Harald Löwe

Der Ergodensatz für MARKOV[1]-Matrizen

Die Modellierung mehrstufiger Prozesse führt in vielen Fällen zu einem System von Differenzengleichungen erster Ordnung, dessen langfristiges Verhalten das Berechnen der Potenzen der Begleitmatrix sowie das Finden eines Fixvektors nötig macht. Mittlerweile hat dieser Typ von Anwendungsaufgaben auch den Weg in die gymnasiale Oberstufe gefunden; so lesen wir etwa im niedersächsischen Kerncurriculum [1, S.24]:

„Die Schülerinnen und Schüler wenden Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen an und interpretieren Grenzmatrizen sowie Fixvektoren.“

Zum Auffinden der Potenzen einer Matrix wird hierbei der Taschenrechner (GTR oder CAS) eingesetzt; dies gilt ebenfalls für das Bestimmen einer Grenzverteilung. Damit hat man zwar die notwendigen Ergebnisse gefunden – aber für meinen Geschmack eigentlich nichts verstanden. Als Alternative möchte ich im Folgenden den Einsatz von Eigenwerten und Eigenvektoren zur Lösung derartiger Probleme schildern sowie als besonderes Highlight den Ergodensatz für MARKOV-Matrizen formulieren und beweisen. Neben einem tiefergehenden Verständnis des Themas bietet dieser Zugang eine besonders schöne Verbindung zwischen Geometrie, Analysis und Stochastik. Vorausgesetzt werden im Verlauf des Geschehens lediglich das Rechnen mit Matrizen und Vektoren sowie einige Kenntnisse über reelle Zahlenfolgen und ihrer Grenzwerte.

1. Wie wird das Wetter in Nürnberg?

Als Einführungsbeispiel sehen wir uns eine nicht sehr realistische, aber einfache Modellierung des Wetters in Nürnberg an. Unser Interesse gilt dem langfristigen Verhalten: Wie stark hängt das Wetter in 100 oder in 1.000 Tagen vom derzeitigen Wetter ab? Um die Angelegenheit einfach zu halten, betrachten wir lediglich zwei mögliche Zustände, nämlich T (trocken) und R (regnerisch). Der Wetterzustand am n-ten Tag ist daher eine Zufallsvariable W_n, die die Werte T und R annehmen kann. Als erste Modellannahme legen wir fest: Der Wetterzustand W_{n+1} am (n+1)-ten Tag hängt nur von dem Wetterzustand W_n am n-ten Tag ab. Mit Hilfe des Satzes über die totale Wahrscheinlichkeit erhalten wir die Gleichung

$$P(W_{n+1}=T)=P(W_{n+1}=T\mid W_n=T)\cdot P(W_n=T)+P(W_{n+1}=T\mid W_n=R)\cdot P(W_n=R),$$

wobei P(…) die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses „…“ und P(…|…) wie immer eine bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Eine völlig analoge Gleichung erhalten wir auch für $P(W_{n+1}=R)$, so dass wir folgende Matrixgleichung aufstellen können:

$$x(n+1)=\begin{pmatrix}P(W_{n+1}=T)\\P(W_{n+1}=R)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}P(W_{n+1}=T\mid W_n=T) & P(W_{n+1}=T\mid W_n=R)\\P(W_{n+1}=R\mid W_n=T) & P(W_{n+1}=R\mid W_n=R)\end{pmatrix}}_{\text{Übergangsmatrix } P(n)}\cdot\begin{pmatrix}P(W_n=T)\\P(W_n=R)\end{pmatrix}=P(n)\cdot x(n).$$

Als zweite Modellannahme setzen wir voraus, dass $P(n)=:P$ nicht von n abhängt. Die Einträge dieser Matrix kann man aus den historischen Wetterdaten schätzen; wir verwenden hierfür völlig frei erfundene Werte, nämlich $P=\begin{pmatrix}0,6 & 0,2\\0,4 & 0,8\end{pmatrix}$. Mit Hilfe vollständiger Induktion erhalten wir hieraus die Gleichung

[1] Andrei Andrejewitsch Markov geboren 14. 6. 1856 in Rjasan, gestorben 20. 7. 1922 in Petrograd

$$x(n) = P \cdot x(n-1) = P^2 \cdot x(n-2) = \ldots = P^n \cdot x(0) = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot x(0).$$

Den Wetterzustand x(0) am heutigen Tag erkennen wir durch einen Blick aus dem Fenster: es gilt [2] $x(0) = (1 \quad 0)^T$ oder $x(0) = (0 \quad 1)^T$. Damit reduziert sich unser Problem auf das Bestimmen der n-ten Potenz der Matrix P. Das scheint für große n nur mit dem Rechner möglich zu sein – es sei denn, man hat die folgenden Informationen über P zur Verfügung. Es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ sowie } \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}4 \end{pmatrix} = 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ sowie } \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0{,}4^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Zerlegung $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot (a+b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a - b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \cdot (a+b) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a - b) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (a+b) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a - b) \cdot 0{,}4^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1+2 \cdot 0{,}4^n & 1-0{,}4^n \\ 2-2 \cdot 0{,}4^n & 2+0{,}4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Potenzen von P explizit bestimmt:

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1+2 \cdot 0{,}4^n & 1-0{,}4^n \\ 2-2 \cdot 0{,}4^n & 2+0{,}4^n \end{pmatrix}.$$

Für große n ist $0{,}4^n$ ungefähr 0, so dass $x(n) = P^n \cdot x(0)$ sowohl für $x(0) = (1 \quad 0)^T$ als auch für $x(0) = (0 \quad 1)^T$ näherungsweise $(1/3 \quad 2/3)^T$ ergibt. Mathematisch ausgedrückt erhalten wir die folgende Aussage

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}^n \cdot x(0) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{für } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „in Nürnberg ist es trocken“ genau 1/3; dabei ist diese Wahrscheinlichkeit fast unabhängig von dem Wetter vor 10 Tagen, denn $0{,}4^{10} \approx 10^{-4}$.

Wie aber bestimmt man die Vektoren $(1 \quad 2)^T$ und $(1 \quad -1)^T$? Hierzu benötigen wir einige Kenntnisse, die wir im nächsten Paragraphen erwerben wollen.

2. Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir betrachten eine quadratische Matrix P. Eine reelle Zahl t heißt *Eigenwert* von P, wenn die Gleichung $P \cdot x = t \cdot x$ eine Lösung $x \neq 0$ besitzt; derartige Vektoren x nennen wir dann *Eigenvektoren* zum Eigenwert t. Geometrisch besagt die Gleichung, dass der Vektor x durch Multiplikation um das t-fache gestreckt wird.

Aufgabe[3] **2.1**: Finden Sie durch geometrische Betrachtungen (2×2) – Matrizen, die keine Diagonalmatrizen sind und zwei / genau einen / keinen Eigenwert besitzen.

[2] Das hochgestellte „T“ bei Vektoren bezeichnet den transponierten Vektor.
[3] Die Lösungen der Aufgaben finden Sie am Schluss dieser Arbeit.

Hat man einen Eigenwert t gefunden, so erhalten wir durch Umformen der Gleichung $P \cdot x = t \cdot x$ das lineare homogene Gleichungssystem $(P - t \cdot I) \cdot x = 0$ (wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet); diese Gleichung kann wie üblich per GAUßalgorithmus gelöst werden.

Beispiel 2.1: Wir vermuten, dass t = 1 ein Eigenwert der Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Wir ziehen daher das 1-fache der Einheitsmatrix von P ab und lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem mit dem GAUßalgorithmus:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{I} \end{array} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ -\mathrm{II} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

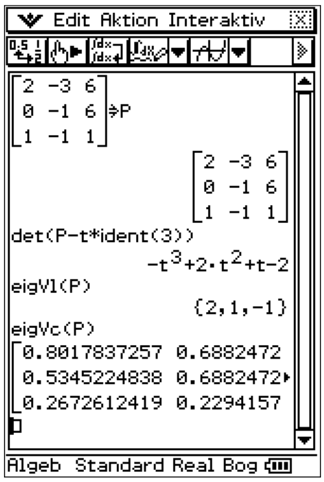
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems besteht aus allen Vielfachen des Vektors $x = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$. Folglich ist 1 wirklich ein Eigenwert und die zugehörigen Eigenvektoren haben wir auch gleich bestimmt.

Wie aber rechnet man die Eigenwerte aus? Falls das Konzept der Determinante bekannt ist, so ist die Angelegenheit durch Zitieren der CRAMER[4]-Regel erledigt: Das Gleichungssystem $(P - t \cdot I) \cdot x = 0$ hat genau dann eine nicht-triviale Lösung x, wenn die Determinante $\det(P - t \cdot I)$ verschwindet. Auswerten der Determinante führt auf ein Polynom (das so genannte *charakteristische Polynom* von P), so dass wir das Eigenwertproblem auf das Lösen der Polynomgleichung $\det(P - t \cdot I) = 0$ zurückgeführt haben.

Beispiel 2.2: Wir bestimmen sämtliche Eigenwerte der Matrix P des vorigen Beispiels. Dazu lösen wir

$$0 = \det(P - t \cdot I) = \det \begin{pmatrix} 2-t & -3 & 6 \\ 0 & -1-t & 6 \\ 1 & -1 & 1-t \end{pmatrix} = -t^3 + 2t^2 + t - 2$$

und erhalten die Eigenwerte ± 1 und 2.Wurden Determinanten nicht behandelt, so hilft an dieser Stelle der Taschenrechner weiter. Zumindest im Fall des Casio ClassPad (siehe Bild rechts) werden diese allerdings „nur" numerisch[5] bestimmt; sind exakte Werte erwünscht, so muss man das charakteristische Polynom über die Determinantenfunktion berechnen lassen. Von der Verwendung des Befehls „eigVc" des ClassPad zur numerischen Bestimmung von Eigenvektoren der Länge 1 rate ich ab: Die hier auftretenden Rundungsfehler machen einem später das Leben unnötig schwer.



Für kleinere oder einfach gebaute Matrizen wie der aus dem vorigen Beispiel kann man zur Bestimmung der Eigenwerte auch direkt vorgehen:

Aufgabe 2.2: Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

[4] Gabriel Cramer, geboren 31. 7. 1704 in Genf, gestorben 4. 1. 1752 in Bagnols-sur-Cèze/Frankreich, fand die Regel 1750.

[5] Die in Anwendungen auftretenden Matrizen sind groß und haben selten rationale Nullstellen, so dass spätestens die Nullstellen des charakteristischen Polynoms mit numerischen Verfahren gefunden werden müssen.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ohne Verwendung eines Taschenrechners oder der Determinante.

Wozu der Aufwand? Bildet man aus den o.a. Eigenvektoren eine Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man nach einer kurzen Rechnung

$$T^{-1} \cdot P \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und damit wegen

$$T^{-1} \cdot P^n \cdot T = (T^{-1} \cdot P \cdot T) \cdot (T^{-1} \cdot P \cdot T) \cdot \ldots \cdot (T^{-1} \cdot P \cdot T) = \left(T^{-1} \cdot P \cdot T\right)^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & & \\ & 1 & \\ & & 2^n \end{pmatrix}$$

eine explizite Formel für die n-te Potenz von P, nämlich

$$P^n = T \cdot \left(T^{-1} \cdot P \cdot T\right) \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n + (-1)^n - 3 & -3 \cdot 2^n + 3 & -3 \cdot (-1)^n + 3 \\ 2^{n+1} + (-1)^n - 3 & -2^{n+1} + 3 & -3 \cdot (-1)^n + 3 \\ 2^n - 1 & -2^n + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das wiederum ist durchaus kein Zufall:

Satz 2.1: Es sei P eine $(r \times r)-$Matrix.

a. Sind $v_1, \ldots, v_s$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $t_1, \ldots, t_s$, so sind $v_1, \ldots, v_s$ linear unabhängig.

b. Besitzt P genau r paarweise verschiedene Eigenwerte, so gibt es eine Basis aus Eigenvektoren.

c. Bilden die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_r$ zu den (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $t_1, \ldots, t_r$ von P eine Basis des $\mathbf{R}^r$, so ist die Matrix $T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{pmatrix}$ invertierbar. In diesem Fall gilt

$$T^{-1} \cdot P \cdot T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_r \end{pmatrix} \text{ sowie } P^n = T \cdot \begin{pmatrix} t_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_r^n \end{pmatrix} \cdot T^{-1}.$$

Beweis: a. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über s. Für s=1 ist nichts zu zeigen. Für den Induktionsschluss setzen wir $a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_s \cdot v_s + a_{s+1} \cdot v_{s+1} = 0$ an. Unter Beachtung der Beziehung $P \cdot v_i = t_i \cdot v_i$ liefert Anwenden von P die Gleichung $a_1 \cdot t_1 \cdot v_1 + \ldots + a_s \cdot t_s \cdot v_s + a_{s+1} \cdot t_{s+1} \cdot v_{s+1} = 0$. Hiervon ziehen wir das $t_{s+1}-$fache der ursprünglichen Gleichung ab und erhalten

$a_1 \cdot (t_1 - t_{s+1}) \cdot v_1 + \ldots + a_s \cdot (t_s - t_{s+1}) \cdot v_s = 0$. Nach Voraussetzung gilt $t_i \neq t_{s+1}$ bzw. $t_i - t_{s+1} \neq 0$ für $i \neq s+1$; die Induktionsvoraussetzung liefert daher $a_1 = \ldots = a_s = 0$, womit auch $a_{s+1} = 0$ gelten muss.

b. Wir wählen zu jedem der r Eigenwerte einen Eigenvektor. Nach a. sind diese linear unabhängig und bilden folglich eine Basis von $\mathbf{R}^r$.

c. Die Spalten von T bilden nach Voraussetzung eine Basis. Damit ist T invertierbar. Es folgt

$$\begin{aligned} P \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P \cdot v_1 & P \cdot v_2 & \ldots & P \cdot v_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \cdot v_1 & t_2 \cdot v_2 & \ldots & t_r \cdot v_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die vorstehende Diagonalmatrix mit D, so gilt $P = T \cdot D \cdot T^{-1}$ und damit

$$\begin{aligned} P^n &= \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right)^n = \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right) \cdot \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right) \cdot \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right) \cdot \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right) \\ &= T \cdot D \cdot \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot D \cdot \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot D \cdot \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot \ldots \cdot \left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^n \cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

□

Definition: Gibt es eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix P, so wollen wir P *diagonalisierbar* nennen.

