Hans Walser

Schwerpunkt

Zusammenfassung: Beim Schwerpunkt treffen Geometrie und Physik aufeinander. Dies eröffnet interessante Einsichten und Querverbindungen. Es kommen Beispiele am Dreieck und Viereck zur Sprache. Insbesondere wird auf die Unterschiede von Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt eingegangen. Schließlich wird eine bemerkenswerte Gerade im Viereck vorgestellt.

Fachliche und didaktische Zielsetzung: Querbezüge zwischen Bereichen der Elementargeometrie, der Mechanik und der Topologie.

1. Verschiedene Schwerpunkte

In der elementaren Dreiecksgeometrie wird oft von *dem* Schwerpunkt gesprochen, der sich als Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden ergibt. Dabei wird übersehen, dass es aus physikalischer Sicht auch beim Dreieck ganz verschiedene Schwerpunkte geben kann. Die einfachsten Schwerpunkte sind folgende:

Der *Eckenschwerpunkt*: Wir gehen von der Modellvorstellung von gleichen Massen in den Ecken aus und fragen nach dem Schwerpunkt.

Der *Kantenschwerpunkt*: Hier wird angenommen, die Masse sei homogen über die Kanten verteilt. Eine lange Kante hat mehr Masse als eine kurze Kante und daher einen größeren Einfluss auf den Kantenschwerpunkt.

Der *Flächenschwerpunkt*: Nun nehmen wir an, die Masse sei homogen über die Fläche verteilt.

Die Abbildung 1 illustriert diese verschiedenen Ausgangslagen.

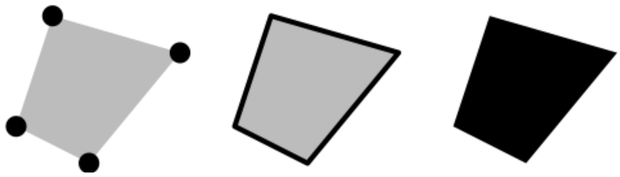


Abb. 1: Masse in den Ecken, den Kanten oder der Fläche

Die zugehörigen Schwerpunkte sind in der Regel verschieden. Wir erhalten weitere Schwerpunkte, wenn wir uns eine inhomogene Massenverteilung denken.

Bei regelmäßigen Figuren können diese begrifflich verschiedenen Schwerpunkte zusammenfallen, driften aber bei unregelmäßigen Figuren auseinander. Um das zu illustrieren, denken wir uns zunächst ein Quadrat, bei welchem die Ecken-, Kanten- und Flächenschwerpunkte im Mittelpunkt aufeinander fallen. Nun fügen wir am unteren Rand zusätzliche Ecken und Kanten in Form eines Mäanders ein (Abb. 2).

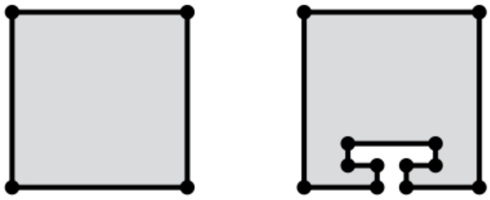


Abb. 2: Einfügen eines Mäanders

Wir verlieren unten etwas an Fläche, der Flächenschwerpunkt wandert also nach oben. Hingegen gewinnen wir unten an Punkten und an Kantenlänge. Der Eckenschwerpunkt wie auch der Kantenschwerpunkt bewegen sich also nach unten.

2. Im Dreieck

Im Dreieck stimmen interessanterweise der Eckenschwerpunkt und der Flächenschwerpunkt überein. Der Kantenschwerpunkt ist aber (außer im regelmäßigen Dreieck) verschieden.

Wir suchen zunächst den *Eckenschwerpunkt* und zeichnen dazu eine Seitenhalbierende (Abb. 3a).

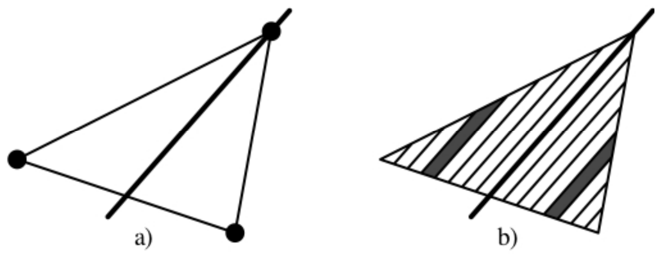


Abb. 3: Ecken- und Flächenschwerpunkt

Eine der drei Eckenmassen liegt schon auf der Schwerlinie. Die beiden anderen Eckenmassen haben von der Schwerlinie denselben Abstand, liegen aber auf verschiedenen Seiten. Ihre Momente neutralisieren sich gegenseitig. Der Eckenschwerpunkt liegt also auf dieser Seitenhalbierenden. Durch zyklische Vertauschung ergibt sich, dass der Eckenschwerpunkt auf allen drei Seitenhalbierenden liegen muss. (Damit haben wir „physikalisch“ bewiesen, dass sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden. Solche physikalische Überlegungen gehen auf ARCHIMEDES zurück und wurden auch von CEVA für seine Schnittpunktsätze angewendet.)

