Helene Keller
Karlhorst Meyer

Über reguläre und semireguläre Polyeder

1. Einleitung

Das Folgende ist für gute Schülerinnen und Schüler in Wahlpflichtkursen, Arbeitsgemeinschaften, Schülerseminaren, Pluskursen, außerschulischem Unterricht u. ä. geeignet. Im vorliegenden Text wird versucht, alle geometrischen Sachverhalte wie auch die Überlegungen so darzustellen, dass der Lehrer[1] sie ohne allzu große Vorbereitungsarbeit einsetzen kann. Ähnlich verhält es sich mit Verweisen; sie wurden auf ein Minimum beschränkt. Die Materie der halbregulären (hier semiregulär genannten) Körper ist zu umfangreich, um an der Schule umfassend dargestellt zu werden. An der Schule wird sich der Lehrer auf die Vermittlung von Raumanschauung und auf das Rechnen mit Quadratwurzeln beschränken. Wenn hier eine gewisse Vollständigkeit angestrebt wird, um dem Lehrer die Arbeit zu erleichtern, heißt das nicht, dass in jedem Kurs alles unterrichtet werden muss. Der Lehrer wird für seine Schüler eine passende Auswahl zwischen den Extremen eines reinen Bastelkurses bis hin zum Verstehen der Zusammenhänge der untersuchten Körper finden. Im Einzelnen wird auf Kapitel 5 verwiesen.

Die Anfänge der Ausarbeitung sind ursprünglich das Ergebnis eines halbjährigen Wahlpflichtkurses (2. Halbjahr in 1998/99 bzw. 2001/02 an der Herder-Schule, Gymnasium in Frankfurt am Main), in dem die Schüler der Klasse 9 reguläre und eine gewisse Klasse von semiregulären Körpern so herstellen sollten, dass sie die Abhängigkeit der semiregulären Körper von den regulären Körpern erkennen konnten (nach O'DAFFER [1]). Nach einem ersten Kurs, der etwa den Erfolg eines Bastelkurses hatte, sollten im zweiten Versuch auch die Volumina und die Oberflächen dieser Körper unter der Vorgabe bestimmt werden, dass die Kantenlängen der regulären Ausgangskörper vorgegeben sind. Als Voraussetzung konnte man bei den Schülern nur das Volumen und die Oberfläche eines Quaders sowie den gerade neu gelernten Satz des PYTHAGORAS erwarten, zudem geometrische räumliche Anwendungen noch nicht ausreichend geübt waren.

2. Reguläre Vielecke

2.1 Rechenhilfen zur Algebra

Es werden einige gleichartige algebraische Umformungen häufiger gebraucht. Darum sollen sie im Voraus berechnet werden, um die geometrischen Beweise nicht damit zu belasten. Im Unterricht können zumindest die Inhalte des Kapitels 2.1 jeweils bei Bedarf behandelt werden.

Beispiel 2.1.1: Da $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20 < 25$ ist, folgt $2\sqrt{5} < 5$. Da $\sqrt{5} \pm 1 \geq 0$ ist, folgt

[1] Diese Abhandlung beschränkt sich bei Wörtern wie Lehrerinnen und Lehrern, Schülerinnen und Schülern u. ä. auf die männliche Sprachform. Man möge dies entschuldigen.

$\sqrt{\left(\sqrt{5}\pm 1\right)^2} = \left|\sqrt{5}\pm 1\right| = \sqrt{5}\pm 1$. Deshalb gilt: $(\sqrt{5}\pm 1)^2 = 5 \pm 2\sqrt{5} + 1 = 6 \pm 2\sqrt{5} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}\pm 1 = \sqrt{6\pm 2\sqrt{5}}$

Wer solche Umformungen nicht erkennt, kann mit einem Ansatz beginnen:
$6 + 2\sqrt{5} = \left(a + b\sqrt{5}\right)^2 = a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5}$; durch Koeffizientenvergleich findet man:

I $a^2 + 5b^2 = 6$
II $ab = 1$, d. h. $b = \frac{1}{a}$, da $a \neq 0$.
Man setzt II in I ein und erhält: $a^2 + \frac{5}{a^2} = 6$. Hieraus folgt $a^4 - 6a^2 + 5 = 0$ und $a^2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$. Alle hieraus folgenden 4 Lösungspaare (a, b) liefern die Lösung $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}$.

Das hier angedeutete Verfahren muss nicht zu einer Vereinfachung der Wurzeldarstellung führen, wie das nächste Beispiel zeigt:

Beispiel 2.1.2: Der Ansatz $\sqrt{\sqrt{5} + 4} = \sqrt{\left(a + b\sqrt{5}\right)^2}$ führt zu den Gleichungen
I $a^2 + 5b^2 = 4$ und
II $2ab = 1$, also $b = \frac{1}{2a}$.
Hieraus entsteht die biquadratische Gleichung $4a^4 - 16a^2 + 5 = 0$. Es folgt zunächst $a^2 = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{11} > 0$ und damit z. B. $a = \sqrt{2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{11}}$; das ist sicher keine Vereinfachung.

Es kann auch sein, dass a und b nicht im Reellen darstellbar sind.

Aufgabe 2.1.1 [2]: Berechne die Quadrate (binomische Formeln), fasse zusammen und vereinfache. Dann ziehe die Wurzel; bearbeite wie im Beispiel:
$a)\ \sqrt{14 \pm 6\sqrt{5}} = \pm\sqrt{5} + 3 \Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{5} + 3\right)^2 = 14 \pm 6\sqrt{5}$
$b)\ \sqrt{30 \pm 10\sqrt{5}} = \pm\sqrt{5} + 5 \Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{5} + 5\right)^2 = 30 \pm 10\sqrt{5}$
Berechne nun völlig selbstständig: $c)\ \sqrt{70 \pm 30\sqrt{5}}$ und $d)\ \sqrt{9 \pm 4\sqrt{5}}$

2.2 Reguläre Vielecke

Definition 2.2.1: a) Durch Strecken begrenzte ebene geschlossene Figuren heißen Vielecke, *n*-Ecke oder **Polygone**; sie heißen **konvex**, wenn die zwischen zwei beliebigen Randpunkten gelegene Strecke ganz im Inneren des Polygons liegt.

b) Ein *n*-Eck heißt **regulär**, wenn das *n*-Eck konvex ist und alle an ihm messbaren entsprechenden Stücke gleich groß sind, d. h.:

1. Alle Seiten sind gleich lang.
2. Alle Winkel zwischen zwei aneinandergrenzenden Seiten sind gleich groß.
3. Es gibt ein Zentrum, von dem alle Ecken gleich weit entfernt sind, es gibt also einen Umkreis.
4. Zu jeder Seite gehört ein Zentrumswinkel; alle Zentrumswinkel sind gleich groß, nämlich $\frac{360^{\circ}}{n}$ usw.

[2] Die Lösungen zu den Aufgaben befinden sich in Kapitel 6.

Alle diese und auch andere Eigenschaften sind für die Regularität notwendig; ein Teil dieser Bedingungen ist dafür hinreichend, dass ein *n*-Eck regulär ist.

Aufgabe 2.2.1: Nenne hinreichende Bedingungen für die Regularität eines *n*-Ecks.

2.3 Formeln für den Flächeninhalt einiger regulärer *n*-Ecke

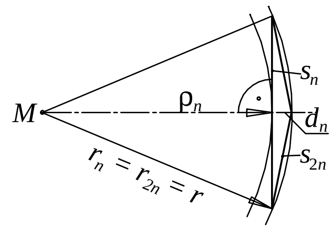
Vereinbarung: Im Folgenden wird manchmal nur von *n*-Ecken gesprochen, wenn reguläre gemeint sind.

Es werden Formeln für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Seitenlänge s angegeben, weil diese am leichtesten messbar ist. Offenbar ist für ein Quadrat der Flächeninhalt s^2. Bei den regulären Vielecken der nächsten Aufgabe zerlegt man das *n*-Eck mit Hilfe seines Zentrums in n kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Inhalt mittels $\frac{sh}{2}$ mit der Dreieckshöhe h berechnet wird. Den Zusammenhang zwischen s und h findet man mit dem Satz des PYTHAGORAS.

Aufgabe 2.3.1: Überprüfe die Tabelle:

Reguläres	Dreieck	Viereck	Sechseck	Achteck
Flächeninhalt	$\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$	s^2	$\frac{3}{2}s^2\sqrt{3}$	$2s^2(\sqrt{2}+1)$

Hier fehlt das reguläre Fünfeck, dessen Inhalt jetzt berechnet wird:



Namengebung:
Die folgenden Formeln finden sich in zahlreichen Formelsammlungen, Schulbüchern und sonstigen Büchern. Sie beziehen sich auf ein reguläres *n*-Eck mit der Seitenlänge s_n, dem Inkreisradius ρ_n und dem Umkreisradius r_n. Bei Zusammenhängen zwischen *n*-Eck und 2*n*-Eck wird i. Allg. vorausgesetzt, dass beide denselben Umkreis haben. A_n ist der Flächeninhalt des gezeichneten Teildreiecks des *n*-Ecks (siehe die Abbildung). Das reguläre *n*-Eck hat also den Gesamtinhalt $n \cdot A_n$.

Aufgabe 2.3.2: Beweise mit dem Satz des PYTHAGORAS anhand der letzten Zeichnung die Formeln:

$$s_{2n} = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}} \tag{1}$$

$$\rho_n = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2} \tag{2}$$

$$A_n = \frac{r s_n}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2} \tag{3}$$

Aufgabe 2.3.3: Begründe zunächst jeweils eine Seite der folgenden Dann-und-nur-dann-Aussagen mit deinen geometrischen Kenntnissen und anschließend den jeweils dargestellten algebraischen Zusammenhang:

a) $s_{10} = \frac{r_{10}}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \iff r_{10} = \frac{s_{10}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$

b) $s_{10} = \frac{2}{5}\rho_{10}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \iff \rho_{10} = \frac{s_{10}}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

c) $s_5 = \frac{r_5}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad r_5 = \frac{s_5}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$

d) $s_5 = 2\rho_5\sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_5 = \frac{s_5}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

e) $\rho_{10} = \frac{r_{10}}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad r_{10} = \frac{\rho_{10}}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$

f) $\rho_5 = \frac{r_5}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad r_5 = \rho_5\left(\sqrt{5}-1\right)$

Nun kann man den Flächeninhalt A_n des Fünf- und Zehnecks gemäß $A_n = \frac{n \cdot \rho_n \cdot s_n}{2}$ berechnen und so die Tabelle der Aufgabe 2.3.1 ergänzen zu:

Zusammenfassung 2.3:

Reguläres	Dreieck	Viereck	Fünfeck	Sechseck	Achteck	Zehneck
Flächeninhalt	$\frac{s^2}{4}\sqrt{3}$	s^2	$\frac{s^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{3}{2}s^2\sqrt{3}$	$2s^2\left(\sqrt{2}+1\right)$	$\frac{5}{2}s^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

3. Die PLATONischen Körper

3.1 Reguläre Polyeder

Entsprechend zu den Regularitätsforderungen bei konvexen Vielecken geht man im Raum vor:

Definition 3.1.1: Ein von ebenen Flächenstücken begrenzter räumlicher Körper heißt **Polyeder.** Das Polyeder heißt **konvex**, wenn die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten seiner Oberfläche (genannt Rand) ganz innerhalb des Körpers liegt.

Definition 3.1.2:. Ein konvexer Körper heißt **regulär**, wenn

- alle Begrenzungsflächen (genannt **Seiten** oder Seitenflächen) kongruente reguläre Vielecke sind,
- alle Winkel zwischen Seitenflächen, die eine Kante gemeinsam haben, gleich groß sind.

Satz 3.1.3: Es gibt nur 5 PLATONische[3] Körper, die konvex sind und nur kongruente reguläre Seitenflächen haben. Sie haben entweder nur Dreiecke oder nur Quadrate oder nur Fünfecke als Seiten. Nach der Anzahl der vorkommenden Seitenflächen werden sie regelmäßiges **Tetraeder** (4 Flächen), **Würfel** (6 Flächen), regelmäßiges **Oktaeder** (8 Flächen), regelmäßiges **Dodekaeder** (12 Flächen), regelmäßiges **Ikosaeder** (20 Flächen) genannt. Das Wort „regelmäßig“ wird oft weggelassen.

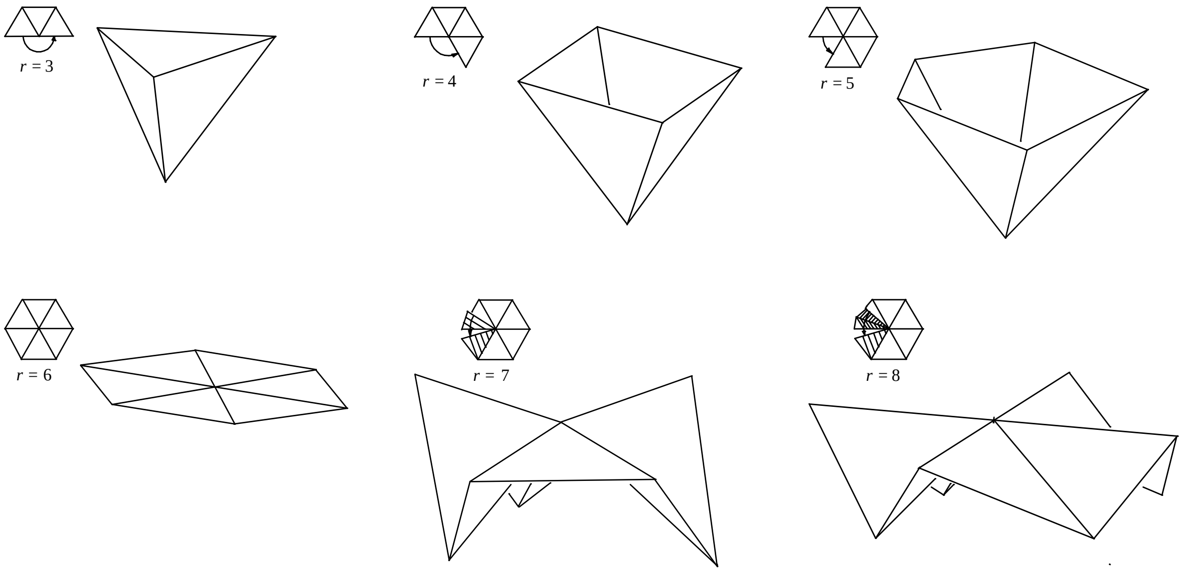
Definition 3.1.4: Falls sich an einer Ecke eines Polyeders *r* Polygone treffen, so nennt man das Gesamtgebilde aus *r* Polygonen eine **Raumecke** des Polyeders.

> **Aufgabe 3.1.1:** Begründe die Existenz des Würfels, des Tetraeders und des Oktaeders aus der Eigenschaft der jeweiligen Raumecke, die aus 3 Quadraten bzw. 3 gleichseitigen Dreiecken bzw. 4 gleichseitigen Dreiecken besteht.

[3] Platon, antiker griechischer Philosoph, geboren 428/427 v. Chr. in Athen oder Aigina, gestorben 348/347 in Athen

Zum Beweis zu Satz 3.1.3:
I Die Existenz der 5 PLATONischen Körper ist nach Aufgabe 3.1.1 und im Wesentlichen mit Hilfe der Kapitel 3.2.1 bzw. 3.2.2 erwiesen. Man kann diese Körper basteln.

II Satz 3.1.3 besagt aber auch, dass es keine weiteren regulären Körper geben kann, die konvex sind; dies wird hier gemäß MEYER U. A. [1] gezeigt:
Man betrachtet eine Ecke eines konvexen Körpers. An ihr stoßen r ebene n-Ecke zusammen. r heißt **Eckengrad,** n **Seitengrad**. Bei den regulären (konvexen) Körpern sind die n-Ecke regulär und alle Raumecken zueinander kongruent. Man überlegt, wie groß hierbei r sein kann, damit die n-Ecke wirklich eine Raumecke eines konvexen Körpers bilden können.



Für eine Raumecke benötigt man mindestens 3 Polygone:

n = 3: Das reguläre konvexe Vieleck mit der kleinsten Eckenanzahl ist das gleichseitige Dreieck. Für r = 3 bekommt man eine Lösung, wie dies etwa beim regulären Tetraeder der Fall ist. Die letzte Abbildung zeigt, dass auch für die Fälle r = 4 und r = 5 eine Raumecke entsteht, wohingegen für r = 6 keine solche entsteht, da dann alle beteiligten Dreiecke in einer Ebene liegen, also keine Raumecke bilden können. Für höhere r (in der Abbildung gezeigt für r = 7 und r = 8) kann man sich zwar Raumecken eines Körpers vorstellen, diese gehören aber dann zu einem Körper, der offenbar nicht mehr konvex ist.

Aus diesen Überlegungen erkennt man bereits:

Satz 3.1.5: Die Summe der an einer Raumecke beteiligten Winkel ist bei einem konvexen Körper kleiner als 360^o.

n = 4: Drei Quadrate stoßen zu einer Raumecke wie beim Würfel aneinander. r = 4 ist nicht möglich, da 4 aneinandergeheftete Quadrate eine Ebene bilden. Für r > 4 gibt es keine Ecke eines konvexen Körpers.

n = 5: Nach oben beträgt der Winkel zwischen zwei angrenzenden Seiten eines regulären konvexen Fünfecks 108^o. D. h. für r = 3 bekommt man eine Raumecke, für r > 3 eine Raumecke eines nicht konvexen Körpers.

$n = 6$: Der Winkel zwischen zwei angrenzenden Seiten eines konvexen regulären 6-Ecks beträgt 120°. Da man für eine Raumecke mindestens 3 Flächen benötigt, liegen also 3 verheftete reguläre Sechsecke in einer Ebene und bilden keine Raumecke. Für $r > 3$ ergibt sich aber keine Ecke eines konvexen Körpers.

Für $n > 6$ ist der Winkel zwischen zwei benachbarten n-Eck-Seiten $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ und damit das mindestens Dreifache $540^\circ - \frac{3 \cdot 360^\circ}{n} > 540^\circ - \frac{3 \cdot 360^\circ}{6} = 360^\circ$; also kann es keine Raumecke geben.

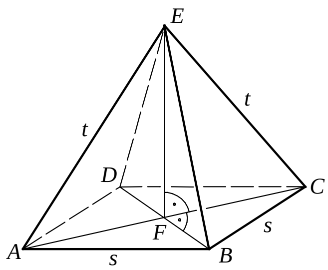
Zusammengefasst haben wir die folgenden Möglichkeiten für reguläre konvexe Körper:

N	3	3	3	4	5
r	3	4	5	3	3
wie beim	Tetraeder	Oktaeder	Ikosaeder	Würfel	Dodekaeder

Definition 3.1.6: Eine Kugel, die durch alle Ecken eines Polyeders geht, heißt **Umkugel** des Polyeders.

Es versteht sich von selbst, dass nur konvexe Polyeder eine Umkugel haben können und deren Mittelpunkt M im Inneren des konvexen Polyeders liegen muss.

3.2 Volumen und Oberfläche von Körpern



Noch immer werden im Normalcurriculum nahezu aller Bundesländer die Körper Würfel, Pyramide und Prisma behandelt, wobei hier das Prisma außer dem Spezialfall Würfel kaum eine Rolle spielt.

Vereinbarung: Es werden hier nur Pyramiden oder Prismen betrachtet, deren **Grundfläche** bzw. Deckfläche ein reguläres konvexes Vieleck der **Grundkantenlänge** *s* ist. Alle übrigen Kanten des Körpers sollen die gleiche Länge *t* haben. Diese Normierung ist sinnvoll, da man an ebenflächig begrenzten Körpern vor allem die Kantenlängen messen kann.

Der Würfel hat $s = t$ und damit gilt für seinen Rauminhalt $V = s^3$.

Für eine Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h ist der Rauminhalt $V = \frac{Gh}{3}$. Ist die Grundfläche ein Quadrat der Kantenlänge s, so ist $G = s^2$. Man benötigt einen Zusammenhang zwischen t, s und h, den der Satz des PYTHAGORAS liefert, wenn man die rechtwinkligen Dreiecke im Inneren der Pyramide in der letzten Abbildung betrachtet:

Man findet $|\overline{FC}| = \sqrt{\frac{s^2}{2}}$ und $h = |\overline{EF}| = \sqrt{t^2 - \frac{s^2}{2}}$; also gilt $V = \frac{s^2}{3}\sqrt{t^2 - \frac{s^2}{2}} = \frac{s^2}{6}\sqrt{4t^2 - 2s^2}$.