Aufgabe 2.3: Überprüfen Sie die Diagonalisierbarkeit folgender Matrizen und bestimmen Sie die n-te Potenz: $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 16 \\ 8 & 10 & -28 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.4: Weisen Sie die folgende Behauptung nach: Gibt es zur Matrix P eine invertierbare Matrix T, so dass $T^{-1} \cdot P \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist, so gibt es eine Basis aus Eigenvektoren von P.

Aufgabe 2.5: Warum sind die beiden folgenden $(2 \times 2)-$ Matrizen nicht diagonalisierbar? Gibt es trotzdem eine Möglichkeit zur Bestimmung der n-ten Potenz?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Grenzwerte von Vektor- und Matrixfolgen: Zum Abschluss dieses vorbereitenden Abschnitts wollen wir kurz auf den Grenzwertbegriff für Folgen von Vektoren eingehen. Unter solch einer Folge von Vektoren versteht man dabei nichts anderes als eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n einen Vektor v(n) zuordnet:

$$v(n) = \begin{pmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_r(n) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^r.$$

Die Komponenten $v_j(n)$ des Vektors v(n) sind ihrerseits Folgen reeller Zahlen, so dass wir kurzerhand definieren: Die oben angegebene Vektorfolge v(n) konvergiert gegen den Grenzwert $g \in \mathbf{R}^r$, wenn für *jedes* $j = 1, \ldots, r$ die Komponentenfolgen $v_j(n)$ gegen g_j konvergiert. In diesem Fall gilt also

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} = g = \lim_{n\to\infty} v(n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_r(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} v_1(n) \\ \lim_{n\to\infty} v_2(n) \\ \vdots \\ \lim_{n\to\infty} v_r(n) \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise ist $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/n \\ 1-0,5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} 1/n \\ \lim_{n\to\infty}(1-0,5^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, während die Vektorfolge $v(n) = \begin{pmatrix} 1/n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$ nicht konvergiert, da die zweite Komponente $v_1(n) = (-1)^n$ divergent ist.

Folgen von Matrizen werden ganz analog behandelt: Ist

$$P(n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(n) & \cdots & \alpha_{1r}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1}(n) & \cdots & \alpha_{rr}(n) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{r\times r}$$

eine derartige Folge, und sind *sämtliche* Komponentenfolgen $\alpha_{ij}(n)$ konvergent, so setzen wir

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \alpha_{11}(n) & \cdots & \alpha_{1r}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1}(n) & \cdots & \alpha_{rr}(n) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} \alpha_{11}(n) & \cdots & \lim_{n\to\infty} \alpha_{1r}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lim_{n\to\infty} \alpha_{r1}(n) & \cdots & \lim_{n\to\infty} \alpha_{rr}(n) \end{pmatrix}.$$

Das folgende Beispiel demonstriert diesen Sachverhalt hoffentlich ausreichend:

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/n & 0,5^n \\ \sqrt[n]{n} & \sin\left(1/n^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} 1/n & \lim_{n\to\infty} 0,5^n \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} & \lim_{n\to\infty} \sin\left(1/n^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.6: Ist $v \in \mathbf{R}^r$ ein Vektor mit den Komponenten $v_1,\ldots,v_r$, so bezeichnen wir die reelle Zahl $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_r^2}$ so genannte euklidische Norm von v. Der Abstand zwischen zwei Punkten $p, q \in \mathbf{R}^r$ ist dann $\|q-p\|$. Zeigen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Eine Vektorfolge v(n) konvergiert genau dann gegen den Grenzwert g, wenn die reelle Zahlenfolge $a(n) = \|v(n) - g\|$ gegen 0 konvergiert.

(b) In dieser Aufgabe bezeichnen $u(n), v(n) \in \mathbf{R}^r$ zwei konvergente Vektorfolgen mit den Grenzwerten u bzw. v, weiterhin seien $P(n), Q(n) \in \mathbf{R}^{r\times r}$ konvergente Matrixfolgen mit den Grenzwerten P bzw. Q sowie $\alpha(n)$ eine konvergente Zahlenfolge mit Grenzwert α. Nachzuweisen sind die folgenden Rechenregeln:

(1) Die Vektorfolge w(n) = u(n) + v(n) konvergiert und es gilt
$\lim_{n\to\infty} w(n) = \lim_{n\to\infty}\left(u(n) + v(n)\right) = \lim_{n\to\infty} u(n) + \lim_{n\to\infty} v(n) = u + v.$

(2) Die Vektorfolge $w(n) = \alpha(n)\cdot v(n)$ konvergiert und es gilt
$\lim_{n\to\infty} w(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha(n)\cdot v(n)\right) = \lim_{n\to\infty} \alpha(n) \cdot \lim_{n\to\infty} v(n) = \alpha \cdot v.$

(3) Die Vektorfolge $w(n) = P(n)\cdot v(n)$ konvergiert und es gilt
$\lim_{n\to\infty} w(n) = \lim_{n\to\infty}\left(P(n)\cdot v(n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(n) \cdot \lim_{n\to\infty} v(n) = P \cdot v.$

(4) Die Matrixfolge $R(n) = P(n)\cdot Q(n)$ konvergiert und es gilt
$\lim_{n\to\infty} R(n) = \lim_{n\to\infty}\left(P(n)\cdot Q(n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(n) \cdot \lim_{n\to\infty} Q(n) = P \cdot Q.$

Aufgabe 2.7: Berechnen Sie für die im ersten Abschnitt betrachtete „Wetter-Matrix" $P := \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} P^n$. Welche Grenzwerte können für die Vektorfolgen $x(n) = P^n \cdot x_0$ (mit dem Startvektor $x_0 \in \mathbf{R}^2$) auftreten?

3. Autonome Systeme von Differenzengleichungen

Wir beginnen mit einer Sprachregelung:

Definition: Ist P eine $(r \times r)-$Matrix, so nennt man die Gleichung $x(n+1) = P \cdot x(n)$ mit $x(n) \in \mathbf{R}^r$ *ein autonomes homogenes System von Differenzengleichungen erster Ordnung*[6]. Der Vektor x(n) heißt *Zustandsvektor* zum Zeitpunkt n. Ist ein Anfangszustand $x(0) = a$ vorgegeben, so nennt man $x(n+1) = P \cdot x(n);\ x(0) = a$ ein *Anfangswertproblem*.

Wie bereits im Eingangsbeispiel erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems $x(n+1) = P \cdot x(n); x(0) = a$ mit Hilfe der Rechnung $x(n) = P \cdot x(n-1) = P^2 \cdot x(n-2) = \ldots = P^n \cdot x(0) = P^n \cdot a.$ Ist hierbei P diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix T, so dass $D = T^{-1} \cdot P \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist. In diesem Fall lässt sich x(n) relativ bequem aus $x(n) = T \cdot D^n \cdot T^{-1} \cdot a$ bestimmen, vgl. Satz 2.1. Wir fassen zusammen:

Satz 3.1: Das Anfangswertproblem $x(n+1) = P \cdot x(n);\ x(0) = x_0$ hat die eindeutige Lösung $x(n) = P^n \cdot x_0$. Ist T invertierbar und gilt $D = T^{-1} \cdot P \cdot T$, so können wir die Lösung auch als $x(n) = T \cdot D^n \cdot T^{-1} \cdot x_0$ schreiben.

Beweis: Wir müssen lediglich noch die Eindeutigkeit der Lösung des genannten Anfangswertproblems nachweisen. Dazu seine x(n) und y(n) zwei Lösungen mit x(0) = y(0). Dann gilt

$$y(n+1) - x(n+1) = P \cdot x(n) - P \cdot y(n) = P \cdot (x(n) - y(n)),$$

d. h. $z(n) = y(n) - x(n)$ ist ebenfalls eine Lösung des Systems mit Anfangswert $z(0) = y(0) - x(0) = 0.$ Per vollständiger Induktion erhalten wir hieraus z(n) = 0 (und damit y(n) = x(n)) für alle n; der Induktionsschritt lautet: Ist z(n) = 0, so gilt auch $z(n+1) = P \cdot z(n) = P \cdot 0 = 0.$ □

Aus dem Satz wollen wir noch eine wichtige Beobachtung zu den homogenen Systemen herausheben: Sind u(n) und v(n) zwei Lösungen von $x(n+1) = P \cdot x(n)$ sowie a, b reelle Zahlen, so ist auch $w(n) = a \cdot u(n) + b \cdot v(n)$ eine Lösung. Man kann mit den Lösungen (die ja vektorwertige Folgen sind) wie mit Vektoren rechnen; ein Mathematiker würde an dieser Stelle sagen, dass die Lösungen eines homogenen Systems einen „Vektorraum" bilden. Die Abbildung „Lösung → Anfangswert" übersetzt diese Struktur eins zu eins in den Vektorraum der n-Vektoren, denn schließlich ist diese Abbildung bijektiv (denn $x(n) = P^n \cdot x(0)$ ist die allgemeine Lösung des Systems) und es gilt $w(0) = a \cdot u(0) + b \cdot v(0)$, d. h. mit den Anfangswerten kann man genauso rechnen wie mit den Lösungen.

[6] Der Zusatz „autonom" oder „zeitunabhängig" besagt lediglich, dass die Matrix P nicht von n abhängt. Da wir andere Systeme ohnehin nicht betrachten, lassen wir den Zusatz meist weg.

Beispiel 3.1 (Die FIBONACCI[7]-Folge): Die sattsam bekannte FIBONACCI-Folge $a(n+2)=a(n+1)+a(n)$ mit den Startwerten $a(0)=a(1)=1$ ist ein Beispiel einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, die sich – ähnlich dem Vorgehen bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung – als System schreiben lässt. Hierzu setzen wir kurzerhand $b(n)=a(n+1)$ und erhalten $b(n+1)=a(n+2)=a(n)+a(n+1)=a(n)+b(n)$ mit der Anfangsbedingung $b(0)=a(1)=1$. Setzen wir $x(n)=\begin{pmatrix}a(n) & b(n)\end{pmatrix}^T$, so entsteht das folgende System:

$$x(n+1)=\begin{pmatrix}a(n+1)\\ b(n+1)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{=:P}\cdot\begin{pmatrix}a(n)\\ b(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot x(n)\ \text{ mit }\ x(0)=\begin{pmatrix}a(0)\\ b(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von P berechnen sich zu $\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$ und $\beta==\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$. Für $t\in\{\alpha,\beta\}$ ist $(P-t\cdot I)\cdot x=0$ daher nicht-trivial lösbar, so dass die beiden Zeilen des Gleichungssystems linear abhängig sind und wir von vornherein nur die erste Zeile $-t\quad 1\mid 0$ in Betracht ziehen müssen. Ganz offenbar ist $\begin{pmatrix}1 & t\end{pmatrix}^T$ eine Lösung[8]; die gesuchten Eigenvektoren sowie die Transformationsmatrix lauten daher

$$v_\alpha=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{pmatrix};\quad v_\beta=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{pmatrix};\quad T=\begin{pmatrix}v_\alpha & v_\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}.$$

Die zu T inverse Matrix T^{-1} ist eine Lösung der Matrixgleichung $T\cdot X=I$, so dass wir den GAUßalgorithmus zur Bestimmung verwenden können:

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 & 1\end{array}\right|\begin{array}{c} \\ -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\cdot I\end{array}\ \to\ \left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -\sqrt{5} & -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right) & 1\end{array}\right|\begin{array}{c} \\ \cdot\frac{-\sqrt{5}}{5}\end{array}\ \to$$

$$\to\ \left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5}\end{array}\right|\begin{array}{c} -II\\ \\ \end{array}\ \to\ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5}\end{array},\quad\text{also gilt}\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das Produkt $T^{-1}\cdot x(0)=T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha/\sqrt{5}\\ -\beta/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ und erhalten die Lösung des Anfangswertproblems $x(n+1)=P\cdot x(n);\ \ x(0)=x_0$ aus der Rechnung

$$\begin{pmatrix}a(n)\\ b(n)\end{pmatrix}=x(n)=P^n\cdot x(0)=T\cdot\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}\cdot T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha/\sqrt{5}\\ -\beta/\sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\\ *\end{pmatrix}.$$

Damit haben wir nahezu ohne Mühe eine explizite Formel des n-ten Glieds der FIBONACCI-Folge erhalten:

$$a(n)=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\quad\text{mit }\alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\text{ und }\beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Den goldenen Schnitt erhalten wir übrigens hieraus als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{a(n)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}=\alpha,\quad\text{da }\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}=0\text{ wegen }0<\frac{\beta}{\alpha}<1.$$

[7] Leonardo da Pisa (genannt Fibonacci) geboren um 1180 in Pisa, gestorben um 1241 in Pisa.
[8] Wir rechnen hier nichts aus, sondern nutzen unser Wissen und lesen nur ab!