Für den *Flächenschwerpunkt* beginnen wir wiederum mit einer Seitenhalbierenden und zerlegen die Dreiecksfläche nach dem Prinzip von CAVALIERI in dünne parallele Streifen (Abb. 3b). Je zwei flächengleiche Streifen liegen dann in gleichen Abständen zur Seitenhalbierenden; ihre Momente neutralisieren sich. Mit zyklischer Vertauschung ergibt sich, dass auch der Flächenschwerpunkt der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden ist.

Wir haben also den bemerkenswerten Satz, dass in einem Dreieck der Eckenschwerpunkt und der Flächenschwerpunkt aufeinander fallen. Dieser Punkt kann als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden konstruiert werden. Im üblichen Schuljargon wird dieser Punkt schlicht als *Schwerpunkt* bezeichnet. Der Kantenschwerpunkt weicht allerdings davon ab.

Aufgabe 1: Skizzieren Sie ein Dreieck, bei dem sofort klar ist, dass der Kantenschwerpunkt vom Ecken- und Flächenschwerpunkt abweicht.

Für den *Kantenschwerpunkt* des Dreiecks denken wir uns die Kantenmassen in den Kantenmitten konzentriert (Abb. 4a). Da die Kanten ungleich lang sind, sind diese Massen verschieden.

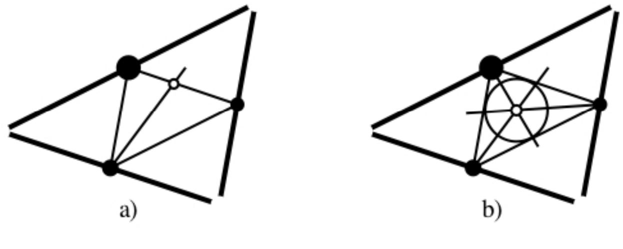


Abb. 4: Kantenschwerpunkt

Für die weiteren Überlegungen fokussieren wir zunächst auf die beiden Kanten links und rechts (Abb. 4a). Der Schwerpunkt nur dieser beiden Kanten muss auf der Verbindungslinie der beiden Kantenmitten liegen, aber eher etwas links, da die Kante links länger und damit schwerer ist. Wo genau? — Wegen der Hebelgesetze brauchen wir ein Teilverhältnis, das den beiden Kantenlängen entspricht. Das Verhältnis dieser Kantenlängen finden wir aber auch beim Kantenmittendreieck, und die von der unteren Kantenmitte ausgehende Winkelhalbierende (es ist eigenartig, dass hier die *Winkelhalbierende* ins Spiel kommt) des Kantenmittendreieckes teilt die Verbindungslinie der beiden Kantenmitten links und rechts genau im richtigen Verhältnis. Da nun die untere Kantenmitte bereits auf dieser Winkelhalbierenden liegt, muss der Kantenschwerpunkt des Dreiecks auf dieser Winkelhalbierenden liegen. Mit zyklischer Vertauschung erhalten wir schließlich, dass der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks der Inkreismittelpunkt seines Kantenmittendreiecks ist (Abb. 4b).

Aufgabe 2: Wo liegen Ecken-, Kanten- und Flächenschwerpunkt der Figur der Abbildung 5?

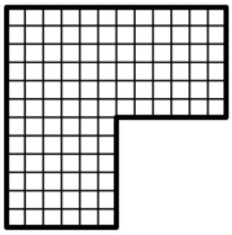


Abb. 5: Ecken-, Kanten- und Flächenschwerpunkt?

Aufgabe 3: Wir haben 12 Kugeln, die äußerlich alle gleich aussehen. Eine Kugel weicht gewichtsmäßig von den elf anderen Kugeln ab, wir wissen aber nicht, ob sie leichter oder schwerer ist. Wie kann man mit möglichst wenig Wägungen mit einer Hebelwaage die abweichende Kugel bestimmen und zugleich festlegen, ob sie leichter oder schwerer als die anderen ist?

3. Viereck

Beim Viereck sind der Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt verschieden.

