}, \quad (25)$$

$$\frac{a}{s:2} = \frac{s}{r}, \text{ also } a = \frac{s^2}{2r} \text{ und damit}$$

$$b = r - a = r - \frac{s^2}{2r} = \frac{2r^2 - s^2}{2r}, \quad (26)$$

$$c = r \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha$$

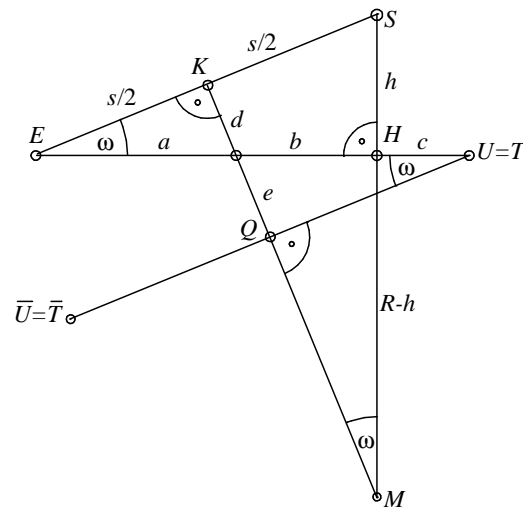


Abb. 10: Hilfsebene cubuss18

und damit  $\frac{e}{b+c} = \frac{h}{s}$ , also

$$e = \frac{h}{s}(b + c) = \frac{h}{s} \left( \frac{2r^2 - s^2}{2r} + r \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \right) \quad (27)$$

Aus (23), (24), (26) und (27) folgt:

$$\begin{aligned} |\overline{QM}| &= \frac{rs}{2h} - \frac{hs}{2r} - \frac{h}{s} \left( \frac{2r^2 - s^2}{2r} + r \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \\ &= \frac{r^2 s^2 - h^2 s^2 - h^2 (2r^2 - s^2)}{2hrs} - \frac{hr}{s} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{r^2 s^2 - (s^2 - r^2) s^2 - (s^2 - r^2) (2r^2 - s^2)}{2hrs} - \frac{hr}{s} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{r^2 s^2 - s^4 + r^2 s^2 - 2r^2 s^2 + s^4 - r^2 s^2 + 2r^4}{2hrs} - \frac{hr}{s} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{2r^4 - r^2 s^2}{2hrs} - \frac{hr}{s} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{2r^3 - rs^2}{2hs} - \frac{hr}{s} \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Mit } s^2 - 2h^2 = r^2 - h^2 = 2r^2 - s^2 \text{ folgt} \quad (28)$$

$$|\overline{QM}| = \frac{r}{s} \left( \frac{2r^2 - s^2}{2h} - h \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \right) = \frac{r}{s} \left( \frac{r^2 - h^2}{2h} - h \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \right) \quad (29)$$

In Abbildung 10 findet man  $R-h$ . Mit den Ähnlichkeiten der Dreiecke dort berechnet man  $\frac{R}{s:2} = \frac{s}{h}$ ; hieraus ergibt sich  $R = \frac{s^2}{2h}$ . Da jede Quadrastecke von  $T$  die Entfernung  $s: \sqrt{2}$  hat und  $|\overline{EM}| = R$  ist, gilt:

$$\left( \frac{b}{2} \right)^2 := |\overline{MT}|^2 = R^2 - \frac{s^2}{2} = \frac{s^4}{4h^2} - \frac{s^2}{2} = \frac{s^2}{2} \left( \frac{s^2}{2h^2} - 1 \right) = \frac{s^2(s^2 - 2h^2)}{4h^2} = \frac{s^2(r^2 - h^2)}{4h^2} \quad (30)$$

Satz 1.1 ist bewiesen, wenn nachgewiesen werden kann, dass

$$|\overline{MT}|^2 = |\overline{QM}|^2 + |\overline{QT}|^2 = 2|\overline{QM}|^2 \quad (31)$$

erfüllt ist, d. h. nachgewiesen ist, dass das Dreieck  $MQT$  bei  $Q$  rechtwinklig ist. Hierzu sind noch drei Umformungen erforderlich:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha \quad (32)$$

Nach (2) und einem Additionstheorem gilt  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{s}{2r}$  und damit

$$\frac{r^2}{s^2} = \frac{1}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \omega = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (33)$$

Hieraus folgt mit einem Additionstheorem:

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{1 - \cos^2 \omega}{\cos^2 \omega} = 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2(1 - \cos \alpha) - 1 = 1 - 2\cos \alpha \quad (34)$$

Um (31) zu zeigen, wird im Folgenden (31) äquivalent mit Hilfe von (29) bis (34) umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{s^2(r^2-h^2)}{4h^2} &= 2 \cdot \frac{r^2}{s^2} \left( \frac{r^2-h^2}{2h} - h \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \right)^2 \\ s^2(r^2-h^2) &= 2 \cdot \frac{r^2}{s^2} \left( r^2-h^2 - 2h^2 \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha \right)^2 \\ s^2(r^2-h^2) &= 2 \cdot \frac{r^2}{s^2} (r^2-h^2 - 2h^2(1-2\cos^2\alpha) \cdot \cos \alpha)^2 \\ \left(\frac{s}{r}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2\right) &= \frac{1}{1-\cos \alpha} \left(1 - \left(\frac{h}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{h}{r}\right)^2 (\cos \alpha - 2\cos^3 \alpha)\right)^2 \\ 2(1-\cos \alpha)2 \cos \alpha &= \frac{1}{1-\cos \alpha} (2 \cos \alpha - 2(1-2 \cos \alpha)(\cos \alpha - 2\cos^3 \alpha))^2 \\ 4(1-\cos \alpha)^2 \cos \alpha &= (2 \cos \alpha - 2(1-2 \cos \alpha)(\cos \alpha - 2\cos^3 \alpha))^2 \\ 4(1-\cos \alpha)^2 \cos \alpha &= \\ &= (4\cos^2 \alpha + 4\cos^3 \alpha - 8\cos^4 \alpha)^2 \end{aligned}$$

Das ist genau dann wahr, wenn mit (9) und der Schreibkürzung  $t := \cos \alpha$  gilt:

$$\begin{aligned} 4t(1-t)^2 &= (4t^2 + 4t^3 - 8t^4)^2 = (1-8t^4)^2 \\ 64t^8 - 16t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Eine Polynomdivision liefert die folgende Identität:

$$64t^8 - 16t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t + 1 = (4t^3 + 4t^2 - 1)(16t^5 - 16t^4 + 16t^3 - 20t^2 + 20t - 17)$$

Da der erste Faktor für  $t = \cos \alpha$  null wird, gilt dies auch für das Produkt. Damit ist die Annahme (31) bewiesen. (31) aber besagt, dass  $|\overline{TM}|^2 = 2|\overline{QM}|^2 = |\overline{QM}|^2 + |\overline{QT}|^2$  und damit das Dreieck  $MQT$  rechtwinklig gleichschenkelig ist und so  $\angle QMT = 45^\circ$ . Da nach Satz 1.4  $QM$  die Strecke  $\overline{TT}$  halbiert, weiß man jetzt, dass die Quadratnormalen  $TM$  und  $\overline{TM}$  aufeinander senkrecht stehen. Damit ist Satz 1.1 bewiesen.

## 2. Weitere Eigenschaften des halbrekulären Körpers (3,3,3,3,4)

Schon mit (30) wurde der Abstand  $\frac{b}{2}$  des Körpermittelpunktes von seinen Quadraten berechnet. Es folgt hier ein zweiter Weg:

### 2.1 Abstand des Mittelpunktes von einem Quadrat zur Ebene eines benachbarten Quadrats

Abbildung 11 führt die Abbildung 6 weiter: Man erkennt die Pyramide zur Ecke  $S$  mit ihrer waagrecht liegenden Grundfläche  $ABCDE$ , in der auch der Mittelpunkt  $T$  des Quadrats mit den Ecken  $SA..B$  liegt. Man sieht die Ebene durch  $WS$ , die auf der Grundebene senkrecht und die in die Pyramidengrunde ebene geklappt ist, und in der sich als  $W_1S_1$  die Ebene des gleichseitigen Dreiecks  $DES$ , als  $W_1L_1$  die Ebene des angefügten Quadrats  $DELN$  und als  $W_1T_1$  die Pyramidengrunde ebene zeigen.

Winkel  $W_1T_1Q_1$  ist  $\varepsilon_2$ , weil es sich hier um Winkel handelt, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen.