Aufgabe 3.1: Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden Systeme.

(a) $x(n+1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot x(n).$

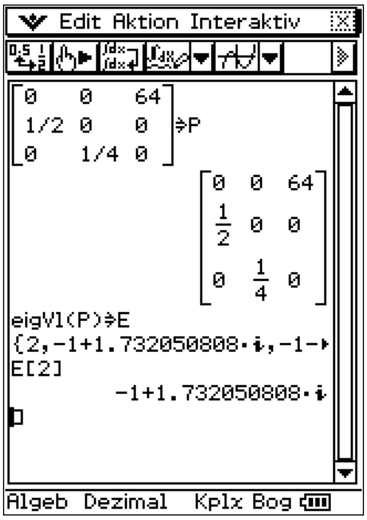
(b) $x(n+1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot x(n).$

(c) $x(n+1)=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 16\\ 8 & 10 & -28\\ 2 & 2 & -5\end{pmatrix}\cdot x(n).$

Beispiel 3.2 (Populationsentwicklung): Wir betrachten eine (fiktive) Insektenpopulation, wobei im n-ten Monat der Beobachtung E(n) Eier, L(n) Larven sowie A(n) ausgewachsene Insekten vorhanden sein mögen.

Die Entwicklung der Population modellieren wir mit dem folgenden System

$$\begin{pmatrix}E(n+1)\\ L(n+1)\\ A(n+1)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 0 & n\\ p & 0 & 0\\ 0 & q & 0\end{pmatrix}}_{=P}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}E(n)\\ L(n)\\ A(n)\end{pmatrix}}_{=x(n)}\quad \text{mit } 0<p,q<1 \text{ und } n\in\mathbf{N},$$



d. h. von den Eiern entwickelt sich ein gewisser Anteil p zu Larven (der Rest stirbt); genauso wird das q-fache an vorhandenen Larven zu ausgewachsenen Insekten und diese wiederum legen in dem Monat n Eier und versterben anschließend.

Ein erster Test mit p = ½, q = ¼ und n = 64 auf dem Taschenrechner führt zu dem zunächst unschönen Ergebnis, dass zwei der drei Eigenwerte nicht reell sind. Ohne genauere Kenntnisse der Matrizenrechnung über den komplexen Zahlen müssen wir uns folglich etwas anderes einfallen lassen. Ganz so schwierig wird es glücklicherweise nicht: Zunächst rechnen wir P^2 und P^3 aus:

$$P^2=\begin{pmatrix}0 & n\cdot q & 0\\ 0 & 0 & n\cdot p\\ p\cdot q & 0 & 0\end{pmatrix};\quad P^3=\begin{pmatrix}n\cdot p\cdot q & 0 & 0\\ 0 & n\cdot p\cdot q & 0\\ 0 & 0 & n\cdot p\cdot q\end{pmatrix}=\lambda^3\cdot I \text{ mit } \lambda=\sqrt[3]{n\cdot p\cdot q}.$$

Hieraus lassen sich bereits alle relevanten Informationen ablesen; speziell gilt

- λ ist ein Eigenwert von P und P besitzt sonst keine reellen Eigenwerte. Ist nämlich t ein Eigenwert von P, so gibt es einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor v mit $P\cdot v=t\cdot v$. Damit folgt jetzt $\lambda^3\cdot v=P^3\cdot v=t^3\cdot v$, also gilt $t=\lambda$. Weiterhin ist λ in der Tat ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $v_\lambda=\left(\sqrt[3]{n/p}\quad \sqrt[3]{p/q}\quad \sqrt[3]{q/n}\right)^T$.
- P ist nicht diagonalisierbar, sonst wäre $P=\lambda\cdot I$.
- Für $\lambda<1$ stirbt die Population aus, denn $\lim\limits_{n\to\infty}P^{3n}\cdot w=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n\cdot w=0$ gilt für jeden Vektor $w\neq 0$. Für $\lambda>1$ wächst die Population aus dem gleichen Grund unbeschränkt.

Der einzig interessante Fall ist daher $\lambda^3=p\cdot q\cdot n=1$. Multiplizieren des oben bestimmten Eigenvektors $v_\lambda=v_1$ mit dem Skalar $\sqrt[3]{p^2\cdot q}$ zeigt, dass $\hat{v}=(1\quad p\quad p\cdot q)^T$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda=1$ ist. Fängt man mit einem Vielfachen von $\hat{v}$ als Startpopulationsvektor an, so ändert diese sich überhaupt nicht – die Anzahlen der Eier, Larven und ausgewachsenen Insekten sind in jedem Monat die gleichen wie im Vormonat. Ist hingegen x(0) kein Vielfaches von $\hat{v}$, so sind x(0), x(1), x(2) paarweise linear unabhängig. Da x(3) = x(0), x(4) = x(1) etc. gilt, erfolgt die Entwicklung der Population daher in einem dreimonatigen Zyklus.

Aufgabe 3.2: Wir übernehmen sämtliche Notationen aus Beispiel 3.2.

a. Rechnen Sie nach, dass v_λ ein Eigenvektor von P ist.
b. Zeigen Sie, dass P nicht diagonalisierbar ist.
c. Wir setzen $\lambda = 1$ voraus und betrachten einen Vektor w = x(0), der kein Vielfaches von $\hat{v}$ ist. Warum sind dann $w,\ P\cdot w,\ P^2\cdot w$ paarweise linear unabhängig? Für welche w sind diese drei Vektoren linear abhängig? Gibt es eine geometrische Interpretation für diesen Sachverhalt?

Recht kurz wollen wir noch die *inhomogenen Systeme* $x(n+1) = P\cdot x(n) + g(n)$ betrachten, wobei g(n) ein von n abhängiger Vektor ist.

Satz 3.2: Es gibt genau eine Lösung $x_p(n)$ des inhomogenen Systems $x(n+1) = P\cdot x(n) + g(n)$ mit $x_p(0) = 0,$ nämlich die wie folgt definierte:

$$x_p(0) = 0$$
$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{n-1-k}\cdot g(k) = P^{n-1}\cdot g(0) + P^{n-2}\cdot g(1) + \ldots + P\cdot g(n-1) + g(n).$$

Das Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ hat dann die eindeutige Lösung $x(n) = x_p(n) + P^n\cdot x_0.$ Ist T invertierbar und gilt $D = T^{-1}\cdot P\cdot T$, so können wir die Lösung auch folgendermaßen schreiben:

$$x(n) = T\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1} D^{n-1-k}\cdot T^{-1}\cdot g(k) + D^n\cdot T^{-1}\cdot x_0\right).$$

Beweis: In der Tat ist $x_p(n)$ eine Lösung des inhomogenen Systems, denn

$$x_p(1) = g(0) = P\cdot 0 + g(0) = P\cdot x_p(0) + g(0) \text{ und}$$
$$x_p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} P^{n-k}\cdot g(k) = P\cdot\left(\sum_{k=0}^{n-1} P^{n-1-k}\cdot g(k)\right) + g(n) = P\cdot x_p(n) + g(n) \text{ für } n \ge 2$$

Ist $x(n)$ eine weitere Lösung des inhomogenen Systems mit Anfangswert $x(0) = x_0$, so ist wegen

$$x(n+1) - x_p(n+1) = \left(P\cdot x(n) + g(n)\right) - \left(P\cdot x(n) + g(n)\right) = P\cdot\left(x(n) - x_p(n)\right)$$

die Differenz $x_h(n) = x(n) - x_p(n)$ eine Lösung des homogenen Systems $x_h(n+1) = P\cdot x_h(n)$ mit dem Anfangswert $x_h(0) = x(0) - x_p(0) = x_0$. Nach Satz 3.1 ist daher $x(n) - x_p(n) = x_h(n) = P^n\cdot x_0$ die einzige Möglichkeit. Damit ist $x(n) = x_p(n) + P^n\cdot x_0$ die einzige Lösung des Anfangswertproblems. Insbesondere ergibt sich die Eindeutigkeit der Lösung $x_p(n)$ des Anfangswertproblems $x_0 = x_p(0) = 0.$ Die letzte Aussage des Satzes folgt unmittelbar aus $P^k = T\cdot D^k\cdot T^{-1}.$ □

Beispiel 3.3 (Handelsmodell, vgl. [4]): Wir betrachten aus Vereinfachungsgründen eine Welt mit lediglich zwei Staaten, die wir kurzerhand mit 1 und 2 bezeichnen. Im Jahre n setzt sich das Nationaleinkommen $x_j(n)$ von Staat j zusammen aus den Konsumausgaben $K_j(n)$, den Nettoinvestitionen $NI_j(n)$ sowie den Exporten $E_j(n)$ abzüglich der Importe $I_j(n)$, d. h. wir erhalten die Gleichung

$$x_j(n) = K_j(n) + NI_j(n) + E_j(n) - I_j(n).$$

Die Ausgaben $KI_j(n)$ für den Konsum inländischer Waren erhalten wir durch $KI_j(n) = K_j(n) - I_j(n)$. Die beiden Gleichungen liefern $x_j(n) = KI_j(n) + NI_j(n) + E_j(n)$. Weiterhin erscheint es vernünftig, wenn sowohl der Konsum der inländischen Waren als auch der Import in der (n+1)-ten Periode proportional zum Nationaleinkommen der Periode n sind. Außerdem ist – da es nur zwei Staaten gibt – der Export des einen der Import des anderen. Wir setzen daher kurzerhand an:

$$\begin{pmatrix} KI_1(n+1) \\ KI_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot x_1(n) \\ \alpha_{22} \cdot x_2(n) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E_1(n+1) \\ E_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2(n+1) \\ I_1(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \cdot x_2(n) \\ \alpha_{21} \cdot x_1(n) \end{pmatrix}.$$

Die erwähnten Proportionalitätsfaktoren α_{ij} sind dabei echt positiv und erfüllen in einer stabilen Wirtschaftslage $\alpha_{11} + \alpha_{21}, \alpha_{12} + \alpha_{22} < 1$, da die Summe $K_j(n) = KI_j(n) + I_j(n)$ aller Konsumaufwendungen weniger als das Nationaleinkommen betragen sollte. Als letzte Vereinfachung nehmen wir noch an, dass die Nettoinvestitionen konstant sind: $NI_j(n) \equiv g_j$ für alle n. Zusammen mit der weiter oben aufgeführten Gleichung $x_j(n) = KI_j(n) + NI_j(n) + E_j(n)$ führt dies auf das System von Differenzengleichungen

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}}_{=P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}}_{=x(n)} + \underbrace{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}}_{=g}.$$

Da der „Störterm“ g des inhomogenen Systems konstant ist, vereinfacht sich die Lösungsformel für das Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ aus Satz 3.2 zu

$$x(n) = P^n \cdot x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} P^{n-1-k} \cdot g = P^n \cdot x_0 + \left(P^{n-1} + P^{n-2} + \ldots + P + I\right) \cdot g.$$

Aus den Voraussetzungen folgt mit etwas mehr Mathematik – die Details lassen wir hier aus – die Konvergenz von P^n gegen die Nullmatrix 0 sowie die Konvergenz der sogenannten „von-Neumann-Reihe“

$$\sum_{k=0}^{\infty} P^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P^k = I + P + P^2 + P^3 + P^4 + \ldots = (I-P)^{-1};$$

die Konvergenz einer Folge von Matrizen ist dabei komponentenweise zu verstehen. Das überraschende Ergebnis lautet: Völlig unabhängig von dem Nationaleinkommen $x(0) = x_0$ zum heutigen Zeitpunkt strebt x(n) für n gegen unendlich gegen $(I - P)^{-1} \cdot g$.

Wenigstens zur VON-NEUMANN[9]-Reihe lohnt sich eine kurze Notiz:

Satz 3.3: Ist 1 kein Eigenwert der Matrix P, so ist $I - P$ invertierbar und es gilt für jedes n die „geometrische Summenformel“ $I + P + P^2 + \ldots + P^{n-1} = \left(I - P^n\right) \cdot \left(I - P\right)^{-1}$.

Beweis: Die Invertierbarkeit von $I - P$ ist äquivalent zu $\det(I - P) \neq 0$ und damit zur Aussage „1 ist kein Eigenwert von P“. Die Summenformel rechnet man völlig analog zu ihrem Pendant für reelle Zahlen nach:

$$\begin{aligned} &\left(I + P + P^2 + \ldots + P^{n-1}\right) \cdot (I - P) \\ &= \left(I + P + P^2 + \ldots + P^{n-1}\right) - \left(I + P + P^2 + \ldots + P^{n-1}\right) \cdot P \\ &= \left(I + P + P^2 + \ldots + P^{n-1}\right) - \left(P + P^2 + \ldots + P^{n-1} + P^n\right) \\ &= I - P^n. \end{aligned}$$

Multiplizieren mit der zu $I - P$ inversen Matrix liefert dann die Behauptung. □

[9] János Neumann Margittai, geboren 28. 12. 1903 in Budapest, gestorben 8. 2. 1957 in Washington D. C.