Im Fall $s = t$ folgt hieraus $V = \frac{\sqrt{2}}{6}\, s^3$.

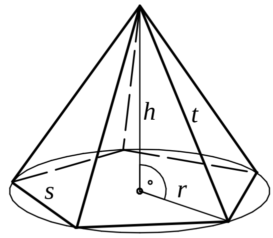
> **Aufgabe 3.2.1:** Finde Formeln für das Volumen des regelmäßigen Tetraeders und des regelmäßigen Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge *s*.

Weiter wird benötigt:

Definition 3.2.1: Eine Pyramide mit einem regulären *n*-Eck als Grundfläche heißt **gerade,** wenn die Gerade durch die Spitze und den Mittelpunkt des *n*-Ecks senkrecht auf der Grundfläche steht. Ein Prisma heißt gerade, wenn die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen.

Wegen der oben getroffenen Vereinbarung gilt:

Satz 3.2.2: Alle hier betrachteten Pyramiden und Prismen sind gerade.



Beispiel 3.2.1.: Berechne das Volumen einer geraden Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck mit der Kantenlänge *s* ist und dessen sonstige Kanten die Länge *t* haben.

Lösung:

Nach Zusammenfassung 2.3 gilt: $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{s^2}{12}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot \sqrt{t^2 - \frac{s^2}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)}$

Hierbei wird eine Formel für die Pyramidenhöhe *h* wie folgt (siehe die letzte Zeichnung) benutzt:

$h = \sqrt{\mathrm{t}^2 - r^2}$, wobei nach Aufgabe 2.3.3 gilt $h = \sqrt{\mathrm{t}^2 - \frac{s^2}{100}\left(50+10\sqrt{5}\right)} = \sqrt{t^2 - \frac{s^2}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)}$.

Auch hier soll der Spezialfall $s = t$ angegeben werden:

Man findet $V = \frac{s^3}{12}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)}$ und multipliziert die Wurzeln aus:

$\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)} = \sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)\frac{1}{10}\left(10-5-\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{30+10\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+10\sqrt{5}+5} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)$

Hieraus folgt: $V = \frac{s^3}{24}\left(5+\sqrt{5}\right)$

3.2.1. Berechnung des Volumens eines Ikosaeders:

Hierzu muss man sich mit der räumlichen Konfiguration dieses Körpers befassen:

Satz 3.2.1.1: An jeder Ikosaeder-Ecke *S* treffen 5 gleichseitige Dreiecke zusammen; die Dreiecksecken sind von S gleich weit entfernt und bilden ein reguläres und damit ebenes 5-Eck. Die 5 Dreiecke bilden zusammen mit dem 5-Eck eine gerade Pyramide, deren 5 Seiten gleichseitige, kongruente Dreiecke sind.

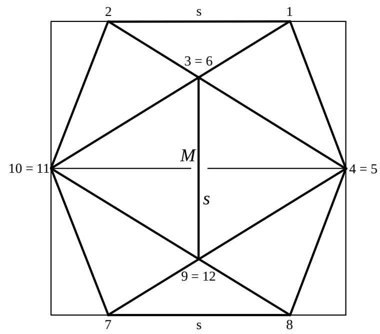
Beweis:

Das Ikosaeder ist ein regulärer Körper; deshalb sind auch die Winkel zwischen zwei benachbarten Dreiecken überall die gleichen. In Folge gibt es durch die Pyramidenspitze eine Achse, um die Drehungen die Pyramide in sich überführen und damit auch die Ecken der Grundfläche; also müssen diese auf einem Kreis liegen und die Pyramide ist gerade. Da aber die Grundkanten alle dieselbe Länge haben, handelt es sich sogar um ein reguläres 5-Eck. Aus Symmetriegründen ist die im Satz beschriebene Pyramide gerade.

Satz 3.2.1.2: Jeder der in Satz 3.2.1.1 beschriebenen 5-seitigen Pyramide liegt eine zweite solche gegenüber, deren Grundfläche gegenüber der ersten um $72^{\circ}: 2 = 36^{\circ}$ verdreht ist. Zwischen je zwei solchen Pyramiden liegt ein Gürtel aus 10 gleichseitigen Dreiecken, die jeweils mit einer Kante verbunden sind.

Beweis:

Die beiden Grundkreise haben nach Konstruktion des Ikosaeders den gleichen Radius. Ihre Ebenen sind parallel, weil die sie verbindenden 10 Dreiecke alle gleichseitig sind. In der nächsten Abbildung werden nur die Nummern der Ecken P_1 bis P_{12} des Ikosaeders angegeben. Die Spitze der Pyramide von Satz 3.2.1.1 sei P_1, die Ecken des regulären 5-Ecks haben die Bezeichnungen P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6. Man kann die 5-seitige Pyramide so legen, dass die Kante P_1P_2 waagrecht ist und dann um diese Kante so drehen, dass P_4P_5 senkrecht wird, d. h. das 5-Eck $P_2P_3P_4P_5P_6$ ist projizierend, zeigt sich also als Strecke. Damit liegen in dieser Ansicht auch die Punkte P_3 und P_6 übereinander. Dann muss auch die zweite 5-seitige gerade Pyramide mit der Spitze P_7 ein 5-Eck $P_8P_9P_{10}P_{11}P_{12}$ als Grundfläche haben, das sich – wegen Satz 3.2.1.1 – ebenfalls als Strecke zeigt bzw. muss eine Kante P_7P_8 haben, die sich für den Betrachter waagrecht zeigt, und muss eine Kante $P_{10}P_{11}$ haben, die der Betrachter als einen Punkt sieht, also ebenfalls übereinanderliegen.



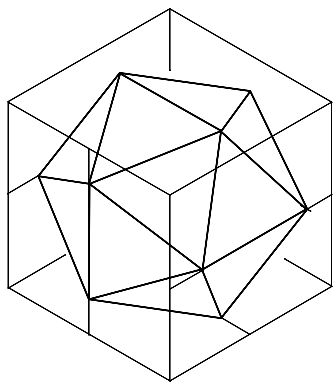
Aus Symmetriegründen sind dann P_3P_9 und P_6P_{12} jeweils waagrecht (siehe obigen Grundriss). Alle Ecken müssen also vom Mittelpunkt M des Würfels gleich weit entfernt sein; das Ikosaeder hat deshalb einen Mittelpunkt M. Die in der Ansicht oben waagrechten und senkrechten Kanten liegen alle auf einem Würfel der Kantenlänge d. Aus Obigem folgt $|\overline{P_3P_6}| = d$, das ist die Länge einer Diagonalen in einem regulären 5-Eck. Diese soll jetzt mit den Ergebnissen der Aufgabe 2.3.3 und dem Satz des PYTHAGORAS berechnet werden:

$$d^2 = (r+\rho)^2 + \frac{s^2}{4} = \left(\frac{s}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} + \frac{s}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{s^2}{4} =$$
$$= \frac{s^2}{100}\left(50+10\sqrt{5}+25+10\sqrt{5}+2\sqrt{(50+10\sqrt{5})(25+10\sqrt{5})}+25\right) =$$
$$= \frac{s^2}{100}\left(100+20\sqrt{5}+10\sqrt{70+30\sqrt{5}}\right) = \frac{s^2}{10}\left(10+2\sqrt{5}+\sqrt{70+30\sqrt{5}}\right) =$$
$$= \frac{s^2}{10}\left(10+2\sqrt{5}+\sqrt{25+45+30\sqrt{5}}\right) = \frac{s^2}{10}\left(10+2\sqrt{5}+\sqrt{\left(5+3\sqrt{5}\right)^2}\right) = \frac{s^2}{10}\left(10+2\sqrt{5}+5+3\sqrt{5}\right) =$$
$$= \frac{s^2}{100}\left(150+50\sqrt{5}\right) = \frac{s^2}{4}\left(6+2\sqrt{5}\right) = \frac{s^2}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

Der letzte Schritt wurde bereits in Beispiel 2.1.1 ausgeführt. Damit hat man:

Satz 3.2.1.3: Jede Diagonale eines regulären Fünfecks mit der Seitenlänge s hat die Länge

$$d = \frac{s}{2}\left(1+\sqrt{5}\right). \qquad (1)$$



Zur besseren Vorstellung wird in der nebenstehenden Abbildung noch ein Schrägbild der Gesamtkonfiguration angegeben, wobei die unsichtbaren Kanten weggelassen sind.

Es folgt die Berechnung des Umkugel-Radius R:

Da z. B. in der oberen Zeichnung die Ecke P_1 in derselben Höhe wie M liegt, sieht man also dort $R = |\overline{P_1M}|$ in wahrer Größe; $|\overline{P_3P_6}|$ ist in obigem Grundriss eine Diagonale im Fünfeck; deshalb gilt mit (1):

$$R^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + \frac{s^2}{4} = \frac{s^2}{16}\left(6+2\sqrt{5}+4\right) = \frac{s^2}{16}\left(10+2\sqrt{5}\right), \quad \text{also} \quad R = \frac{s}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Satz 3.2.1.4: Das Ikosaeder mit der Kantenlänge *s* hat eine Umkugel (also eine Kugel durch all seine Ecken) mit Radius $R = \frac{s}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Deshalb kann das Ikosaeder der Kantenlänge *s* in 20 dreiseitige gerade Pyramiden zerlegt werden, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge *s* ist. Die übrigen Kanten der Pyramiden haben die Kantenlänge *R* des Satzes 3.2.1.4. Es folgt die Berechnung des Volumens der genannten dreiseitigen Pyramiden:
Zunächst wird die Höhe *h* im gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge *s* berechnet: $h^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4}s^2$
Hieraus folgt $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$. ρ sei die Höhe der dreiseitigen Pyramide; ihr Fußpunkt ist der Schwerpunkt der gleichseitigen Grunddreiecksfläche; also findet man mit Satz 2.4.3 nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS:

$$\rho^2 = R^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{s}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{s}{4}\right)^2\left(10 + 2\sqrt{5}\right) - \frac{s^2}{3} = \left(\frac{s}{12}\right)^2\left(90 + 18\sqrt{5} - 48\right) = \left(\frac{s}{12}\right)^2\left(42 + 18\sqrt{5}\right) =$$
$$= \left(\frac{s}{12}\right)^2 \cdot 3 \cdot \left(9 + 5 + 6\sqrt{5}\right) = \left(\frac{s}{12}\right)^2 \cdot 3 \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)^2$$

Definition 3.2.1.5: Gibt es in einem Polyeder eine Kugel, die alle seine Seitenflächen berührt, so heißt diese **Inkugel**.

Es versteht sich von selbst, dass nur konvexe Polyeder eine Inkugel haben können. Wie dem Vorstehenden zu entnehmen ist, gilt:

Satz 3.2.1.6: Alle PLATONischen Körper haben eine In- und eine Umkugel. Beide haben den oben mit *M* bezeichneten Mittelpunkt.

Aufgabe 3.2.1.1: Beweise den folgenden Satz.

Satz 3.2.1.7: Das Ikosaeder hat eine Inkugel (die alle Seitenflächen in deren Schwerpunkt berührt) mit Mittelpunkt *M* und Radius $\rho = \frac{s}{12}\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{5}\right)$.

Das Volumen *v* einer solchen zu einer Seitenfläche des Ikosaeders gehörigen Pyramide beträgt:

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{12}\sqrt{3} \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{s^3}{48}\left(3 + \sqrt{5}\right)$$

Da das Ikosaeder aus 20 solchen Pyramiden besteht, findet man als Gesamtvolumen $V = \frac{5s^3}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right)$.

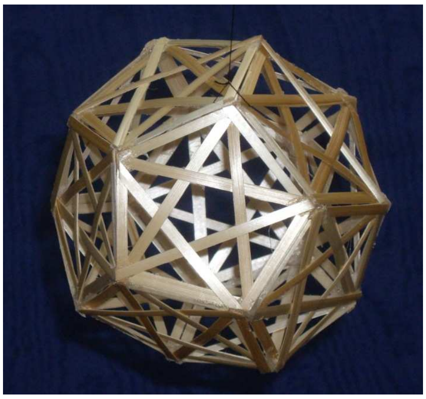
3.2.2 Berechnung des Volumens eines Dodekaeders:

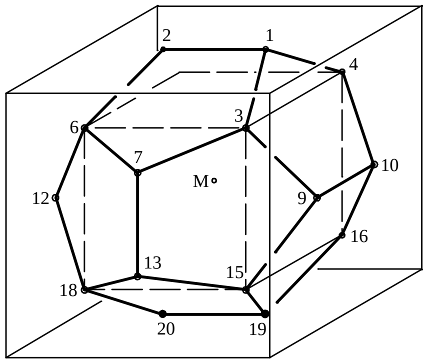
Das Dodekaeder wird von 12 Fünfecken berandet, wobei an jeder Raumecke 3 Fünfecke beteiligt sind. 12 Fünfecke haben 60 Kanten, da aber jeweils 2 Fünfecke eine Kante gemeinsam haben, hat man so jede Kante doppelt gezählt. Der Körper hat also 30 Kanten. Jede Kante trägt zwei Raumecken; bei dieser Zählung kommt jede Raumecke dreifach vor, weil an jeder solchen 3 Kanten verknüpft sind. Also gibt es $(30 \cdot 2) : 3 = 20$ Ecken.

Satz 3.2.2.1: Das Dodekaeder hat 12 Fünfecke als Oberfläche (Rand), 30 Kanten und 20 Ecken, von denen jede zu 3 Fünfecken gehört.

Als Nächstes werden die Dodekaeder-Ecken von 1 bis 20 so nummeriert, dass die Ecken P_1 und P_2 ganz oben und die Ecken P_{19} und P_{20} ganz unten liegen. Die weiteren Ecken sind von oben nach unten nummeriert. In der rechten Zeichnung findet man statt P_i nur *i*. In dem Schrägbild wird davon ausgegangen, dass der äußere Würfel aus Glas und das Dodekaeder undurchsichtig sind.

Beim inneren Würfel sind einige Kanten gestrichelt.

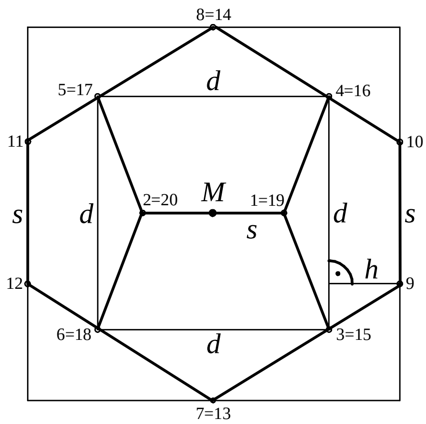




Wählt man eine beliebige Dodekaeder-Kante P_1P_2 aus, dann treffen sich in P_1 die kongruenten regulären Fünfecke $P_1P_3P_7P_6P_2$, $P_1P_3P_9P_{10}P_4$ und $P_1P_4P_8P_5P_2$ bzw. in P_2 die kongruenten regulären Fünfecke $P_2P_5P_8P_4P_1$, $P_1P_3P_7P_6P_2$ und $P_2P_5P_{11}P_{12}P_6$ (siehe die nächste Zeichnung). Man erkennt, dass u. a. die Strecken $\overline{P_9P_{10}}$ und $\overline{P_{11}P_{12}}$ parallel sind. Man kann aber auch mit jedem anderen benachbarten Eckenpaar beginnen; also gilt:

Satz 3.2.2.2: Zu jeder Kante eines Dodekaeders gibt es eine hierzu parallele Kante. Es gibt deshalb drei Paare $\{P_1P_2,\ P_{19}P_{20}\}, \{P_9P_{10},\ P_{11}P_{12}\}, \{P_7P_{13},\ P_8P_{14}\}$ jeweils paralleler Kanten, die auf einem Würfel mit der Kantenlänge $|\overline{P_1P_{19}}|$ um das Dodekaeder liegen. Jedes Kantenpaar bestimmt eine Symmetrieebene (es gibt auch noch weitere), die sich alle im Mittelpunkt des Quaders schneiden, der dann auch Mittelpunkt *M* des Dodekaeders ist.

Man betrachtet nun diesen Würfel von oben (siehe die Zeichnung). Man schneidet ausgehend von der Kante P_1P_2 durch die Hilfsgeraden P_3P_4, P_4P_5, P_5P_6 und P_6P_3, die alle Diagonalen der Länge *d* in regulären 5-Ecken sind und wegen der bereits erkannten Symmetrien deshalb ein Quadrat bilden; es entsteht ein Walmdach (suche das Walmdach in nebenstehender Zeichnung).



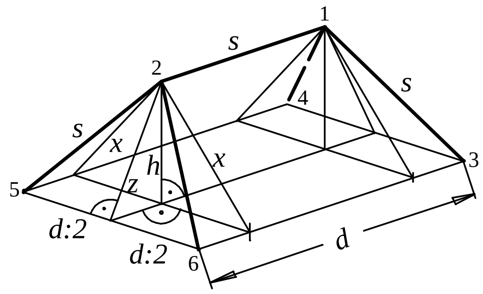
Man kann auf diese Weise 6 kongruente Walmdächer vom Dodekaeder abschneiden; übrig bleibt ein Körper, der von 6 Quadraten begrenzt wird, also ein Würfel der Kantenlänge *d* ist; nach Formel Satz 3.2.1.3 gilt: $d = |\overline{P_3P_4}| = \frac{s}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Aufgabe 3.2.2.1: Im alten Griechenland erzählte man von einem Mathematiker namens HIPPASOS (es gibt drei Varianten der Legende; eine davon findet man bei IAMBLICHOS, Vita Pyth. 246-247[4]), der gefesselt in ein Boot gelegt und dem Meer übergeben worden ist. Was hatte er angestellt? Er hat den üblichen „Geheimbund der Mathematiker“ verraten und dem „gemeinen Volk“ gelehrt, dass das Dodekaeder eine Umkugel hat bzw. wie man mit wenigen Schnitten aus einer Rübe einen Dodekaeder schnitzen kann. *Begründe:* Welchen Winkel muss man kennen, um aus einem Würfel mit wie vielen Schnitten einen Dodekaeder zu bekommen? Die Berechnung des Winkels ist erst nach der Klasse 10 möglich.

[4] nach B. L. VAN DER WAERDEN: Die Pythagoreer, Die Bibliothek der Alten Welt, Artemis Verlag, Zürich u. München 1979, Seite 71 ff.

Berechnung des Walmdachvolumens:

Das Walmdach besteht aus zwei Hälften einer geraden Pyramide auf einem Rechteck und einem geraden Prisma, dessen Grundfläche ein Dreieck ist. Die ganze Pyramide hat ein Grundrechteck der Längen d und $(d-s)$; ihre Höhe sei h, die es zu berechnen gilt. Das dreiseitige Prisma hat ein Grunddreieck der Kanten d, x und x (siehe die Walmdachskizze). Die Höhe in diesem Dreieck ist h; damit ist der Inhalt des Grunddreiecks $\frac{dh}{2}$ und deshalb das Volumen des Prismas $\frac{sdh}{2}$; das Volumen der Pyramide beträgt $\frac{d(d-s)h}{3}$. Hieraus erhält man als Volumen des Walmdachs $V_W = dh\left(\frac{s}{2}+\frac{d-s}{3}\right)$.



