Stefanie Ginaidi und Stephan Rosebrock

Visualisierungen im Raum

Viele unserer Überzeugungen sind durch Erfahrungen entstanden und engen unser Denken ein. Wir merken oft schon gar nichts mehr von solcherlei Überzeugungen, sie haben oft den Status von Gesetzen für uns. Eine wichtige Rolle der Mathematik in der Gesellschaft ist aber die, dass sie deutlich machen kann, dass man sehr wohl über den eigenen Horizont denken kann und dass nicht alles immer unbedingt so sein und bleiben muss, wie es im Moment aussieht.

Wir wollen hier eine Überzeugung aufgreifen und zwar die, dass unser Weltall sich in jede Richtung gleichermaßen ausdehnt und unendlich groß ist. Diese Überzeugung sitzt tief, ist doch nicht vorstellbar, dass der Weltraum irgendwo einfach aufhört, da müsste ja "Rand" sein. Wenn es keinen Rand hat, muss es also unendlich weiter gehen, oder nicht?

Man nimmt an, dass die Materie im Weltall annähernd gleich verteilt ist. Hätte nun unser Weltall unendliches Volumen, so wäre es auf der Erde unendlich hell. Dies aber widerspricht unseren Beobachtungen, so dass wir wohl bis jetzt zu eng gedacht haben. Wir wollen in diesem Artikel unsere Vorstellungen von 3-dimensionalen Räumen erweitern, so dass die Phänomene "endliches Volumen" und "randlos" für uns denkbar werden. Auf diesem Weg werden wir Räumen begegnen, die für uns ungewohnte Eigenschaften aufweisen.

Die mathematische Disziplin, die sich mit Räumen beschäftigt, so wie wir das wollen, ist die Topologie. Topologie ist der Geometrie ähnlich, nur lassen sich alle Objekte beliebig verformen und sind nicht starr, wie in der Geometrie. Über den Artikel Hinausgehendes aber mit ähnlicher Intention Geschriebenes findet sich in [7].

Flächen und Räume

Wenn man einen Torus (rechts in Abbildung 1) zeichnen möchte, so fällt auf, dass es nicht gerade einfach ist, diese einem Fahrradschlauch ähnliche Fläche auf einem ebenen Blatt Papier darzustellen. Wesentlich leichter ist es, ein Rechteck zu zeichnen und sich dazu Folgendes vorzustellen: die beiden gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks sind jeweils nahtlos miteinander verklebt (*identifiziert*, wie der Mathematiker sagt), so dass sich ein Torus ergibt. Dabei stelle man sich vor, dass das Rechteck aus einem Gummituch hergestellt wurde, was sich beliebig dehnen und stauchen lässt. Nicht weiter erstaunlich, aber dennoch für den weiteren Artikel bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass die Identifikation der Kanten des zweidimensionalen Rechtecks zur zweidimensionalen Torusoberfläche nicht im zweidimensionalen Raum möglich ist. Das Durchführen dieser „Bastelei" vollzieht sich im $\mathbb{R}^3$.

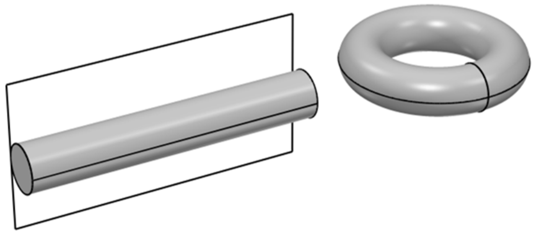

Abbildung 1: Identifikation zum Torus

Eigentlich, und hier baut sich bereits eine erste Hürde im Denken auf, möchte man die Torusoberfläche ohne den Raum darum denken. Sie soll nicht "eingebettet" in einem $\mathbb{R}^3$ liegen, sondern einfach abstrakt da sein, ohne etwas drumrum.

Bleibt man bei der Darstellung der Torusoberfläche (die auch einfach nur *Torus* heißt) als Rechteck, bei dem gegenüberliegende Kanten miteinander identifiziert sind, so lassen sich geschlossene Wege, die auf dem Torus existieren, darstellen. Ein geschlossener Weg ist eine Linie, bei der Anfangs- und Endpunkt identisch sind. In Abbildung 2 ist ein geschlossener Weg *w* abgebildet.

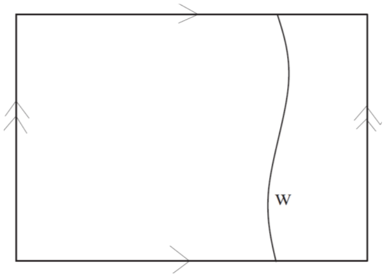

Abbildung 2: Geschlossener Weg auf einem Torus

w ist geschlossen, weil die obere und untere Kante und damit die beiden Randpunkte der eingezeichneten Linie miteinander identifiziert sind. Im Weiteren kommen nur geschlossene Wege vor.