Als (recht spezielles, aber oft nützliches) Korollar erhalten wir noch

Satz 3.4: Hängt der Störterm g des Systems $x(n+1) = P \cdot x(n) + g$ nicht von n ab, und ist 1 kein Eigenwert von P, so lautet die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = x_0$

$$x(n) = (I-P)^{-1} \cdot g + P^n \cdot \left(x_0 - (I-P)^{-1} \cdot g\right).$$

Wir wollen das Beispiel mit konkreten Zahlen (in Mrd. €) durchspielen. Dazu geben wir folgende Werte vor:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} \text{ und } x_0 = \begin{pmatrix} 1.500 \\ 2.300 \end{pmatrix}.$$

Die Theorie liefert daher als Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 4/3 \\ 4/3 & 8/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.600/3 \\ 2.000/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 533 \\ 667 \end{pmatrix}.$$

In beiden Staaten sind daher die Investitionen zu gering zum Halten des hohen anfänglichen Nationaleinkommens.

Die Eigenwerte der Matrix P sind ¾ und ¼ mit den zugehörigen Eigenvektoren $v_{3/4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_{1/4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit der zuständigen Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir (ohne Rechnung) die diagonalisierte Form $D = T^{-1} \cdot P \cdot T = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Mit wenig Rechenaufwand erreichen wir daher

$$P^n = T \cdot D \cdot T^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (3/4)^n & 0 \\ 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} (3/4)^n + (1/4)^n & (3/4)^n - (1/4)^n \\ (3/4)^n - (1/4)^n & (3/4)^n + (1/4)^n \end{pmatrix}$$

Bereits weiter oben haben wir $\tilde{g} = (I-P)^{-1} \cdot g = \begin{pmatrix} 1.600/3 \\ 2.000/3 \end{pmatrix}$ bestimmt; Satz 3.4 liefert jetzt die Lösung

$$x(n) = \tilde{g} + P^n \cdot (x_0 - \tilde{g}) = \begin{pmatrix} 1.600/3 \\ 2.000/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3/4)^n + (1/4)^n & (3/4)^n - (1/4)^n \\ (3/4)^n - (1/4)^n & (3/4)^n + (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 650/3 \\ 1.450/3 \end{pmatrix}$$

$$x(n) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1.600 + 3.900 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1.000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 2.000 + 3.900 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1.000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.3: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $$x(n+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x(n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

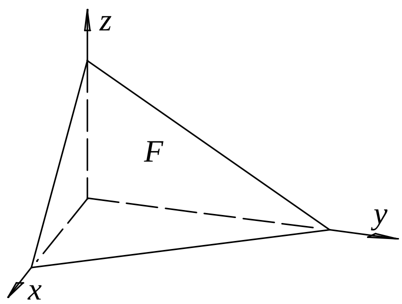
(b) $$x(n+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x(n) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. MARKOV-Matrizen und der Ergodensatz

Bei der Modellierung des Nürnberger Wetters im ersten Abschnitt waren weder x(n) noch die Matrix P beliebig, da die Einträge Wahrscheinlichkeiten sind und damit aus dem Intervall [0,1] stammen. Wegen $P(W_n = T) + P(W_n = R) = 1$ ist außerdem die Summe der Einträge des Vektors x(n) gleich 1; das gleiche Argument liefert, dass die Spaltensummen von P ebenfalls gleich 1 sind. Auch dies können wir mit Hilfe der Matrizenrechnung kurz und prägnant ausdrücken, wenn wir den Zeilenvektor $e^T := (1,1,\ldots,1) \in \mathbf{R}^r$ (das „T" im Exponenten bezeichnet den transponierten Vektor) zu Hilfe nehmen.

Definition: Ein Vektor $x \in [0,1]^r$ mit $e^T \cdot x = 1$ heißt *Wahrscheinlichkeitsvektor* oder *stochastischer Vektor*. Eine Matrix $P \in [0,1]^{r\times r}$ mit $e^T \cdot P = e^T$ nennen wir *stochastische Matrix* oder *MARKOV-Matrix*.

Unter der Menge $[0,1]^r \subseteq \mathbf{R}^r$ wollen wir dabei die Menge der Vektoren x verstehen, deren Einträge x_j sämtlich zwischen 0 und 1 liegen, also $0 \le x_j \le 1$ erfüllen. Ganz analog besteht die Menge $[0,1]^{r\times r} \subseteq \mathbf{R}^{r\times r}$ aus denjenigen $(r\times r)-$Matrizen mit Einträgen aus dem Intervall [0,1].



An dieser Stelle schwenken wir von der Stochastik in die Geometrie und überlegen uns, wie die Menge W der stochastischen Vektoren aussieht.

Zunächst ist W in der Hyperebene $\varepsilon : x_1 + x_2 + \ldots + x_r = 1$ enthalten. Außerdem liegt W in jedem der Halbräume $\Upsilon_j : x_j \ge 0$ (für j=1,…,r). Tatsächlich ist W der Schnitt $W = \varepsilon \cap \Upsilon_1 \cap \ldots \cap \Upsilon_r$, so dass W eine konvexe Teilmenge der Ebene ε ist, d. h. für $x, y \in W$ liegt die Strecke $[x, y] = \{t \cdot x + (1-t) \cdot y \mid 0 \le t \le 1\}$ wieder ganz in W. Diese Tatsache lässt sich verallgemeinern: Sind $x^{(1)},\ldots,x^{(k)} \in W$ sowie $t_1,\ldots,t_k \in [0,1]$ mit $t_1 + \ldots + t_k = 1$, so liegt auch die „Konvexkombination" $x = t_1 x^{(1)} + \ldots + t_k x^{(k)}$ erneut in W, denn

$$\sum_{j=1}^{r} x_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{v=1}^{k} t_v \cdot x^{(v)} \right)_j = \sum_{j=1}^{r} \sum_{v=1}^{k} t_v \cdot x_j^{(v)} = \sum_{v=1}^{k} t_v \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{r} x_j^{(v)}}_{=1 \text{ wg. } x^{(v)} \in W} = \sum_{v=1}^{k} t_v = 1.$$

Mit Hilfe der Standardbasis $\{e_1,\ldots,e_r\}$ des $\mathbf{R}^r$ (der Vektor e_j hat an der j-ten Stelle den Eintrag 1 und sonst nur Nullen) lässt sich ein beliebiger Vektor $x \in W$ offenbar durch die Konvexkombination $x = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_r \cdot e_r$ darstellen; umgekehrt liegt jedes solche x in W. Wir fassen zusammen:

$$W = \left\{ x \in [0,1]^r \,\middle|\, x_1 + \ldots + x_r = 1 \right\} = \left\{ x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_r \cdot e_r \,\middle|\, x_1,\ldots,x_r \in [0,1] \text{ mit } x_1 + \ldots + x_r = 1 \right\}.$$

Diese Menge nennt sich vornehm *Simplex mit den Ecken* $e_1,\ldots,e_r$; bei genauerem Hinsehen erkennen wir, dass es sich für r = 2 um eine Strecke, bei r = 3 um ein Dreieck und bei r = 4 um ein Tetraeder in der Hyperebene ε handelt. Die Vereinigung aller Seiten vom Rand F von W können wir ebenfalls beschreiben:

$$F=\{x\in W \mid x_j=0 \text{ für wenigstens ein } j\}=\left\{x\in[0,1]^r \;\middle|\; \sum_{i=0}^{r} x_i=1 \text{ und } x_i=0 \text{ für wenigstens ein } i\right\}.$$

Damit ergibt sich für das „Innere“ (das ist W ohne den Rand) von W die folgende Beschreibung

$$W\setminus F=\left\{x\in[0,1]^r \;\middle|\; \sum_{j=0}^{r} x_j=1 \text{ und } x_j\neq 0 \text{ für alle } j\right\}=\left\{x\in(0,1)^r \;\middle|\; \sum_{i=0}^{r} x_i=1\right\}.$$

Wir merken noch an: Eine quadratische Matrix P ist genau dann eine MARKOV-Matrix, wenn sämtliche ihrer Spaltenvektoren stochastische Vektoren sind. In diesem Fall liegt das Bild $P\cdot v$ eines beliebigen stochastischen Vektors $v\in W$ wieder in W: Bezeichnet nämlich p_j den j-ten Spaltenvektor von P, so ist

$$P\cdot v=v_1\cdot p_1+\ldots+v_r\cdot p_r$$

eine Konvexkombination dieser Spaltenvektoren (denn alle Komponenten v_j von v liegen in [0,1] und erfüllen $v_1+\ldots+v_r=1$) und damit nach dem oben Gesagten wieder ein stochastischer Vektor.

> **Aufgabe 4.1:** Vorgelegt sind zwei MARKOV-Matrizen P und Q sowie eine Zahl $t\in[0,1]$. Zeigen Sie, dass die Konvexkombination $t\cdot P+(1-t)\cdot Q$ sowie das Produkt $P\cdot Q$ wieder MARKOV-Matrizen sind.

Jede MARKOV-Matrix P hat den Eigenwert 1: Aus $e^T\cdot P=e^T=1\cdot e^T$ folgt nämlich $\det(P-I)=0$ und damit die Behauptung. Der folgende Satz gibt vollständigen Aufschluss über die Situation bei stochastischen (2×2) – Matrizen:

> **Satz 4.1:** Eine (2×2) – MARKOV-Matrix $P=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1-\alpha & 1-\beta\end{pmatrix}$ (mit $\alpha,\beta\in[0,1]$) besitzt die Eigenwerte 1 und $\alpha-\beta$. Ist P nicht die Einheitsmatrix, so sind die folgenden Vektoren Eigenvektoren von P:
>
> $$v_1=\frac{1}{1-\alpha+\beta}\cdot\begin{pmatrix}\beta\\ 1-\alpha\end{pmatrix} \text{ zu } t=1 \text{ und } v_{\alpha-\beta}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \text{ zu } t=\alpha-\beta,$$
>
> wobei v_1 ein stochastischer Vektor ist. Insbesondere ist P diagonalisierbar.

Beweis: Es gilt[10] $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1-\alpha & 1-\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta\\ 1-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\ 1-\alpha\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 1-\alpha & 1-\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\ \beta-\alpha\end{pmatrix}=(\alpha-\beta)\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

□

Beispiel 4.1 (Demographischer Wandel): In den Städten der Republik XYZ leben derzeit 10 Millionen Einwohner, während es auf dem Lande 4 Millionen sind. Pro Jahr ziehen 3% der Stadtbevölkerung aufs Land, aber nur 1% der Landbevölkerung in die Stadt. Bezeichnen wir mit S(n) und L(n) die Bevölkerungszahlen in den Städten bzw. auf dem Land, so ergibt sich folgendes System (Angaben in Millionen Einwohnern):

$$x(n+1)=\begin{pmatrix}S(n+1)\\ L(n+1)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0{,}97 & 0{,}01\\ 0{,}03 & 0{,}99\end{pmatrix}}_{=P}\cdot\begin{pmatrix}S(n)\\ L(n)\end{pmatrix}=P\cdot x(n);\quad x_0=x(0)=\begin{pmatrix}S(n)\\ L(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 4\end{pmatrix}.$$

Die Matrix P ist stochastisch, so dass wir Satz 4.1 anwenden können: Wir erhalten die Eigenwert 1 und 0,97 – 0,01 = 0,96 mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1=(1/4\quad 3/4)^T$ und $v_{0,97}=(1\quad -1)^T$. Für die aus diesen Vektoren

[10] Für das Finden des zweiten Eigenwerts kann man die Tatsache verwenden, dass die Summe der Eigenwerte die Spur $\alpha+1-\beta$ der Matrix P ergeben muss.

gebildete Matrix $T=\begin{pmatrix}1/4 & 1\\ 3/4 & -1\end{pmatrix}$ bestimmen wir $T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3/4 & -1/4\end{pmatrix}$ und können dann die Lösung des Anfangswertproblems aufschreiben:

$$x(n)=T\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,96\end{pmatrix}^n\cdot T^{-1}\cdot x_0=\begin{pmatrix}1/4 & 1\\ 3/4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0,96^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3/4 & -1/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 4\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1/4 & 1\\ 3/4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\cdot 7\\ 13\cdot 0,96^n\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}7+13\cdot 0,96^n\\ 21-13\cdot 0,96^n\end{pmatrix}.$$

Speziell folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x(n)=\begin{pmatrix}3,5 & 10,5\end{pmatrix}^T$, d. h. auf lange Sicht wird sich die Bevölkerung auf 3,5 Millionen in den Städten und 10,5 Millionen auf dem Land verteilen.

> **Aufgabe 4.2:** Zum Jahresbeginn 2004 lebten etwa 69,5 Millionen Einwohner Deutschlands in den alten Bundesländern; in den fünf neuen Bundesländern waren es 13,5 Millionen. Im Verlaufe dieses Jahres zogen 0,1% der Einwohner der alten Bundesländer in die neuen um; in die umgekehrte Richtung machte sich 1,2% der Bevölkerung der neuen Bundesländer auf. Wir nehmen an, dass dieser Trend für alle Zeiten gleich bleibt. Welche Einwohnerzahlen erwarten wir auf lange Sicht?