(1)

Mit den Bezeichnungen obiger Skizze folgt die Berechnung der Höhe h nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS:

Mit $y := \frac{1}{2}(d-s)$ und $z^2 = s^2 - \frac{d^2}{4}$ folgt mit der Diagonalenlänge im 5-Eck (Satz 3.2.1.3):

$h^2 = z^2 - y^2 = s^2 - \frac{d^2}{4} - \frac{1}{4}(d-s)^2 = \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{2}ds - \frac{1}{2}d^2 = \frac{3}{4}s^2 + \frac{s^2}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) - \frac{s^2}{8}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = \frac{s^2}{4}$

Also ist $h = \frac{s}{2}$. Mit der Formel für die Diagonalenlänge im 5-Eck (Satz 3.2.1.3) und obigem (1) findet man:

$$V_W = \frac{s}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\cdot\frac{s}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}+\frac{\frac{s}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)-s}{3}\right) = \frac{s^3}{24}\left(3\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(1+\sqrt{5}\right)^2-2\left(1+\sqrt{5}\right)\right) = \frac{s^3}{24}\left(7+3\sqrt{5}\right) \qquad (2)$$

Berechnung des Dodekaedervolumens:

$$V = d^3 + 6V_W = d^3 + 6dh\left(\frac{s}{2}+\frac{d-s}{3}\right) \qquad (3)$$

Hiermit findet man:

$$V = \frac{s^3}{8}\left(1+\sqrt{5}\right)^3 + 6\cdot\frac{s^3}{24}\left(7+3\sqrt{5}\right) = \frac{s^3}{4}\left(\frac{1}{2}\left(1+3\sqrt{5}+3\cdot 5+5\sqrt{5}\right)+7+3\sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{s^3}{4}\left(8+4\sqrt{5}+7+3\sqrt{5}\right) = \frac{s^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$$

Zusammenfassung 3.2:

Körper	Würfel	Gerade quadratische Pyramide	Gerade Quadratische Pyramide mit $s=t$	Gerade Pyramide auf gleichseitigem Dreieck	Regelmäßiges Tetraeder also $s=t$	Reguläres Oktaeder also $s=t$
Volumen V	s^3	$\frac{s^2}{6}\sqrt{4t^2-2s^2}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}s^3$	$\frac{s^2}{12}\sqrt{3t^2-s^2}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}s^3$	$\frac{\sqrt{2}}{3}s^3$

Körper	Gerade Pyramide auf regulärem Fünfeck $s \neq t$	Gerade Pyramide auf regulärem Fünfeck $s=t$	Ikosaeder also $s=t$	Dodekaeder also $s=t$
Volumen V	$\frac{s^2}{12}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\cdot\sqrt{t^2-\frac{s^2}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)}$	$\frac{s^3}{24}\left(5+\sqrt{5}\right)$	$\frac{5s^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$	$\frac{s^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$

4. Spezielle semireguläre Körper

4.1 Definition

In Anlehnung an WIRTH [1]:

Definition 4.1.1: Ein konvexes Polyeder heißt **regulär**, wenn alle seine Seitenflächen kongruente reguläre *n*-Ecke (Polygone) sind und an jeder Ecke *r*, also gleich viele, derartige *n*-Ecke aneinanderstoßen.

Um weitere konvexe Polyeder betrachten zu können, wird diese Definition dadurch geändert, dass man auf die Bedingung verzichtet, dass *alle* Seitenflächen kongruent sind.

Definition 4.1.2: Ein konvexes Polyeder heißt **semiregulär** (auch **halbregulär**), falls seine Seitenflächen reguläre Vielecke (Polygone) sind und es zu je zwei Ecken eine Drehung des Körpers gibt, die die beiden Ecken ineinander und ihn als Ganzes in sich überführt.
Man verzichtet also darauf, dass alle beteiligten regulären *n*-Ecke zueinander kongruent sind. Wie im Folgenden gezeigt werden wird, sind i. Allg. verschiedene reguläre *n*-Ecke beteiligt. Es wird hier darauf hingewiesen, dass es auch andere Semiregularitäten gibt; sie werden z. B. dadurch definiert, dass man auf die Regularität der begrenzenden Seitenflächen verzichtet, was etwa in der Kristallographie bedeutsam ist (siehe z. B. BIGALKE [1]).

Aus der Definition 4.1.1 folgt anschaulich:

Satz 4.1.3: In einem von regulären Vielecken begrenzten Polyeder sind alle Raumecken kongruent und umgekehrt.

Satz 4.1.4: Die regulären Polyeder sind auch halbregulär.

Satz 4.1.5: Alle Kanten eines semiregulären Polyeders sind gleich lang.

Neben den regulären Polyedern gibt es noch weitere halbreguläre (siehe WIRTH [1]):

4.2 Reguläre Prismen und Antiprismen

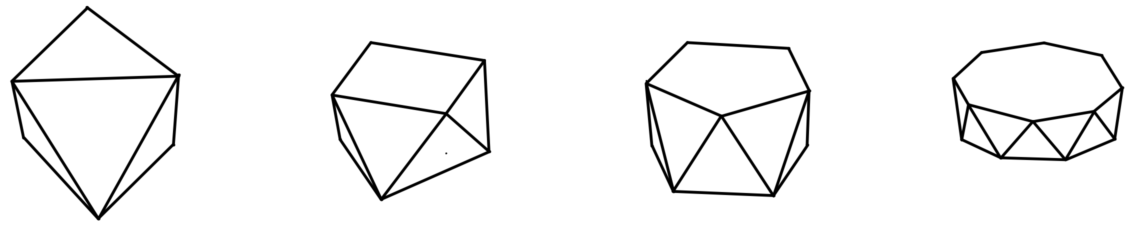
Definition 4.2.1: Ein gerades Prisma, bei dem alle Kanten gleich lang, Grundfläche und Deckfläche kongruente reguläre Polygone sind, heißt **reguläres Prisma**.

Satz 4.2.2: Das reguläre Prisma wird von zwei kongruenten *n*-Ecken und *n* Quadraten begrenzt. Zu jedem *n*-Eck gibt es ein reguläres Prisma. Jedes reguläre Prisma hat eine Umkugel.

Aufgabe 4.2.1: Beweise Satz 4.2.2.

Man beachte: Nicht alle regulären Prismen haben eine Inkugel.

Definition 4.2.3 (JOHANNES KEPLER 1571 – 1630)**:** An einem Körper liegen zwei reguläre *n*-Ecke mit ihren Mittelpunkten übereinander und sind um $\frac{360^0}{2n}$ gegeneinander verdreht. Darüber hinaus können die Kanten der *n*-Ecke durch zwei Reihen gleichseitiger Dreiecke (siehe die Abbildungen der nächsten Seiten) miteinander verbunden werden. Dann heißt der so entstandene Körper ***n*-Antiprisma**.



Verbindet man die Mittelpunkte M_1 und M_2 der in parallelen Ebenen liegenden n-Ecke, so ist die Mitte M von $\overline{M_1M_2}$ der Mittelpunkt einer Kugel, die offenbar durch alle Ecken des Körpers geht:

Satz 4.2.4: Die regulären Prismen und Antiprismen sind semireguläre Polyeder. Sie haben eine Umkugel, auf der alle Ecken liegen.

Man beachte: Die Antiprismen haben abgesehen vom einfachsten Fall keine Inkugel.

Aufgabe 4.2.2 (Trigonometrie!): Wie kann man das Volumen eines regulären Prismas bzw. Antiprismas mit $2n$ Ecken berechnen?

Aufgabe 4.2.3: Begründe mit einem geeigneten Beispiel, weshalb i. Allg. ein reguläres Prisma oder Antiprisma keine Inkugeln haben. Begründe die Existenz einer Inkugel beim Antiprisma, das als Grundfläche ein Dreieck hat. Begründe, dass dieses Antiprisma noch einen anderen Namen hat.

4.3 Die ARCHIMEDischen Körper

Es gibt aber noch 13 weitere semireguläre Polyeder, die weder regulär noch reguläre Prismen oder Antiprismen sind. Man nennt diese Körper zu Ehren von ARCHIMEDES[5] von Syrakus ARCHIMEDische Körper, obwohl nach WIRTH [1] erst JOHANNES KEPLER[6] ihre vollständige Liste gefunden haben soll.

4.3.1 Die Eckenmethode

Man findet die ARCHIMEDischen Körper mit Hilfe der kombinatorischen Untersuchung aller Möglichkeiten von Raumecken, jetzt aus verschiedenen Polygonen gebildet, wobei die Summe der Winkel an einer Raumecke kleiner als 360° sein muss. Es ergeben sich aber mehr Kombinationen als an Polyedern realisiert werden können. Auf dem Niveau dieser Abhandlung kann leider nicht genauer darauf eingegangen werden. Im Folgenden werden die existenten 13 ARCHIMEDischen Körper hinsichtlich der Eckenkombination und ihrer Form dargestellt. Hierbei bedeuten:

r Anzahl der regulären n-Ecke, die an jeder Raumecke beteiligt sind,
e Anzahl der Ecken des Polyeders,
k Anzahl der Kanten des Polyeders,
f Anzahl der Seitenflächen des Polyeders.

[5] Archimedes, antiker griechischer Mathematiker, Physiker und Ingenieur, geboren um 282 v. Chr. vermutlich in Syrakus auf Sizilien, gestorben 212 in Syrakus.
[6] Johannes Kepler, deutscher Naturphilosoph, Mathematiker, Astrologe, Astronom, Optiker, ev. Theologe, geboren am 27. 12. 1571 in Weil der Stadt, gestorben am 15. 11. 1630 in Regensburg.

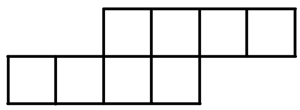
Die folgende Tabelle wird zunächst ohne Herleitung als Übersicht gegeben:

R	beteiligte *n*-Ecke an jeder Raumecke	*e*	*k*	*f*	Nummer der Abb.	Name des Körpers
3	3,6,6	12	18	8	1	Abgestumpftes Tetraeder
3	3,8,8	24	36	14	2	Abgestumpfter Würfel
3	3,10,10	60	90	32	3	Abgestumpftes Dodekaeder
3	4,6,6	24	36	14	4	Abgestumpftes Oktaeder
3	5,6,6	60	90	32	5	Abgestumpftes Ikosaeder
3	4,6,8	48	72	26	6	Großes Rhombenkuboktaeder
3	4,6,10	120	180	62	7	Großes Rhombenikosidodekaeder
4	3,4,3,4	12	24	14	8	Kuboktaeder
4	3,4,4,4	24	48	26	9	(Kleines) Rhombenkuboktaeder
4	3,5,3,5	30	60	32	10	Ikosidodekaeder
4	3,4,5,4	60	120	62	11	(Kleines) Rhombenikosidodekaeder
5	3,3,3,3,4	24	60	38	12	Cubus simus
5	3,3,3,3,5	60	150	92	13	Dodekaeder simum

Unter einer **Abwicklung** versteht man:

Liegt ein z. B. ebenflächig begrenzter Körper auf einer seiner Flächen, so kann man versuchen die hierzu benachbarten Flächenstücke in die Ebene der ersten Fläche um die sie verbindende Kante zu biegen. Hierzu wird man wohl vorher die Oberfläche des Körpers längs Kanten aufschneiden müssen. Dies geht allerdings beim selben Körper auf verschiedene Weise.
Gelingt dieser Vorgang, so bezeichnet man in der Schule, aber auch in der Kombinatorik und ihr verwandten Theorien, die Abwicklung als **Netz**. Im Zusammenhang mit den verschiedenen Möglichkeiten beim Aufschneiden der Oberfläche gehören zu einem Körper verschiedene Netze.

Aufgabe 4.3.1.1: Weshalb kann das nebenstehende Netz durch keine Abwicklung eines Würfels entstanden sein?



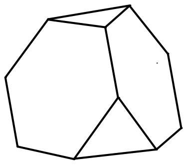
Auch wenn nicht jedes Netz eine Abwicklung ist, kann man aber anhand der obigen Tabelle ein solches konstruieren, wenn man daran denkt, dass durch Biegen der einzelnen *n*-Ecke um Kanten wieder ein Körper entstehen soll.

Aufgabe 4.3.1.2: Ein semireguläres Polyeder hat 12 Ecken, an denen jeweils ein reguläres Dreieck und zwei reguläre Sechsecke zusammenstoßen. Zeichne ein Bild des Körpers und sein Netz.

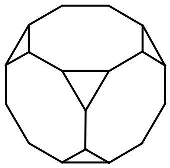
Mit spezieller Software ist es heute kein Problem am Bildschirm die Ansicht eines Körpers zu konstruieren, sogar so, dass man den Körper im Rechner drehen, also von allen seinen Seiten betrachten kann, obwohl das einzelne Bild immer noch auf dem Bildschirm plan ist. Mehr Verständnis wird in aller Regel das „Selber-Zeichnen“ der Körper z. B. durch Parallelprojektion bringen; die entstehenden Bilder nennt man dann Schrägbilder.

Allerdings benötigt man zum Fertigen der Schrägbilder jeweils die „innere Geometrie“ des Körpers, wie das dann in den folgenden Kapiteln genauer untersucht wird.

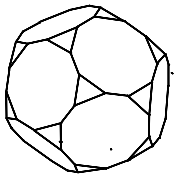
Es folgen Schrägbilder der 13 ARCHIMEDischen Körper:



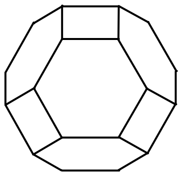
1. abgestumpftes Tetraeder



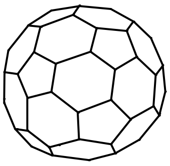
2. abgestumpfter Würfel



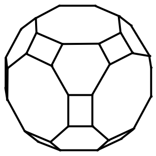
3. abgestumpftes Dodekaeder



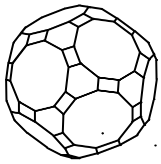
4. abgestumpftes Oktaeder



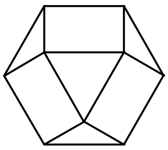
5. abgestumpftes Ikosaeder



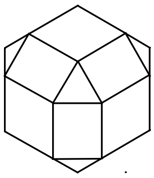
6. Großes Pseudorhombenkuboktaeder



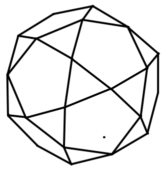
7. Großes Pseudorhombenikosidoktaeder



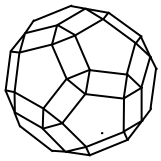
8. Kuboktaeder



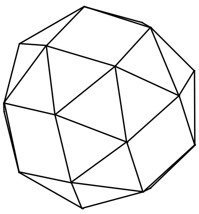
9. Kleines Pseudorhombenkuboktaeder



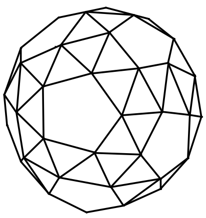
10. Ikosidodekaeder



11. Kleines Pseudorhombenikosidodekaeder



12. Cubus simus



13. Dodekaeder simum

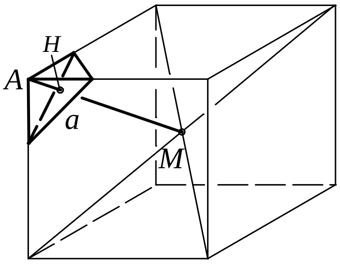
Aufgabe 4.3.1.3: Weshalb gibt es keinen ARCHIMEDischen Körper mit dem Eckenschema 4,5,5?

Hinweis für den Lehrer: Ohne Beweis wird angegeben: Die ARCHIMEDischen Körper mit den Nummern 12 und 13 sind ***chirale*** Körper, d. h. sie kommen jeweils in zwei verschiedenen Orientierungen vor, gehen also nur durch eine Spiegelung an einer Ebene in sich über (siehe auch MEYER KARLHORST [2]).
In allen anderen Fällen lassen sich die ARCHIMEDischen Körper sehr anschaulich durch das Verfahren des „Eckenabschneidens“ verstehen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird. Nach WIRTH [1] erhält man so nicht die ARCHIMEDischen Körper mit den Nummern 12 und 13.

4.3.2 Abschneiden von Ecken

4.3.2.1 Vom Würfel zum Oktaeder:

Will man eine Ecke A eines regulären Polyeders abschneiden um eine Oberfläche aus regulären n-Ecken zu bekommen, muss man senkrecht zu AM schneiden, wobei M der Mittelpunkt des regulären Ausgangspolyeders ist. D. h.: Man muss eine Schnittlinie a senkrecht zu AM in einer der beteiligten Seitenflächen festlegen und bekommt dann die weiteren Schnittlinien. Abgeschnitten wird bei diesem Verfahren zunächst eine Pyramide, deren Grundfläche ein reguläres r-Eck ist, wenn r der Grad dieser Ecke ist (siehe 3.1). Die Höhe der regulären Pyramide wird dann $|\overline{AH}|$ sein, wobei H der Schnittpunkt zwischen AM und der Schnittebene ist (siehe die Abbildung).



Da aber alle Körperkanten gleich lang sein sollen, muss die Schnittlinie a so gewählt werden, dass dies an allen Ecken des Seiten-n-Ecks möglich ist. Überraschend führt dies zu mehreren Lösungen, wie das Foto unten zeigt.

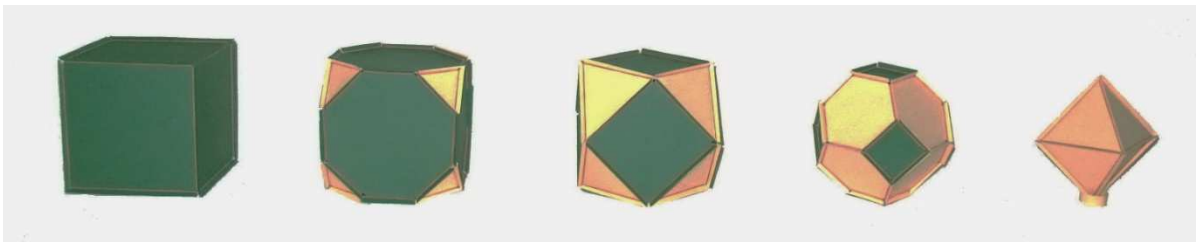
Da im Folgenden von regulären Polyedern ausgegangen wird, die alle eine Umkugel besitzen, gilt:

Satz 4.3.2.1.1: Alle ARCHIMEDischen Körper haben eine Umkugel, deren Mittelpunkt mit M bezeichnet wird.

Der Beweis wird dadurch erbracht, dass letztlich alle ARCHIMEDischen Körper bis auf die Körper mit den Nummern 12 und 13 aus regulären Polyedern durch Abschneiden von Pyramiden konstruiert werden. Die beiden letzten Fälle werden in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt. Für die Berechnung der Radien R findet man in 4.3.2.2 eine Übersicht.

Man beginnt das Eckenabschneiden (siehe das Foto) z. B. mit einem außen schwarzen und innen weißen Würfel. Jedes berandende Quadrat ist analog an seinen vier Ecken mit demselben n-Eck zu beschneiden und es soll sich also aus dem Quadrat ein reguläres n-Eck ergeben. Zunächst gibt es die Lösung $n = 8$ und dann die Lösung $n = 4$. Schneidet man aber noch mehr ab, so treffen sich am Restkörper die Schnittebenen benachbarter Schnittflächen und es entstehen 6-eckige Schnittflächen, die nur in einem Fall regulär sind.

Von den ursprünglichen Seiten des Würfels sind nur kleine Quadrate übrig geblieben. Schneidet man noch mehr so ab, dass auch diese Quadrate „verschwinden“, so bleibt ein Oktaeder übrig.



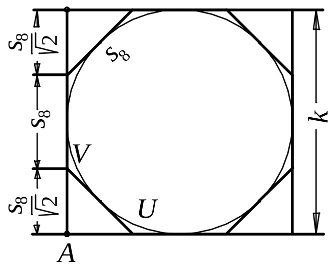
Würfel | abgestumpfter Würfel | Kuboktaeder | abgestumpftes Oktaeder | Oktaeder

Man kann aber auch mit einem Oktaeder beginnen und durch „Eckenabschneiden“ ein abgestumpftes Oktaeder, ein Kuboktaeder, einen abgestumpften Würfel und schließlich einen Würfel erhalten (hier nicht ausgeführt).

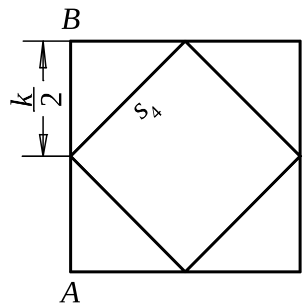
Man erkennt: Dieses Verfahren beginnt mit einem Würfel und kommt über die ARCHIMEDischen Körper mit den Nummern 2, 8 und 4 in dieser Reihenfolge zum Oktaeder und umgekehrt.