Eckenschwerpunkt beim Viereck: Wir fassen je zwei Eckpunkte zu einem Paar zusammen. Der Mittelpunkt ist der lokale Schwerpunkt eines solchen Paares. Der Mittelpunkt der beiden lokalen Schwerpunkte ist der Eckenschwerpunkt des Viereckes. Die Konstruktion geht auf zwei Arten (Abb. 6).

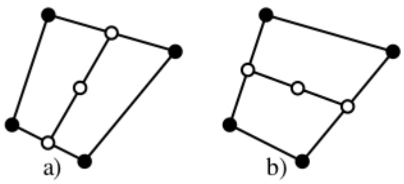


Abb. 6: Eckenschwerpunkt im Viereck

Aufgabe 4: Man kann noch auf eine dritte Art je zwei Eckpunkte des Viereckes zusammenfassen. Wie?

Aufgabe 5: Wie kann der Eckenschwerpunkt eines Viereckes auch noch konstruiert werden? Tipp: Hebelgesetze nach ARCHIMEDES. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

Aufgabe 6: Zu einem Dreieck *ABC* seien N_i der Inkreismittelpunkt und N_a, N_b, N_c die Mittelpunkte der drei Ankreise. Was kann über den Eckenschwerpunkt des Viereckes $N_i N_a N_b N_c$ gesagt werden?

Aufgabe 7: Wir setzen auf den Seiten eines Viereckes $A_0A_1A_2A_3$ in einem zyklischen Sinn ähnliche Dreiecke $A_iB_iA_{i+1}$ (Indizes zyklisch modulo 4) auf (Abb. 7). Das ursprüngliche Viereck $A_0A_1A_2A_3$ und das durch die Außenecken der aufgesetzten Dreiecke gebildete Viereck $B_0B_1B_2B_3$ haben denselben Eckenschwerpunkt *E*. Warum?

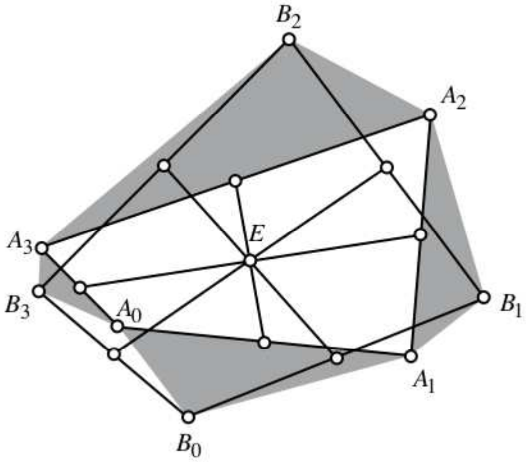


Abb. 7: Aufsetzen von ähnlichen Dreiecken

Flächenschwerpunkt beim Viereck. Den Flächenschwerpunkt konstruieren wir nach der Methode *divide et impera* (teile und beherrsche). Wir teilen das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, und in den Dreiecken wissen wir Bescheid. Die Eckenschwerpunkte sind gleichzeitig die Flächenschwerpunkte der Teildreiecke. Also muss der Flächenschwerpunkt des Viereckes auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Teildreiecke liegen (Abb. 8a). Das Teilverhältnis könnten wir aus den Flächenverhältnissen der beiden Teildreiecke herausarbeiten. Es geht aber einfacher, wenn wir mit der anderen Diagonalen das Spiel wiederholen. Der Flächenschwerpunkt *F* des Vierecks ist dann der Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden (Abb. 8b).

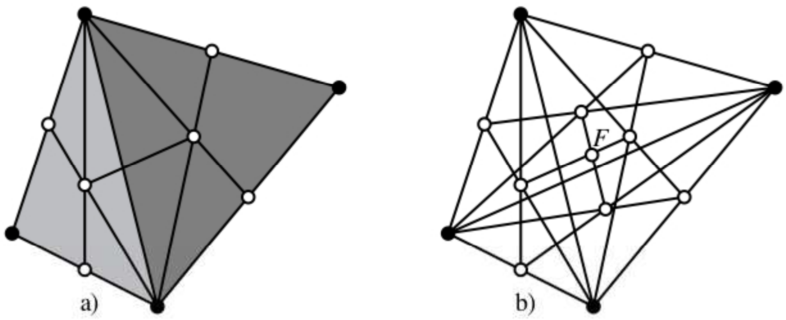


Abb. 8: Flächenschwerpunkt im Viereck

Aufgabe 8: Wie finden wir den *Kantenschwerpunkt* eines Viereckes?