Für größere Matrizen werden die Rechnungen komplizierter, wenn auch für ausgewählte Fälle noch mit dem Taschenrechner durchführbar, wie das Beispiel im letzten Abschnitt demonstriert. Richtig schlimm wird es nur, wenn sich die Matrix P nicht diagonalisieren lässt, da uns hierfür sowohl das Rechnen mit komplexen Zahlen als auch die Theorie der JORDAN[11]schen Normalform (ja, die braucht man hier) fehlt. Falls wir für das Anfangswertproblem $x(n+1)=P\cdot x(n);\quad x(0)=x_0$ (mit einer MARKOV-Matrix P und einem stochastischen Anfangsvektor $x_0\in W$ nur an der „Grenzverteilung" $\lim\limits_{n\to\infty} x(n)=\lim\limits_{n\to\infty} P^n\cdot x_0$ interessiert sind, so hilft uns in den meisten relevanten Fällen der *Ergodensatz* (s.u.) weiter. Hierzu benötigen wir allerdings die Voraussetzung, dass P nicht eine ganz beliebige MARKOV-Matrix ist:

Definition: Eine MARKOV-Matrix P (d. h. alle Einträge liegen in [0,1]; alle Spaltensummen sind gleich 1) heißt *ergodisch*, wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so dass sämtliche Einträge der Matrix P^m echt positiv sind.

> **Satz 4.2 (Ergodensatz):** Es sei $P\in[0,1]^{r\times r}$ eine ergodische Matrix. Dann gibt es genau einen stochastischen Vektor p mit der Eigenschaft $P\cdot p=p.$ Weiterhin gilt $\lim\limits_{n\to\infty} P^n=\begin{pmatrix}p & p & \dots & p\end{pmatrix}$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} P^n\cdot x=p$ für jeden stochastischen Vektor x aus W.
> Die sogenannte *Grenzverteilung* p erhält man, indem man einen beliebigen Eigenvektor v von P zum Eigenwert 1 nimmt und durch die Komponentensumme teilt: $p=\dfrac{1}{v_1+\ldots+v_r}\cdot v.$

Der Beweis nimmt einige Zeit in Anspruch – wir verschieben ihn daher in den 5. Abschnitt und kommen zunächst zu Anwendungen.

Beispiel 4.2 (Vererbung von Merkmalen): Ein Merkmal werde bei einer Tiersorte durch ein Genpaar X und Y eindeutig bestimmt, wobei die Kombinationen XX, XY=YX und YY vorkommen können. Jedes Jungtier erbe zufällig ein Gen des Genpaars der Eltern, wobei wir annehmen, dass bei männlichen Tieren ausschließlich die Kombination XY vorkommt, während bei weiblichen Tieren jede Kombination möglich sei. Bezeichnen XX(n), XY(n), YY(n) die Anzahl der Tiere mit den jeweiligen Genkombinationen in der n-ten Generation, so erhalten wir das System

[11] Marie Ennemond Camille Jordan, geboren 5. 1. 1838 in Lyon gestorben 21. 1. 1922 in Paris, fand die Normalform 1871.

$$x(n+1)=\begin{pmatrix} XX(n+1) \\ XY(n+1) \\ YY(n+1) \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}}_{=P}\cdot x(n),$$

wobei wir beachten, dass Tiere mit der Genkombination XX oder YY weiblich sind und als Geschlechtspartner folglich nur ein männliches Tier mit der Kombination XY in Frage kommt. Die MARKOV-Matrix P ist wegen

$$P^2=\begin{pmatrix} 0,375 & 0,250 & 0,125 \\ 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,125 & 0,250 & 0,375 \end{pmatrix}$$

ergodisch (in P^2 sind alle Einträge echt positiv), so dass wir den Ergodensatz anwenden können. Einen Eigenvektor v von P zum Eigenwert 1 erhalten wir zum Beispiel zu $v=(1 \quad 2 \quad 1)^T$; dieser hat als Komponentensumme 1 + 2 + 1 = 4, so dass die eindeutig bestimmte Grenzverteilung $p=0,25\cdot v=(0,25 \quad 0,5 \quad 0,25)$ beträgt. Um es noch einmal klar herauszustellen: Mit einer beliebigen Anfangsverteilung x_0 gilt stets $\lim\limits_{n\to\infty} P^n\cdot x_0=p,$ in der Population wird es daher auf lange Sicht ungefähr 50% der Tiere mit der Kombination XY und jeweils 25% die Kombinationen XX und YY haben.

Tragen dagegen die männlichen Tiere ausschließlich die Kombination XX, so lautet die Übergangsmatrix

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An der letzten Zeile – die sich beim Potenzieren nicht ändert – erkennt man, dass Q nicht ergodisch ist. Immerhin kann man raten (oder notfalls rechnen):

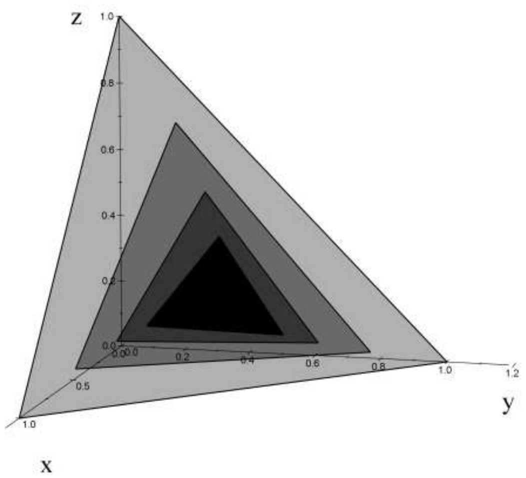
$$Q^n=\begin{pmatrix} 1 & 1-0,5^n & 1-0,5^n \\ 0 & 0,5^n & 0,5^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und damit } \lim_{n\to\infty} Q^n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Population wird sich daher – wieder unabhängig von der Anfangsverteilung – auf die Grenzverteilung $p=(1 \quad 0 \quad 0)^T$ zubewegen. Auch nicht-ergodische Matrizen können daher ein ähnliches Verhalten wie die ergodischen Exemplare aufweisen.

Aufgabe 4.3: Vorgelegt ist die MARKOV-Matrix

$$P=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix},$$

die etwa das Wechselverhalten von Käufern zwischen vier großen Supermarktketten beschreiben möge. Ist P ergodisch? Berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzverteilung p.



Warum aber gilt der Ergodensatz und wie sehen nicht-ergodische Matrizen aus, für die die Aussage des Satzes falsch wird? Das Bild zeigt das Simplex W und für eine ergodische Matrix P die Bildmengen von W unter den Abbildungen P, P^2 und P^3. Diese Bildmengen werden immer kleiner,so dass man das Gefühl haben könnte – und dieses auch mit vollem Recht! –, dass die Folge der Bildmengen von W unter den Abbildungen P^n gegen einen Punkt schrumpft. Dabei ist offenbar entscheidend, dass die Bilder der Ecken von W den Rand F verlassen und dann in das Innere von W abgebildet werden. Das aber besagt gerade die Forderung, dass sämtliche Einträge von P strikt positiv sind! Völlig anders verhalten sich zum Beispiel MARKOV-Matrizen, die eine Teilmenge der Eckenmenge zyklisch permutieren, so etwa die Matrizen

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,3 \\ 1 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

So wechselt $Q_1^n \cdot e_1$ ständig zwischen e_1 und e_2 – wir erkennen daher ein zyklisches Verhalten. Vollständigen Aufschluss über das Verhalten von Folgen $x(n) = Q_1^n \cdot x_0$ erhält man wieder einmal über die Betrachtung von Eigenwerten ($1, -1$ und $0,3$) und Eigenvektoren (geeignet gewählt z. B. $v_1 = (0,5 \quad 0,5 \quad 0)^T$, $v_{-1} = (1 \quad -1 \quad 0)^T$ sowie $v_{0,3} = (7 \quad 6 \quad -13)^T$): Ein Vektor $x_0 \in W$ lässt sich als $x_0 = v_1 + \alpha \cdot v_{-1} + \beta \cdot v_{0,3}$ schreiben. Wir erhalten $Q_1^n \cdot x_0 = v_1 + (-1)^n \cdot \alpha \cdot v_{-1} + 0,3^n \cdot \beta \cdot v_{0,3}$. Diese Folge konvergiert nur für $\alpha = 0$, und zwar dann gegen v_1. Eine entsprechende Diskussion der anderen Beispiele sei dem Leser überlassen.

5. Der Beweis des Ergodensatzes

Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschließlich MARKOV-Matrizen. Hat eine solche Matrix P nur positive Einträge, so schreiben wir für diesen Sachverhalt kurz P > 0. Auf allgemeine ergodische Matrizen werden wir erst ganz zum Schluss eingehen, da wir den Satz zunächst nur im Spezialfall zeigen werden.

Zur Erinnerung wiederholen wir die Definition des Simplex W und seines Randes:

$$W = \left\{ x \in [0,1]^r \mid \sum_{i=0}^{r} x_i = 1 \right\} \qquad \text{(Simplex mit den Ecken } e_1, \dots e_r\text{)}$$

$$F = \left\{ x \in [0,1]^r \mid \sum_{i=0}^{r} x_i = 1 \text{ und } x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i \right\} \qquad \text{(Rand von W)}$$

$$W \setminus F = \left\{ x \in (0,1)^r \mid \sum_{i=0}^{r} x_i = 1 \right\} \qquad \text{(Inneres von W)}$$

Wir haben bereits bemerkt, dass sämtliche MARKOV-Matrizen P das Simplex W festhält: Für $x \in W$ gilt $P \cdot x \in W.$ Wichtiger ist die folgende Beobachtung:

Lemma 5.1: Es sei P > 0. Für $x \in W$ liegt $P \cdot x$ im Inneren $W \setminus F$ von W.

Beweis: Würde es ein x in W geben, für das $y = P \cdot x$ in F liegt, so wäre wenigstens eine der Komponenten y_i von y gleich 0. Nun gilt $x_j \geq 0$ für alle j und alle Einträge $\pi_{i,j}$ von P sind sogar echt positiv, so dass aus der

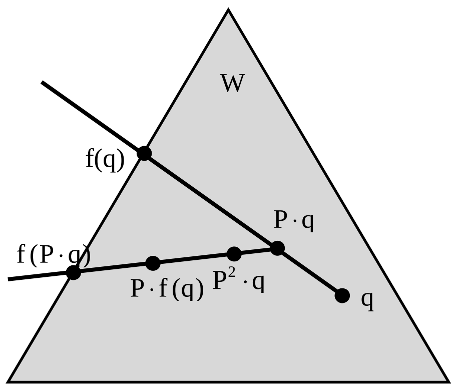
Gleichung $0 = y_i = \sum_{j=0}^{r} \underbrace{\pi_{i,j} \cdot x_j}_{\geq 0}$ sofort $\pi_{i,j} \cdot x_j = 0$ und daraus wiederum $x_j = 0$ für alle j folgt. Da x nicht der Nullvektor ist, muss unsere Annahme falsch gewesen sein. □

Während Lemma 5.1 durch einen algebraischen Beweis erledigt werden konnte, erfordert unsere nächste Beobachtung einen Abstecher in die Geometrie:

Lemma 5.2: Es sei P > 0. Ist $q \in W$ kein Fixpunkt von P, so gibt es eine Zahl $t(q) \in (1, \infty)$, so dass

$$f(q) := (1 - t(q)) \cdot q + t(q) \cdot P \cdot q$$

im Rand F von W liegt. Ist $P \cdot q$ ebenfalls kein Fixpunkt von P, so gilt $t(P \cdot q) > t(q)$.



Beweis: Nach Lemma 5.1 liegt der Bildpunkt $P \cdot q$ im Inneren von W und ist nach Voraussetzung von q verschieden. Damit schneidet der von q ausge-ausgehende und durch $P \cdot q \neq q$ verlaufende Strahl den Rand F in einemPunkt f(q) so, dass $P \cdot q$ im Inneren der Strecke [q, f(q)] liegt. Folglich gibt es eine Zahl $t = t(q) \in (1, \infty)$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Weiterhin liegen die Punkte $\tilde{q} = P \cdot q$, $P \cdot \tilde{q} = P^2 \cdot q$ und

$$P \cdot f(q) = (1 - t(q)) \cdot P \cdot q + t(q) \cdot P^2 \cdot q = (1 - t(q)) \cdot \tilde{q} + t(q) \cdot P \cdot \tilde{q}$$

auf der Strecke $[\tilde{q}, P \cdot \tilde{q}]$, wobei auch $P \cdot f(q)$ nach Lemma 5.1 im Inneren von W liegt und damit von $f(\tilde{q})$ verschieden ist. Hieraus folgt unmittelbar $t(P \cdot q) = t(\tilde{q}) > t(q)$. □

Unser Arsenal für den Beweis wird durch die reelle Analysis komplettiert, die in Lemma 5.5 das zentrale Hilfsmittel bildet. Ein wenig Vorlauf erscheint ratsam, da wir auf die Konvergenz von Vektorfolgen zurückgreifen müssen. Dazu benötigen wir zwei für die reelle Analysis grundlegende Aussagen, die wir hier nicht beweisen werden:

Satz von der monotonen Konvergenz 5.3: Eine monoton wachsende Folge $(t(n))_{n \in \mathbf{N}}$ reeller Zahlen (also $t(n) \leq t(n+1)$ für alle n) besitzt stets einen Grenzwert, wobei wir $\lim_{n \to \infty} t(n) = \infty$ erlauben. □

Für den zweiten Satz brauchen wir die Notation einer *Teilfolge*: Ist $(t(n))_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge, und gilt

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots \text{ für die natürlichen Zahlen } n_k,\ k \in \mathbf{N},$$

so heißt die Folge $\left(t(n_k)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ eine Teilfolge von $(t(n))_{n \in \mathbf{N}}$. Für $n_k = 2^k$ beispielsweise erhalten wir so zur Folge $t(n) = n + 3$ die Teilfolge $\tilde{t}(k) = t(n_k) = t(2^k) = 2^k + 3$. Der alles entscheidende Satz lautet:

Satz von BOLZANO-WEIERSTRAß[12] 5.4: Ist $(t(n))_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, für die sämtliche t(n) im abgeschlossenen Intervall [a, b] liegen, so gibt es eine Folge natürlicher Zahlen $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots,$ so dass die zugehörige Teilfolge $\left(t(n_k)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ einen Grenzwert in [a, b] besitzt. Kurz: Beschränkte Folgen besitzen immer wenigstens eine konvergente Teilfolge.