Will man diese Körper passend zu einem Würfel der Kantenlänge k konstruieren, kann man wie folgt vorgehen (die jeweiligen Zeichnungen sind Ansichten des Endkörpers von „oben“):

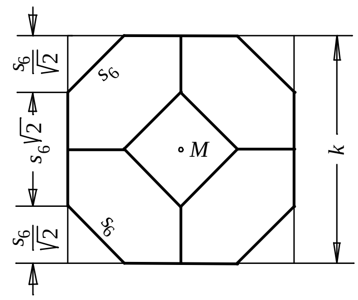
1. Schneidet man von dem Würfel 8 kleine kongruente dreiseitige Pyramiden ab, so entsteht z. B. auf der Deckfläche ein 8-Eck, das mit der 8-Eckkantenlänge s_8 regulär sein soll. Mit dem Lehrsatz des PYTHAGORAS folgt $k = s_8(1+\sqrt{2})$, weil ΔAUV rechtwinklig gleichschenklig ist. Also ist $s_8 = \frac{k}{1+\sqrt{2}}$ die Seitenlänge eines **abgestumpften Würfels (Nr. 2)**.



2. Schneidet man mehr an der Ecke A ab, bis sich die Schnittebenen zu A und B auf der „obersten“ Würfelseite schneiden, so entsteht in der „obersten“ Würfelebene abermals ein reguläres 4-Eck, nach PYTHAGORAS mit der Kantenlänge
$s_4 = \frac{k}{2}\sqrt{2} = \frac{k}{\sqrt{2}}$
eines **Kuboktaeders (Nr.8)**.



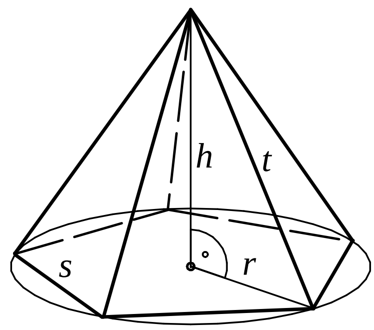
3. Schneidet man noch mehr an der Ecke weg, so entstehen 6-Ecke als Schnittflächen. Je zwei benachbarte 6-Ecke haben eine Kante gemeinsam. 4 solche 6-Ecke haben Kanten in der „obersten“ Ebene des Ausgangswürfels. Die hierzu parallelen Kanten der 6-Ecke liegen in einer „horizontalen“ Ebene durch den Mittelpunkt M des Würfels und des neuen Körpers. Diese Ebene schneidet den Ausgangswürfel in einem nicht regulären 8-Eck, wenn die 6-Ecke regulär sind. Nach PYTHAGORAS findet man, dass die Kanten dieses 8-Ecks abwechselnd die Längen s_6 und $s_6\sqrt{2}$ haben, weil die zwischen den 6-Ecken gelegenen Quadrate die Diagonalenlänge $s_6\sqrt{2}$ haben. Aus der Vermaßung der 3. Zeichnung ersieht man den Zusammenhang $k = 2 \cdot \frac{s_6}{\sqrt{2}} + s_6\sqrt{2} = 2s_6\sqrt{2}$, d. h.: Die Kante des oben aufliegenden Quadrats ist hier genau von der halben Länge des 2. Falls. Es entsteht so ein **abgestumpftes Oktaeder (Nr. 4)**.



4. Schließlich kann man so viel von den Ecken des Ausgangswürfels abschneiden, dass von der Deckfläche nur ein einziger Punkt übrig bleibt. Die 8 Schnittflächen bilden dann aus Symmetriegründen ein reguläres **Oktaeder**, dessen Kantenlänge s im gezeichneten Grundriss in wahrer Größe zu sehen ist und nach PYTHAGORAS zu $s = \frac{k}{\sqrt{2}}$ berechnet wird.

Die **Oberflächen** der drei zwischen Würfel und Oktaeder konstruierten semiregulären Polyeder kann leicht mit Hilfe von Kapitel 2 aus der Anzahl der beteiligten n-Ecke berechnet werden. Anders ist dies mit den Volumina:

Alle **Volumina** erhält man z. B. aus dem Würfelvolumen, wenn man 8-fach das Volumen der abgeschnittenen Pyramiden abzieht. Die Grundfläche der Pyramide ist jeweils ein reguläres Vieleck der Kantenlänge s, die Kantenlänge des neuen Gesamtkörpers ist. Das Volumen lässt sich also berechnen. wenn man die jeweilige Pyramidenhöhe kennt, wobei bei obigem Weg die Länge t der übrigen Pyramidenkanten bekannt ist (siehe die nebenstehende Zeichnung).



Einen zweiten Weg zur Volumenberechnung findet man mit Satz 4.3.2.2.1.

Aufgabe 4.3.2.1.1: Bastle ein Polyeder, das auf dem Foto zwischen Würfel und Oktaeder zu finden ist.

Aufgabe 4.3.2.1.2: Berechne die Oberfläche des abgestumpften Hexaeders (Nr. 2), des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) und des Kuboktaeders (Nr. 8), jeweils als Funktion der Kantenlänge des Körpers.

Aufgabe 4.3.2.1.3: Berechne das Volumen des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) als Funktion seiner Kantenlänge.

Aufgabe 4.3.2.1.4: a) Berechne das Volumen des Kubokaeders (Nr. 8) als Funktion seiner Kantenlänge.

b) Zeichne jeweils Grund- und Aufriss des abgestumpften Hexaeders (Nr. 2), des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) und des Kuboktaeders (Nr. 8).

c) Zeichne jeweils ein Schrägbild des abgestumpften Hexaeders (Nr. 2), des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) und des Kuboktaeders (Nr. 8).

d) Wie viele Paare paralleler Berandungsflächen hat das abgestumpfte Hexaeder (Nr. 2), das abgestumpfte Oktaeder (Nr. 4) und das Kuboktaeder (Nr. 8)?

e) Wie viel Prozent der Gesamtoberfläche des abgestumpften Oktaeders gehört noch zum Ausgangswürfel (schwarze Flächen im Foto!)?

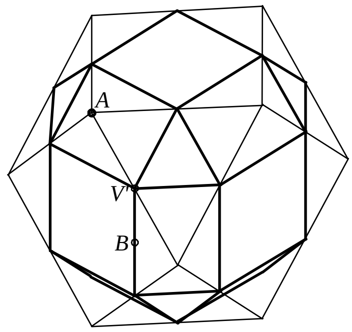
f) (**Trigonometrie!):** Welche Winkel schließen je zwei sich schneidende Kanten bzw. zwei sich schneidende Flächen des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) ein?

g) Erkläre an einem Beispiel, wie sich die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen ändern, wenn man nur eine Raumecke abschneidet.

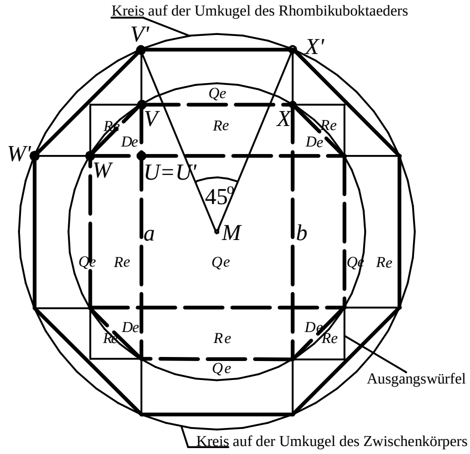
4.3.2.2 Vom Kuboktaeder (Nr. 8) zum Großen Rhombenkuboktaeder (Nr. 7):

Man beginnt mit dem Kuboktaeder (Nr. 8) und schneidet seine 12 Raumecken so ab, dass die neuen Ecken auf den Mitten seiner 24 Kanten zu liegen kommen. Hiermit werden zunächst aus jeder Ecke 4 neue Ecken. Da aber jede neue Ecke auf einer Kantenmitte sitzt, wird sie doppelt gezählt. Man erhält also insgesamt nur 24 Ecken beim neuen Polyeder. Durch das Eckenabschneiden werden jeweils 4 Kanten in 4 neue Kanten übergeführt; aber da jede alte Kante bei 2 Ecken, die abgeschnitten werden, vorkommt, wird die Anzahl der Kanten verdoppelt.

Wenn man beweisen kann, dass alle entstehenden Randflächen regulär sind, muss das neue Polyeder ein **(Kleines) Rhombenkuboktaeder (Nr. 9)** sein.



Die Berandungsflächen des neuen Körpers sind Dreiecke und Vierecke. Die Dreiecke sind gebildet durch die Mitten der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, sind also abermals regulär. Die Vierecke sind entweder ein Viereck von den Mitten eines Quadrats, also abermals ein Quadrat, oder ein Viereck, das „unter“ der abgeschnittenen Raumecke bei z. B. *A* liegt (siehe die obere Zeichnung). Die abgeschnittene vierseitige Pyramide hat zwei symmetrisch gegenüberliegende gleichseitige Dreiecke und zwei ebenso gegenüberliegende Seitenflächen, die gleichschenklige 90^{o}-Dreiecke sind. Aus diesem Grund hat sie eine Grundfläche (Schnittebene), die ein Rechteck ist (das auf *AM* senkrecht steht; *M* ist der Mittelpunkt der Umkugel des Ausgangskörpers). Das Rechteck ist kein Quadrat. Es entsteht also ein Körper aus 6 Quadraten (in der letzten Abbildung mit *Qe* abgekürzt; ist *Qe* sehr nahe an einer Linie geschrieben, so ist das Quadrat projizierend), 12 Rechtecken (abgekürzt mit *Re*) und 8 gleichseitigen Dreiecken (abgekürzt mit *De*). Zwischen zwei Quadraten liegt stets ein Rechteck.

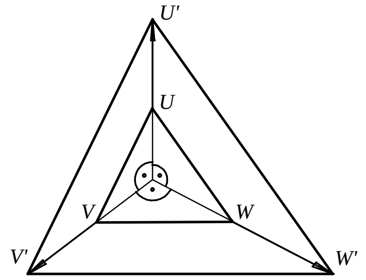


Da an allen Ecken des Ausgangskörpers kongruente Pyramiden abgeschnitten worden sind, hat der so entstandene Körper eine Umkugel um *M*, weil der Ausgangskörper eine solche hatte. Beide Kugeln haben verschiedene Radien.

Da das Kuboktaeder aus einem Würfel entstand und deshalb Seiten auf diesem Würfel hat, liegen die Quadrate des oben entstandenen Polyeders immer noch auf diesem Würfel. Deshalb kann man in der letzten Abbildung den entstandenen Körper gestrichelt so darstellen (z. B. Grundriss), dass der Würfel als Quadrat zu sehen ist. Der dazugehörige Aufriss und die dazugehörigen Seitenrisse sind aus Symmetriegründen mit dem Grundriss kongruent. Um das angestrebte Rhombenkuboktaeder zu erhalten macht man eine sehr eigenartige Abbildung des erreichten Zwischenkörpers, die manche als Aufblasen von *M* aus bezeichnen; d. i. falsch, da in der Geometrie die Begriffe „Aufblasen“ und „Schrumpfen-lassen“ zentrische Streckungen sind, hier aber eine andere Abbildung benötigt wird, die vorübergehend „besondere Abbildung“ genannt wird:

Man „rutscht“ das „hintere“ und das „vordere“ projizierende Quadrat längs *a* und das „linke“ und „rechte“ projizierende Quadrat längs *b* parallel so lange bis $\angle MVX$ zu $\angle MV'X' = 45^{o}$ wird. Gleichzeitig werden das „obere“ und das „untere“ Quadrat um den gleichen Betrag nach außen verschoben. In Wirklichkeit hat man 6 Quadrate so verschoben, dass *zwischen* zwei verschobenen projizierenden Quadraten, z. B. unter *V'W'* (siehe die letzte Abbildung), das Bild eines Rechtecks liegt, das jetzt ein Quadrat geworden ist. Jedenfalls hat der Endkörper immer noch eine Umkugel, da alle Quadrate um denselben Betrag nach außen verschoben worden sind und die Quadrate alle Punkte des Endkörpers festlegen.

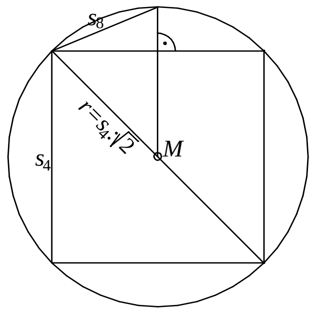
Zu beweisen ist noch:



1. O. B. d. A. ist aus dem gleichseitigen Dreieck *UVW* ein Dreieck *U'V'W'* geworden, das immer noch gleichseitig ist:
   Da das waagrechte Quadrat mit der Ecke *U* und die projizierenden Rechteckebenen mit den Ecken *V* bzw. *W* um denselben Betrag in aufeinander paarweise senkrechten Richtungen verschoben werden, sind die entsprechenden Kanten der beiden Dreiecke *UVW* und *U'V'W'* parallel und abermals *U'V'W'* gleichseitig, weil *UV* und *UW* jeweils zur Grundebene um 45° geneigt sind.
2. Dadurch hat das Rechteckbild *U'V'X'*... z. B. die Strecke $\left|\overline{U'V'}\right| = s$ und ist ein Quadrat.
3. Z. B. hat das projizierende Rechteck *VW* jetzt die „Breite" s und damit ist das projizierende Rechteck *V'W'* ein Quadrat.
4. Die Bilder der übrigen Rechtecke am Ausgangskörper sind aus Symmetriegründen ebenfalls Quadrate.

D. h.: Der Endkörper ist ein (**Kleines**) **Rhombenkuboktaeder (Nr. 9)**.

Die Ecken der projizierenden Quadrate in der unteren Abbildung der letzten Seite bilden zwei reguläre Achtecke in parallelen Ebenen. Deshalb liegen 16 Ecken des Rhombenkuboktaeders auf 2 Kreisen in zueinander parallelen Ebenen. Darüber hinaus gibt es zwei weitere Paare solcher Kreise in jeweils parallelen Ebenen, die in dieser Abbildung alle projizierend sind, z. B. längs *VV'* und *WW'*. Alle Ecken des Körpers liegen auf diesen 6 kongruenten Kreisen mit Radius *r*, die alle auf einer Kugel um *M* mit Radius $R = |\overline{MV'}|$ liegen. Die Länge $|\overline{MB}|$ (siehe die obere Zeichnung der letzten Seite) kann man der zweiten Zeichnung der letzten Seite als $|\overline{MV'}|$ entnehmen. Falls *s* die Kantenlänge des Rhombenkuboktaeders ist, hat die Umkugel den Radius:



$R = \left|\overline{MV'}\right| = \sqrt{r^2 + \left|\overline{BV'}\right|^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{s}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

Letzteres muss noch gezeigt werden:

An der nebenstehenden Zeichnung erkennt man:

$s_8^2 = \left(\frac{s_4}{\sqrt{2}} - \frac{s_4}{2}\right)^2 + \frac{s_4^2}{4} = s_4^2 - \frac{s_4^2}{\sqrt{2}} = \frac{s_4^2}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

Da $r = \frac{s_4}{\sqrt{2}}$ gilt, folgt $s = s_4 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Also gilt:

$r^2 = \frac{s^2}{2-\sqrt{2}} = \frac{s^2(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{s^2(4+2\sqrt{2})}{4}$

Diese besondere Abbildung ist hinsichtlich der Berechnung des Volumens unhandlich.

Satz 4.3.2.2.1: Das **Volumen aller Polyeder mit Umkugel** mit Radius *R* und Mittelpunkt *M* lässt sich dahingehend berechnen, dass zu jeder Randfläche eine gleichseitige Pyramide mit der Spitze *M* und der Höhe $h = \sqrt{R^2 - r_n^2}$ gehört, wobei r_n der Umkreisradius der Randfläche (reguläres *n*-Eck) ist.

Die hier betrachteten halbregulären Polyeder der Kantenlänge *s* haben alle eine Umkugel mit Mittelpunkt *M* und Radius *R*, wobei stets *s* und in vielen Fällen *R* gemessen und damit das Volumen berechnet werden kann. Kennt man den Polyedertyp und *s*, lässt sich stets *R* berechnen und so der Mittelpunkt *M* bestimmen. Häufig lässt sich *R* genauer als *s* messen. Dann wird *s* aus *R* berechnet.

Definition 4.3.2.2.2: Zwei Ecken eines Polyeders mit Umkugel um *M* heißen zueinander **diametral** gelegen, wenn ihre Verbindungslinie durch *M* halbiert wird.

Hinweise zur Bestimmung des Umkugelmittelpunktes *M*:

Kapitel	Polyeder	Hinweis zur Mittelpunktsberechnung
4.2	reguläre Prismen und Antiprismen	*M* ist die Mitte zwischen den Mittelpunkten des Deck- und Bodenpolygons.
4.3.2.7	1. abgest. Tetraeder	Je zwei Ecken auf windschiefen Kanten des Ausgangstetraeders liegen diametral. Die Mitte zwischen diesen Ecken ist *M*.
4.3.2.1	2. abgest. Würfel	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*.
4.3.2.3	3. abgest. Dodekaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. Hilfreich bei der Bestimmung von *R* ist der „Umwürfel“ (siehe Kapitel 3.2.1).
4.3.2.1	4. abgest. Oktaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*.
4.3.2.3	5. abgest. Ikosaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. Hilfreich bei der Bestimmung von *R* ist der „Umwürfel“ (siehe Kapitel 3.2.1).
4.3.2.4	6. Großes Rhombenkuboktaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. Die 8-Ecke liegen in gegenüberliegenden Seitenflächen eines Würfels, dessen Mittelpunkt M ist.
4.3.2.5	7. Großes Rhomben-ikosidodekaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. Hilfreich bei der Bestimmung von *R* ist der „Umwürfel“ des Ikosaeders (siehe Kapitel 3.2.1).
4.3.2.1	8. Kuboktaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*.
4.3.2.2	9. Kleines Rhombenkuboktaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. *s* ist Basis in einem gleichschenkligen Dreieck, das an der Spitze einen 45°-Winkel und dessen Schenkel die Länge *R* haben.
4.3.2.3	10. Ikosidodekaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. Hilfreich bei der Bestimmung von *R* ist der „Umwürfel“ des Ikosaeders (siehe Kapitel 3.2.1).
4.3.2.5	11. Kleines Rhombenikosidodekaeder	Es gibt diametrale Ecken. Die Mitte dieser Strecke ist *M*. Hilfreich bei der Bestimmung von *R* ist der „Umwürfel“ des Ikosaeders (siehe Kapitel 3.2.1).
	12. Cubus simus	In der vorliegenden Arbeit nicht untersucht, siehe MEYER KH. [2].
	13. Dodekaedron simum	In der vorliegenden Arbeit nicht untersucht.

Aufgabe 4.3.2.2.1 (Trigonometrie!): Berechne Oberfläche und Volumen des (Kleinen) Rhombenkuboktaeders der Kantenlänge *s*.

Aufgabe 4.3.2.2.2: Bastle ein (Kleines) Rhombenkuboktaeder.

Man kann aber die Ecken des Kuboktaeders (Nr. 8) auch so abschneiden, dass die abgeschnittenen Pyramiden als Grundfläche Rechtecke (abermals keine Quadrate!) haben, von den Quadraten des Kuboktaeders reguläre 8-Ecke der Kantenlänge s_8 und von den Dreiecken 6-Ecke übrig bleiben. Die Kantenlängen *s* des Kuboktaeders wird dann jeweils aufgeteilt gemäß $s = \frac{s_8}{\sqrt{2}} + s_8 + \frac{s_8}{\sqrt{2}}$. Die Rechtecke und die 6-Ecke sind nicht mehr regulär; allerdings sind jeweils gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel.

Das neue Polyeder hat viermal so viele Ecken wie das Kuboktaeder, also 48 Ecken; mit jeder abgeschnittenen Ecke kommen 4 weitere Kanten hinzu, sodass sich insgesamt 24 + 4 ·12 = 72 Kanten ergeben. Die Anzahl der Randflächen ergibt sich so als 12 + 14 = 26. Der Tabelle über die ARCHIMEDischen Körper entnimmt man die Vermutung, dass der Körper Verwandtschaft zum Großen Rhombenkuboktaeder zeigt; deshalb wird er hier vorübergehend ***Großes Pseudorhombenkuboktaeder*** **(Nr.6)** genannt. Das weitere Vorgehen entspricht Obigem:

> **Aufgabe 4.3.2.2.3 (sehr schwer):** Beweise wie oben, dass es eine Abbildung gibt, die das Pseudorhombenkuboktaeder in ein Großes Rhombenkuboktaeder überführt.