Versetzt man sich einmal in das Leben eines zweidimensionalen Wesens, das nichts kennt als die Ebene, in der es sich bewegt, so wird klar, dass die gemachten Überlegungen nicht unbedingt selbstverständlich sind. Für dieses Wesen ist es nicht vorstellbar, was es heißt, ein Rechteck aus der Ebene hinaus zu verbiegen, so dass seine Kanten zu einem Torus identifiziert werden können. Diesem, gegenüber dreidimensionalen Menschen in seiner Raumwahrnehmung eingeschränkten, Wesen lässt sich jedoch mit der Vorstellung des Rechtecks helfen: wir malen ein Rechteck und *denken* uns gegenüberliegende Seiten als miteinander identifiziert, ohne die Identifikation tatsächlich durchzuführen. Was passiert nun, wenn ein zweidimensionales Wesen sich durch ein solches Rechteck mit identifizierten Kanten bewegt? Versucht es, wie in Abbildung 3, das Rechteck an einer vermeintlichen Randkante zu verlassen, so wird ihm das nicht gelingen, da diese Kante mit einer anderen Kante identisch ist – es gibt keine Randkanten! Was würde demnach also geschehen, wenn der zweidimensionale Bewohner seinen Blick beliebig weit innerhalb des Rechtecks z.B. nach links schweifen ließe? Der Bewohner würde seine eigene rechte Seite sehen!

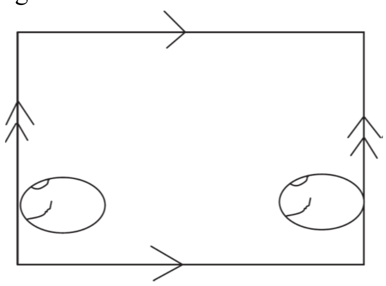

Abbildung 3: Verlassen des "Rechtecks" ist nicht möglich

Was passiert, wenn wir uns selbst einmal in eine ähnliche Lage versetzen. Analog zum 2-Torus (die Torusoberfläche), der entsteht, wenn man bei einem Rechteck gegenüberliegende Randkanten miteinander identifiziert, entsteht ein 3-Torus, wenn man bei einem Voll-Würfel gegenüberliegende Seitenflächen miteinander identifiziert. Hier wird das Sich-Vorstellen dieser Identifikation für uns schon deutlich schwieriger, was daran liegt, dass diese Identifikation im dreidimensionalen Raum nicht durchführbar ist. Wir versuchen es uns trotzdem vorzustellen. Der Weg zur Identifikation des "Bodens" mit dem "Deckel" und von der rechten mit der linken Seite ist in Abbildung 4 skizziert. Es entsteht eine aufgedickte Torusoberfläche. Dieser Raum weist zwei Torusoberflächen als je einen inneren und einen äußeren Rand auf. Als letzter Schritt der Identifikation zum 3-Torus muss nun der innere und der äußere Rand miteinander verklebt werden, was im dreidimensionalen Raum nicht möglich ist. Greifen wir zu einem ähnlichen Hilfsmittel wie das zweidimensionale Wesen, das sich keinen 2-Torus vorstellen kann: betrachten wir einen Würfel und *denken* uns gegenüberliegende Seiten als miteinander identifiziert. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus? In Abbildung 5 links wäre das Seil, das von der Mitte des Bodens zur Mitte der Decke gespannt ist, eine geschlossene Schlinge, da der Anfangs- und der Endpunkt identisch sind.

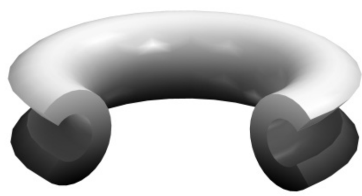

Abbildung 4: Identifikation von Würfelseiten

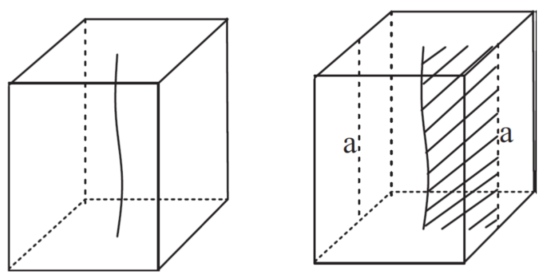

Abbildung 5: Nicht zusammenziehbarer Weg im 3-Torus

Was aber unterscheidet den 3-Torus vom $\mathbb{R}^3$? Ein wichtiges Hilfsmittel liefert die Unterscheidung verschiedener Typen von Wegen:

Definition: Ein geschlossener Weg heißt *zusammenziehbar*, wenn er der Rand einer in den betrachteten Raum eingebetteten Kreisscheibe ist[3]. Ist jeder Weg zusammenziehbar, so nennt man den Raum *einfach zusammenhängend*.