Fällt man von  $T_1$  das Lot auf die angefügte Quadratebene, die sich als  $W_1L_1$  zeigt, so ist der gesuchte Abstand als  $\frac{b}{2} := |\overline{T_1Q_1}|$  in wahrer Größe zu sehen.

Cubussi7

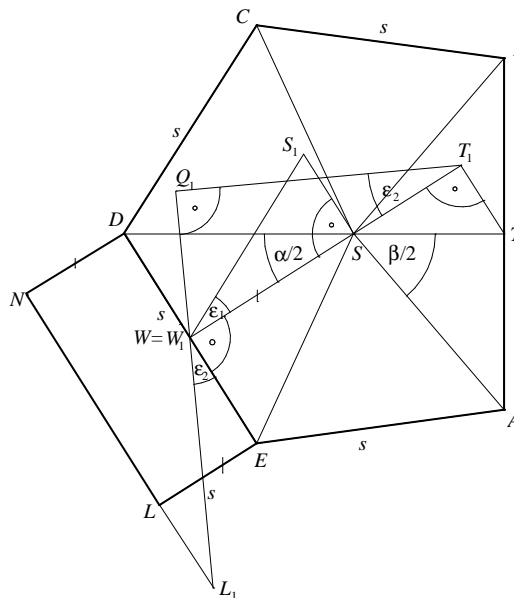


Abb.11 Abstand der Quadrate

Hieraus folgt die Berechnung:

$$|\overline{W_1 T_1}| = |\overline{W_1 S}| + |\overline{S T_1}| = r \cos \frac{\alpha}{2} + |\overline{S T}| \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Weil } |\overline{S T}| = r \cos \frac{\beta}{2} \text{ beträgt, folgt hieraus } |\overline{W_1 T_1}| = r \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos \frac{\beta}{2}\right).$$

Man hat so gefunden:

$$|\overline{T_1 Q_1}| := \frac{b}{2} = |\overline{W_1 T_1}| \cos \varepsilon_2 = r \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos \frac{\beta}{2}\right) \cos \varepsilon_2 =$$

$$\approx s \cdot 0,928191378 \cdot \cos 32,59396276^\circ \cdot (1 + \cos 49,62414896^\circ) \cdot \cos 27,53695482^\circ \approx s \cdot 1,142613511$$

$$\text{Also } |\overline{T_1 U_1}| := \frac{b}{2} \approx s \cdot 1,142613511 \quad (35)$$

Dieser Wert stimmt mit dem unter (30) gefundenen überein.

Da jede Raumecke von (3,3,3,3,4) ein Quadrat hat, erhält man alle Raumecken als Ecken dieser Quadrate. Weil je zwei benachbarte Quadrate auf zueinander senkrechten Ebenen liegen, liegen alle Quadrate auf einem Umwurfel der Kantenlänge  $b$ . Damit ist auch gezeigt, dass die Raumecke (3,3,3,3,4) zu einem Polyeder, d. h. zu einer geschlossenen Oberfläche, führt.

**Hinweis:** Wie in KELLER UND MEYER [1] u. a. gezeigt wird, ist eine notwendige Bedingung für eine Raumecke, dass die Summe der aneinander liegenden Winkel kleiner als  $360^\circ$  ist. Bei regulären Polyedern, also bei den sogenannten PLATONischen Körpern, ist diese Bedingung sogar hinreichend; dies gilt nicht bei den halbregularen Körpern; hier führt u. U. eine Kombination von regulären Vielecken zu einer Raumecke, aber das Zusammenfügen mehrerer solcher Raumecken muss nicht einen Körper ergeben.

Der Körper mit den Raumecken (3,3,3,3,4) hat also 6 Quadrate und damit 24 Ecken. Von jeder Ecke gehen 5 Kanten weg. So findet man als Kantenanzahl  $e = (24 \cdot 5) : 2 = 60$ . An jeder Quadratecke stoßen 4 gleichseitige Dreiecke zusammen; da jedes Dreieck 3 Ecken hat, findet man die Anzahl der beteiligten Dreiecke durch  $(24 \cdot 4) : 3 = 32$ . Insgesamt erhält man  $f = 38$  Flächen. Damit ist die EULERSche Polyederformel  $e - k + f = 2$  erfüllt, d. h. (3,3,3,3,4) führt zu einer geschlossenen Oberfläche eines konvexen Körpers. Man hat also gefunden:

**Satz 2.1:** (3.3.3.3.4) hat 24 Ecken, 60 Kanten und 38 Flächen, von denen 6 Quadrate und 32 gleichseitige Dreiecke sind. Dieser Polyeder hat einen Umwurfel der Kantenlänge  $b \approx 2,285227022s$ , wobei  $s$  die Kantenlänge des Körpers ist.

Das reicht aber noch nicht zur Darstellung des Körpers. Abbildung 12 zeigt das bisherige Ergebnis.

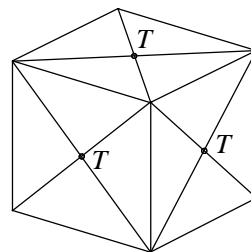


Abb. 12: Die Quadratmittelpunkte  $T$  am Umwurfel

## 2.2 Winkel $\delta$ zwischen einer Kante eines Quadrats und der Ebene des benachbarten Quadrats

Die Abbildung 13 stellt das Vorgehen dar: Man sieht die Ebene des Quadrats  $SAB$ .. und die Ebene des benachbarten Quadrats  $DELN$ .  $\omega$  ist der Winkel zwischen der Kante  $SA$  und der senkrechten Projektion dieser Kante auf die Ebene zu  $DELN$ .

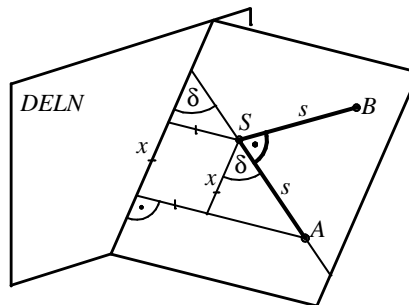
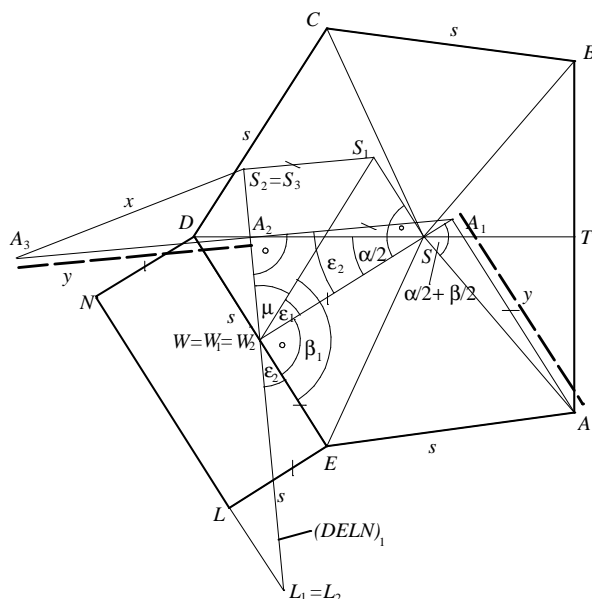


Abb. 13: Zur Berechnung von  $\omega$  cubussi9

Zunächst wird in Abbildung 14 die Berechnung vorbereitet:



cubuss10

Abb. 14: Der Weg zu  $\delta$

Man erkennt in Abbildung 14 wieder die Raumecke  $S$ , deren Pyramide eine horizontale Grundfläche  $ABCDE$  hat. Angefügt ist bei  $DE$  das Quadrat  $DELN$ . Durch  $WS$  denkt man sich eine zur Grundfläche senkrechte Ebene, auf die einiges der Konfiguration orthogonal projiziert wird. Dann klappt man diese Ebene in die Pyramiden Grundfläche um.  $W_1L_1$  ist das angehängte Quadrat  $DELN$ , das sich hier als  $(DELN)_1$  zeigt;  $W_1S_1$  ist das Bild des gleichseitigen Dreiecks  $DES$ .  $W_1A_1$  ist das Bild der Pyramiden Grundfläche.

Nun projiziert man einiges orthogonal auf  $DELN_2$ . Es entstehen die Punkte  $S_2, A_2, W_2$  und  $L_2$ .  $S_2A_2$  ist die oben (bei Abb. 13) erwähnte Orthogonalprojektion  $x$  der Strecke  $SA$  auf die Ebene von  $DELN$ . Die wahre Länge dieser Strecke hätte man, wenn man wüsste, um wie viel in  $DELN_2$  der Punkt  $A$  höher als  $S$  liegt; das Maß hierzu findet man durch  $y$ .