> **Aufgabe 4.3.2.2.4:** Berechne die Oberfläche und den Umkugelradius eines Großen Rhombenkuboktaeders der Kantenlänge *s*.

4.3.2.3 Vom Ikosaeder zum Dodekaeder

Auch der umgekehrte Weg ist möglich, wird aber hier nicht durchgeführt.

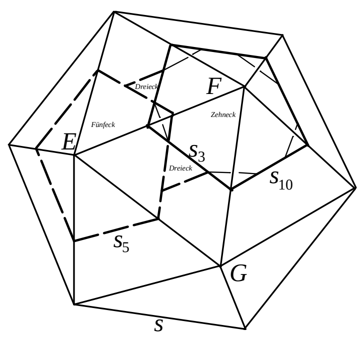
Das folgende Foto zeigt, wie man durch mehrfaches Abschneiden von Ecken aus dem Ikosaeder über das **abgestumpfte Ikosaeder (Nr. 5), Ikosidodekaeder (Nr. 10)** und **abgestumpfte Dodekaeder (Nr. 3)** zum Dodekaeder kommt. Die erforderlichen Begründungen werden wie in 4.3.2.1 gefunden und müssen hier deshalb nur noch angedeutet werden:

1. Die Schnittebene ist abermals senkrecht zu der Verbindung Raumecke – Umkugelmittelpunkt. Das Ziel sind reguläre 5-Ecke (anstatt der bisherigen Raumecken) und reguläre 6-Ecke als Rest der Ausgangsdreiecke. Die abgeschnittene Pyramide hat Seitenflächen, die reguläre Dreiecke sind. Deshalb wird so abgeschnitten, dass die Kantenlänge *s* des Ikosaeders gedrittelt wird zu $s_6 = \frac{s}{3} = s_5$. Es entsteht das **abgestumpfte Ikosaeder (Nr. 5)**.

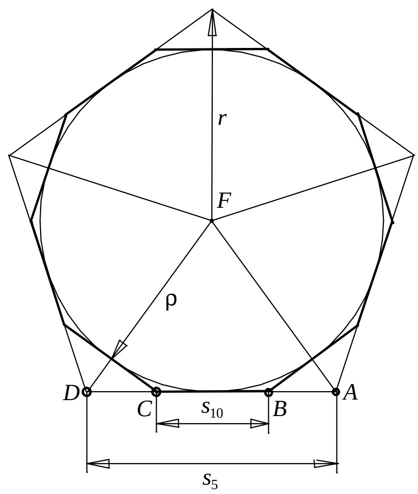
Ikosaeder | abgestumpftes Ikosaeder | Ikosidodekaeder | abgestumpftes Dodekaeder | Dodekaeder

2. Um das zweite Zwischenziel zu erreichen, schneidet man vom Ikosaeder so viel ab, dass die Schnittlinien durch die Mitten der alten Kanten gehen. Deshalb gilt $s_3 = s_5 = \frac{s}{2}$. Es entsteht das **Ikosidodekaeder (Nr. 10)**.

3. Man kann vom gegebenen Ikosaeder der Kantenlänge *s* an jeder Ecke (z. B. *E* oder *F*; siehe die nächste Abbildung) so viel abschneiden, dass sich die Schnittebenen jeweils zweier benachbarter Ecken überlappen, sich also ebenfalls schneiden und so auf dem Restkörper 10-Ecke und 3-Ecke entstehen. Diese Schnittkanten zwischen zwei solchen Schnittebenen stehen dann jeweils senkrecht windschief auf der Ikosaederkante; sie gehen unterhalb der Kante *s* hindurch. Kleine Dreiecke bleiben von der Oberfläche des Ikosaeders übrig. Ansonsten entstehen 10-Ecke, die „in etwa“ wie in der nebenstehend gezeichneten Abbildung liegen.



Es gilt also $s_{10} = s_3$. Im Folgenden wird untersucht, welche Abhängigkeit s_3 von *s* hat, damit die 10-Ecke regulär sind. Man beachte, die Seiten der Dreiecke des Ikosidodekaeders sind zu entsprechenden Seiten der Dreiecke des Ikosaeders parallel. Man beginnt mit einem regulären 10-Eck. Zu ihm gibt es genau ein reguläres 5-Eck mit demselben Inkreisradius ρ (siehe die Abbildung).



Aus Aufgabe 2.3.3 entnehmen wir die Zusammenhänge:

$$s_5 \;= 2\rho_5\sqrt{5-2\sqrt{5}} \qquad (1)$$

$$s_{10} = \frac{2}{5}\rho_{10}\sqrt{25-10\sqrt{5}} \qquad (2)$$

Aus (2) und Obigem folgt:
$\rho_5 = \rho_{10} = \frac{5s_{10}}{2\sqrt{25-10\sqrt{5}}}$. Setzt man dies in (1) ein, so erhält man:

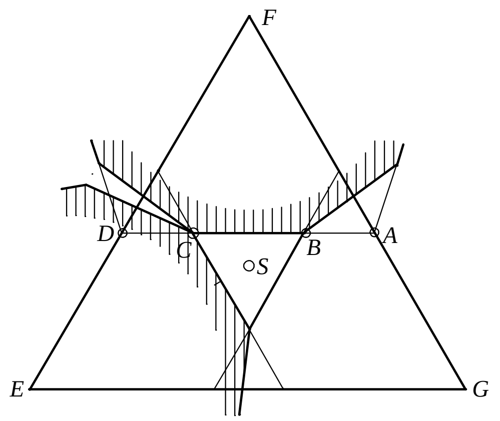
$$s_5 = \frac{5s_{10}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{25-10\sqrt{5}}} = 5s_{10}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(25+10\sqrt{5})}{(25-10\sqrt{5})(25+10\sqrt{5})}} =$$

$$= 5s_{10}\sqrt{\frac{125-50\sqrt{5}+50\sqrt{5}-100}{625-500}} = s_{10}\sqrt{5} \qquad (3)$$

Man beachte: $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \frac{s_5-s_{10}}{2}$ (4)

Die nächste Abbildung ist eine Abwicklung der zu den Ikosaederecken E, F und *G* gehörigen Zehnecke (man beachte die Schraffuren) in die Ebene *EFG*. Hierzu wird jeweils längs der Zehneckkante aufgeschnitten, die zwei benachbarte Zehneckebenen gemeinsam haben. Das zu *G* gehörige Zehneck ist nicht gezeichnet. Die Zehnecke entstehen aus Fünfecken (vgl. oben). Jede Fünfeckseite schneidet ein Dreieck *EFG* des Ikosaeders z. B. in einem Schnitt *AD*, der parallel zu *EG* ist. Man beachte: Die Dreiecke *ABC* und *EFG* haben denselben Schwerpunkt *S*. Die Lage von *BC* und *EG* bez. *S* entnimmt man der Abbildung oben.

In nebenstehender Zeichnung sind alle Dreiecke gleichseitig und die Einteilung von *ABCD* kommt auch bei den beiden anderen Schnitten des Dreiecks *EGF* vor. Man beachte die Parallelogramme.



Mit (4) gilt:

$$s = |\overline{XY}| = 2\cong|\overline{DB}| + |\overline{CD}| = 2\left(s_{10} + \frac{s_5-s_{10}}{2}\right) + \frac{s_5-s_{10}}{2} = \frac{3}{2}s_5 + \frac{1}{2}s_{10}$$

Mit (3) folgt $s = \left(\frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)s_{10}$.

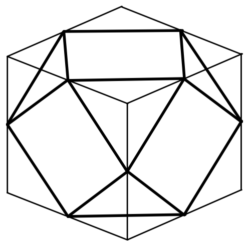
Diese Gleichung wird nach s_{10} aufgelöst: $s_{10} = \frac{2s}{3\sqrt{5}+1} = \frac{2s(3\sqrt{5}-1)}{45-1} = \frac{s}{22}(3\sqrt{5}-1)$

Interessant wäre jetzt noch die Untersuchung, weshalb zwischen Ikosaeder und Dodekaeder nicht noch weitere halbreguläre Körper existieren, was aber auch an anderer Stelle dieser Abhandlung nicht untersucht worden ist.

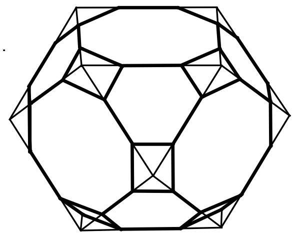
4. Schneidet man an jeder Ecke eines Ikosaeders so ab, dass jeder 5-Eck-Schnitt durch den Schwerpunkt der Seitenflächen geht, so erhält man ein Dodekaeder.

> **Aufgabe 4.3.2.3.1:** Bastle aus einzelnen Vielecken das Ikosidodekaeder (Nr. 10).
>
> **Aufgabe 4.3.2.3.2:** Berechne die Kantenlänge eines abgestumpften Dodekaeders (Nr. 3) als Funktion der Kantenlänge des Ausgangsikosaeders.
>
> **Aufgabe 4.3.2.3.3:** Berechne die Oberfläche des Ikosidodekaeders als Funktion der Kantenlänge *s*. Wie kann man den Umkugelradius beim Ikosidodekaeder messen (Begründung!)?

4.3.2.4 Vom Kuboktaeder (Nr. 8) zum Großen Rhombenkuboktaeder (Nr. 6)
Man muss vom Kuboktaeder mit der Kantenlänge s gerade vierseitige Pyramiden an den Ecken so abschneiden, dass eine ihrer Bodenkantenlänge die 8-Eck-Seitenlänge s_8 und damit die Kantenlänge des Großen Rhombenkuboktaeders wird (siehe die nächsten Abbildungen):



Kuboktaeder



Großes Pseudorhombenkuboktaeder

Man findet s_8 aus $s = s_8 + 2 \cdot \frac{s_8}{\sqrt{2}}$. Dann aber sind die 4-Ecke noch nicht regulär. Mit einer Abbildung analog zu 4.3.2.2 erreicht man dann die Regularität.

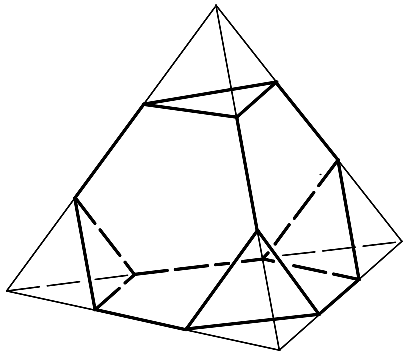
4.3.2.5 Vom Ikosidodekaeder (Nr. 10) zu den Rhombenikosidodekaedern (Nr. 7 bzw. Nr. 11)
1. Schneidet man an den Ecken des Ikosidodekaeders so große Pyramiden ab, dass jeweils die Grundfläche der Pyramiden ein Rechteck ist, das jeweils die Ikosidodekaederkanten halbiert, so entsteht daraus ein Polyeder mit Umkugel, dessen Begrenzungsflächen analog zum **Kleinen Rhombenikosidodekaeder (Nr. 11)** sind. Hierbei sind aber die 4-Ecke keine Quadrate. Man muss auch hier eine besondere Abbildung analog 4.3.2.2 begründen, bei der die regulären 3- und 5-Ecke kongruent auf eine größere Umkugel so verschoben werden, dass die verbindenden Vierecke Quadrate werden.

> **Aufgabe 4.3.2.5:** Passt man in ein reguläres 5-Eck ein reguläres 10-Eck so ein, dass jeweils jede zweite 10-Eckseite auf einer 5-Eckseite mittig zu liegen kommt, so liegen auf jeder 5-Eckseite links und rechts der 10-Eckseite Strecken *x*.
> Begründe mit dem Wissen der Klasse 9: $x = \frac{s_{10} \cdot r_5}{2\rho_5}$ und Klasse 10: $x = \frac{s_{10}}{2cos36^o}$.

2. Schneidet man an den Ecken des Ikosidodekaeders kleinere Pyramiden so ab, dass von den 5-Ecken reguläre 10-Ecke übrig bleiben, so werden aus den 3-Ecken 6-Ecke, die aber nicht regulär sind. Die Schnittflächen sind zwar Rechtecke, aber keine Quadrate. Es gilt dann $s_5 = s_{10}\left(1 + \frac{r_5}{\rho_5}\right) = s_{10}\left(1 + \frac{1}{cos36^o}\right)$. Da der entstandene Körper eine Umkugel hat, lässt sich abermals eine größere Kugel finden, auf der die 10-Ecke kongruent so plaziert werden können, dass die 4- und 6-Ecke regulär werden. Der Endkörper ist ein **Großes Rhombenikosidodekaeder (Nr. 7)**.

4.3.2.6 In dem Wahlunterricht am Herder-Gymnasium wurde zwar auch der Auftrag der Herleitung des Cubus simus (Nr. 12) und des Dodekaedron simum (Nr. 13) gegeben, aber nach WIRTH [1] lässt sich dieser Weg hier nicht beschreiten. O'DAFFER [1] spricht auf Seite 142 zwar von 14 ARCHIMEDischen Polyedern, die es aber nach WIRTH nicht gibt. Auch ansonsten ist die Darstellungsweise von O'DAFFER oft so unzureichend, dass eine hiervon unabhängige Überlegung rascher gefunden wird als ein Zurechtbiegen des Textes.

4.3.2.7 Das abgestumpfte Tetraeder (Nr. 1)
Schneidet man an allen Ecken eines regulären Tetraeders der Kantenlänge s reguläre Tetraeder der Kantenlänge s_6 ab, so bleibt als Restkörper das sogenannte abgestumpfte Tetraeder übrig; hierbei gilt $s_6 = \frac{s}{3}$.



Aufgabe 4.3.2.7: Bastle das abgestumpfte Tetraeder und berechne die Oberfläche und das Volumen als Funktion seiner Kantenlänge.

4.3.2.8 Übersicht über den Zusammenhang der Erzeugung von 11 der 13 ARCHIMEDischen Körper
Der Lehrer findet in der folgenden Tabelle, wie die einzelnen hier erzeugten Körper untereinander zusammenhängen.
Die Pfeile geben die Richtung des Abschneidens von Ecken an. Die Doppelpfeile wurden in Obigem nur in einer Richtung verfolgt. Die Nummerierung der Körper ist analog zu der Übersicht auf Seite 17.

Tetraeder	→	1. abgestumpftes Tetraeder						
Würfel	↔	2. abgestumpfter Würfel	↔	8. Kuboktaeder	↔	4. abgestumpftes Oktaeder	↔	Oktaeder
				↓	–			
				6. Großes Rhombenkuboktaeder	←	9. Kleines Rhombenkuboktaeder		
Ikosaeder	↔	5. abgestumpft. Ikosaeder	↔	10. Ikosidodekaeder	↔	3. abgestumpftes Dodekaeder	↔	Dodekaeder
				↓	–			
				7. Großes Rhombenikosidodekaeder	←	11. Kleines Rhombenikosidodekaeder		

5. Bemerkungen zur Didaktik

Man sollte davon ausgehen, dass jeder, der sich mit der einschlägigen Didaktik auseinandersetzt, die dargestellten Inhalte des Vorausgehenden zumindest im Überblick kennt. Es wird auch davon ausgegangen, dass dem Leser verständlich ist, wenn die Autoren den Standpunkt vertreten, dass dies in seiner Gesamtheit nicht Zusatzstoff einer Klasse 9 sein kann. Bestenfalls haben die Schüler am Ende einer Klasse 9 die erforderlichen Kenntnisse in Algebra und einschlägige Vorerfahrungen im Umgang mit dem Satz des PYTHAGORAS. Man wird also eine Auswahl zu treffen haben, ganz gleich in welcher Form dieser Stoff einer Gruppe Jugendlicher unterrichtet werden soll. Natürlich werden die Hochbegabten – wer auch immer dies sein soll – u. U. auch ohne Lehrer beim Dargestellten *alles* verstehen. Im Unterricht kann es aber nicht Ziel sein, nur für diese sehr kleine Gruppe zu lehren, auch nicht in einem Ergänzungsunterricht, da sich unsere Gesellschaft für ihre Zukunft nicht nur auf die Förderung der Hochbegabten beschränken kann und darf. Auch die normal Begabten müssen im Unterricht die Chance bekommen, wenigstens *einiges* des Gelehrten in sich aufzunehmen.

5.1 Basteln

„Begreifen“ hat ja etwas mit „Anfassen“ zu tun und deshalb ist sicher ein erster Schritt, die beschriebenen Körper zu basteln, zudem heute in den Familien Basteln nahezu kein Thema mehr ist. Man sollte auch nicht übersehen, dass fast jede mathematische Theorie Ausgangspunkte im Gegenständlichen hat. Leider lieben manche Mathematiker, diese Anfänge im Laufe der Zeit zu verschütten; sie heben damit sicher nicht das Begreifen.

Es ist schon bedauerlich, wenn die ehemalige Lehrerin der HERDER-Schule in Frankfurt/Main (siehe die Einleitung Kapitel 1) in ihren Unterlagen sinngemäß festgehalten hat:

„Der erste Durchgang war ja eigentlich *nur* ein Bastelkurs…..Die Schülergruppe war sehr bunt zusammengewürfelt. Neben für Mathematik hochmotivierten und hochbegabten Schülern bis zu solchen, die das Wahlpflichtfach Mathematik als kleineres Übel neben den Wahlmöglichkeiten Chemie, Physik oder einer dritten Fremdsprache gewählt hatten, war alles dabei. Insbesondere kamen viele Schüler aus dem Intensivkurs, konnten also zum Teil noch nicht richtig Deutsch, so dass ihre Sprachkenntnisse für die alternativ angebotenen Kurse noch zu gering waren.“

Das Basteln der Körper kann etwa mit speziellen Baukästen mit regulären Drei-, Vier- und Fünfecken durchgeführt werden; allerdings sind solche Baukästen als Klassensatz für den Haushalt von Gymnasien 2013 viel zu teuer. Die Schüler werden also vorab eine große Anzahl von solchen n-Ecken herstellen müssen. Dann beginnt die eigentliche Arbeit, die einzelnen kongruenten Raumecken des betreffenden semiregulären Polyeders zusammenzufügen.

Schließlich braucht man einen Bauplan – nach Vorerfahrungen –, wie man mehrere solcher Raumecken zusammenfügt, vor allem dann, wenn man das so machen will – soll –, dass das entstehende Gebilde stets eine Umkugel hat.

Immerhin wird das alles erst möglich sein, wenn man durch Unterrichten die regulären Polyeder aber auch anderes vorher gelehrt hat. Nicht immer wird dies nur anhand von Modellen möglich sein, auch wäre ein solches Vorgehen nicht mathematisch. Viel geeigneter ist es, die Schüler so weit zu bringen, dass sie Bildern entnehmen können, wie viele Teile am Ganzen beteiligt sind.

Noch ein Wort zum Stellenwert der Abwicklung: Aus Abwicklungen solche Körper (Netze) zu basteln hat nur so lange Wert, als die beteiligte Eckenanzahl nicht zu groß ist. Bei größerer Eckenanzahl läuft man Gefahr, das Falten längs der Kanten der Abwicklung nicht so exakt durchzuführen, dass die erforderliche Genauigkeit erreicht wird.