□

Der Satz von Bolzano-Weierstraß führt zu einem eher technischen Korollar, das wir in der Folge ausnutzen werden:

Lemma 5.5: Vorgelegt seien zwei Folgen $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$ und $(y(n))_{n\in\mathbf{N}}$ in W (d. h. sämtliche x(n) und y(n) liegen in W). Dann gibt es eine Folge natürlicher Zahlen $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots,$ so dass die Teilfolgen $(x(n_k))_{k\in\mathbf{N}}$ und $(y(n_k))_{k\in\mathbf{N}}$ konvergieren. Beide Grenzwerte liegen dabei in W. Besteht $(y(n))_{n\in\mathbf{N}}$ nur aus Elementen aus dem Rand F, so liegt der Grenzwert von $(y(n_k))_{k\in\mathbf{N}}$ ebenfalls in F. Sinngemäß gilt der Satz auch für drei und mehr (aber endlich viele) Folgen.

Beweis: Es seien $(x_j(n))_{n\in\mathbf{N}}$ und $(y_j(n))_{n\in\mathbf{N}}$ die Komponentenfolgen der vorgelegten Vektorfolgen. Wegen $x(n)\in W$ liegen die $x_j(n)$ sämtlich im Intervall [0,1]; die entsprechende Aussage gilt auch für $y_j(n)$. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRAß gibt es eine Folge $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen, so dass die Teilfolge $(x_1(n_k))_{k\in\mathbf{N}}$ einen Grenzwert $u_1 \in [0,1]$ besitzt. Nochmals nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRAß gibt es eine Folge $k_0 < k_1 < \ldots < k_l < k_{l+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen, so dass die Teilfolge $(x_2(n_{k_l}))_{l\in\mathbf{N}}$ der Folge $(x_2(n))_{n\in\mathbf{N}}$ ebenfalls einen Grenzwert $u_2 \in [0,1]$ besitzt. Offenbar konvergiert die Folge $(x_1(n_{k_l}))_{l\in\mathbf{N}}$ (die gleichzeitig eine Teilfolge $(x_1(n_k))_{k\in\mathbf{N}}$ und von $(x_1(n))_{n\in\mathbf{N}}$ ist) nach wie vor gegen u_1. Wir dürfen daher von vorneherein annehmen, dass bereits $(x_2(n_k))_{k\in\mathbf{N}}$ gegen u_2 konvergiert. Wiederholen des Arguments liefert eine Folge $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen, für die die Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty} x_j(n_k) = u_j \in [0,1]$ sowie $\lim\limits_{k\to\infty} y_j(n_k) = v_j \in [0,1]$ für sämtliche $j = 1,\ldots,r$ existieren. Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x(n_k) = u \in [0,1]^r = W$ und entsprechend $\lim\limits_{k\to\infty} y(n_k) = v \in [0,1]^r = W$.

Liegen alle y(n) sogar in F, so gibt es zu jedem n_k einen Index j mit $y_j(n_k) = 0$. Wenigstens ein Index j muss dabei unendlich oft auftreten. Es gibt daher eine Folge $k_0 < k_1 < \ldots < k_l < k_{l+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen, so dass $y_j(n_{k_l}) = 0$ für alle $l \in \mathbf{N}$ erfüllt ist. Damit gilt $v_j = \lim\limits_{k\to\infty} y_j(n_k) = \lim\limits_{l\to\infty} y_j(n_{k_l}) = \lim\limits_{l\to\infty} 0 = 0$ und somit $v \in$ F. □

Wir kommen zum alles entscheidenden Lemma:

Lemma 5.6: Es sei P > 0. Dann gilt für jedes $x \in W$: Konvergiert eine Teilfolge $\left(P^{n_k} \cdot x\right)_{k\in\mathbf{N}}$ der Folge $\left(P^n \cdot x\right)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen den Grenzwert y, so ist y ein Fixpunkt von P, der im Inneren W \ F von W liegt.

Beweis: Die Aussage ist klar, wenn einer der Folgenglieder $y = P^N \cdot x$ (mit einer passenden natürlichen Zahl N) ein Fixpunkt ist: Dann gilt nämlich $P^{N+1} \cdot x = P \cdot P^N \cdot x = P \cdot y = y$, woraus $P^{N+m} \cdot x = P^N \cdot x = y$ für alle natürlichen Zahlen m per vollständiger Induktion folgt. Die betrachtete Folge sieht dann so aus:

[12] Bernhard Bolzano geboren 5. 10. 1781 in Prag, gestorben 18. 12. 1848 in Prag; Karl Weierstraß geboren 31. 10. 1815 in Ostenfelde/Münsterland, gestorben 19. 2. 1897 in Berlin

$$x,\ P\cdot x,\ P^2\cdot x,\ \ldots,\ P^{N-1}\cdot x,\ P^N\cdot x = y,\ P^{N+1}\cdot x = y,\ P^{N+2}\cdot x = y,\ \ldots$$

Diese Folge besitzt y als Grenzwert – und nach Voraussetzung ist y ein Fixpunkt von P.

Wir dürfen daher von vorneherein $P\cdot P^n\cdot x = P^{n+1}\cdot x \neq P^n\cdot x$ für alle n voraussetzen. Damit existieren die Zahlen $t(n) = t(P^n\cdot x)$ sowie die Randelemente $f(n) = f(P^n\cdot x)$.

Wegen $t(n+1) = t(P^{n+1}\cdot x) = t(P\cdot P^n\cdot x) > t(P^n\cdot x) = t(n)$ bilden die t(n) eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen aus dem Intervall $(1,\infty)$, die den Grenzwert $t = t(\infty)\in(1,\infty]$ besitzen möge (Satz von der monotonen Konvergenz). Bis auf Übergang zu einer passenden Teilfolge von $\left(P^{n_k}\cdot x\right)_{k\in\mathbf{N}}$ dürfen wir annehmen, dass die Folgen $\left(f(n_k)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ und $\left(f(n_k+1)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ gegen die Grenzwerte u bzw. v konvergieren; sowohl u als auch v liegen dann im Rand F von W; vgl. Lemma 5.5. Wäre $t = t(\infty)$ endlich, so würde folgen

$$\begin{aligned} u &= \lim_{k\to\infty} f(n_k) = \lim_{k\to\infty}\left((1-t(n_k))\cdot P^{n_k}\cdot x + t(n_k)\cdot P^{n_k+1}\cdot x\right)\\ &= (1-t)\cdot\lim_{k\to\infty}\left(P^{n_k}\cdot x\right) + t\cdot P\cdot\lim_{k\to\infty}\left(P^{n_k}\cdot x\right) = (1-t)\cdot y + t\cdot P\cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \lim_{k\to\infty} f(n_k+1) = \lim_{k\to\infty}\left((1-t(n_k+1))\cdot P^{n_k+1}\cdot x + t(n_k+1)\cdot P^{n_k+2}\cdot x\right)\\ &= (1-t)\cdot P\cdot\lim_{k\to\infty}\left(P^{n_k}\cdot x\right) + t\cdot P^2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(P^{n_k}\cdot x\right) = (1-t)\cdot P\cdot y + t\cdot P^2\cdot y\\ &= P\cdot\left((1-t)\cdot y + t\cdot P\cdot y\right) = P\cdot u. \end{aligned}$$

Damit wäre das Bild $v = P\cdot u$ des Randelements u wieder ein Randelement, was aber nach Lemma 5.1 nicht angeht.

Folglich besitzt die monoton wachsende Folge $\left(t(n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ den Grenzwert $t(\infty)=\infty$, so dass wir folgendermaßen weiterrechnen können:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{t(n_k)}\cdot u = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{t(n_k)}\cdot\left((1-t(n_k))\cdot P^{n_k}\cdot x + t(n_k)\cdot P^{n_k+1}\cdot x\right)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{1}{t(n_k)}-1\right)\cdot P^{n_k}\cdot x + P^{n_k+1}\cdot x\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{t(n_k)}-1\right)\cdot\lim_{k\to\infty}P^{n_k}\cdot x + \lim_{k\to\infty}P^{n_k+1}\cdot x\\ &= -y + P\cdot y. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher $P\cdot y - y = 0$ bzw. $P\cdot y = y$, was ja gerade die Eigenschaft eines Fixvektors y von P ist.

□

Damit haben wir gewonnen den

Beweis des Ergodensatzes für den Spezialfall P > 0: Wir betrachten zunächst die Folge $\left(P^n\cdot e\right)_{n\in\mathbf{N}}$, wobei e ein beliebiger Punkt (zum Beispiel der Mittelpunkt) aus W sein darf. Nach Lemma 5.5 besitzt $\left(P^n\cdot e\right)_{n\in\mathbf{N}}$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert $p\in W\setminus F$ nach Lemma 5.6 ein Fixvektor von P ist. Wir finden daher überhaupt einen Punkt $p\in W\setminus F$ mit $P\cdot p = p$. Wäre nun $q\in W\setminus\{p\}$ ein weiterer Fixvektor von P, so würde die Gerade durch p und q den Rand F von W in einem Element $u = t\cdot p + (1-t)\cdot q,\ t\in\mathbf{R}$, schneiden. Dann gilt $P\cdot u = t\cdot P\cdot p + (1-t)\cdot P\cdot q = t\cdot p + (1-t)\cdot q = u$, was aber für Randelemente von W nach Lemma 5.1 nicht möglich ist. Damit ist p als der einzige Fixvektor aus W von P enttarnt.

Wir betrachten jetzt einen beliebigen Vektor $x \in W$ und nehmen an, dass die zugehörige Folge $\left(P^n \cdot x\right)_{n \in \mathbf{N}}$ *nicht* gegen p konvergiert. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder $P^n \cdot x$ zu p einen Abstand von wenigstens ε besitzen. Die Indizes dieser Folgenglieder bilden eine Folge $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen; die Glieder der zuständigen Teilfolge $\left(P^{n_k} \cdot x\right)_{k \in \mathbf{N}}$ erfüllen allesamt $\left\|P^{n_k} \cdot x - p\right\| \geq \varepsilon$. Mit Lemma 5.5 erhalten wir die Existenz einer Folge $k_0 < k_1 < \ldots < k_l < k_{l+1} < \ldots$ natürlicher Zahlen, für die die Folge $\left(P^{n_{k_l}} \cdot x\right)_{k \in \mathbf{N}}$ einen Grenzwert $q \in W$ besitzt. Wegen $\left\|P^{n_{k_l}} \cdot x - p\right\| \geq \varepsilon$ kann q nicht mit p übereinstimmen, nach Lemma 5.6 ist q ein Fixvektor von P, und nach dem oben Gesagten ist p der einzige Fixvektor von P in W. Fassen wir diese drei Aussagen zusammen, so erhalten wir den gewünschten Widerspruch und haben $\lim\limits_{n \to \infty} P^n \cdot x = p$ für alle $x \in W$ nachgewiesen. □

Beweis des Ergodensatzes für den allgemeinen Fall: Es sei P eine ergodische Matrix, d. h. es gibt eine natürliche Zahl N, so dass $Q := P^N > 0$ gilt. Für die MARKOV-Matrix Q gilt daher der Ergodensatz: Es gibt einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $p \in W$, F von Q mit $\lim\limits_{n \to \infty} Q^n \cdot x = \lim\limits_{n \to \infty} P^{N \cdot n} \cdot x = p$ für alle $x \in W$. Wir zeigen zunächst, dass dann auch $\lim\limits_{n \to \infty} P^n \cdot x = p$ für alle $x \in W$ gilt: Angenommen, diese Behauptung ist falsch. Dann gibt es einen Punkt $x \in W$, für den $\left(P^n \cdot x\right)_{n \in \mathbf{N}}$ nicht gegen p konvergiert. Wie im Beweis des Spezialfalls gibt es dann eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so dass die Teilfolge $\left(P^{n_k} \cdot x\right)_{k \in \mathbf{N}}$ gegen einen Punkt $q \neq p$ konvergiert. Für jedes k liefert Division mit Rest eine Zerlegung $n_k = s_k \cdot N + r_k$ mit $0 \leq r_k \leq N - 1$, wobei s_k und r_k natürliche Zahlen sind. Wir merken an, dass auch $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ sofort $s_1 < s_2 < s_2 < \ldots$ folgt. Nun gibt es nur endlich viele mögliche Reste bei der Division durch N, aber unendlich viele k. Daher muss einer der Reste r unendlich oft auftreten. Wir erhalten demnach eine Folge natürlicher Zahlen $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ mit $r = r_{k_1} = r_{k_2} = r_{k_3} = \ldots$ Für jedes $r_{k_l} = s_{k_l} \cdot N + r$ gilt $P^{r_{k_l}} = P^{s_{k_l} \cdot N + r} = \left(P^N\right)^{s_{k_l}} \cdot P^r = Q^{s_{k_l}} \cdot P^r$. Der Punkt $y = P^r \cdot x$ liegt sicherlich in W. Jetzt erhalten wir den gewünschten Widerspruch:

$$p \neq q = \lim_{l \to \infty} P^{n_{k_l}} \cdot x = \lim_{l \to \infty} Q^{s_{k_l}} \cdot P^r \cdot x = \lim_{l \to \infty} Q^{s_{k_l}} \cdot y = p;$$

für das letzte Gleichheitszeichen erinnere man sich an die oben angegebene Eigenschaft von Q.