Wir klappen  $DELN_2$  in eine horizontale Lage und erhalten so die wahre Größe von  $x = |\overline{S_3A_3}|$ .

Hierzu folgt nun die Berechnung von

$y$ : Aus der Abbildung 14 entnimmt man:

$$y = |\overline{AA_1}| = r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \approx s \cdot 0,928191378 \cdot \sin 82,21811172^\circ \approx 0,919643377s \quad (36)$$

$|\overline{S_2A_2}|$ : Die beiden Winkel  $\varepsilon_2$  sind gleich, weil ihre Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen; also gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{W_2A_2}| &= |\overline{WA_1}| \sin \varepsilon_2 = (|\overline{WS}| + |\overline{SA_1}|) \sin \varepsilon_2 = r \cdot \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \sin \varepsilon_2 \approx \\ &\approx s \cdot 0,928191378 \cdot (\cos 32,59396276^\circ + \cos 82,21811172^\circ) \cdot \sin 27,53695482^\circ \approx \\ &\approx 0,419643374 \end{aligned} \quad (37)$$

$$|\overline{W_2S_1}| = \frac{|\overline{WS}|}{\cos \varepsilon_1} = \frac{r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \varepsilon_1} \approx \frac{s \cdot 0,928191378 \cdot \cos 32,59396276^\circ}{\cos 25,44647498^\circ} \approx 0,866025403s$$

Hieraus folgt:

$$|\overline{W_2S_2}| = |\overline{W_2S_1}| \cdot \cos \mu = |\overline{W_2S_1}| \cdot \cos(180^\circ - \beta_1) \approx s \cdot 0,866025403 \cdot \cos 37,0165702^\circ \approx 0,691487881s$$

Zusammen mit (37) folgt hieraus:

$$|\overline{S_2A_2}| = |\overline{W_2S_2}| - |\overline{W_2A_2}| \approx 0,271844507s$$

$x$ : Da es sich beim Dreieck  $A_3A_2S_2$  um ein rechtwinkliges handelt, folgt mit (36) nach dem Satz des PYTHAGORAS:

$$x = \sqrt{y^2 + |\overline{S_2A_2}|^2} \approx s \cdot \sqrt{0,919643377^2 + 0,271844507^2} \approx 0,958980384s$$

Hieraus folgt  $\delta$ :

$$\text{Nach Abbildung 13 gilt } \cos \delta = \frac{x}{s} \approx \frac{0,958980384s}{s} = 0,958980384. \text{ Also ist } \delta \approx 16,46756047^\circ \quad (38)$$

KÖLLER [1] gibt an  $\delta \approx 16,4^\circ$ .

Man möge sich nochmals an vorstehende Überlegungen erinnern: Die Kante  $SA$  strebt in der Richtung von  $S$  nach  $A$  von ihrer benachbarten Würfelkante weg, während die Kante  $DL$  in Richtung von  $D$  nach  $L$  zu dieser Würfelkante hinstrebt. Nur so sind die dazwischen liegenden Dreiecke gleichseitig und kongruent. Das bedeutet, dass Entsprechendes auch für die weiteren Quadrate auf den anderen Würfelseiten gelten muss.

Man überlege sich, dass das erste angefügte Quadrat an die Ausgangspyramide mit Spitze  $S$  auch an der Seite  $DC$  hätte angehängt werden können; dann würde sich  $\delta$  in eine andere Richtung auswirken. Aber auch dann wären wieder alle Ecken des Körpers  $(3,3,3,3,4)$  festgelegt. Die so entstehenden Fälle können durch eine Spiegelung an einer Ebene durch  $TM$ , die senkrecht zu 4 Würfelseiten ist, ineinander übergeführt werden.  $M$  ist hierbei der Mittelpunkt des Würfels.

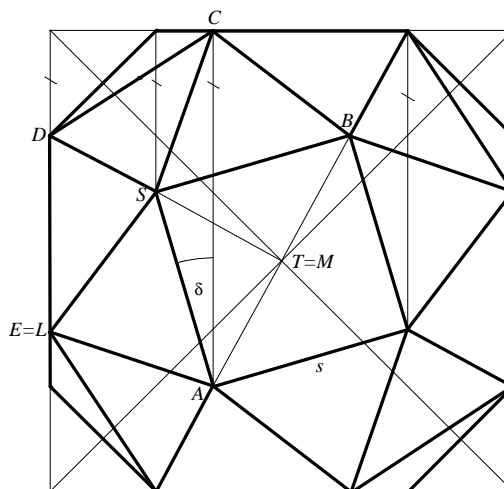


Abb. 15: Cubus simus mit Umwürfel *cubuss11*

Man nennt deshalb die beiden Möglichkeiten zueinander chiral. Im Gegensatz zu den anderen ARCHIMEDISCHEN Körpern ist der Körper durch  $(3,3,3,3,4)$  nicht eindeutig festgelegt (Analoges gilt beim Körper  $(3,3,3,3,5)$ , dem so genannten Octaedrum simum).

**Aufgabe 2.1:** An welcher Stelle der vorliegenden Konstruktion des halbbregulären Polyeders  $(3,3,3,3,4)$  wird entschieden, welcher der beiden möglichen zueinander chiralen Körper entsteht?

**2.3 Umkugel:** Jedes Quadrat von  $(3,3,3,3,4)$  hat Ecken die auf einem Kreis liegen, z. B. in Abbildung 12 auf einem Kreis um  $T = M$  mit Radius  $|\overline{TA}|$ . Es gibt 6 solche Kreise, die alle ebene Schnitte einer Kugel um  $M$  mit Radius  $|\overline{MA}|$  sind. Die beiden zueinander chiralen Körper haben also dieselbe Umkugel.

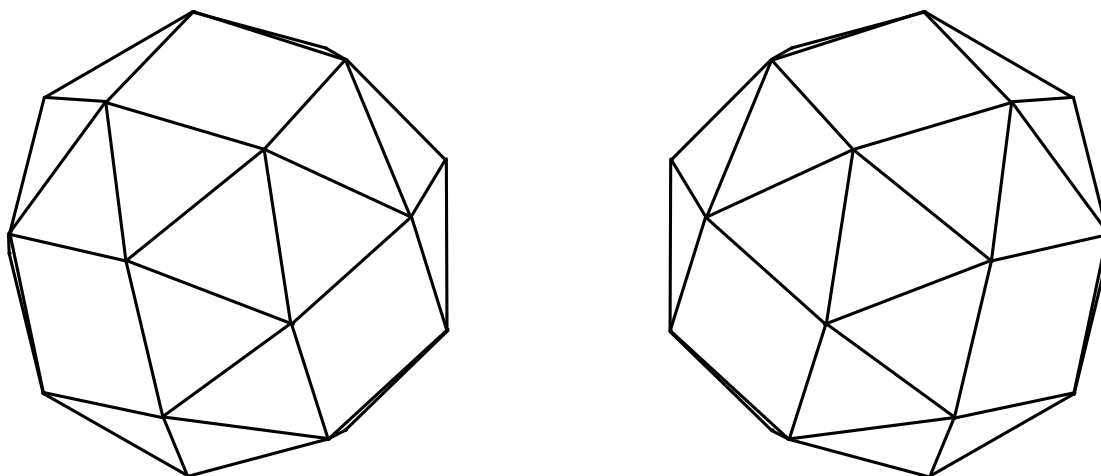


Abb.16: Schrägbild zweier zueinander chiraler Cubus simus *Cubuss12,14*

(3,3,3,3,4) heißt Cubus simus oder abgestumpfter Würfel u. a., weil man diese Körper aus einem Würfel als Rohling „schnitzen“ kann.

**Satz 2.2:** (3,3,3,3,4) hat zwei zueinander spiegelsymmetrische Lösungen, die eine Umkugel haben.

**Aufgabe 2.2:** Berechnen Sie den Umkugelradius mit einer der kennen gelernten Methoden.

**Aufgabe 2.3:** Berechnen Sie Oberfläche und Volumen als Funktion der Kantenlänge  $s$ .

**2.4 Zusatz zu Definition 1.1:** Definition 1.1 besagt, dass je zwei Raumecken eines halbgeregulären Körpers durch eine Bewegung, die den Körper als Ganzes fest lässt, ineinander übergeführt werden können.