5.2 Arbeitsgemeinschaft am HERDER-Gymnasium

Im Schuljahr 2001/2002 wurde im zweiten Halbjahr ein Wahlpflichtkurs am HERDER-Gymnasium in Frankfurt/Main durchgeführt. Die Lehrerin schreibt hierzu:

„Nach einer kurzen und sehr unerfreulichen Einführungsphase zur Erarbeitung des Volumens einer Pyramide wurde der Lehrer entgegen moderner pädagogischer Vorstellungen richtig autoritär, teilte den Stoff in 11 Themen auf und verordnete, diesen in Gruppen auszuarbeiten.“ Schon hier muss betont werden, dass den Schülern Einzelaufträge so gegeben wurden, dass der einzelne Schüler alle vergebenen Aufträge kannte, aber selbst nur einen hiervon bearbeiten sollte. An Unterlagen erhielt der einzelne Schüler etwa:

1. Eine Einführung in den Wahlkurs **„Herstellung semiregulärer Körper durch Abstumpfen regulärer Körper“**:
   „ ……..
   Was soll gemacht werden?
   Die Körper, die in einer Aufgabe vorkommen, werden in Gummitechnik (Anm. d. Red.: Diese Technik war der Klasse vertraut; siehe die Fotos) gebaut. Die Entstehung durch Abstumpfen soll beschrieben werden. Von jedem Körper sind Volumen und Oberfläche, und was sonst noch interessant ist, allgemein zu bestimmen. Das Ganze wird schriftlich dokumentiert (Text, Erklärungen, Skizzen, Rechnungen etc.; Hilfsmittel angeben!) (Anm. d. Red.: Die Schüler durften alles, was sie erreichen konnten, aus dem Internet nutzen.). Jede Gruppe trägt die Ergebnisse ihrer Arbeit in der Klasse vor.
   Wie wird die Leistung beurteilt?
   ……..
   Bewertet werden die schriftliche Dokumentation (Vollständigkeit, Richtigkeit, Ausführlichkeit, Klarheit, äußere Form etc.), der Vortrag (Inhalt, Fähigkeit des Vortragens, Teamarbeit) und die Arbeit während der Unterrichtsstunden (Konzentration, Teamarbeit, Fortschritt, Gedankengänge, konstruktive Fragen etc.).
   Was tut der Lehrer jetzt noch?
   Er zerreißt sich in 11 Stücke und hilft jeder Gruppe, indem er Fragen beantwortet, Gedankengänge begleitet, den Fortschritt unterstützt.“

2. „**Themen** für jeweils eine Gruppe aus 2 Schülern:
   a) Vom Würfel zum Oktaeder
   b) Vom Oktaeder zum Würfel
   c) Die regulären Körper, vom Tetraeder zum abgestumpften Tetraeder, das Antiprisma
   d) Vom Würfel zum Cubus simus (Anm. d. Red.: Nach WIRTH [1] kann dieses Problem mit Abschneiden von Ecken nicht gelöst werden.)
   e) Vom Würfel bzw. Oktaeder zum (Kleinen) Rhombenkuboktaeder
   f) Vom Würfel bzw. Oktaeder zum Großen Rhombenkuboktaeder
   g) Vom Dodekaeder zum Dodekaedron simum (Anm. d. Red.: Nach WIRTH [1] kann dieses Problem nicht gelöst werden.)
   h) Vom Dodekaeder bzw. Ikosaeder zum (Kleinen) Rhombenikosidodekaeder
   i) Vom Dodekaeder bzw. Ikosaeder zum Großen Rhombenikosidodekaeder
   j) Vom Ikosaeder zum Dodekaeder
   k) Vom Dodekaeder zum Ikosaeder“

3. An Literatur wurde jeder Gruppe eine passende Seite oder Doppelseite aus O’DAFFER [1] gegeben, wobei im Folgenden für das Thema f) die Seite 138 des genannten Buches wiedergegeben wird:

   “Many opportunities exist for older students (Red.: Gemeint sind Lehramtskandidaten) to become involved with building models of semiregular polyhedral. An analysis of the Euler characteristic and of the lines and planes of symmetry of these polyhedra can often be quite challenging. The book *Mathematical Models* (Oxford University Press, 1961) by Cundy and Rollett is an excellent aid. Also *Shapes, Spaces and Symmetry* (Columbia University Press, 1971) by Allan Holden has an excellent description of a method for making polyhedral models.

> There are two semiregular polyhedra which we can imagine as being obtained from a cube octahedron through a truncation followed by a slight distortion. We see in Fig…(Red.: Dargestellt wird der Übergang vom Kuboktaeder zum Großen Rhombenkuboktaeder durch “Abstumpfen”) that each vertex of a cube octahedron can be truncated so that equilateral triangular faces become regular hexagons and the square faces become regular octagons. This truncation transforms the vertices into rectangles which we imagine are distorted into squares. This new polyhedron carries two names – **the truncated cube octahedron** or **great rhombicuboctahedron**. The second polyhedron obtained from the cube octahedron is called the **rhombicuboctahedron**. We find the midpoints of the edges of the cube octahedron and connect them as shown in Fig,. (Red.: Die Abbildung zeigt den Übergang Kuboktaeder zum Kleinen Rhombenkuboktaeder.). Cutting off the vertices along the shaded lines yields a polyhedra with square faces, equilateral triangular faces and rectangular faces. Again imagine these rectangular faces are distorted into squares. The resulting polyhedron is the rhombiscubactahedron.”

Die Lehrerin hält fest:
„Ein Lehrervortrag vor diesen Inhalten war als Einführung nötig, um später die Entwicklung der semiregulären Körper aus den regulären Körpern zu verstehen. Der Vortrag umfasste auch die Prismen und die Antiprismen, (Red.: Was in Kapitel 4.2 genauer beschrieben wird). Ziel war es vor allem, die fünf PLATONischen Körper zu präsentieren. Die Begründung, wieso es nur diese fünf gibt, war nicht vorgesehen. Es sollten aber die Oberflächen und die Volumina von Tetraeder, Würfel und Oktaeder hergeleitet werden, die von Dodekaeder und Ikosaeder sollten nur vorgestellt werden (Red.: anhand der Formelergebnisse). Einiges hierüber findet man in dem alten Schulbuch von REIDT, WOLFF, ATHEN [1].

Das Volumen des „Antiprismas“ (Red.: Es gibt unendlich viele.) zu berechnen wurde im Verlauf des Projektes aufgegeben. Die für dieses Thema zuständigen Schüler waren damit überfordert. Sie entwickelten auch insgesamt kein Gefühl dafür, was eine Herleitung ist. Sie gaben sich mit Formeln und Bildern aus (guten) Internetrecherchen zufrieden, bastelten brav die Körper.“

5.3 Weitere Möglichkeit

Eigentlich geht es um zwei Dinge:

1. Das Rechnen mit Wurzelzeichen hat während der letzten Jahrzehnte – auch dank der Taschenrechnernutzung – immer weniger Anwendungen, so dass man es bald ganz streichen kann, da man heute glaubt, dass für die Anwendung eine endliche Dezimalzahldarstellung ausreichend ist. Hier sind die zum Teil nur angedeuteten Rechnungen an Polyedern dankbare Beispiele, die zeigen, dass ein „stures“ Herumhacken auf dem Taschenrechner zwar „halbwegs genaue“ Ergebnisse liefert – wenn man sich begnügt, dass bereits z. B. die erste Nachkommastelle falsch ist – aber Wurzelumformungen (siehe Kapitel 2.1) und Zusammenfassungen zu wesentlich genaueren Ergebnissen führen, da dadurch Rechnungen verkürzt werden und ganz allgemein eine kurze Rechnung die genauere ist. Leider kann dieser Sachverhalt in der vorliegenden Arbeit nicht gezeigt werden. Sie macht aber deutlich, dass man auf das Wurzelzeichen nicht verzichten kann, wenn es um das Finden oder um die Begründung einer Theorie oder nur um den Nachweis der Richtigkeit eines Ergebnisses geht.

2. Es wird die Raumanschauung (Vorstellungskraft eines *inneren Auges*) – was auch immer in der Didaktik so bezeichnet werden kann – durch einen solchen Unterricht angehoben.

Wesentlich aber bleibt, dass sich der Lehrer in seinem Eifer beherrschen kann, d. h. natürlich auch, dass ihm bewusst ist, welche Probleme er damit an seine Schüler heranträgt, auch dass es heute immer noch in diesem

Bereich mathematisch ungelöste Probleme gibt. Der Lehrer ist also gezwungen, eine Auswahl des hier angebotenen Stoffs zu treffen und auch u. U. die hier dargestellte Reihenfolge zu ändern.

Die Konstruktion und das Sosein halbregulärer Polyeder muss ihm vor Unterrichtsbeginn vertraut sein. Man möge den vorliegenden Text hierfür als ersten Einstieg betrachten. Da es sich – auch für Schüler – um ein durchaus lohnendes Aufgabengebiet handelt (letzteres haben die Schülerbemerkungen am HERDER-Gymnasium gezeigt, die eine Zufriedenheit mit dem Kurs dokumentierten), wäre es überlegenswert, Polyeder wieder in Pflichtvorlesungen und Seminaren in Geometrie für angehende Gymnasiallehrer aufzunehmen.

Man darf aber nicht übersehen, dass ein einmaliges Heranführen an Leistung in einem Ergänzungsunterricht an der Schule keine „heile Welt" erzeugen kann, wenn nicht bereits in Vorklassen stets das Ziel verfolgt wird, möglichst viel den lernbereiten Schülern zu vermitteln.

Einerseits geben die oben angesprochenen Probleme mit Polyedern Anlass zu erwünschten Unterrichtsdiskussionen – man muss die Probleme nicht unbedingt so lösen, wie der Lehrer sie vorbereitet hat – aber andererseits führen die durchaus parallelen Überlegungen zu äußerst unterschiedlich langen und umfangreichen Berechnungen oder Lösungsbeschreibungen. Ganz allgemein muss hier vom Lehrer der Standpunkt eingenommen werden, dass in aller Regel der synthetische Weg kürzer und eleganter als der analytische, also als die Rechnung, ist, oder: Wenn man schon rechnen will, sollte man in die eigentliche Rechnung nicht gleich einsteigen. So wird der Lehrer oft Schülerempfehlungen „abwürgen" müssen, um die Unterrichtszeit sinnvoll zu nutzen.

Letzteres kommt auch einem Lehrziel der Gymnasien entgegen, das leider heute nur selten Berücksichtigung findet. Diese Schulart soll ans Hochschulstudium, also auch an den Stil der Mathematik-Vorlesungen, heranführen. Man muss schon am Gymnasium lernen, „Mathematik zu erdulden", Mathematik anzuhören und dann durch Nacharbeit erst zu begreifen. Es versteht sich von selbst, dass hierzu der Lehrer nur mit einem hervorragenden Tafelbild und nicht zu raschem Vorgehen seinen Schülern ermöglicht, so viel mitzuschreiben, dass sie zu Hause bei der Nacharbeit rekonstruieren können, was im Unterricht passiert ist.

Hierzu wäre zu allererst nötig, dass der Student nicht nur in Didaktik sondern im „normalen" Hochschulunterricht im Ordnen mathematischer Inhalte – von einem größeren Umfang als bei ausformulierten „Aufgaben" – und in deren Niederschrift wieder mehr Erfahrungen als heute sammeln kann. Dazu sind auch Studienarbeiten nötig, die an der Hochschule korrigiert werden. Eine einzige wissenschaftliche Zulassungsarbeit zum Staatsexamen – wenn überhaupt noch eine solche über Mathematik geschrieben wird – reicht nicht aus und ist sicher im Studium zu spät angesiedelt.

Unter diesen Aspekten kann ich mir für die Behandlung der regulären Polyeder am Gymnasien einen eigenen halbjährig zweistündigen Kurs nach Klasse 9 mit normalem Unterrichtsstil vorstellen – also dann, wenn im Umgang mit Anwendungen des PYTHAGORAS in der Ebene und damit verknüpft im Umgang mit dem Wurzelzeichen eine gewisse Sicherheit erreicht ist.

Hat man in einer solchen Veranstaltung erreicht, dass eine Gruppe von Schülern weitermachen will, sollte man in einem weiteren Halbjahr einen Kurs über halbreguläre Körper folgen lassen. Hierbei kann man mit dem aufgezeigten Kapitel 4 (auch dann noch mit Abstrichen) beginnen und je nach Leistungsfähigkeit der Schüler in die dort angegebenen Aufgabenstellungen einsteigen, deren Lösungen jetzt folgen.

6. Lösungen der Aufgaben

Zu 2.1.1: *a)* und *b)* Rechts von ⇔ erhält man eine Identität, wenn man die Klammer ausmultipliziert. Das Ergebnis ist in jedem Fall positiv und so kann man die Wurzel ziehen und erhält die linke Seite von ⇔. Allerdings könnte hier noch ein weiteres ± eine Rolle spielen. Das ist nicht der Fall, da die rechte Seite der linken Gleichung stets positiv ist.

c) $\sqrt{70 \pm 30\sqrt{5}} = \sqrt{\left(a \pm b\sqrt{5}\right)^2}$

$70 \pm 30\sqrt{5} = a^2 \pm 2ab\sqrt{5} + 5b^2$

I $\quad a^2 + 5b^2 \quad = 70$

II $\quad \pm 30 \quad = \pm 2ab$

$15 \quad = \quad ab$ eingesetzt in I:

$a^2 + \frac{5 \cong 225}{a^2} = \ 70$ oder

$a^4 - 70a^2 + 5 \cdot 225 = 0$, also:

$(a \mid b) \in \{(\sqrt{45} \mid \sqrt{5}), (-\sqrt{45} \mid -\sqrt{5}), (5 \mid 3), (-5 \mid -3)\}$ usw.

d) $\sqrt{9 \pm 4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(a \pm b\sqrt{5}\right)^2}$

$9 \pm 4\sqrt{5} \ = a^2 \pm 2ab\sqrt{5} + 5b^2$

I $\ a^2 + 5b^2 = 9$

II $2 \quad = ab$ eingesetzt in I

$a^4 - 9a^2 + 20 = 0$, also:

$(a \mid b) \in \{(2|1), (-2|-1), \left(\sqrt{5}\middle|\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\sqrt{5}\middle|\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\}$

usw.

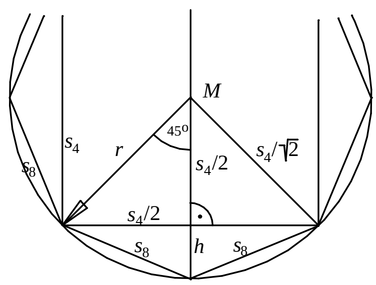
Zu 2.2.1: Es gibt einen Kreis auf dem die Ecken so liegen, dass sie zu einem Zentrumswinkel von $\frac{360^\circ}{n}$ gehören.

Zu 2.3.1: a) Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge s beträgt $s = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = s\frac{\sqrt{3}}{2}$. Hiermit findet man für die Fläche dieses Dreiecks: $F = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

b) Definition des Flächeninhalts.

c) Das reguläre Sechseck der Kantenlänge s baut sich aus 6 gleichseitigen Dreiecken dieser Kantenlänge auf, hat also als Flächeninhalt $F = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$.

d) Das reguläre Achteck der Kantenlänge s_8 baut sich aus einem Quadrat der Kantenlänge s_4 und vier gleichschenkligen Dreiecken der Basis s_4 und der Schenkel s_8 auf. Damit ist der Achteck-Flächeninhalt $F = s_4^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\, s_4 \cdot h$. Da das Achteck und das Viereck denselben Umkreis mit Radius $r = \frac{s_4}{\sqrt{2}}$ haben (beachte, r ist die halbe Diagonale im Quadrat), findet man $h = \frac{s_4}{\sqrt{2}} - \frac{s_4}{2}$; man muss also nur noch einen Zusammenhang zwischen s_4 und s_8 suchen:



Nach PYTHAGORAS findet man mit den Bezeichnungen der letzten Abbildung:

$s_8^2 = s_4^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2\right) = s_4^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = s_4^2\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = s_4^2\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, also $s_4 = s_8\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = s_8\sqrt{2+\sqrt{2}}$

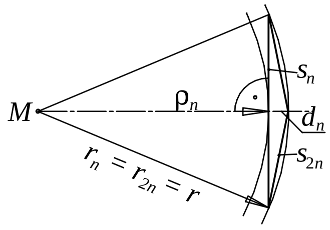
Damit erhält man die Achteckfläche: $F = s_4^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot s_4 \cdot \left(\frac{s_4}{\sqrt{2}} - \frac{s_4}{2}\right) = s_4^2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) = s_4^2\,\frac{2}{\sqrt{2}} = 2s_8^2\left(\sqrt{2}+1\right)$

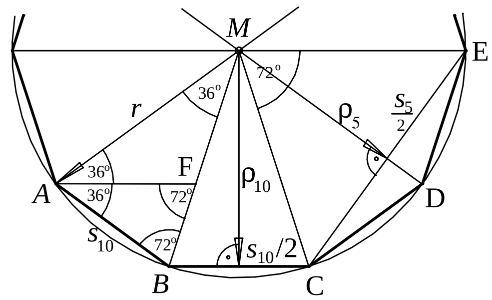
Zu 2.3.2: a) $\rho_n{}^2 = r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 \qquad (1)$

$s_{2n}{}^2 = d_n{}^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 =$

$= \left(r - \rho_n\right)^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 =$

$= r^2 - 2r\rho_n + \rho_n{}^2 + \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 =$ mit (1) folgt





$= 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = r^2\left(2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}\right)$

b) Aus (1) folgt ${\rho_n}^2 = r^2\left(1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2\right)$.

c) $A_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho_n \frac{s_n}{2} = \frac{rs_n}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}$ nach (1).

Zu 2.3.3: a) In der nebenstehenden Abbildung findet man ein reguläres Zehneck mit der Kantenlänge s_{10}. *AF* ist die Innenwinkelhalbierende bei der Ecke *A*. Hieraus ergeben sich die weiteren angegebenen Winkel. Aus den Winkeln folgt, dass die Dreiecke *ABM* und *BFA* ähnlich sind. Deshalb gilt $\frac{r}{s_{10}} = \frac{s_{10}}{r - s_{10}}$. Die hieraus folgende quadratische Gleichung ${s_{10}}^2 + rs_{10} - r^2 = 0$ hat die positive Lösung $s_{10} = r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Deshalb kann man s_{10} aus *r* durch einen goldenen Schnitt gewinnen. Löst man diese Gleichung nach r_{10} auf, so erhält man $r_{10} = \frac{2s_{10}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{s_{10}}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ und umgekehrt.

b) Nach dem Satz des PYTHAGORAS ist unter Berücksichtigung von a):
$\left(\rho_n\right)^2 = r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2\left(\sqrt{5}+1\right)^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2\left(5 + 2\sqrt{5}\right)$
Analog zu a) kann man die Äquivalenz der beiden verlangten Formeln zeigen.
c) Aus obiger Zeichnung entnehmen wir, dass das reguläre 5-Eck aus dem regulären 10-Eck entsteht und $r_5 = r_{10} = r$.

Nach a) und der ersten Formel der Aufgabe 2.3.2 gilt $s_{10} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_5}{2r}\right)^2}}$. Hieraus folgt $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_5}{2r}\right)^2}$ und damit $6 - 2\sqrt{5} = 8 - 8\sqrt{1 - \left(\frac{s_5}{2r}\right)^2}$ oder $\sqrt{1 - \left(\frac{s_5}{2r}\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$. Nochmaliges Quadrieren liefert: $1 - \left(\frac{s_5}{2r}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(6 + 2\sqrt{5}\right)$
Man löst auf nach ${s_5}^2 = 4r^2\left(1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}\right) = 4r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right) = r^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right)$.
Analog zu a) kann man die Äquivalenz der beiden verlangten Formeln zeigen.
d) *ρ*, *r* und $\frac{s_5}{2}$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck; deshalb gilt mit c):
${\rho_5}^2 = r^2 - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2 = \frac{{s_5}^2}{100}\left(50 + 10\sqrt{5} - 25\right) = \frac{{s_5}^2}{100}\left(25 + 10\sqrt{5}\right)$
Analog zu a) kann man die Äquivalenz der beiden verlangten Formeln zeigen.
e) In der letzten Abbildung wendet man den Lehrsatz des PYTHAGORAS auf das Dreieck *MBC* an und berücksichtigt a): $\rho_{10}^2 = r^2 - \left(\frac{s_{10}}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{r_{10}^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 = \frac{r^2}{16}\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$
Analog zu a) kann man die Äquivalenz der beiden verlangten Formeln zeigen.
f) In der letzten Abbildung wendet man den Lehrsatz des PYTHAGORAS auf das Dreieck *MCE* an und berücksichtigt c): $\rho_5^2 = r^2 - \left(\frac{s_5}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{r^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) = \frac{r^2}{16}\left(6 + 2\sqrt{5}\right)$
Hieraus folgt mit Beispiel 2.1.1: $\rho_5 = \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$
Analog zu a) kann man die Äquivalenz der beiden verlangten Formeln zeigen.