4. Eine besondere Gerade im Viereck

In der Abbildung 9 sind im Viereck $A_0A_1A_2A_3$ der Diagonalenschnittpunkt *D*, der Eckenschwerpunkt *E* und der Flächenschwerpunkt *F* eingezeichnet. Wir vermuten, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen.

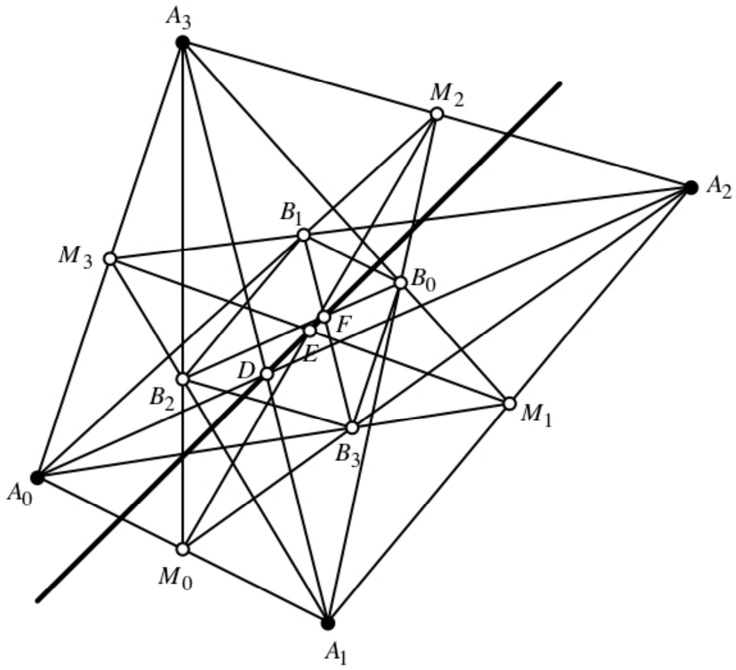


Abb. 9: Drei kollineare Punkte

Der Beweis geht wie folgt: Der Flächenschwerpunkt *F* ist nach Konstruktion auch Diagonalenschnittpunkt im Viereck $B_0B_1B_2B_3$. Weiter ist die Strecke B_0B_1 parallel zur Strecke A_0A_1, aber nur ein Drittel so lang. Dies kann mit Hilfe des Strahlensatzes mit dem Scheitel M_2 gezeigt werden. Analog folgt, dass das Viereck $B_0B_1B_2B_3$ perspektivähnlich ist zum Viereck $A_0A_1A_2A_3$, aber längenmäßig nur einen Drittel misst. Es gibt also eine zentrische Streckung mit dem Faktor $-\frac{1}{3}$, welche das Viereck $A_0A_1A_2A_3$ auf das Viereck $B_0B_1B_2B_3$ abbildet. Dabei wird der Punkt *D* auf den Punkt *F* abgebildet. Aus dem Strahlensatz mit Scheitel M_2 folgt weiter, dass der Strahl M_2M_0 die Strecke B_0B_1 halbiert. Durch zyklische Vertauschung folgt, dass *E* auch der Eckenschwerpunkt des Vierecks $B_0B_1B_2B_3$ ist. Der Punkt *E* ist also der Fixpunkt unserer zentrischen Streckung. Damit sind die Punkte *D*, *E* und *F* kollinear. Der Punkte *E* teilt die Strecke *DF* im Verhältnis 3:1.

Das kleine Viereck lässt sich an vier weiteren Orten in das ursprüngliche Viereck einpassen (Abb. 10). An den Ecken bleiben Parallelogramme übrig.

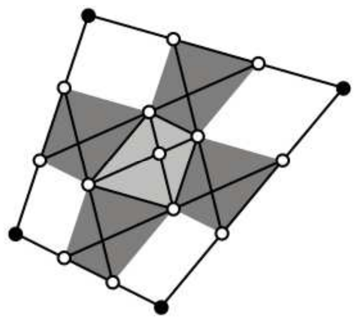


Abb. 10: Einpassen von vier weiteren Vierecken

Aufgabe 9: Liegt der Kantenschwerpunkt auch auf dieser besonderen Geraden?

5. Ergebnisse

Zu Aufgabe 1: Wir zeichnen ein hohes gleichschenkliges Dreieck mit relativ kleiner Basis (Abb. 11).