Betrachtet man in Abbildung 17 die Raumecke bei  $S$  mit den Nachbarn  $A, B, C, D$  und  $E$ . Bei der Raumecke  $S$  sind ein Quadrat und die gleichseitigen Dreiecke  $S_1, S_2, S_3$  und  $S_4$  beteiligt, die gegen den Uhrzeigersinn nummeriert sind. Da es Bewegungen gibt, die die Raumecke  $S$  unter Beibehaltung des Drehsinnes (es werden nur Bewegungen mit Determinante 1 betrachtet) auf  $A, B, C, D$  und  $E$  abbilden, werden die an der Raumecke jeweils beteiligten Dreiecke ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn nummeriert. Die Abbildungen führen Dreiecke in andere über, wodurch Kongruenzen entstehen, die zu Gleichheiten führen. Hierbei kann es sein, dass ein Dreieck mehrfach vorkommt, z. B.  $S_1 = B_4 = C_3$ .

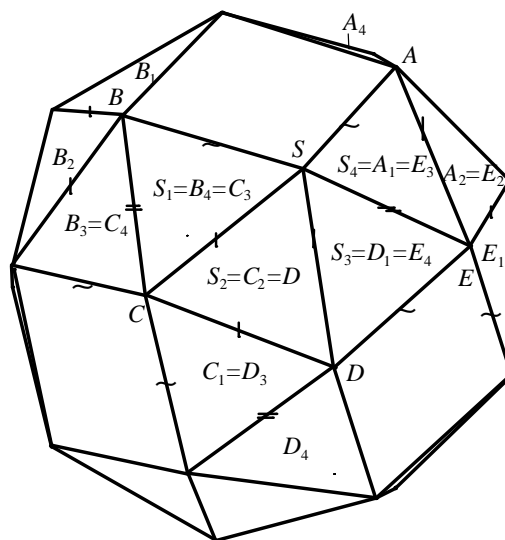


Abb. 17: Die Nachbarn einer Raumecke

Im Folgenden geht es um die Winkel zwischen zwei dieser genannten Ebenenstücke, die in Abbildung 17 an ihrer Kante mit  $\sim$  gekennzeichnet sind: Die Bewegung, die  $S$  in  $A$  überführt, führt den Winkel zwischen Quadrat und gleichseitigem Dreieck längs  $BS$  über in den hierzu kongruenten längs  $SA$ . Analog verfährt man mit den Bewegungen, die die Raumecke bei  $S$  in  $C$  bzw. in  $D$  bzw. in  $E$  überführen.

Im Folgenden wird das erste Gleichheits-Zeichen durch Identitäten der Nummerierung in Abbildung 17 verursacht. Das zweite Gleichheits-Zeichen hat seine Ursache in einer Abbildung von der Raumecke  $S$  aus;  $\angle S_1 S_2$  bedeutet den Winkel zwischen den Dreiecken  $S_1$  und  $S_2$ :

$$\angle S_1 S_2 = \angle C_2 C_3 = \angle S_2 S_3$$

$$\angle S_4 A_2 = \angle A_1 A_2 = \angle S_1 S_2 \text{ usw.}$$

Die entsprechenden Gleichheiten von Winkeln an Kanten ist dort mit einem waagrechten Strich gekennzeichnet.

$$\angle B_3 S_1 = \angle B_3 B_4 = \angle S_3 S_4$$

Diese Gleichheit und entsprechende sind mit zwei waagrechten Strichen an den Kanten gekennzeichnet. Leider kann man m. E. die Gleichheit der beiden Winkel nicht mit einer analogen Begründung herleiten. Man muss offenbar genauer hinschauen, wie dies in Abbildung 18 geschieht:

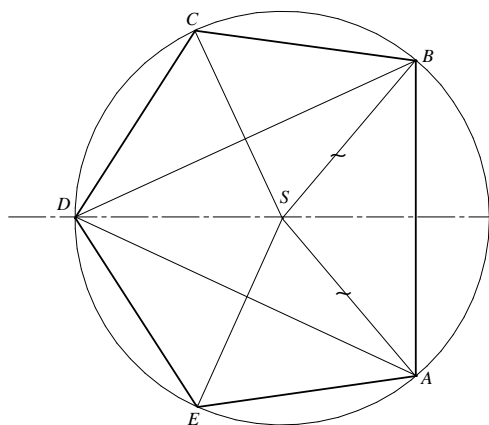


Abb. 18: Symmetrie der Raumecken

Ist der Neigungswinkel eines gleichseitigen Dreiecks mit einem Quadrat oder gleichseitigen Dreieck bekannt, so ist das Gesamtgebilde starr. Hieraus folgt  $SABCD$  ist starr und damit  $|\overline{BD}| = |\overline{DA}|$  und es gibt eine Ebene  $SDX$  durch  $SD$  so, dass  $A$  und  $B$  zu ihr symmetrisch liegen.

Hängt man an  $\overline{SD}$  ein weiteres gleichseitiges Dreieck unter  $\angle S_1 S_2$  an, so ist  $C$  zu  $E$  bzgl.  $SDX$  symmetrisch und  $E$  liegt auf dem Kreis durch  $A, B, C$  und  $D$ . Aus Symmetriegründen liegen dann die Dreiecke  $SEA$  und  $SBC$  symmetrisch und sind deshalb kongruent. D. h.  $E$  liegt auch auf dem Kreis.

### 3. Schule und Cubus simus

Zugegeben, den Autor stört die Aufgabenstellung einer Kollegin (siehe KELLER UND MEYER [1]): „**Themen** für jeweils eine Gruppe aus 2 Schülern: Frage d) Vom Würfel zum Cubus simus“. Die Schülergruppe sollte vermutlich mit Eckenabschneiden die gestellte Aufgabe lösen, was aber nach WIRTH [1] nicht möglich ist.

Wie bereits in KELLER UND MEYER [1] betont wurde, kann es trotzdem reizvoll sein, wenn Schülerinnen und Schüler einen Cubus simus basteln, was allerdings bei obigem Zitat nicht nur gemeint war, es sollten auch Berechnungen wie etwa in der vorliegenden Abhandlung durch Schüler eigenständig anhand des Geometrieunterrichts und Nutzung des Internets ausgeführt werden.

Die Materie – insbesondere bei den beiden chiralen ARCHIMEDISCHEN Polyedern – bleibt schwierig, auch dann, wenn die Lehrerin oder der Lehrer über ein Manuskript nach obigem Beispiel verfügen. Trotzdem bin ich der Meinung, dass das Vorführen einiger Details – auch deren Vertiefung – gelegentlich vorteilhaft sein kann. Siehe hierzu Kapitel 3.2.

Eine andere Problematik kommt daher, dass angehenden Gymnasiallehrern immer weniger mathematische Inhalte gelehrt werden und dann in Folge auch immer weniger Mathematik im Schulunterricht auftaucht, wie in der vorliegenden Zeitschrift des Öfteren berichtet worden ist. Nur sollte man es nicht beim alleinigen Jammern belassen, da vermutlich das Gymnasium oder andere adäquate Einrichtungen kaum zum Unterrichten von mehr Mathematik zurückkehren werden, so dass deren Absolventen problemlos ein Mathematik anwendendes Studium ergreifen können. Man möge beachten, dass trotzdem immer noch die an der Schule erworbenen Kenntnisse ausreichen, um Mathematik oder Informatik zu studieren. Die Gründe sind einmal, dass sich nur die allerbesten zu solch einem Studium anmelden und zum anderen für sie dann in der Tat die mathematischen Vorlesungen voraussetzungslos gehalten werden. Anders ist dies mit den Mathematik-Anwendern, die in aller Regel schon zu Studienbeginn auf eine adäquate Vorbereitung durch die Schule angewiesen sind, wenn insbesondere die Ingenieurvorlesungen verstanden werden sollen.

Leider wird aber das mathematische Curriculum auch weiterhin schrumpfen, weil es der Gesamtheit der Lehrer trotz all der durchgeführten Reduktionen nicht möglich ist, den Lehrplan zu erfüllen. Und hier sehe ich einen Grund darin, dass immer weniger Lehramtsexamenskandidaten an der Universität das **Formulieren von Mathematik** wie auch die Darstellung von komplexeren Zusammenhängen vermittelt werden. Hierzu kommen in Kapitel 3.1 einige diesbezügliche Vorschläge im Zusammenhang mit den hier dargestellten Inhalten.