So ist der $\mathbb{R}^3$ oder auch die Kugeloberfläche einfach zusammenhängend, während der 2-Torus es nicht ist, da der Weg w in Abbildung 2 nicht zusammenziehbar ist. Aber auch der 3-Torus ist nicht einfach zusammenhängend: Wäre nämlich das in Abbildung 5 links gezeigte Seil zusammenziehbar, so müsste sich eine Scheibe in den 3-Torus einbetten lassen, die genau dieses Seil als Rand hat und über die die Zusammenziehung läuft. Ein Teil einer solchen potentiellen Scheibe ist in Abbildung 5 rechts dargestellt. Die Scheibe stößt in der gestrichelten Linie a an die rechte Seite des Torus. Diese ist aber mit der linken Seite identifiziert, die beiden mit a bezeichneten Linien sind identisch, so dass die Scheibe von da wieder in den Torus eintaucht. Sie kann offensichtlich nicht zu einer vollständigen Scheibe ergänzt werden.

Man stelle sich nun einen Menschen vor, der in einem zum 3-Torus identifizierten Würfel lebt, wie der stark vergrößerte Mensch aus Abbildung 6. Lässt dieser Mensch den Blick nur lang genug nach oben schweifen, so kann er ohne jede Mühe seine Schuhsohlen betrachten - Boden und Decke sind miteinander identifiziert! Jeder Versuch, den 3-Torus zu verlassen, würde kläglich scheitern – jede vermeintliche Randfläche des 3-Torus ist mit einer anderen Fläche identisch, so dass ein Verlassen des 3-Torus nicht möglich ist! Es handelt sich um einen randlosen Körper.

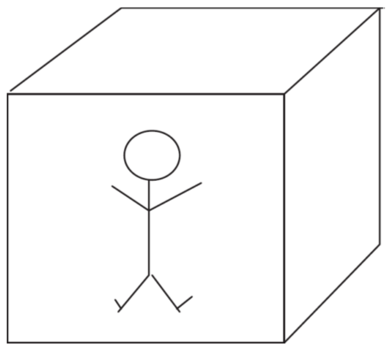

Abbildung 6: Schuhinspektion

Der $\mathbb{R}^3$, der 3-Torus oder der Raum, in dem wir leben, sind Beispiele von *3-Mannigfaltigkeiten*. Das sind 3-dimensionale Räume, bei denen jeder Punkt eine Umgebung hat, die ein Ball ist. Ein *Ball* (oder auch *Vollkugel*) ist die Menge aller Punkte mit Abstand höchstens eins vom Ursprung im $\mathbb{R}^3$. Eine *2-Mannigfaltigkeit* ist ein 2-dimensionaler „Raum“ bei dem jeder Punkt eine Umgebung hat, die eine Scheibe ist, z.B. ein Torus, eine Kugeloberfläche oder einfach eine Ebene.

Lassen sich weitere 3-Mannigfaltigkeiten finden? Um die Vorstellung zu erleichtern, soll nochmal einen Schritt zurückgegangen werden. Einen 2-Torus erhält man z.B. auch, indem man bei einem Kreisring (die Fläche zwischen zwei verschiedenen konzentrischen Kreisen), der in der Ebene liegt, den äußeren Rand mit dem inneren Rand verklebt.

Gehen wir nun eine Dimension höher: als Vorstellung diene eine Vollkugel, aus deren Inneren eine kleine Vollkugel herausgenommen wurde, so dass ein Körper entsteht, der von zwei Kugeloberflächen begrenzt wird. Es entsteht eine aufgedickte Kugeloberfläche wie in Abbildung 7.

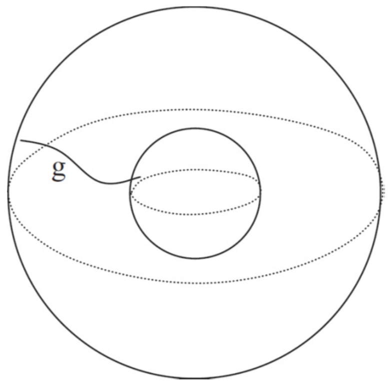

Abbildung 7: Ein geschlossenes Seil

Stellen wir uns hier nun den inneren Rand mit dem äußeren Rand identifiziert vor, so entsteht erneut eine randlose 3-Mannig-faltigkeit. Ihr Name ist $S^1 \times S^2$. Hier lassen sich nun ähnliche Überlegungen anstellen wie zum 3-Torus. Auch dies ist eine randlose 3-Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen, bei der z.B. das Seil g aus

[3] Das Zusammenziehen des Wegs zu einem Punkt geht dann über diese Kreisscheibe. Umgekehrt liefert das Zusammenziehen eines Weges zu einem Punkt sozusagen als Spur eine passende Kreisscheibe.