Zu 3.1.1: a) Wenn 3 gleiche Quadrate an jeder Ecke eines konvexen Körpers zusammenstoßen, geht man von einer ersten Ecke aus und betrachtet das Ende einer Schnittkante als weitere Ecke. Wegen der Konvexität kann

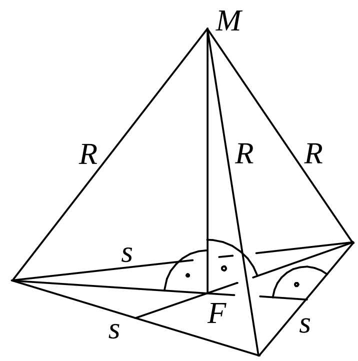
man dann nur auf eine Weise 2 weitere solche Quadrate anhängen. Damit hat man aber bereits alle Ecken des Würfels und all seiner Seitenflächen und kann überprüfen, dass alle Ecken die Ausgangseigenschaft haben.
b) Wenn 3 gleichseitige kongruente Dreiecke eine Raumecke bilden, dann gehen von dieser Raumecke 3 Schnittkanten weg, deren Enden so sind, dass jeweils zwei von ihnen eine Kante der gleichen Länge definieren und damit ein weiteres gleichseitiges Dreieck des Körper abschließt.
c) Wenn 4 gleichseitige kongruente Dreiecke eine Raumecke bilden, wird diese Pyramide von einem Quadrat derselben Kantenlänge abgeschlossen. Verklebt man zwei solche Gebilde längs des gemeinsamen Quadrats, so entsteht ein Körper der Ecken-, Kanten- und Flächenanzahl des Oktaeders. Aus Symmetriegründen muss man nur an einer Ecke des Quadrats nachweisen, dass sie die Raumecke eines Oktaeders ist, um bewiesen zu haben, dass der Gesamtkörper ein Oktaeder ist:
An jeder solchen Ecke stoßen aber je 2 kongruente gleichseitige Dreiecke je einer der 4-seitigen verklebten Pyramiden zusammen, also insgesamt 4 und damit ist es eine Oktaederecke.

Zu 3.2.1: Pyramidenvolumen $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{zugehörige Höhe}$

a) Tetraeder der Kantenlänge *s*: $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, s^2\right) \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3$

b) Oktaeder der Kantenlänge *s*: $V = \frac{2}{3} \cdot s^2 \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} s^3$

Zu 3.2.1.1: Da das Ikosaeder drei Paare gegenüberliegender Kanten auf einem Umwürfel hat und die Enden dieser Kanten alle Ecken bestimmen, ist der Würfelmittelpunkt Mittelpunkt *M* der Umkugel, die nach Satz 3.2.1.4. den Radius $R = \frac{s}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ hat. Da alle Flächen aus Symmetriegründen gleichen Abstand ρ zu *M* haben, ist dieser Abstand der Inkugelradius. An einem Dreieck der Kantenlänge *s* des Ikosaeders verbinden wir die Ecken mit *M* durch Kanten der Länge *R*. Es entsteht die dreiseitige Pyramide (siehe Abb.) Nach PYTHAGORAS gilt:

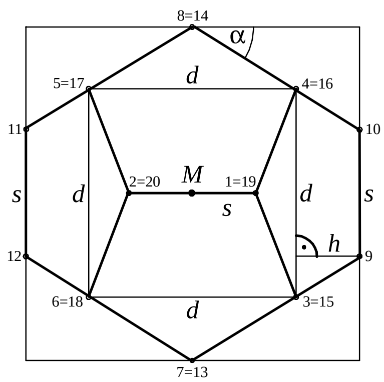


$$\rho = |\overline{MF}| = \sqrt{R^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}s^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{s^2}{16} \cdot \left(10 + 2\sqrt{5}\right) - \frac{s^2}{3}} = \frac{s}{12}\sqrt{3} \cdot \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \frac{s}{12}\sqrt{3} \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right),$$

letzteres wegen einer analogen Rechnung zum Beispiel 2.1.1. Siehe auch Aufgabe 2.1.1.*a*).

Zu 3.2.2.1: Man muss den Winkel zwischen den Trapezen des Walmdachs gegenüber dem Umwürfel kennen und kann dann z. B. eine Säge jeweils zweimal an einer der Mittellinien der Quadrate des umrandenden Würfels ansetzen; es sind also insgesamt 12 Schnitte erforderlich.

Den gesuchten Winkel α sieht man in der nebenstehenden Abbildung in wahrer Größe, weil $\overline{P_8P_{14}}$ projizierend ist. Deshalb gilt $\tan\alpha = \frac{\frac{d}{2}+h-\frac{s}{2}}{\frac{d}{2}+h}$.

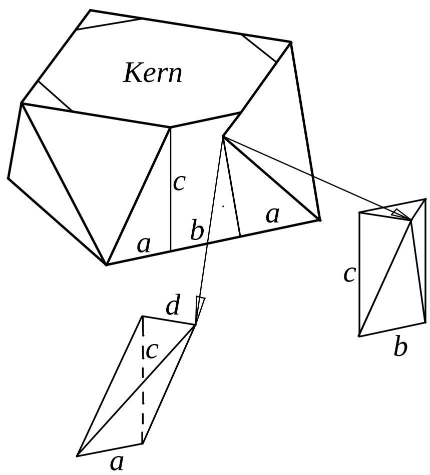


Mit den Werten aus dem Lehrtext erhält man $\tan\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 31{,}71747441^\circ \approx 31{,}7^\circ$.

Zu 4.2.1: Hat das Prisma ein reguläres n-Eck der Kantenlänge *s* als Deck- und Bodenfläche, so gibt es Quadrate derselben Kantenlänge als Seitenflächen, die auf der Deck- bzw. Bodenfläche senkrecht stehen. Somit ist das Prisma regulär. Die Deck- und Bodenfläche haben Umkreise in parallelen Ebenen, die als Schnittkreise der Umkugel gedeutet werden. Hierbei hat die Umkugel ihren Mittelpunkt M in der Mitte zwischen den Mittelpunkten M_1 und M_2 der Umkreise. Der Radius ist der Abstand z. B. einer Ecke des Deck-n-Ecks zum Kugelmittelpunkt. Aus Gründen der Rotationssymmetrie um M_1M_2 liegen dann alle Ecken der beiden n-Ecke auf dieser Kugel; sie ist also Umkugel.

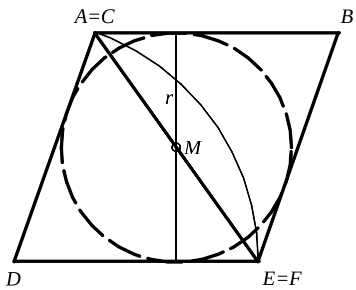
Zu 4.2.2: a) Prisma: Nach Kapitel 2.3 gilt zwischen der *n*-Eck-Kante s_n und dem Inkreisradius ρ_n des *n*-Ecks $\frac{s_n}{2\rho_n} = \tan\frac{360^0}{n}$. Hieraus erhält man die Bodenfläche $F = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot \rho_n = \frac{n \cdot s_n{}^2}{4\tan\frac{360^0}{n}}$ und das Volumen (gerades reguläres Prisma!) $V = \frac{n s_n{}^3}{4\tan\frac{360^0}{n}}$.

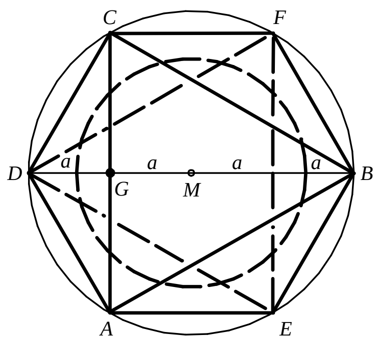
b) Antiprisma: Hier ist die Situation weitaus schwieriger: Das Antiprisma mit einem regulären *n*-Eck als Deckfläche hat ein 2*n*-seitiges gerades Prisma als Kern, dessen Volumen man nach a) berechnen kann. Die vorstehenden Ecken kann man dann in 2*n* vierseitige und in ebenso viele dreiseitige Pyramiden zerlegen, wie die nebenstehende Abbildung im Fall $n = 4$ zeigt.



Hat das Antiprisma die Kantenlänge *s*, so sind *b* die Kantenlänge des ins reguläre *n*-Eck der Kantenlänge *s* einbeschriebenen regulären 2*n*-Ecks und $a = \frac{s-b}{2}$.
Mit der Höhe c des Antiprismas und der Größe d (siehe die Zeichnung) lassen sich dann die Volumina der beteiligten Pyramiden berechnen.

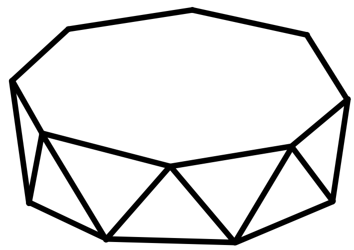
Zu 4.2.3:
a) *1. Beweis:* Das Antiprisma mit der Deckfläche *ABC* legt man wie im nebenstehenden Grund- und Aufriss:





Grundfläche *DEF* und Deckfläche *ABC* liegen parallel zur Grundrissebene, gegeneinander um 60° verdreht, wobei eine Höhe des gleichseitigen Dreiecks *ABC* parallel zur Aufrissebene sein soll.
Aus Symmetriegründen des Körpers muss ein eventuell existenter Inkugelmittelpunkt der Umkugelmittelpunkt M sein. Deshalb ist M im Grundriss der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*; Man möge die Einteilung der Höhen- bzw. Schwerlinie in 3a beachten (siehe nebenstehende Zeichnung).
Im Aufriss liegt M in der Mitte zwischen der Deck- und Grundfläche des Körpers.
Im Aufriss sieht man die Dreiecke *ABC*, *DEF*, *ACD* und *BEF* projizierend, also als Strecken der Länge $3a$, weil es sich hierbei jeweils um die Höhe

3a im gleichseitigen Dreieck handelt. D. h. die Figur im Aufriss ist eine Raute, deshalb geht die Verbindung AE durch M und deshalb berührt die Kugel um M mit Radius r, die das Dreieck ABC berührt, auch das Dreieck ACD. Aus Symmetriegründen gilt das dann auch für die anderen Seitendreiecke.



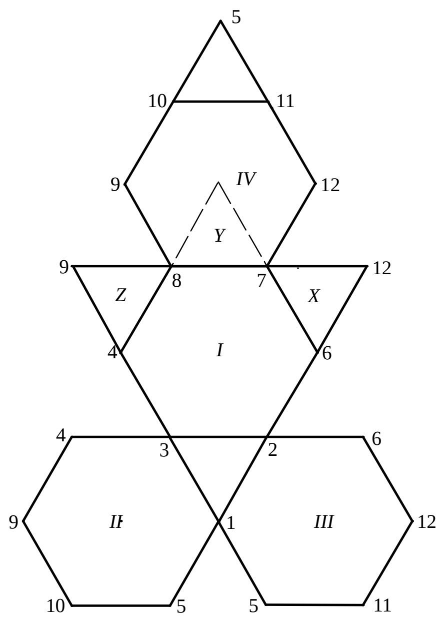
2. Beweis: $\overline{AE}$ ist parallel zur Aufrissebene und deshalb im Aufriss in wahrer Größe s zu sehen; deshalb ist $AEFC$ ein Quadrat und der Körper ein Oktaeder, das bekanntlich eine Inkugel hat.

b) Alle anderen Antiprismen haben keine Inkugel, weil der Abstand des Umkugelmittelpunktes zu den Seitendreiecken im Verhältnis zu seinem Abstand zu Deck- bzw. Bodenfläche immer größer wird, wie man am Bild deutlich erkennen kann.

c) Der Würfel hat zwar als Prisma eine Inkugel, aber beim regulären Prisma, dessen Deckfläche ein reguläres 10-Eck ist, hat man zwischen der Deck- und Bodenfläche einen sehr kleinen Abstand; damit kann nur eine sehr kleine Inkugel vermutet werden, die die Seitenflächenquadrate nicht mehr erreicht.

Zu 4.3.1.1: Man kann der Figur der Aufgabe entnehmen, dass es dann mindestens eine Ecke (4,4,4,4) geben würde, was bei einem Würfel nicht sein kann.

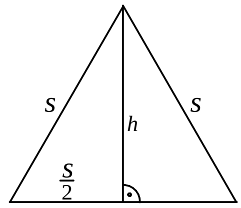
Zu 4.3.1.2: Damit jede Raumecke vom Typ (6,6,3) ist, müssen am Dreieck 1,2,3 in der gezeichneten Form der nächsten Abbildung die 6-Ecke *I, II, III* so angeheftet werden, dass jeweils die Kanten 2,6 bzw. 3,4 bzw. 1,5 verklebt werden. So entstehen die weiteren Punkte 7 bis 12. Es fehlen sicher noch weitere Dreiecke. Am 6-Eck *I* werden die weiteren Möglichkeiten untersucht:
X ist eine mögliche Lage, wenn der dritte Punkt dieses Dreiecks der Punkt 12 ist. Weitere Möglichkeiten gibt es für *X* nicht, da alle Entfernungen zu den Ecken 4, 9, 10, 5, 11 zu groß sind. Eine Wahl 8, 4, 3, 2 kommt nicht in Frage, da sonst *X* und *I* dieselbe Ebene bilden würden. *X* und *Y* kann nicht sein, weil sonst die Ecke 7 zwei Dreiecke hätte.
Es könnte vielleicht *Y* statt *X* auftreten: Das ist nicht möglich, weil alle Entfernungen der freien Ecke von *Y* zu allen Punkten der 6-Ecke *II* und *III* zu groß sind. Ein Eckpunkt von *I* kann es nicht sein, weil sonst *Y* und *I* die gleiche Ebene hätten.
Die Ecken 7 und 8 benötigen noch ein 6-Eck, dessen weitere Ecken mit 9, 10, 11 und 12 verklebt werden. Bastelt man die bisher entstandene Oberfläche, so sieht man, dass zum Abschluss des Körpers ein Dreieck mit den Ecken 5, 10, 11 fehlt. Es entsteht ein abgestumpftes Tetraeder.
Hinweis: Man kann die Berandungsflächen auch anders zu einem Netz anordnen.



Zu 4.3.1.3: Wenn zwei 5-Ecke und ein Viereck jede Raumecke bilden, dann hat ein beliebiges 5-Eck mit den Kanten a bis e o. B. d. A. die Kante a mit einem Viereck gemeinsam. Dann aber müsste die Kante e mit einem Viereck oder 5-Eck gemeinsam sein. In beiden Fällen ergäbe sich der Widerspruch, dass eine Ecke (5,5,5) oder (5,4,4) existieren würde und so die Halbregularität gestört wäre.

Zu 4.3.2.1.1: Siehe das Foto auf Seite 18.

Zu 4.3.2.1.2: a) Die Oberfläche *O* des abgestumpften Würfels (Nr. 2) mit der Kantenlänge *s* besteht aus 8 Dreiecken und 6 Achtecken. Die Abbildung ist der Grundriss einer abgeschnittenen Ecke; die Höhe *h* des gleichseitigen Dreiecks ist $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$.

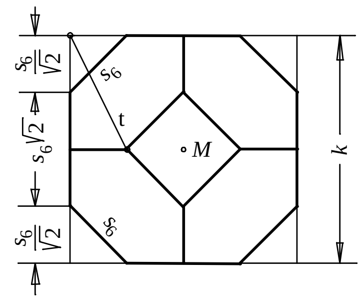


Hieraus folgt für die Fläche $F_3 = s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Für die Fläche F_8 der Achtecke gilt $F_8 = 8 \cdot s \cdot \frac{k}{4}$, wobei nach Kapitel 4.3.2.1.1. gilt: $k = s(1+\sqrt{2})$. So erhält man $O = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 + 6 \cdot 8 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{4} \cdot s^2 = \left(2\sqrt{3} + 12(1+\sqrt{2})\right) s^2$.

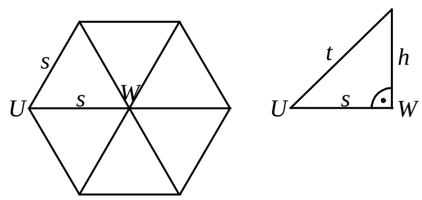
b) Die Oberfläche *O* des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) mit der Kantenlänge *s* besteht aus 6 Quadraten und 8 regulären 6-Ecken. Mit a) erhält man: $O = 6s^2 + 8 \cdot 6 \cdot s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (6 + 12\sqrt{3})s^2$

c) Die Oberfläche *O* des Kuboktaeders (Nr. 8) mit der Kantenlänge *s* besteht aus 6 Quadraten und 8 regulären Dreiecken. Mit a) erhält man: $O = 6s^2 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 = (6 + 2\sqrt{3})s^2$

Zu 4.3.2.1.3: Das Volumen *V* des abgestumpften Oktaeders (Nr. 4) erhält man aus dem Volumen des Umwürfels abzüglich von 8 geraden Pyramiden mit einem regulären Sechseck *s* als Grundfläche und den übrigen Kanten *t*.
Eine hiervon zeigt sich als *t* in nebenstehender Zeichnung in wahrer Größe; deshalb gilt nach PYTHAGORAS: $t = s\sqrt{\frac{5}{2}}$

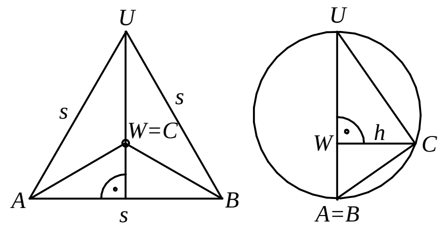


Zur Volumenberechnung betrachte man die zweite nebenstehende Abbildung: Links ist ein Grundriss der 6-seitigen Pyramide zu sehen. Die Pyramidenhöhe *h* ist über dem Mittelpunkt *W* des 6-Ecks. Daneben sieht man in einem Schnitt längs *UW* senkrecht zur Grundrissebene die Pyramidenhöhe $h = s\sqrt{\frac{3}{2}}$. Hieraus folgt:



$$V = (2s\sqrt{2})^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s\sqrt{\frac{3}{2}} = \quad = s^3(16\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) = s^3 10\sqrt{2}$$

Zu 4.3.2.1.4: a) Das Volumen *V* des Kuboktaeders (Nr. 8) mit der Kantenlänge *s* erhält man aus dem Volumen des Umwürfels der Kantenlänge *k* abzüglich 8 geraden Pyramiden mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche und den „sonstigen“ Kanten der Länge $t = \frac{k}{2} = \frac{s}{\sqrt{2}}$, wobei letzteres aus 4.3.2.1.2. kommt. In nebenstehender Abbildung ist die linke Zeichnung ein Grundriss der Pyramide und *W* der Schwerpunkt im gleichseitigen Dreieck Senkrecht zur Grundrissebene errichtet man längs *UW* einen Schnitt, der rechts daneben gezeichnet

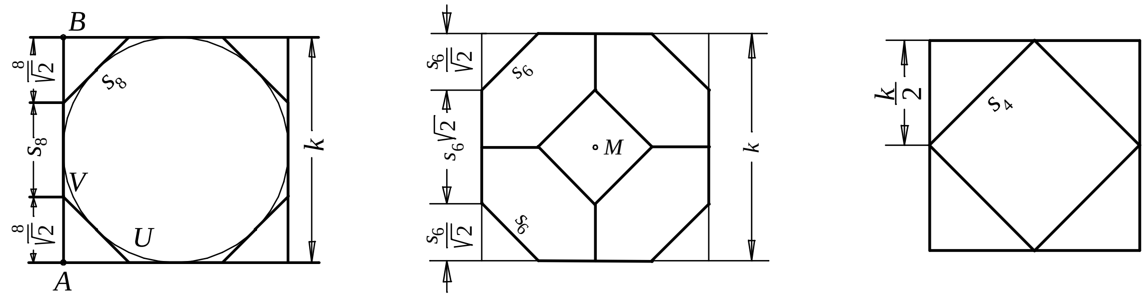


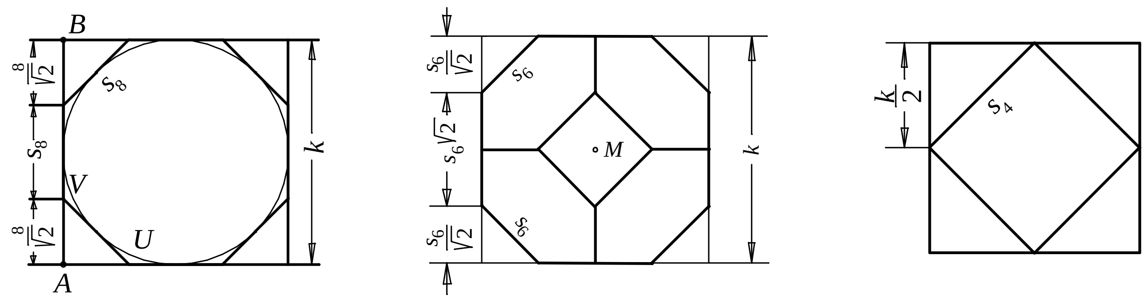
ist. Dann gilt

$|\overline{UW}| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ und nach dem Höhensatz $h = \sqrt{\frac{s}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{\sqrt{3}}} = \frac{s}{\sqrt{6}}$. Hieraus folgt:

$V = \left(s\sqrt{2}\right)^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{\sqrt{6}} = s^3 \cdot \frac{5}{3} \cdot \sqrt{2}$

b)





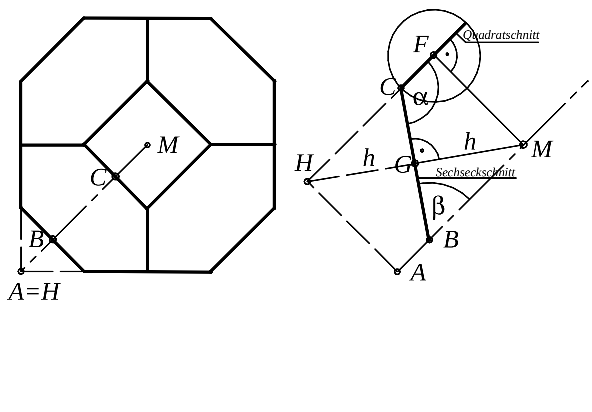
abgestumpfter Würfel (Nr. 2) | abgestumpftes Oktaeder (Nr. 4) | Kuboktaeder (Nr. 8)

c) Siehe Kapitel 4.3.1.

d) abgestumpfter Würfel (Nr. 2)	abgestumpftes Oktaeder (Nr. 4)	Kuboktaeder (Nr. 8)
parallele 8-Ecke: 3 Paare	parallele 4-Ecke: 3 Paare	parallele 4-Ecke: 3 Paare
parallele 3-Ecke: 4 Paare	parallele 6-Ecke: 4 Paare	parallele 3-Ecke: 4 Paare

e) Mit Aufgabe 4.3.2.1.2 und Kapitel 4.3.2.1.3. findet man $\frac{6s^2}{6k^2} = \frac{s^2}{\left(2s\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$.

f) Beim abgestumpften Oktaeder (Nr. 4) schließen je zwei Kanten, die an einem Quadrat beteiligt sind 90° und je zwei Kanten, die an einem Sechseck beteiligt sind 120° ein. Weitere Kanten gibt es nicht. Die Winkel zwischen benachbarten Ebenen findet man durch einen Schnitt *AM* z. B. senkrecht auf die Grundrissebene, der in nebenstehender Abbildung rechts gezeichnet ist. Da die Schnittebene senkrecht zur Schnittkante zwischen dem „obersten“ Quadrat und



einem anschließenden Sechseck ist, zeigt sich α in wahrer Größe. Der Winkel zwischen zwei Sechsecken ist 2β aus dem analogen Grund.

Berechnung der Winkel: Im Schnitt ist $AMFH$ ein Rechteck; deshalb ist G dessen Mittelpunkt. $|\overline{GM}|$ ist Abstand des Sechsecks vom Mittelpunkt M und deshalb gilt nach Aufgabe 4.3.2.1.3: $|\overline{GM}| = h = s\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $|\overline{GC}| = |\overline{GB}| = \rho$ ist der Inkreisradius des Sechsecks. Dieser berechnet sich nach Aufgabe 2.3.2 beim Sechseck (Man beachte, für den Umkreisradius gilt *r* = *s*.) $\rho = s\cdot\sqrt{1-\left(\frac{s}{2s}\right)^2} = \frac{s}{2}\sqrt{3}$.

Hiermit erhält man $\tan\beta = \frac{h}{\rho} = \frac{s\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{s}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ und damit $\beta \approx 54{,}7^o$ und $\alpha = 180^o - \beta \approx 125{,}3^o$.

g) Man nimmt an: Eine Raumecke vom Typ (*r*, *n*) wird abgeschnitten; hierbei werden *r* Stück *n*-Polygone abgeschnitten. Der alte Körper war vom Typ (*e*, *k*, *f*) und der neue sei vom Typ (*e*‘, *k*‘, *f*‘). Dann gilt:
Die Schnittfläche ist eine zusätzliche Fläche, also $f' = f + 1$.
1 Ecke fällt beim Abschneiden weg und dafür entstehen *r* neue; also gilt $e' = e + r - 1$.
Es kommen *r* Kanten hinzu: $k' = k + r$

Zu 4.3.2.2.1: Das kleine Rhombenkuboktaeder besteht aus 18 Quadraten und 8 Dreiecken der Kantenlänge *s*. Hiermit erhält man sofort die Oberfläche $O = 18\cdot s^2 + 8\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2} = s^2(18+2\sqrt{3})$.

Nach Kapitel 4.3.2.2 berechnet man den Umkugelradius *R* aus dem Umkreisradius $r = r_8 = \frac{\frac{s}{2}}{\sin\frac{45^0}{2}} = \frac{s}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, letzteres nach einem Additionstheorem, gemäß $R = \sqrt{r^2 + \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{s^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$, wenn *s* die Kantenlänge des Rhombenkuboktaeders ist. Um die Volumina zu den einzelnen Randvielecken zu berechnen, geht man wie gewohnt vor:
$V = 18\cdot V_{4-Pyramide} + 8\cdot V_{3-Pyramide}$, wobei vorher die Höhen h_4 bzw. h_3 dieser Pyramiden berechnet werden müssen:

$$h_4 = \sqrt{R^2 - \frac{s^2}{2}} = \frac{s}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$h_3 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{s^2(5+2\sqrt{2})}{4} - \frac{s^2}{3}} = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{3}},$$ insgesamt folgt:

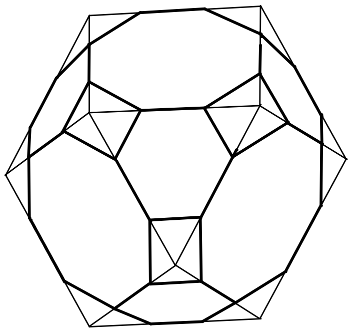
$$V = 18\cdot\frac{1}{3}\cdot s^2\cdot\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}} + 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{s\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot\sqrt{\frac{11+6\sqrt{2}}{3}} = s^3\left(3\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)$$

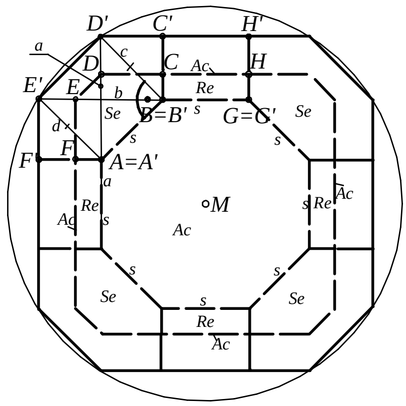
Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen.

Zu 4.3.2.2.2: Man möge sein Bastelergebnis mit den Abbildungen in Kapitel 4.3.2.2 vergleichen.

Zu 4.3.2.2.3:
Da die entstandenen regulären 8-Ecke immer noch in den Seitenflächen des Ausgangswürfels zu finden sind, stehen ihre Ebenen aufeinander senkrecht und man kann diese Ebenen als Rissebenen wählen. Hierbei entstehen Grund-, Aufriss und Seitenrisse, die kongruente Figuren sind. Die gestrichelte Figur des Pseudorhombenkuboktaeder in der rechten Abbildung der folgenden Seite ist nicht maßstabsgetreu, da sie im gezeichneten Riss so nahe am Rhombenkuboktaeder liegt, dass durch die Zeichnung die beiden nicht hinreichend genug getrennt werden könnten. Den gezeichneten Riss betrachten wir als Grundriss; das mittlere Achteck (Umriss des Pseudorhombenkuboktaeders) ist also parallel zur Grundrissebene.

Die 8-Ecke werden mit *Ac*, die 6-Ecke mit *Se* und die Rechtecke mit *Re* – soweit sie im Riss sichtbar sind – bezeichnet. Die gestrichelte Figur entsteht wie folgt: Die regulären Achtecke *Ac* der Kantenlänge *s* liegen auf dem Ausgangswürfel. Bei den senkrechten Achtecken braucht man die Verteilung der Ecken z. B. *D, C, H* usw. Umläuft man ein solches Achteck, so muss man an jeder Ecke die Richtung um 45° ändern. Deshalb ist z. B. $|\overline{DC}| = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Aus dem Bisherigen findet man dann die Verteilung der Rechtecke und der (nicht regulären) Sechsecke.





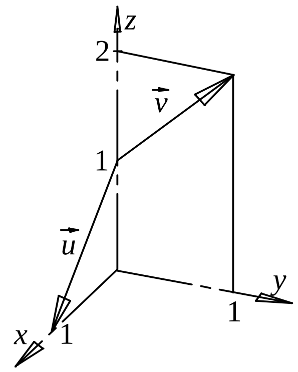
Da das Ausgangskuboktaeder eine Umkugel hat und an jeder Ecke kongruente Pyramiden abgeschnitten werden, hat auch das Pseudorhombenkuboktaeder eine Umkugel.

Jeweils zwei der auf dem Grundriss senkrecht stehenden 8-Ecke werden längs der Geraden *a* bzw. *b* parallel zum Grundriss um denselben Betrag „nach außen“ verschoben, bis sich z. B. *a* mit *c* in *D‘* schneiden. Weil sich *c* mit *a* und *b* unter 45° schneiden, ist dann im Riss *ABD’E‘* ein Quadrat. Um denselben Betrag wird das Deckachteck bzw. das Bodenachteck nach außen geschoben. Alle Ecken liegen auf Achtecken, die alle um denselben Betrag verschoben werden; also hat der entstandene Körper abermals eine Umkugel.

Da die Achtecke alle Punkte des Rhombenkuboktaeders festlegen, wird behauptet, dass es sich nach dem Verschiebevorgang um diesen Körper handelt, wobei zu beweisen ist, dass die Rechtecke zu Quadraten und die Sechsecke regulär geworden sind:

Die Veränderung des Sechsecks *ABCDEF*: *A* und *A‘* bzw. *B* und B‘ sind im Grundriss dieselben Punkte; *C* $\rightarrow$ *C‘* also Dreieck *ABC* $\rightarrow$ Dreieck *ABC‘*.
Die Ebene des Umrisses vom Pseudorhombenkuboktaeder und die Umrissebene des veränderten Körpers sind dieselben. Schneidet man die Ebene *ABC‘* mit dieser Umrissebene, so muss also gelten *E’D‘* $||$ *AB*, weil die Grundrissebene, die Umrissebene und die Deckachteckebene parallel sind.
Wie in 4.3.2.2. schließt man: *BC* $||$ *B’C‘*. Wegen der 45°-Winkel im Grundriss folgt dort $s = |\overline{AB}| = |\overline{A'B'}| = |\overline{B'D'}|$ und $|\overline{B'C'}| = |\overline{C'D'}| = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Es liegen *ABC’D’E’F‘* in einer Ebene, weil man die gleiche Argumentation mit der Verschiebung längs *b* mit der gleichen Strecke *AB* ausführen kann.

Nach Konstruktion ist im Riss *ABD’E‘* ein Quadrat. Darüber hinaus gilt wegen der verschobenen 8-Ecke: $|\overline{E'F'}| = |\overline{D'C'}| = s$. Im Riss sind *E’F‘* und *BC‘* gleich lange parallele Strecken, wobei die beteiligten Punkte alle in einer Ebene liegen. Also gilt am Körper $|\overline{E'F'}| = |\overline{B'C'}| = s$. Die analoge Verschiebung längs *b* ergibt $|\overline{C'D'}| = |\overline{A'F'}| = s$; also haben alle Kanten des Sechsecks die Länge *s* und wegen der rechten Winkel ist *B’G‘H’C‘* ein Quadrat, weil ja immer noch der gezeichnete Grundriss dem Seitenriss kongruent ist, und deshalb auch im Seitenriss die Strecke *B’C‘* mit der Länge $\frac{s}{\sqrt{2}}$ erscheint.



Wenn man noch begründet, dass z. B. $\angle BC'D' = 120^o$ beträgt, ist *A'B'C'D'E'F'* ein reguläres Sechseck:
Die Strecken *C'D'* und *B'C'* haben die Länge *s* und ihre Risse die Länge $\frac{s}{\sqrt{2}}$; also haben sie beide eine Steigung von 45°. Da es um den Winkel zwischen beiden Strecken geht, kann man o. B. d. A. annehmen: $\frac{s}{\sqrt{2}} = 1$

Hieraus folgt:
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; hieraus folgt
$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$ also $\angle(\vec{u}\vec{v}) = 120^o$.

Das Sechseck ist also regulär. Damit hat man nach der Abbildung ein Rhombenkuboktaeder.

Zu 4.3.2.2.4 : Die Oberfläche *O* des großen Rhombenkuboktaeders hat 6 Achtecke, 8 Sechsecke und 12 Quadrate, alle der Kantenlänge s. Allein die Achtecke bestimmen die 48 Ecken des Körpers. Nach der Übersicht im Kapitel 2.3 erhält man also $O = 6 \cdot 2s^2(\sqrt{2}+1) + 8 \cdot \frac{3}{2}s^2\sqrt{3} + 12s^2 = s^2(24 + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3})$.

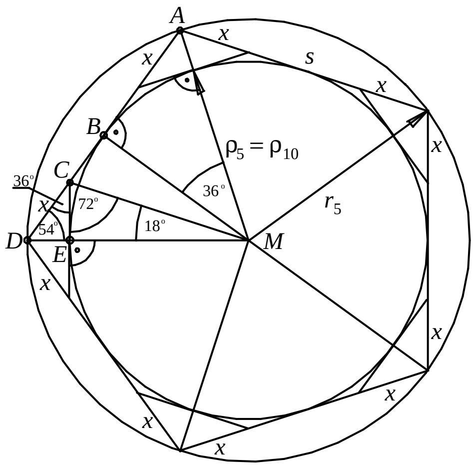
Die 48 Ecken des Körpers liegen auf 3 Paaren paralleler 8-Ecke, deren Ebenen jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen. Diese 8-Ecke haben Umkreise, die alle auf einer Kugel um den Körpermittelpunkt *M* liegen. Der Kugelradius *R* wird als $|\overline{BM}|$ berechnet, wobei festzustellen ist, wie viel höher *B* im Deckachteck als *M* in der Mitte des Körpers liegt: $R^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + r_8^2 = s^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, letzteres wegen $s = r_8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ aus Kapitel 4.3.2.2. Hieraus folgt $R = \frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Zu 4.3.2.3.1: Siehe das Schrägbild in Kapitel 4.3.1.

Zu 4.3.2.3.2: Nach Kapitel 4.3.2.3.3 berechnet sich die Kantenlänge s_{10} des abgestumpften Dodekaeders als Funktion der Kantenlänge *s* des Ausgangsikosaeders als $s_{10} = \frac{s(3\sqrt{5}-1)}{22}$.

Zu 4.3.2.3.3: Nach Kapitel 2.3 Zusammenfassung erhält man für ein Fünfeck den Flächeninhalt
$F_5 = \frac{s^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. Für ein Dreieck gilt $F_3 = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$. Hieraus ergibt sich die Oberfläche *O* eines Ikosidodekaeders:
$O = 12F_5 + 20F_3 = 12 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} + 20 \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = s^2\left(3 \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}} + 5 \cdot \sqrt{3}\right)$
Die Existenz einer Umkugel ist bereits gezeigt. Man kann das Ikosidodekaeder auf ein Fünfeck stellen und man bekommt dann ein Fünfeck als Deckfläche, das in einer zur Bodenebene parallelen Ebene liegt; projiziert man das Deckfünfeck senkrecht auf die Bodenfläche, so definieren beide zusammen ein reguläres Zehneck. Hierbei hat jede Ecke, die von der Deckfläche kommt eine entsprechende Gegenecke in der Grundfläche. Die Verbin-

dungslinie der Gegenecken schneidet sich im Umkugelmittelpunkt, d. h. ihr Abstand ist $2R$, was man bequem mit einer Schublehre messen kann im Gegensatz zur Kantenlänge s, wo dies nicht geht.



Zu 4.3.2.5 ohne Trigonometrie: Der Zentrumswinkel einer 5-Eckseite beträgt 72°, der einer 10-Eckseite 36°. Hieraus lassen sich alle in der folgenden Abbildung angegebenen Winkel berechnen. Man beachte $\rho_5 = \rho_{10} = \rho$ und $r_5 = r$. Es sind die Dreiecke *ABM* und *DEC* ähnlich. Also gilt $\frac{\rho}{r} = \frac{\frac{s_{10}}{2}}{x}$, also $x = \frac{s_{10} r}{2\rho}$.

Mit Trigonometrie: Da $\frac{\rho}{r} = \cos 36^{\circ}$ beträgt, ist die 2. Behauptung bewiesen.

Zu 4.3.2.7:
Was das Basteln betrifft, kann man sich an der Abbildung der Aufgabe 4.3.2.7 informieren.
Die Oberfläche *O* des abgestumpften Tetraeders besteht aus 4 Dreiecken der Kantenlänge *s*, damit des Flächeninhalts $\frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$, und aus 4 Sechsecken derselben Kantenlänge, damit des Flächeninhalts $6 \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$. Insgesamt findet man: $O = 4 \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot 6 \cdot \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = 7s^2\sqrt{3}$

Um das Volumen *V* zu berechnen muss man die Höhe $h = s\sqrt{\frac{2}{3}}$ des regulären Tetraeders berechnen, wie dies wiederholt geschehen ist. Damit erhält man $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 3s \cdot 3s\sqrt{\frac{2}{3}} - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s \cdot s\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} 23 \cdot s^3$.

7. Literatur

Berger Marcel	[1]	Geometry I und II, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 1987
Bigalke Hans-Günther	[1]	Reguläre Parkettierungen. Mit Anwendungen in Kristallographie, Industrie und Baugewerbe, Design und Kunst, BI Wissenschaftsverlag Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich 1994
Coxeter Harold Scott MacDonald	[1]	Regular Polytopes, Pitman New York 1948, 2. Aufl. MacMillan 1963, 3. Aufl. Dover 1983
	[2]	Regular Complex Polytopes, 1963, Cambrigde University Press 1974, 2. Auflage 1991
Cundy H. M., Rollett A. P.	[1]	Mathematical Models, Oxford University Press 1961, 2. Aufl. 1973, 3. Auflage 1997
Holden Allan	[1]	Shapes, Spaces and Symmetry, Columbia University Press 1971
Meyer Kh. u. a.	[1]	Brennpunkt Geometrie Band 9, Schroedel-Schulbuchverlag Hannover n. e.

Meyer Karlhorst	[2]	Cubus simus, ein chiraler Archimedischer Körper, Mathematikinformation Nr. 60 (2014), Seiten 3 – 25
O'Daffer Phares G., Clemens R. S.	[1]	Geometry: An Investigative Approach, Addison-Wesley Publ. Co, California 1976
Reidt, Wolff, Athen	[1]	Elemente der Mathematik Mittelstufe 2, Schroedel-Schöningh 1965
Van der Waerden B. L.	[1]	Die Pythagoreer, Die Bibliothek der Alten Welt, Artemis Verlag, Zürich u. München 1979
Wirth J.	[1]	Reguläre und halbreguläre Polyeder, Frühjahrsakademie Mathematik 2005, Bericht der TU Bergakademie Freiberg; siehe auch www.mathe.tu-freiberg.de/wirth/

Nachweis der Fotos:
H. Keller: Seiten 18 und 24, Dr. Meyer: Seite 14

Anschriften der Autoren:

Helene Keller
Reuterweg 88
60323 Frankfurt/Main
e-mail: kurt.helene.keller@gmx.de

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
e-mail: karlhorst@meyer-muc.de

Die Arbeit wurde am 1. 12. 2012 angenommen.