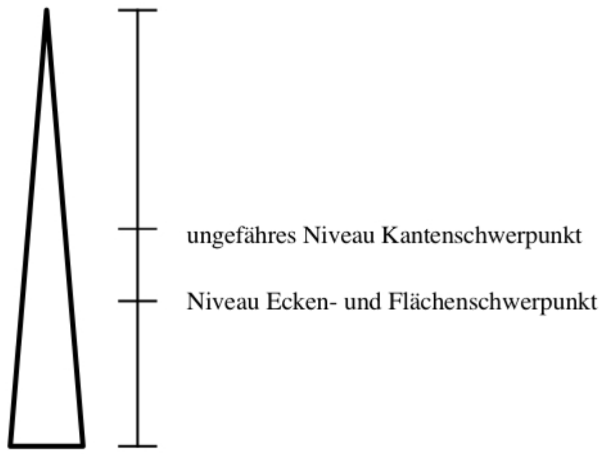


Abb. 11: Hoch und schmal

Der Ecken- und Flächenschwerpunkt liegt auf dem Niveau des unteren Drittels. Die Schwerpunkte der beiden langen Schenkel liegen auf halber Höhe. Da die kurze Basis keinen großen Einfluss auf den Kantenschwerpunkt hat, liegt dieser auch etwa auf halber Höhe (ein bisschen darunter).

Zu Aufgabe 2: Für die verschiedenen Schwerpunkte denken wir uns die Figur geeignet zerlegt und arbeiten dann mit lokalen Schwerpunkten.
Eckenschwerpunkt (Abb. 12a): Wir nehmen einerseits den Eckenschwerpunkt der drei Ecken oben und links (Konstruktion des Eckenschwerpunktes eines Dreieckes) und andererseits den Eckenschwerpunkt der konkaven Ecke und der beiden Ecken unten und rechts. An jedem dieser beiden Eckenschwerpunkte sind drei gleiche Eckenmassen beteiligt. Der Mittelpunkt dieser beiden lokalen Eckenschwerpunkte ist der Eckenschwerpunkt E der Gesamtfigur. Er fällt mit der konkaven Ecke zusammen.

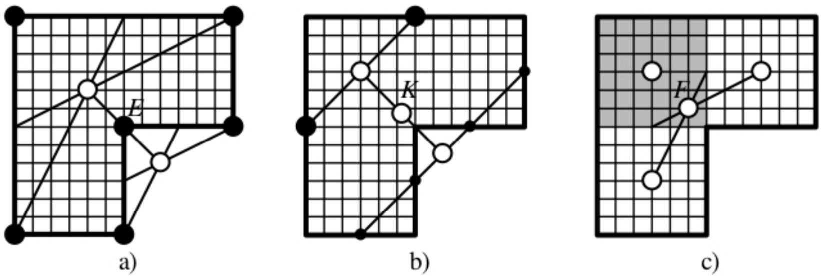


Abb. 12: Ecken-, Kanten- und Flächenschwerpunkt

Kantenschwerpunkt (Abb. 12b): Wir haben sechs Kanten, die beiden langen sind doppelt so lang wie die kurzen. Wir konstruieren nun den Schwerpunkt der beiden langen Kanten und den Schwerpunkt der vier kurzen Kanten. In diesen beiden lokalen Schwerpunkten hängen je gleich viel Kantenmassen. Der Mittelpunkt ist daher der Kantenschwerpunkt K der Gesamtfigur.

Flächenschwerpunkt (Abb. 12c): Wir zerlegen die Figur in drei Quadrate und konstruieren den Schwerpunkt der drei Quadratmittelpunkte. Dies gibt den Flächenschwerpunkt F der Gesamtfigur.

Die drei Schwerpunkte sind verschieden.

Zu Aufgabe 3: Wir verwenden eine drei-Hebel-Waage (Abb. 13) und geben je vier Kugeln in die drei Schalen. Dann sehen wir gleich, in welcher Vierergruppe die Ausnahmekugel ist, und wir sehen auch, ob sie schwerer oder leichter ist. Nun geben wir drei der vier Kugeln der Ausnahmegruppe auf die Waage. Wenn nichts passiert, ist die vierte Kugel die Ausnahmekugel, und sonst sehen wir, was los ist.