#### 3.1 Geometrie im Studium üben

Klassische Geometrie ist heute kein Forschungsthema mehr. In Folge wird die Geometrie, wie sie die Schule benötigt, nicht mehr im Studium für Gymnasiallehrer gelehrt; sehr oft glauben Hochschullehrer, die diesbezüglichen Inhalte – wie etwa den Lehrsatz des PYTHAGORAS – sollten die Studierenden bereits aus der Schule kennen, was auch heute noch durchaus zutreffend ist, und damit den Satz beherrschen, was aber in aller Regel nicht mehr gegeben ist, wenn man daran denkt, dass hiermit umfassende Kenntnisse über seine Anwendung beim Studenten erwartet werden. Auch bei solch einfachen Dingen muss der Lehrer im Studium auf ein deutlich höheres Niveau, wie er es später in der Schulstube benötigt, gehoben werden. Und da reicht es nicht, wenn er im Studium Grundlagen der Geometrie studiert und dort vielleicht erfährt, wie dieser Lehrsatz des PYTHAGORAS verallgemeinert werden kann und immer noch das Kernstück dessen ist, was man Metrik nennt.



Das eigentliche Problem beim Anwenden des Lehrsatzes von PYTHAGORAS ist nicht, dass man weiß: Im Anschauungsraum kann man alles, was man „messen kann“, mit diesem Lehrsatz mit wenigen Daten eines Gegenstandes berechnen. Eine solche Berechnung kann man dann immer noch nicht ausführen, wenn man nicht hinreichende Erfahrung im Entwickeln einschlägiger Strategien besitzt und das noch auf einem wesentlich höheren Niveau, wie es der Schulalltag erfordert.

Gerade der Zusammenhang zwischen den Kapiteln 1.4 und 1.5 machen deutlich, dass nicht jede Strategie sinnvoll ist. Der scheinbar einfachste Weg zum Auffinden des Winkels zwischen zwei „benachbarten“ Quadraten des Cubus simus wäre, sich die Normalvektoren der Ebenen als Vektorprodukt zu beschaffen und den Winkel zwischen ihnen als Skalarprodukt zu berechnen. Man erhält so ein Polynom sehr hohen Grades, dessen Bearbeitung nahezu unmöglich ist. D. h. das Beispiel zeigt dreierlei:

- Erst wer mehrere Strategien findet, hat die Chance einen ausführbaren Weg zu erhalten.
- Man braucht Erfahrung im Abwägen von Strategien, ohne sie gleich ausführen zu müssen.
- Oft erhält man die „beste“ Strategie, wenn man das Problem in eine Folge von Teilproblemen aufteilt, wie dies dann in 1.5 geschehen ist.

Zugegeben, nicht nur jeder Mathematiklehrer sondern auch jeder Mathematikanwender benötigt hierin Erfahrungen.

Der vorliegende Artikel wie auch KELLER UND MEYER [1] zeigen in erster Linie Beispiele, wie Strategien in der Geometrie entwickelt werden können. Hierbei ist weniger daran gedacht, die vorgestellten Inhalte in einer Vorlesung zu bieten, sondern vielmehr entsprechende Strategien etwa in Proseminaren, Arbeitsgemeinschaften, Hochschulpraktika u. a. an Studenten heranzuführen. Sicher ist es nicht genug, wenn jeder angehende Gymnasiallehrer einmal in seinem Studium in einem Hauptseminar einen Vortrag hält. Solches sollte in einem Mathematikstudium viel öfter vorgesehen sein. Es reicht auch nicht das *Vortragen* allein, weil zwar durch die zuhörenden Hochschullehrer Gedankenlücken moniert werden, sie aber dann doch etwa wegen Nervosität des Studenten, der vielleicht das erste Mal, einmalig? vor Hochschullehrern vorträgt, u. a. übersehen und somit nicht gewertet werden.

Hier würden schriftliche Ausarbeitungen helfen, wenn sie auch korrigiert werden. Der erste Hochschullehrer, dem ich solches vorgeschlagen habe, hat dies weit von sich gewiesen und nur beteuert, hierzu gäbe es keine Zeit. Meiner Meinung nach sollte man dieses Verlangen auch nicht auf die an den Hochschulen tätigen Didaktiker abschieben, weil es hierbei primär nicht um Schuldidaktik sondern um eine verständliche Darstellung der Mathematik geht, was auch für Studenten außerhalb der Lehrberufe wichtig wäre. Man möge hierbei nur an die meist verheerende Dokumentation von Software-Programmen und ihren mathematischen Hintergrund denken. Tatsache ist, dass in diesem Bereich die heute übliche Ausbildung von Gymnasiallehrern nicht ausreicht. In Folge bleiben zu häufig leider vor allem Schülerinnen und Schüler, die über das Unterrichtsgeschehen nachdenken, auf der Strecke. Zu oft kann man anhand der Schulhefte vor allem im Fach Geometrie nicht feststellen, was im Unterricht gemacht worden ist, welche Frage gestellt worden ist, was die Ausgangsdaten gewesen sind und was erreicht werden sollte.

Da auch im Studium die Frage: „Führt die Raumecke  $(3,3,3,3,4)$  zu einem halbbregulären Körper? Welche Eigenschaften hat dieser?“ zu umfangreich ist und deshalb aus Zeitgründen *nicht* gestellt werden darf, werden hier einige passende Detailfragen vorgeschlagen, die dann in ihrer Gesamtheit etwa in einem Proseminar behandelt werden können:

**Frage 1:** Zeigen Sie an einer Beispielreihe, welche Vorteile möglichst genaue Zeichnungen für die Berechnungen an einer Raumecke  $(3,3,3,3,4)$  haben.

**Frage 2:** Entwickeln Sie die Reihenfolge einer Strategie, mit der man rechnerisch die Eigenschaften einer Raumecke  $(3,3,3,3,4)$  erhalten kann.

**Frage 3:** Welche Möglichkeiten gibt es, Raumecken (3,3,3,3,4) aneinanderzufügen und in welcher Reihenfolge sind hierzu Berechnungen erforderlich?

**Frage 4:** Schildern Sie Strategien, mit denen der Nachweis erbracht werden kann, dass die Raumecke (3,3,3,3,4) zu einem konvexen Polyeder führt.

**Frage 5:** Es gibt verschiedene Gleichungen zur Bestimmung der Raumecke (3,3,3,3,4), die dann auch zu unterschiedlichem Vorgehen führen. Was lässt sich bei einem Vergleich der Strategien über die Genauigkeit der Ergebnisse aussagen?

**Frage 6:** In der vorliegenden Arbeit wurden mehrfach Ergebnisse anhand von Schnitten gefunden. Wie kann man die angewendeten Schnitte anschaulicher machen?

**Frage 7:** KÖLLER [1] und Wikipedia [1] stellen  $\cos \alpha$  durch Wurzeln bzw. als Grenzwert einer Tribonacci-Folge dar. Wird hierdurch die Genauigkeit der erforderlichen Ergebnisse angehoben? Begründen Sie Ihr Ergebnis.

**Frage 8:** Beschreiben Sie unterschiedliche mathematische Strategien, mit denen Modelle des Cubus hergestellt werden können.

**Frage 9:** Man verklebt mehrere Dodekaeder so, dass jeweils benachbarte mit einem regulären Fünfeck total verklebt sind. Man „kann“ den Vorgang so ausführen, dass sich die Dodekaeder zu einem „Kreis“ schließen. Die Gesamtkonfiguration bildet dann einen (nicht konvexen) Polyeder mit einem Loch. Mit der EULERSchen Polyederformel möge man nachweisen, dass dies nicht möglich ist.

Das reicht aber nicht um zu wissen, was man statt des Verklebens ausführen kann, um doch den gewünschten Gesamtkörper zu bekommen; d. h. man hat damit nicht berechnet, wie viel zum Vollkreis fehlt, um z. B. mit Beilagscheiben u. ä. den Fehler zu beheben. Vorsicht: Der Gegenstand kann aus Pappe durchaus hergestellt werden, da die Pappe so elastisch ist, dass sich der Ring schließt.

## 3.2 Was passt in den Unterricht?

Lehrer und Schüler lieben ausformulierte Aufgaben, d. h. Problemstellungen, die sicher zu Lösungen führen. Bei gehobenen Fragestellungen, wie sie etwa in Wettbewerbsaufgaben vorkommen, spricht man dann schon vom Auffinden einer Strategie. Man übersieht dabei, dass eine vollständige Fragestellung bereits das Umfeld einer Lösung stark einschränkt und damit meist wesentliche Teile einer Strategie vorwegnimmt. Außerdem bearbeitet „man“ seit Jahren solche Fragestellungen und kennt schließlich auch die einschlägige Literatur, aus der sich immer wieder neue Fragen modifiziert ableiten.