Wir haben gezeigt, dass $\lim\limits_{n \to \infty} P^n \cdot x = p$ für jedes $x \in W$ gilt. Weiterhin ist p in der Tat ein Fixvektor von P:

$$P \cdot p = P \cdot \lim_{n \to \infty} P^n \cdot p = \lim_{n \to \infty} P^n \cdot \left(P \cdot p\right) = p$$

zeigt die gewünschte Behauptung; beachte, dass $P^n \cdot x$ auch für $x = P \cdot p$ gegen p konvergiert.

Die Ergänzung $\lim\limits_{n \to \infty} P^n = \left(p \quad p \quad \ldots \quad p\right)$ des Ergodensatzes erhalten wir durch Betrachten der Spalten $P^n \cdot e_j$, die ja ebenfalls gegen p konvergieren müssen. Damit ist der Beweis vollständig geführt. □

6. Gefäßerkrankungen bei Herztransplantaten

Bei einer bestimmten Gefäßerkrankung nach einer Herztransplantation unterscheiden die Mediziner vier Stadien, nämlich G: „gesund“, L: „leicht erkrankt“, S: „schwer erkrankt“ und T: „tot“. Wie uns mittlerweile schon vertraut, fassen wir die Anteile der Versuchsgruppe in den einzelnen Stadien im n-ten Jahr der Untersuchung zu einem stochastischen Vektor zusammen:

$$x(n)=\begin{pmatrix} x_G(n) \\ x_L(n) \\ x_S(n) \\ x_T(n) \end{pmatrix}.$$

Die Beispieldateien des freien Statistikprogramms[13] „R“ enthält (natürlich anonymisierte) Rohdaten einer solchen Studie, aus denen man die Übergangsmatrix von x(n) auf x(n+1) schätzen kann. Hierbei ergibt sich die Differenzengleichung

$$x(n+1)=\underbrace{\begin{pmatrix} 0,854 & 0,152 & 0,009 & 0,000 \\ 0,088 & 0,568 & 0,077 & 0,000 \\ 0,015 & 0,211 & 0,664 & 0,000 \\ 0,043 & 0,069 & 0,250 & 1,000 \end{pmatrix}}_{P:=}\cdot x(n).$$

Um sich nun auszurechnen, dass rund 68,7% der Patienten mit einer leichten Erkrankung nach 10 Jahren verstorben sind, genügt der Taschenrechner vollkommen aus. Auch für die Tatsache, dass der Zustand T („tot“) der stationäre ist, braucht man wohl kaum Mathematik zu bemühen. Um aus der Differenzengleichung trotzdem eine sinnvolle Aufgabe zu machen, stellen wir uns die Frage, wie denn die für einen *Monat* zuständige Übergangsmatrix Q wohl aussehen mag. Da P den Übergang innerhalb eines Jahres beschreibt, erhält man für Q die Gleichung $Q^{12}=P$, die offenbar mit Experimenten auf dem Taschenrechner nicht mehr zu lösen ist. Wieder einmal zahlt es sich aus, dass wir etwas mehr gelernt haben.

Die Eigenwerte von P müssen wir allerdings mit einem Rechner bestimmen und erhalten

$$t_1=1;\ \ t_2=0{,}9085852776;\ \ t_3=0{,}7184611262;\ \ t_4=0{,}4589535962$$

Einen Eigenvektor $v_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ zum Eigenwert $t_1=1$ erraten wir. Aber bereits beim zweiten Eigenwert haben wir ein größeres Problem: Da der Wert nur näherungsweise ermittelt wurde, erhält man mit dem „rref“-Befehl des Taschenrechners nur die triviale Lösung zu dem Gleichungssystem $(P-t_2\cdot I)\cdot x=0$ – und in der Tat zeigt Nachrechnen $\det(P-t_2\cdot I)\approx 10^{-10}$, so dass das Gleichungssystem auch nicht mehr Lösungen besitzt. Wir greifen daher zum ersten Mal auf den Befehl des Taschenrechners zurück, der zu der Matrix P eine Matrix T bestehend aus Eigenvektoren von P ermittelt. Mit dem CAS (Computeralgebrasystem) MuPAD etwa erhalten wir

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 0,494 & 0,271 & 0,240 \\ 0 & 0,167 & -0,200 & -0,664 \\ 0 & 0,174 & -0,700 & 0,666 \\ 1,0 & -0,835 & 0,629 & -0,242 \end{pmatrix}.$$

Rundungsfehler sorgen jetzt allerdings dafür, dass $T^{-1}\cdot P\cdot T$ nicht mehr die gewünschte Diagonalgestalt hat. Ein Experiment mit MuPAD ergibt bei einer Rechengenauigkeit von 1000 Stellen (und anschließender Ausgabe von drei Stellen)

$$T^{-1}\cdot P\cdot T=\begin{pmatrix} 1,0 & -2,25\cdot 10^{-1011} & 1,27\cdot 10^{-1010} & -1,18\cdot 10^{-1010} \\ -9,78\cdot 10^{-1011} & 0,909 & -5,54\cdot 10^{-1011} & -4,76\cdot 10^{-1012} \\ 1,17\cdot 10^{-1011} & -5,19\cdot 10^{-1012} & 0,718 & 1,56\cdot 10^{-1011} \\ -2,67\cdot 10^{-1012} & -1,73\cdot 10^{-1012} & -7,57\cdot 10^{-1012} & 0,459 \end{pmatrix}.$$

Glücklicherweise *kennen* wir die Matrix $T^{-1}\cdot P\cdot T$ und müssen daher nicht rechnen.

---

[13] Für die Internetpräsens des Projektes „R“ vgl. [2].

$$D = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}909 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}718 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}459 \end{pmatrix} \approx T^{-1} \cdot P \cdot T.$$

Doch zurück zum Ausgangsproblem. Wir suchen nach wie vor eine Matrix Q mit der Eigenschaft $P = Q^{12}$. Sehr einfach erhalten wir eine Matrix F mit der Eigenschaft $D = F^{12}$, nämlich

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt[12]{1{,}0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[12]{0{,}909} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[12]{0{,}718} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[12]{0{,}459} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}992 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}973 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}937 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\left(T\cdot F\cdot T^{-1}\right)^{12} = T \cdot F^{12} \cdot T^{-1} = T\cdot D \cdot T^{-1} = P$ haben wir unsere gesuchte Matrix gefunden:

$$Q = T\cdot F\cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}986 & 0{,}0177 & 4{,}35\cdot 10^{-5} & 0 \\ 0{,}0103 & 0{,}951 & 0{,}0102 & 0 \\ 1{,}48\cdot 10^{-4} & 0{,}0279 & 0{,}965 & 0 \\ 0{,}00356 & 0{,}00331 & 0{,}0249 & 1{,}0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}986 & 0{,}018 & 0{,}000 & 0 \\ 0{,}010 & 0{,}951 & 0{,}010 & 0 \\ 0{,}000 & 0{,}028 & 0{,}965 & 0 \\ 0{,}004 & 0{,}003 & 0{,}025 & 1{,}0 \end{pmatrix};$$

wobei hier auf zehn Stellen genau gerechnet wurde. Da die Genauigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Monat nicht höher sein kann als die für ein Jahr, haben wir die Einträge noch gerundet. Die Differenz der Einträge von Q^{12} und P liegen bei nicht gerundetem Q in der Größenordnung 10^{-9} und für das gerundete Q bei 10^{-3}.

7. Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 2.1: Wir erinnern daran, dass ein Eigenvektor einer Matrix P eine unter P festgehaltene „Richtung“ angibt. Die Spiegelung S an der Winkelhalbierenden erfüllt $S\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $S\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; damit besitzt S die Eigenwerte 1 und -1. In Matrixform erhalten wir offenbar $S = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, denn S soll x- und y-Richtung vertauschen. Eine Drehung um den Winkel 90° dagegen hält überhaupt keine Richtung fest und hat daher auch keine Eigenwerte; die zuständige Drehmatrix lautet $D = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Für den verbleibenden Fall (genau ein Eigenwert) nehmen wir eine Scherung an der x-Achse mit der Matrix $J = \begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, die offenbar den Eigenwert 1 besitzt, da ja die x-Achse punktweise festbleibt. Eine weitere Richtung bleibt nicht fest, so dass 1 auch der einzige Eigenwert ist.

Aufgabe 2.2: Wir lösen das von dem Parameter t abhängige Gleichungssystem $(P - t\cdot I)\cdot x = 0$ mit dem GAUßalgorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} 2-t & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -1-t & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1-t & 0 \end{array} \Bigg\| \begin{array}{l} -(2-t)\cdot III - II \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -2+3t-t^2 & 0 \\ 0 & -1-t & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1-t & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat folglich genau für die Werte -1 (erste und zweite Zeile sind abhängig) sowie 1 und 2 (erste Zeile ist Nullzeile) nicht-triviale Lösungen. Als Eigenwerte erhalten wir daher -1, 1 und 2. Die zugehörigen Basislösungen können wir durch Einsetzen des jeweiligen Eigenwertes t direkt ablesen:

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.3: Wir überlassen die Bestimmung des faktorisierten charakteristischen Polynoms dem Rechner und erhalten $\det(A - t\cdot I) = -(t-1)\cdot(t+1)\cdot(t-2) = \det(B - t\cdot I)$, für B vergleiche Aufgabe 2.2, und weiterhin ist $\det(C - t\cdot I) = -t\cdot(t-1)^2$. Alle Matrizen sind diagonalisierbar; für die Transformationsmatrizen berechnen wir Eigenvektoren per GAUßalgorithmus und erhalten:

$$T_A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; D_A = T_A^{-1}\cdot A\cdot T_A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^n = T_A\cdot D_A^n\cdot T_A^{-1} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)^n - 1 & 2\cdot(-1)^n - 2^n - 1 & 2^{n+2} - 6\cdot(-1)^n + 2 \\ 4\cdot(1+(-1)^{n+1}) & 2^n + 4\cdot(-1)^{n+1} + 4 & 12\cdot(-1)^n - 2^{n+2} - 8 \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^{n+1} & 3\cdot(-1)^n - 2 \end{pmatrix}.$$

$$T_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; D_B = T_B^{-1}\cdot B\cdot T_B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix};$$

$$B^n = T_B\cdot D_B^n\cdot T_B^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n + 3\cdot 2^n - 3 & 3 - 3\cdot 2^n & 3 + 3\cdot(-1)^{n+1} \\ (-1)^n + 2^{n+1} - 3 & 3 - 2^{n+1} & 3 + 3\cdot(-1)^{n+1} \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T_C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; D_C = T_C^{-1}\cdot C\cdot T_C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = D_C^n; \; C^n = T_C\cdot D_C^n\cdot T_C^{-1} = T_C\cdot D_C\cdot T_C^{-1} = C.$$

Aufgabe 2.4: Wir formen die Gleichung $D = T^{-1}\cdot P\cdot T$ durch Multiplikation mit T von rechts um und erhalten $D\cdot T = P\cdot T$. Bezeichnet v_j die j-te Spalte von T und ist d_j der Eintrag der Diagonalmatrix D an der Stelle (j,j), so ist $d_j\cdot v_j$ die j-te Spalte des Produkts $D\cdot T$. Hieraus entnehmen wir $T\cdot v_j = d_j\cdot v_j$; die j-te Spalte von T ist folglich ein Eigenvektor von P. Da die Spalten der invertierbaren Matrix T eine Basis bilden, folgt die Behauptung.

Aufgabe 2.5: In beiden Fällen gibt es keine Basis aus Eigenvektoren, denn $\det(A - t\cdot I) = (t-1)^2 + 1$ besitzt keine Nullstellen, so dass A überhaupt keine reellen Eigenvektoren hat, während $\det(B - t\cdot I) = (t-2)^2$ auf 2 als einzigen Eigenwert von B führt. Wäre nun B diagonalisierbar, so gäbe es eine invertierbare Matrix T mit der Eigenschaft $T^{-1}\cdot B\cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Umformen führt dann zu $B = T\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, was aber nicht der Fall ist.