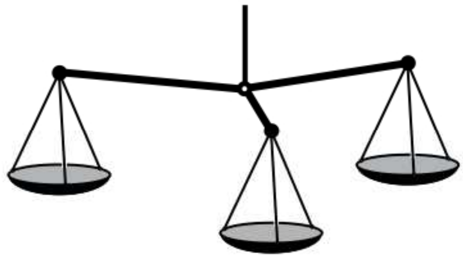


Abb. 13: Hebelwaage mit drei Hebeln

Nun ist eine Bemerkung angebracht: Es kann sein, dass eine Leserin oder ein Leser sich hier übers Ohr gehauen vorkommt, da man an eine übliche Waage mit zwei Hebeln gedacht hat. Da sind sozusagen die Spielregeln verändert worden. (In der Aufgabenstellung ist allerdings nichts über die Konstruktion der Hebelwaage zu lesen.) Hier zeigen sich die unterschiedlichen Aspekte des Begriffs „Problemlösen" in der Mathematik einerseits und der realen Welt andererseits. In der Mathematik sind die Spielregeln (Axiome) vorgegeben. Eine Lösung ist nur gültig, wenn sie sich innerhalb dieses Regelwerks bewegt. Originalität erweist sich im Denksport. In der realen Welt jedoch geht es darum, möglichst passende Hilfsmittel und Werkzeuge zu finden. Originalität erweist sich im Erweitern der Spielregeln.

Zu Aufgabe 4: Wir können über die Diagonalen zusammenfassen. Die Abbildung 14a zeigt die drei Möglichkeiten im selben Viereck. Wir erhalten drei Strecken, die sich paarweise im Eckenschwerpunkt halbieren und können damit drei sich durchdringende Parallelogramme zeichnen (Abb. 14b).

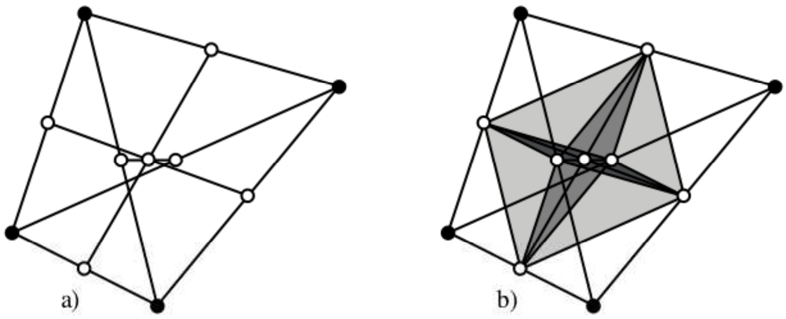
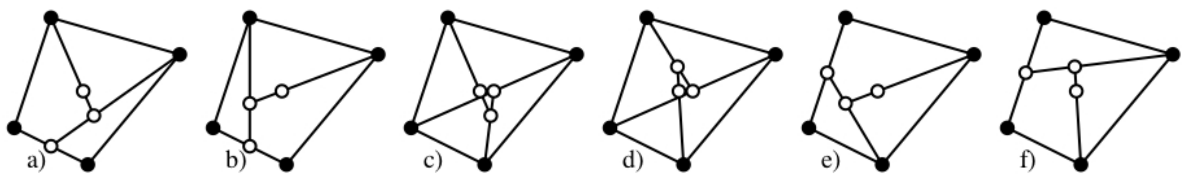


Abb. 14: Eckenschwerpunkt im Viereck

Die Abbildung 14 kann auch räumlich interpretiert werden. Die vier Eckpunkte spannen ein (unregelmäßiges) Tetraeder auf. Die drei Parallelogramme ihrerseits spannen ein (unregelmäßiges, aber punktsymmetrisches) Oktaeder auf.

Zu Aufgabe 5: Wir wählen zunächst einen Eckpunkt (4 Möglichkeiten) und verbinden mit einem anderen Eckpunkt (3 Möglichkeiten). Dann zeichnen wir den Mittelpunkt dieser Strecke und verbinden mit einem weiteren Eckpunkt (noch 2 Möglichkeiten). Diese Strecke dritteln wir. Der Drittelpunkt näher beim Mittelpunkt des ersten Konstruktionsschrittes ist der lokale Schwerpunkt der drei bislang verwendeten Eckpunkte. Wir verbinden diesen lokalen Schwerpunkt mit der verbleibenden Ecke (nur eine Möglichkeit) und vierteln. Der Viertelpunkt nahe beim lokalen Schwerpunkt des zweiten Konstruktionsschrittes ist der Schwerpunkt der vier Eckpunkte.
Der erste Schritt wird bei dieser kombinatorischen Abzählung allerdings doppelt gezählt. Für die Gesamtzahl der Konstruktionen nach diesem Verfahren ergeben sich somit $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{4!}{2} = 12$ Möglichkeiten (Abb. 15).