Weniger beliebt sind bereits Fragen, die mehrere Lösungen zur Folge haben, die u. U. abhängig von gegebenen Größen sind, wie dies früher in der Geometrie bei der so genannten Determination der Fall war. Diese Unbeliebtheit hat wohl zur Abschaffung der Determination geführt.

Andererseits hat man sich in jüngerer Zeit nach japanischem Vorbild um so genannte „offene“ Probleme bemüht, bei denen z. B. nicht alle Voraussetzungen gegeben sind und der Bearbeiter erst einmal Einschränkungen treffen muss, um überhaupt zu einer Lösung gelangen zu können. Wehe dem Schulbuchautor, der es wagt, in seiner Aufgabensammlung solche Fragen aufzunehmen. Da sind schon so genannte Kapitänsaufgaben begehrt, wie etwa: „Ein Kapitän fährt ein Schiff, 300 m lang, 38 m breit, mit einer Tonnage von 45 000 BRT; wie alt ist der Kapitän?“

Der Niveauverlust äußert sich aber auch umgekehrt, dass manch ein Lehrer heute die Leistungsfähigkeit seiner Schüler überschätzt und Fragen stellt, die diese erst – geschätzt ! nach 500 Arbeitsstunden beantworten können, auch wenn das Internet „zu Hilfe genommen werden kann“ (siehe KELLER UND MEYER [1]).

Der hier vorliegende Gesamttext eignet sich für den Unterricht an Gymnasien auch in Arbeitsgemeinschaften **nicht**. Trotzdem kann er der Schule Anregungen für den Unterricht geben:

**Idee 1:** Als Lehrer kann man einem Schüler nur Aufgaben stellen, dessen Umfeld der Lehrer genau kennt. Das ist vielleicht erst anders, wenn es sich um Doktorarbeiten und mehr handelt.

**Idee 2:** Einer möglichst genauen Zeichnung kann man eine weiterführende Idee besser entnehmen als einer ungenauen.

**Idee 3:** Berechnet man anschließend an eine möglichst genaue Zeichnung dort dargestellte Größen, so kann man an der Zeichnung zumindest näherungsweise deren Richtigkeit überprüfen.

**Idee 4:** Bei komplexeren Körpern werden sowohl in Handwerks- wie auch akademischen Berufen darzustellende wie auch zu berechnende Größen aus einem oder mehreren Schnitten gewonnen. Früher hat man das im Rahmen der so genannten Darstellenden oder Konstruktiven Geometrie (z. B. HOHENBERG [1]) gelernt. Die Darstellende Geometrie hat zu viel Wert auf die Ausführung ihrer Zeichnungen gelegt, hatte aber auch Bezeichnungsweisen, die für Anfänger mehr als verwirrend waren, auch wenn der Wille zur mathematischen Exaktheit sie verursachten; sie wurde deshalb an Schule und Universität abgeschafft.

Schnitte braucht man heute noch in der Anwendungspraxis, auch wenn man sie mit dem Computer produziert. Die Erfahrung im Legen von Schnitten kann der Rechner dem Nutzer nicht abnehmen. Im Allgemeinen ist es nicht gleichgültig, an welcher Stelle man durch einen Körper einen Schnitt legt.

Die vorliegende Arbeit hat jeden Punkt wie auch seinen „Grundriss“ mit demselben Buchstaben gekennzeichnet und den dazugehörigen Punkt im Schnitt mit einem Index versehen. Die Schnitte wurden jeweils an der Stelle ihrer Entstehung umgeklappt. Das muss aber nicht so sein. Im Unterricht empfiehlt es sich, der Klasse die Umklappung eines Schnittes als eigenständige Zeichnung vorzuführen. Man sollte dann aber – nach Ingenieurart – die Lage des Schnitts auch in der Ausgangszeichnung kennzeichnen.

**Idee 5:** Abgesehen vom Lehrsatz des PYTHAGORAS und den Additionstheoremen (siehe Kapitel 1.5) kommen nur ein paar Sätzchen im Text vor, auch wenn dem Autor durchaus bekannt ist, dass dies dem Rechnen vor 1900 entspricht. Andererseits (siehe auch obige Frage 9) hat man wenig moderne Alternativen, wenn es darum geht, den Wert einer Größe zu finden. Will man die Berechnungen anschließend an Abbildung 7 mit Vektorrechnung durchführen, so benötigt man die Koordinaten von so vielen Punkten, dass die Vektorrechnung sehr schwerfällig wird und kaum mit dem Taschenrechner die Genauigkeit der gefertigten Zeichnungen erreicht wird. Nicht umsonst schreibt ARTIN im Vorwort seines Buches [1], dass synthetische Methoden oft den analytischen überlegen sind. Ganz ähnlich verhält es sich mit der Nutzung von Rechnern: Solange man nicht täglich mit dem Cubus simus zu tun hat, lohnt sich das Programmieren der hier dargestellten Rechnungen nicht.

**Idee 6:** Der vorliegende Text ist für Lehrerinnen und Lehrer gedacht. Mögen sie Freude am Entstehen des Cubus simus haben. Bei Schülern ist viel erreicht, wenn sie den Körper anhand von Abbildung 2 basteln können. Die Aufteilung des Kreises in viermal  $\alpha$  und einmal  $\beta$  teilt man ihnen mit. Einer guten Klasse 10, die noch etwas Trigonometrie beherrscht, kann man ja die Herleitung einer entsprechenden kubischen Gleichung vorführen und mitteilen, dass dazugehörige Lösungen konstruktiv allein mit Zirkel und Lineal nicht erhalten werden können.

Man möge beachten, den Cubus simus kann man auch basteln, wenn man an ein Quadrat viermal das Fünfeck der Abbildung 3 „geeignet“ anhängt und dann zwei solche Gebilde miteinander verklebt. Schließlich setzt man auf die 8 Fünfecke jeweils eine Raumecke (3,3,3,3,4) auf.

**Historische Bemerkungen:** WIRTH [1] berichtet: Bereits ARCHIMEDES (285 – 212 v. Chr.) kannte die meisten halbregulären Körper, die man in KELLER U. MEYER [1] ausführlich beschrieben findet. Erst KEPLER (1571 - 1630) habe alle ARCHIMEDischen Körper, also einschließlich des Cubus simus und des Körpers (3,3,3,3,5), der Octaeder simum genannt wird, aufgezählt. Letzteres ist fragwürdig:

Der Maler ALBRECHT DÜRER (1471-1528), der auch erster Geometriebuchautor in deutscher Sprache und Ingenieur war, hat „lange“ vor KEPLER eine Abwicklung des Cubus simus gezeichnet (siehe ALBRECHT DÜRER [1]). KLAUS BIENER [1] zeigt ein Schrägbild des Cubus simus und führt es auf DÜRER zurück, ohne allerdings anzugeben, wo man diese Zeichnung findet.

Die vorliegende Abhandlung ist auch für Kurse an Volkshochschulen und anderem außerschulischen Unterricht geeignet. Dort fände so nicht nur Nachhilfe im gymnasialen Mathematikstoff statt, sondern eine echte Erweiterung der Fähigkeiten auch für nicht ganz so gute Gymnasiasten.

## 4. Lösungen

Lehrerinnen und Lehrer mögen bedenken: Ein Lehrer, der seine schwierigste Fragestellung für die Prüfung aufhebt, handelt nicht optimal. Ganz im Gegenteil sollte er sich bemühen, das Übungsniveau weit über die geplante Anforderung in der Prüfung hinauszuführen, um bei den Schülerinnen und Schülern Sicherheit zu erzeugen.

Die meisten der folgenden Lösungen hängen voneinander ab. Sie benutzen keine anderen Wege, wie die im vorliegenden „Lehrtext“ aufgezeigten. Der Schüler sollte Erfahrung im Umgang mit den trigonometrischen Funktionen (auch Additionstheoremen!) und Wurzeln haben.

**Zu Aufgabe 1.1<sup>3</sup>:** Mit Abb. 3 findet man  $r \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2}$  und  $r \cdot \sin \left(180^\circ - 4 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{\sqrt{2}}$ .

Wegen  $\sin \left(180^\circ - 4 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$  erhält man durch Division der beiden obigen Gleichungen  $2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$  mit der reellen Lösung  $\cos \frac{\alpha}{2} = 0,8425091624$ , wie man mit einem Taschenrechner oder mit dem in Kapitel 1.1 dargestellten Verfahren finden kann.