Aufgabe 2.6: (a) Für einen Vektor $x = (x_1,\ldots,x_r)^T$ gilt sicherlich $x_j^2 \le x_1^2 + \ldots + x_r^2$ und damit (per Wurzelziehen) auch $|x_j| \le \|x\|$. Ist daher $\left(\|v(n) - g\|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Nullfolge, so auch $\left(|v_j(n) - g_j|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ und es folgt $\lim_{n\to\infty} v_j(n) = g_j$, womit die Konvergenz von v(n) gegen g nachgewiesen ist. Gilt umgekehrt $\lim_{n\to\infty} v_j(n) = g_j$ für jedes j, so sind sämtliche der Folgen $\left(| v_j(n) - g_j |\right)_{n\in\mathbf{N}}$ Nullfolgen. Nach den Grenzwertrechenregeln für reelle Zahlenfolgen konvergiert dann auch $\left(\| v(n) - g \|\right)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\sqrt{(v_1(n)-g_1)^2 + \ldots + (v_r(n)-g_r)^2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen 0.

(b) Wir haben die Konvergenz der Komponentenfolgen nachzuweisen. Dies erledigen wir, indem wir eine der Komponenten aufschreiben und dann auf die Grenzwertrechenregeln für reelle Zahlenfolgen verweisen:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} w_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(u_j(n) + v_j(n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} u_j(n) + \lim\limits_{n\to\infty} v_j(n) = u_j + v_j$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} w_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha(n)\cdot v_j(n)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha(n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} v_j(n) = \alpha \cdot v_j$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} w_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{r} P_{ji}(n)\cdot v_i(n)\right) = \sum\limits_{i=1}^{r} \lim\limits_{n\to\infty} P_{ji}(n)\cdot \lim\limits_{n\to\infty} v_i(n) = \sum\limits_{i=1}^{r} P_{ji}\cdot v_i$ ist die j-te Komponente des Produkts $P\cdot v$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} R_{ij}(n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{r} P_{ik}(n)\cdot Q_{kj}(n)\right) = \sum\limits_{k=1}^{r} \lim\limits_{n\to\infty} P_{ik}(n)\cdot \lim\limits_{n\to\infty} Q_{kj}(n) = \sum\limits_{k=1}^{r} P_{ik}\cdot Q_{kj}$ ist der Eintrag der Produktmatrix $P\cdot Q$ an der Stelle (i,j).

Aufgabe 2.7: Wir übernehmen aus dem ersten Abschnitt $P^n = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1+0,4^n & 1-0,4^n \\ 2-0,4^n & 2+0,4^n \end{pmatrix}$ und erhalten damit $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1+0,4^n & 1-0,4^n \\ 2-0,4^n & 2+0,4^n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}(1+0,4^n) & \lim\limits_{n\to\infty}(1-0,4^n) \\ \lim\limits_{n\to\infty}(2-0,4^n) & \lim\limits_{n\to\infty}(2+0,4^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Die Grenzmatrix hat die Eigenwerte 1 (Eigenvektor z. B. $v_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T$) und 0 (Eigenvektor z. B. $v_0 = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^T$). Daher lässt sich jeder Vektor x_0 zerlegen in $x_0 = \alpha\cdot v_1 + \beta\cdot v_0$. Nach den Grenzwertrechenregeln der vorigen Aufgabe folgt $\lim\limits_{n\to\infty} P^n\cdot x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} P^n\cdot(\alpha\cdot v_1 + \beta\cdot v_0) = \alpha\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} P^n\right)\cdot v_1 + \beta\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} P^n\right)\cdot v_0 = \alpha\cdot v_1$. Hieraus folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} P^n\cdot x_0 = \begin{pmatrix}\alpha & 2\cdot\alpha\end{pmatrix}^T$ mit passendem α die einzigen Grenzwerte sind.

Aufgabe 3.1: (a) Wir verweigern die Transformation auf Diagonalgestalt und rechnen direkt. Offenbar gilt $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & c(n) \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ mit passendem c(n). Wir rechnen weiter:

$$\begin{pmatrix} a^{n+1} & c(n+1) \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & c(n) \\ 0 & b^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n + b\cdot c(n) \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^n & c(n) \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & b^n + a\cdot c(n) \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Für $a \neq b$ ergibt sich hieraus $c(n) = \frac{b^n - a^n}{b-a}$ und damit $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & \frac{b^n - a^n}{b-a} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, in unserem Falle liefert das die allgemeine Lösung $x(n) = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n\cdot(a_1 - a_2) + 3^n\cdot a_2 \\ 3^n\cdot a_2 \end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$.

(b) Hier ist die Transformation in Diagonalgestalt nicht möglich! Setzen wir $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $D = 2\cdot I$, so gilt offenbar $D\cdot N = N\cdot D$ sowie $N^2 = N^3 = \ldots = 0$. Mit ein wenig Überlegung folgt hieraus $(D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot D^n \cdot N^{n-k} = D^n + n \cdot D^{n-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, so dass wir als allgemeine Lösung des Systems $x(n) = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 + n \cdot a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ erhalten.

(c) Die n-te Potenz der Matrix haben wir bereits in Aufgabe 2.3 bestimmt. Die allgemeine Lösung lautet daher:

$$x(n) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1)^n - 1 & 2 \cdot (-1)^n - 2^n - 1 & 2^{n+2} - 6 \cdot (-1)^n + 2 \\ 4 \cdot (1 + (-1)^{n+1}) & 2^n + 4 \cdot (-1)^{n+1} + 4 & 12 \cdot (-1)^n - 2^{n+2} - 8 \\ 1 + (-1)^{n+1} & 1 + (-1)^{n+1} & 3 \cdot (-1)^n - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2 \cdot a_3 - a_2 - a_1) + 2 \cdot (a_1 + a_2 - 3 \cdot a_3) \cdot (-1)^n + (-a_2 + 4 a_3) \cdot 2^n \\ (4 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 - 8 \cdot a_3) + 4 \cdot (a_1 + a_2 + 3 \cdot a_3) \cdot (-1)^{n+1} + (a_2 - 4 \cdot a_3) \cdot 2^n \\ (a_1 + a_2 - 2 a_3) + (a_1 + a_2 - 3 \cdot a_3) \cdot (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.2: (a) Die Behauptung ist mit folgender Rechnung erledigt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt[3]{n/p} \\ \sqrt[3]{p/q} \\ \sqrt[3]{q/n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot \sqrt[3]{q/n} \\ p \cdot \sqrt[3]{n/p} \\ q \cdot \sqrt[3]{p/q} \end{pmatrix} = \sqrt[3]{n \cdot p \cdot q} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt[3]{n/p} \\ \sqrt[3]{p/q} \\ \sqrt[3]{q/n} \end{pmatrix}.$$

(b) Der einzige Eigenwert von P ist $\lambda = \sqrt[3]{n \cdot p \cdot q}$. Wäre $D = T^{-1} \cdot P \cdot T$ für eine invertierbare Matrix T eine Diagonalmatrix, so wäre notwendigerweise $D = \lambda \cdot I$ und folglich $P = \lambda \cdot T \cdot I \cdot T^{-1} = \lambda \cdot I$. Das aber ist offenkundig nicht der Fall.

(c) Man rechnet (zum Beispiel mit dem GAUßalgorithmus) nach, dass jeder Eigenvektor zum Eigenwert λ ein Vielfaches von $\hat{v}$ ist. Weitere Eigenvektoren kann es mangels anderen Eigenwerten nicht geben; genau die gleiche Aussage gilt auch für P^2. Ist nun w kein Vielfaches von $\hat{v}$, so kann $P \cdot w$ kein Vielfaches von w sein (sonst wäre ja w ein Eigenvektor von P). Somit sind w und $P \cdot w$ linear unabhängig; für die Paare $w; P^2 \cdot w$ und $P \cdot w; P^2 \cdot w$ geht der Nachweis der Unabhängigkeit analog. Setzen wir die lineare Abhängigkeit von w, $P \cdot w$ und $P^2 \cdot w$ voraus, so erhalten wir als Aufspann von w und $P \cdot w$ eine Ebene E, die auch den Vektor $P^2 \cdot w$ enthält. Für ein Element $x = \alpha \cdot w + \beta \cdot P \cdot w$ von E gilt daher $P \cdot x = \alpha \cdot P \cdot w + \beta \cdot P^2 \cdot w \in E$, d. h. E ist „P-invariant“. Wir beschreiben die Ebene durch die Gleichung $0 = N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + N_3 \cdot x_3 = N \cdot x$, wobei N ein Normalenvektor von E ist, den wir hier als Zeilenvektor $N = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}$ notiert haben. Dann muss mit $N \cdot x = 0$ (d. h. x liegt in E) auch $0 = N \cdot P \cdot x = (N \cdot P) \cdot x$ (also $P \cdot x \in E$) gelten. Also ist auch $N \cdot P$ ein Normalenvektor von E und damit ein Vielfaches von N. Demnach gibt es eine reelle Zahl κ, so dass folgende Aussage erfüllt ist: $P^T \cdot N^T = (P \cdot N)^T = (\kappa \cdot N)^T = \kappa \cdot N^T$. Das wiederum bedeutet, dass N^T ein Eigenvektor von P^T sein muss, was aber nur für den Vektor $N = \begin{pmatrix} p \cdot q & q & 1 \end{pmatrix}$ und dessen Vielfachen angeht – hierzu beachte, dass P^T genauso wie P nur den Eigenvektor 1 besitzt und rechne dann einfach nach. Der Vektor $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -q \end{pmatrix}^T$ liegt daher in E und es gilt (beachte $n = 1/(p \cdot q)$)

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}; \quad P^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/p \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -q \end{pmatrix},$$

d. h. P vertauscht die drei Vektoren w, $P \cdot w$ und $P^2 \cdot w$ zyklisch (wie eine Drehung um 120° es ebenfalls macht).

Aufgabe 3.3: (a) Die Eigenwerte von P sind 0 und $\pm\sqrt{2}$; wir erhalten durch intensives Rechnen

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot P \cdot T \quad \text{für} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Angaben dienen nur zur Information; wir wollen auf einem anderen Weg P^n bestimmen. Wir berechnen $Q := P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und stellen durch vollständige Induktion fest: $P^{2\cdot k+1} = 2^k \cdot P$ sowie $P^{2\cdot k+2} = 2^k \cdot Q$ gilt für alle natürlichen k. Das reicht uns, um P^n zu beherrschen! Weiterhin benötigen wir noch

$$(I-P)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - (I-P)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.4 lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(n) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + P^n \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(6\cdot 2^k - 2 \quad 5\cdot 2^k - 3 \quad 6\cdot 2^k - 1\right)^T & \text{für } n = 2\cdot k \text{ gerade} \\ \left(5\cdot 2^k - 2 \quad 12\cdot 2^k - 3 \quad 5\cdot 2^k - 1\right)^T & \text{für } n = 2\cdot k + 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

(b) Die n-te Potenz der angegebenen Matrix haben wir bereits in Aufgabe 3.1.b bestimmt. Nach Satz 3.4 erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems

$$x(n) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (n+1)\cdot 2^{n+2} + 1 \\ 2^{n+2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.1: Seien P und Q MARKOV-Matrizen, d. h. sämtliche Spaltenvektoren P_j, Q_j von P bzw. Q sind stochastische Vektoren. Zu zeigen ist, dass alle Spalten A_j und B_j der Matrizen $A := t\cdot P + (1-t)\cdot Q$ (mit t aus [0,1]) und $B := P \cdot Q$ stochastische Vektoren sind. Für die Konvexkombination $A_j := t\cdot P_j + (1-t)\cdot Q_j$ von P_j, Q_j ist das klar. Da das Bild $B_j := P\cdot Q_j$ des stochastischen Vektors Q_j unter der MARKOV-Matrix P wieder stochastisch ist, ist der zweite Fall auch abgetan.

Aufgabe 4.2: Die Übergangsmatrix lautet $P = \begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix}$; eine passende Transformationsmatrix T erhalten wir durch $T = \begin{pmatrix} 3/250 & 1 \\ 1/1000 & -1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1000/13 & 1000/13 \\ 1/13 & -12/13 \end{pmatrix}$. Damit lautet die gesuchte Lösung

$$x(n) = P^n \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0,999 & 0,012 \\ 0,001 & 0,988 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 69,5 \\ 13,5 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,987^n \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 69,5 \\ 13,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76,6 - 7,1\cdot 0,987^n \\ 7,1\cdot 0,987^n + 6,4 \end{pmatrix}.$$

Kehrt sich der Trend nicht um, so werden auf lange Sicht rund 76,6 Millionen Bürger im Westen und lediglich 7,1 Millionen Bürger in den neuen Bundesländern wohnen – wenn man eine konstante Bevölkerung voraussetzt.

Aufgabe 4.3: Wegen $P^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,250 & 0,125 \\ 0,500 & 0,500 & 0,500 \\ 0,125 & 0,250 & 0,375 \end{pmatrix}$ ist die Matrix P ergodisch. Einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 findet man schnell; Teilen durch Komponentensumme liefert $(0,25 \quad 0,5 \quad 0,25)^T$ als die gesuchte Grenzverteilung.

8. Literatur und Internetquellen

[1] Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe: Mathematik, Niedersächsisches Kultusministerium, 2009. http://db2.nibis.de/1db/cuvo/ausgabe/index.php?mat1=16

[2] The R Project for Statistical Computing, http://www.r-project.org.

[3] Elaydi S.N. An Introduction to Difference Equations, Springer, 1996.

[4] Goldberg S. Introduction to Difference Equations, Wiley & Sons, 1958.

Professor Dr. Harald Löwe
Technische Universität Braunschweig
Institut Computational Mathematics
Pockelsstraße 14, 38106 Braunschweig
h.loewe@tu-bs.de