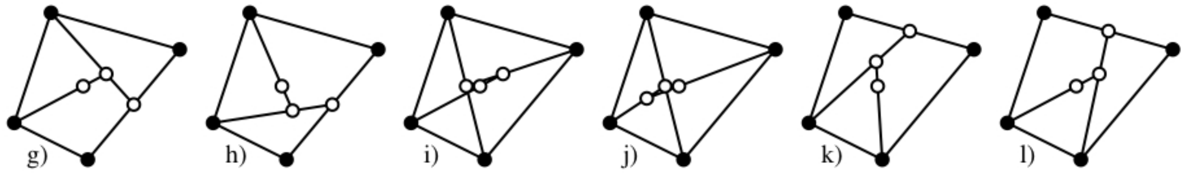


Abb. 15: Schwerpunktgalerie

Aus den Aufgaben 4 und 5 ergeben sich insgesamt $3+12=15$ Möglichkeiten, den Eckenschwerpunkt eines Viereckes zu konstruieren. Die Abbildung 16 zeigt die Überlagerung aller Konstruktionen.

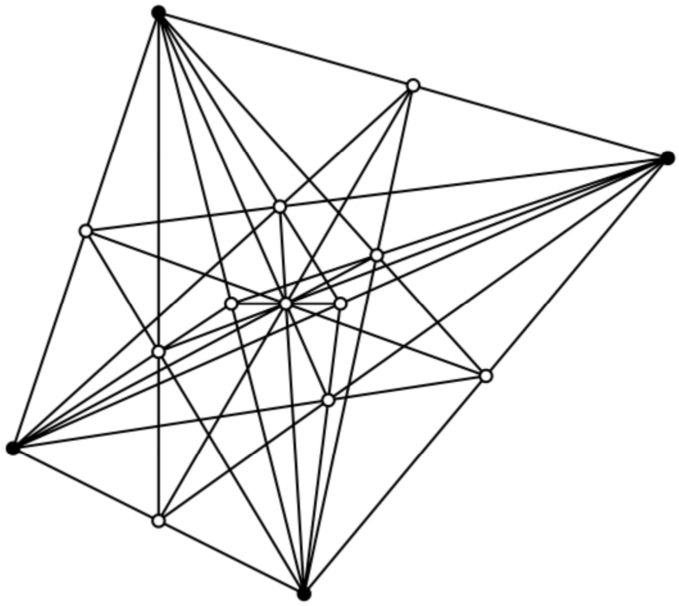


Abb. 16: Überlagerung

Zu Aufgabe 6: Der Eckenschwerpunkt des Viereckes $N_iN_aN_bN_c$ ist der Umkreismittelpunkt U des Dreieckes ABC und ebenso der Mittelpunkt des Neunpunktekreises (Feuerbachkreises) des Dreiecks $N_aN_bN_c$ (Abb. 17). Dies ergibt sich aus den Eigenschaften des Neunpunktekreises.

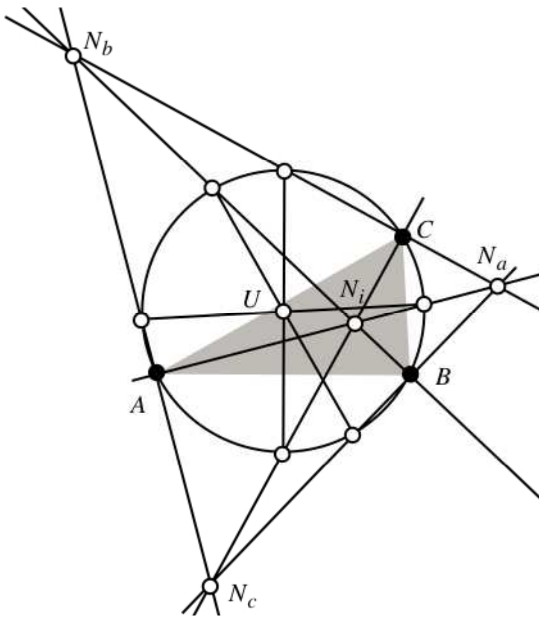


Abb. 17: Umkreis beziehungsweise Neunpunktekreis

Zu Aufgabe 7: Da der analoge Sachverhalt offenbar auch für ein Dreieck gilt (Abb. 18), beweisen wir gleich allgemein für ein *n*-Eck.