**Zu Aufgabe 1.2:**  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{s}{r\sqrt{2}}$ , letzteres wegen (1) aus 1.1. Hieraus folgt  $8r^2(1 - \cos^2 \alpha)\cos^2 \alpha = s^2$  und hieraus  $r = \frac{s}{2 \cos \alpha \cdot \sqrt{2(1 - \cos^2 \alpha)}}$ , (a)

weil  $0 < \alpha < 90^\circ$  ist.

Nach (5) aus 1.1 und (a) gilt  $h = s \sqrt{1 - \frac{1}{8(1 - \cos^2 \alpha)\cos^2 \alpha}}$ . (b)

Mit der Abb. 3 findet man:  $\cos \beta = \cos(360^\circ - 4\alpha) = \cos 4\alpha = 2\cos^2(2\alpha) - 1 = 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$  (c)

**Vereinbarung:** Um die Schreibarbeiten im Folgenden zu vereinfachen, definiert man  $t := \cos \alpha$ . (d)

<sup>3</sup> Briefliche Mitteilung von HANS WALSER.

**Zu Aufgabe 1.3:** Siehe Abb. 4; es gilt  $\cos \frac{\beta}{2} = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = 1 - 2t^2$ .

Damit entnimmt man Kapitel 1.2  $|\overline{JG}| = r \cdot (\cos \alpha + \cos \frac{\beta}{2}) = r \cdot (t + 1 - 2t^2)$ ,  $|\overline{JE}| = r \cdot \sin \alpha = r \cdot \sqrt{1 - t^2}$

$$\begin{aligned} \text{und hiermit } |\overline{EG}| &= \sqrt{|\overline{JG}|^2 + |\overline{JE}|^2} = r \cdot \sqrt{(t + 1 - 2t^2)^2 + 1 - t^2} = \\ &= r \cdot \sqrt{t^2 + 1 + 4t^4 + 2t - 4t^3 - 4t^2 + 1 - t^2} = r \cdot \sqrt{2 + 2t - 3t^2 - 4t^3 + 4t^4} = \\ &= \frac{s \cdot \sqrt{2 + 2t - 4t^2 - 4t^3 + 4t^4}}{2t \cdot \sqrt{2(1-t^2)}} = \frac{s}{2t} \cdot \sqrt{\frac{1+t-2t^2-2t^3+2t^4}{1-t^2}} = \frac{s}{2t} \cdot \sqrt{\frac{-2t^3+2t+1}{t+1}} = \frac{s}{2t} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+t} + 2t - 2t^2}. \end{aligned}$$

(8) und (9) aus 1.2 liefert mit dem Cosinussatz  $\cos \beta_1$ :

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \frac{(|\overline{EF}|)^2 + (|\overline{FG}|)^2 - (|\overline{EG}|)^2}{2|\overline{EF}| \cdot |\overline{FG}|} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2t} \sqrt{\frac{1}{1+t} + 2t - 2t^2}\right)^2}{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{\left(\frac{1}{1+t} + 2t - 2t^2\right)}{2t^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}t^2} \left(6t^2 - 2t - \frac{1}{1+t}\right) = \\ &= -0,798461434 \end{aligned} \quad (\text{e})$$

Hierdurch erhält man  $\beta_1 = 142,9834306^\circ$ .

**Zu Aufgabe 1.4:** Nach (15) aus 1.2 gilt  $|\overline{AD}| = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \frac{s}{2t \cdot \sqrt{2(1-t^2)}} \cdot \sqrt{1-t^2} = \frac{s}{\sqrt{2} \cdot t}$  und hieraus folgt

$$\text{mit dem Cosinussatz } \cos \beta_2 = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot t}\right)^2}{2 \cdot \frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{3t^2} \quad (\text{f})$$

und damit  $\beta_2 = 153,2345884^\circ$ .

**Zu Aufgabe 1.5:** Nach (17) in Kapitel 1.3 gilt:

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{2h}{s\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot s \sqrt{1 - \frac{1}{8(1-t^2)t^2}}}{s\sqrt{3}} = \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{8t^2 + \frac{1}{t^2-1}} = \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{8t^4 - 8t^2 + 1}{t^2-1}}$$

Hieraus findet man

$$\cos \varepsilon_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon_1} = \sqrt{1 - \frac{8t^4 - 8t^2 + 1}{6t^2(t^2-1)}} = \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{-2t^4 + 2t^2 - 1}{t^2-1}} = \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{-2t^2 - \frac{1}{t^2-1}} = 0,902987069 \quad (\text{g})$$

also  $\varepsilon_1 = 25,44647483^\circ$ .

**Hinweis:** In Abb. 6 erkennt man:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon_2 &= \cos(\beta_1 - \varepsilon_1 - 90^\circ) = \sin(\beta_1 - \varepsilon_1) = \sin \beta_1 \cos \varepsilon_1 - \cos \beta_1 \sin \varepsilon_1 = \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1} \cos \varepsilon_1 - \cos \beta_1 \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{3t^4} \left(6t^2 - 2t - \frac{1}{1+t}\right)^2} \cdot \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{-2t^4 + 2t^2 - 1}{t^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{3}t^2} \left(6t^2 - 2t - \frac{1}{1+t}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{-2t^4 + 2t^2 - 1}{t^2-1}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{6t^3 + 4t^2 - 2t - 1}{\sqrt{3}t^2(t+1)}\right)^2} \cdot \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{-2t^4 + 2t^2 - 1}{t^2-1}} - \frac{6t^3 + 4t^2 - 2t - 1}{\sqrt{3}t^2(t+1)} \cdot \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{8t^4 - 8t^2 - 1}{t^2-1}} = ? \end{aligned}$$

D. i. ein Weg, der kaum zu einer Lösung führt und darüber hinaus sicher sehr ungenau ist, wenn man die letzte Formel zur Berechnung von  $\varepsilon_2$  heranziehen würde.

**Zu Aufgabe 1.6:** Alle 3 Fälle können nicht realisiert werden, weil es sonst auch Ecken mit 2 Quadraten im Gegensatz zu (3,3,3,4) geben würde.

**Zu Aufgabe 1.7:**

Größe	erster Weg	Aufgabe 1.7	aus Aufgabenformel
$\alpha$	65,18792552 <sup>o</sup>	65,18792552 <sup>o</sup>	
$t = \cos \alpha$	0,419643377	0,419643377	(d)
$r$	0,928191378s	0,928191379s	(a)

$h$	0,372103165s	0,372103165s	(b)
$\beta$	99,24829791°	99,24829791°	(c)
$\beta_1$	142,9834298°	142,9834 <b>306</b> °	(e)
$\beta_2$	153,2345877°	153,23458 <b>84</b> °	(f)
$\varepsilon_1$	25,44647498°	25,446474 <b>83</b> °	(g)

**Zu Aufgabe 2.1:** In Abschnitt 1.3 entscheidet man sich beim Anhängen eines weiteren Quadrats für die Kante  $DE$ . Man hätte das Quadrat auch an die Kante  $CD$  anhängen können und hätte so einen anderen Körper erhalten, der zu der Ebene über  $DT$  spiegelsymmetrisch wäre, wenn diese Ebene auf der Grundebene  $ABCDE$  senkrecht ist.

**Zu Aufgabe 2.2:**  $TS$  in Abbildung 14 ist Symmetrielinie im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck der Kathetenlänge  $s$  mit der Basislänge  $\sqrt{2}s$ . Deshalb gilt  $|\overline{TS}| = \frac{s}{\sqrt{2}}$ . Nach Satz 2.1 ist  $|\overline{TM}| = \frac{b}{2} = 1,142613511s$ . Das Dreieck  $STM$  ist bei  $T$  rechtwinklig; deshalb gilt für den Umkugelradius:

$$\begin{aligned} |\overline{SM}| &= \sqrt{|\overline{TS}|^2 + |\overline{TM}|^2} = s \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{b^2}{4}} = \\ &= s \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + 1,142613511^2} = 1,343713376s \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 2.3:** Das gleichseitige Dreieck mit der Kantenlänge  $s$  hat den Flächeninhalt  $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ .

Das Quadrat der Kantenlänge  $s$  hat den Flächeninhalt  $F_2 = s^2$ . Nach Satz 2.1 gilt deshalb für die Oberfläche

$$\begin{aligned} O &= 32F_1 + 6F_2 = s^2 \left( 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 6 \right) = \\ &= s^2(8\sqrt{3} + 6) = 19,85640646s^2. \end{aligned}$$

Jeder Flächenanteil liefert mit dem Mittelpunkt  $M$  der Umkugel eine gerade Pyramide, deren Volumen zu berechnen ist.  $P$  in Abbildung 9 ist der Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge  $s$ . Deshalb ist  $|\overline{SP}| = \frac{2}{3} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{s}{\sqrt{3}}$ . Das Dreieck  $SZM$  ist bei  $Z$  rechtwinklig, also  $|\overline{MP}|$  die Höhe in der Pyramide  $SAEM$ . Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{MP}| &= \\ &= \sqrt{|\overline{SM}|^2 - \left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2} = s \sqrt{1,343713376^2 - \frac{1}{3}} = \\ &= 1,213355803s \end{aligned}$$

Das Volumen  $V_1$  der Pyramide  $SAEM$  beträgt dann

$$V_1 = F_1 \cdot \frac{|\overline{MZ}|}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,213355803s = 0,175132824s^3.$$

Das Volumen  $V_2$  der 4-seitigen Pyramide erhalten wir nach Satz 2.1:

Die Pyramidenhöhe ist  $|\overline{TM}| = \frac{b}{2}$  und ihre Grundfläche hat den Inhalt  $s^2$ ; also gilt:

$$V_2 = \frac{1}{3}s^2 \cdot 1,142613511s = 0,38087117s^3$$

Damit findet man das Gesamtvolumen  $V$ :

$$V = 32V_1 + 6V_2 = (32 \cdot 0,175132824 + 6 \cdot 0,38087117)s^3 = 7,889477388s^3$$

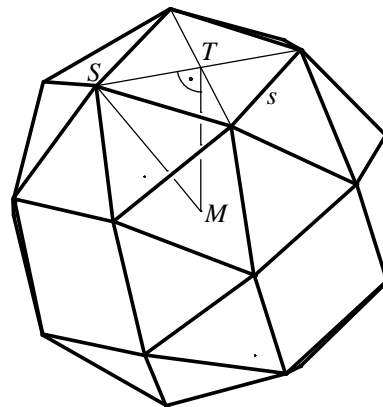


Abb. 19: Berechnung des Umkugelradius  
*Cubuss15*

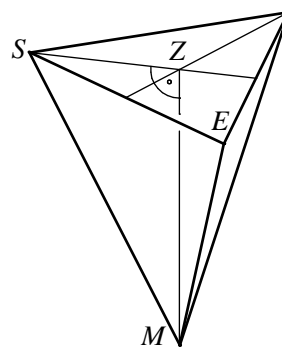


Abb.20: Berechnung des Teilvolumens  $V_1$

## 5. Zwischenergebnisse/Größen

Werte im Lehrtext	Fomel Satz	Literatur	entsprechende Formel als Funktion von $t = \cos \alpha$ und der Kantenlänge $s$ :	Aufgabe
$r \approx 0928191378s$	(5)	WALSER, Wikipedia [1]	$r = \frac{s}{2t \cdot \sqrt{2(1-t^2)}}$	1.2 (a)
$h \approx 0,372103165s$	(6)		$h = s \sqrt{1 - \frac{1}{8(1-t^2)t^2}}$	1.2 (b)
$\alpha \approx 65,18792552^\circ$	(8)		$2 \left( \cos \frac{\alpha}{2} \right)^3 - \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$	1.1
$\frac{\alpha}{2} = 32,59396276^\circ$	(8)			
$\beta \approx 99,24829791^\circ$	(7)		$\cos \beta = 8t^4 - 8t^2 + 1$	1.2 (c)
$\frac{\beta}{2} = 49,62414896^\circ$	(7)			
$\frac{\alpha+\beta}{2} \approx 82,21811172^\circ$				
$\beta_1 \approx 142,9834298^\circ$	(15)	Wikipedia [1]	$\cos \beta_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}t^2} \left( 6t^2 - 2t - \frac{1}{1+t} \right)$	1.3 (e)
$\beta_2 \approx 153,2345877^\circ$	(18)	Wikipedia [1]	$\cos \beta_2 = 1 - \frac{1}{3t^2}$	1.4 (f)
$\varepsilon_1 \approx 25,44647498^\circ$	(19)		$\cos \varepsilon_1 = \frac{1}{t\sqrt{6}} \cdot \sqrt{-2t^2 - \frac{1}{t^2-1}}$	1.5 (g)
$\varepsilon_2 \approx 27,53695482^\circ$	(20)			
auf einander senkrechte Quadrate	Satz 1.1.		Beweis in 1.5	
$\delta \approx 16,46756047^\circ$	(38)	KÖLLER [1] $\delta \approx 16,4^\circ$		
$b \approx 2,285227022s$	Satz 2.1 (30),(35)			
$R = 2,687426752s^2$	vor (30)		$R = \frac{s^2}{h}$	

Im vorliegenden Text werden Buchstaben meist einheitlich benutzt; es folgt deshalb eine Liste, die zeigt, auf welchen Seiten die einzelnen Größen definiert worden sind. Hierbei werden nicht alle nur lokal verwendeten Größen in Klammern genannt.

a	(2, 10 Abb.10)	$\varepsilon_2$	6	$\mu_1$	6 Abb.6
A	2	f	1 Flächenanzahl (10)	N	6 Ecke des Quadrats $DELN$
$\alpha$	2	F	4 Mitte von $\overline{SA}$	P	8 Schwerpunkt von Dreieck $SDE$

b	(2, 10 Abb.10), 12 Würfelkantenlänge	G	8 vierte Ecke des 1. Quadrats	Q	(10 Abb.10)
B	2	$\gamma_1$	6 Abb.6	S	1 Pyramidenspitze
$\beta$	(2)	$\gamma_2$	6 Abb.6	T	4 Mitte von $a = \overline{AB}$
$\beta_1$	4 $\angle$ (Quadrat, ben. Dreieck)	$\gamma_3$	6 Abb.6	u	(4)
$\beta_2$	5 $\angle$ (Dreieck, Dreieck)	h	3 Höhe der Pyramide	U	9 Abb.9
c	(2, 10 Abb.10)	H	1 Fußpunkt der Pyramidenhöhe	$U_1$	6 Abb.6
C	2	I	4 Schnitt $SA$ mit $ET$	v	(4)
d	(2, 10 Abb.10)	J	4 Mitte von $\overline{CE}$	V	6
D	2	k	1 Kantenanzahl	W	6 Mitte von $\overline{DE}$
$\delta$	13 Abb.13 $\angle$ (Quadratkante, Fläche des Nachbarquadrats)	K	5 Mitte von $\overline{SE}$	$\omega$	3 $\angle$ (Kante, Basisfünfeck)
e	1 Eckenanzahl,(2, 10 Abb.10)	L	6 Ecke des Quadrats $DELN$	x	(3, 13)
E	2	M	Mittelpunkt der Umkugel	X	(16)
$\epsilon_1$	6 $\angle$ (Dreieck, Basisfünfeck)	$\mu$	6 Abb.6	y	(3, 13)

## 6. Literatur

- Artin E. [1] Geometric Algebra, Interscience Publishers, Inc. New York 1964
- Biener Klaus [1] Albrecht Dürer – bedeutender Geometer, RZ-Mitteilungen Nr. 22, November 2001 (wobei nicht zu entnehmen ist, welches Rechenzentrum gemeint ist), Seiten 61 – 64
- Dürer Albrecht [1] Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt..., 1525
- Hohenberg F. [1] Konstruktive Geometrie in der Technik, Springer Wien 1966
- Keller H., Meyer Kh. [1] Über reguläre und semireguläre ARCHIMEDISCHE Körper, Mathematikinformation Nr. 59 (2013), Seiten
- Köller Jürgen [1] mathematische-basteleien.de/schieferwuerfel, 2008
- Weissbach Bernulf, Martini Horst [1] On the Chiral Archimedean Solids, Beiträge zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry, Vol. 43 (2002), No. 1, pages 121 – 133
- Wikipedia, freie Enzyklopädie [1] Abgeschrägte Hexaeder
- Wirth J. [1] Reguläre und halbreuläre Polyeder, Frühjahrsakademie Mathematik 2005, Bericht der TU Bergakademie Freiberg; siehe auch [www.mathe.tu-freiberg.de/wirth/](http://www.mathe.tu-freiberg.de/wirth/)

### Autor:

Dr. Karlhorst Meyer  
Kyffhäuserstraße 20  
85579 Neubiberg

Eingereicht am 20. Juni 2012.