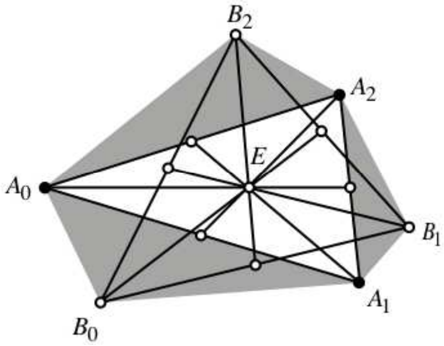


Abb. 18: Situation im Dreieck

Wir interpretieren die Punkte $A_0, \ldots, A_{n-1}$ als komplexe Zahlen. Für den Eckenschwerpunkt *E* haben wir dann:

$$E = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=0}^{n-1} A_i$$

Aus der Ähnlichkeit der aufgesetzten Dreiecke $A_i B_i A_{i+1}$ (Indizierung zyklisch modulo *n*) ergibt sich:

$$B_i = A_i + \lambda\left(A_{i+1} - A_i\right) = A_i\left(1-\lambda\right) + \lambda A_{i+1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Für den Schwerpunkt der Punkte $B_0, \ldots, B_{n-1}$ erhalten wir daraus:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} B_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(A_i(1-\lambda) + \lambda A_{i+1}) = (1-\lambda)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A_i + \lambda\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A_{i+1} = E$$

Der Trick besteht darin, dass wir in den zyklischen Summen die Indizes „schieben" können. — Damit ist die Vermutung bewiesen.

Zu Aufgabe 8: Die Konstruktion verläuft weitgehend analog zur Konstruktion des Kantenschwerpunktes im Dreieck. Im Viereck $A_0A_1A_2A_3$ seien M_0, M_1, M_2, M_3 die Kantenmitten und N_0, N_1, N_2, N_3 die Mitten der Seiten des Kantenmittenparallelogramms (Abb. 19).

Wir suchen nun zunächst den lokalen Schwerpunkt der beiden Kanten A_0A_1 und A_1A_2, deren Massen wir uns in den Mittelpunkten M_0 und M_1 konzentriert denken. Der lokale Schwerpunkt der beiden Kanten liegt also auf der Strecke M_0M_1, und wir bräuchten gemäß den Hebelgesetzen von ARCHIMEDES einen Teilpunkt, welcher dem umgekehrten Längenverhältnis der beiden Kanten A_0A_1 und A_1A_2 entspricht. Durch die Winkelhalbierende des Winkels $\angle M_1A_1M_0$ erhalten wir den Teilpunkt P_1, welcher dem direkten Längenverhältnis der beiden Kanten A_0A_1 und A_1A_2 entspricht. Wir müssen also noch P_1 an N_1 spiegeln und erhalten so den gesuchten Teilpunkt Q_1. Dieser ist somit der lokale Schwerpunkt der beiden Kanten A_0A_1 und A_1A_2. Analog konstruieren wir die Punkte Q_0, Q_2, Q_3. Der Schwerpunkt *K* aller vier Kanten muss nun einerseits auf der Strecke Q_1Q_3 und andererseits auf der Strecke Q_0Q_2 liegen, ist also deren Schnittpunkt.

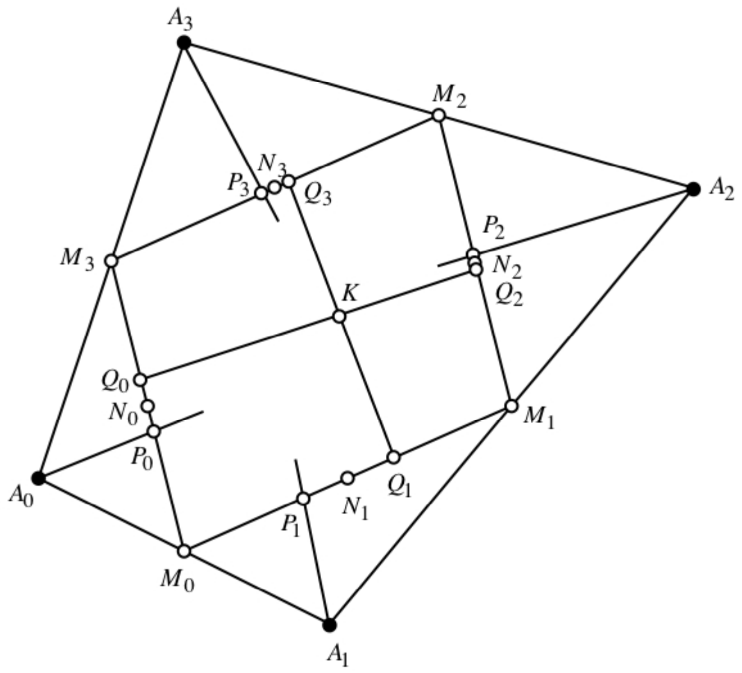


Abb. 19: Kantenschwerpunkt im Viereck

Zu Aufgabe 9: Nein. Dies kann an einem Beispiel falsifiziert werden.

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
e-mail: hwalser@bluewin.ch
www.math.unibas.ch/~walser/