Abbildung 7 geschlossen und nicht zusammenziehbar ist.

Was würde passieren, wenn ein Raumschiff im Weltall von der Erde aus starten und beliebig lange geradeaus fliegen könnte? Wenn unser Weltall eine ähnliche Struktur aufweist wie der Dreitorus oder $S^1 \times S^2$, so ist zu erwarten, dass das Raumschiff, ohne je seine Richtung zu ändern, irgendwann wieder bei der Erde ankommt.

Man nennt eine Mannigfaltigkeit, die randlos ist und endliches Volumen hat *geschlossen*. $S^1 \times S^2$ und der 3-Torus sind Beispiele geschlossener 3-Mannigfaltigkeiten. Der $\mathbb{R}^3$ oder der Volltorus sind nicht geschlossen, der $\mathbb{R}^3$ weil er kein endliches Volumen hat und der Volltorus weil er Rand hat.

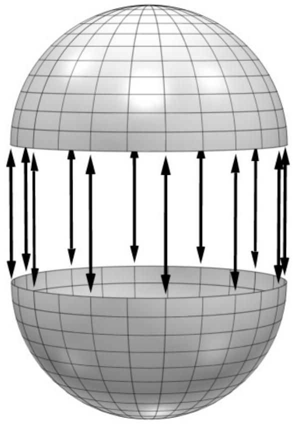

Abbildung 8: Identifikation zur 2-Sphäre

Eine typische geschlossene 2-Mannigfaltigkeit ist die *2-Sphäre* S^2, die Oberfläche eines Balls. Sie ist die einzige geschlossene Fläche, auf der jede Kurve zusammenziehbar ist. Man kann eine 2-Sphäre dadurch herstellen, dass man zwei (verformte) Scheiben entlang ihres Randes zusammenklebt (siehe Abbildung 8). Zu verklebende Punkte sind mit Doppelpfeilen markiert.

Analog zur 2-Sphäre gibt es auch eine 3-Mannigfaltigkeit eine Dimension höher: die *3-Sphäre* S^3, die Oberfläche einer 4-dimensionalen Kugel. Sie entsteht, ganz analog zur 2-Sphäre, indem man 2 normale Bälle entlang ihres Randes zusammenklebt. Sie passt nicht mehr in den $\mathbb{R}^3$ und wir können sie uns wieder nur schwer vorstellen. Sie hat endliches Volumen, nämlich gerade das, der beiden Bälle, aus denen sie entstanden ist. Sie ist randlos, denn beim Verkleben der beiden Bälle ist der gesamte Rand verklebt worden. Die S^3 ist also eine geschlossene 3-Mannigfaltigkeit. In der S^3 ist jede geschlossene Kurve zusammenziehbar. Jeder Weg beginnt in einer der beiden Kugeln. Wenn man zum Rand kommt, dann geht man auf dem entsprechenden Punkt der zweiten Kugel weiter.

Von HENRI POINCARÉ stammt aus dem Jahr 1904 die berühmte

Poincaré-Vermutung: *Die 3-Sphäre ist die einzige geschlossene zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit, in der jede geschlossene Kurve zusammenziehbar ist.*

Sie war bis vor kurzem eines der bedeutendsten ungelösten mathematischen Probleme. Der russische Mathematiker GRIGORI („GRISHA“) PERELMAN legte 2002 mehrere Arbeiten vor, die einen Beweis der Poincaré-Vermutung implizieren und inzwischen von der Fachwelt als richtig akzeptiert werden. Perelman sollte 2006 mit der Fields-Medaille geehrt werden – die höchste Auszeichnung, die man für mathematische Resultate erzielen kann – lehnte jedoch ab.

Orientierbare und nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten

Bestimmte Flächen haben ganz erstaunliche Eigenschaften. In Abbildung 9 ist rechts ein Möbiusband abgebildet; links in der Form, bei der wir uns die beiden Seiten, die mit einem Pfeil gekennzeichnet sind, identifiziert vorstellen müssen. Die Identifikation läuft in Pfeilrichtung, also umgekehrt aneinander. Das Möbiusband hat nur eine Randkomponente, so wie bei einer Scheibe. Im Gegensatz zur Scheibe gibt es aber geschlossene Linien auf dem Möbiusband, die nicht zusammenziehbar sind. Die Linie g links in Abbildung 9 ist solch eine Linie.

Seltsam wird es, wenn wir uns wieder vorstellen, wir wären 2-dimensionale Wesen und würden in einem Möbiusband leben. In Abbildung 9 rechts wurde der Buchstabe a einmal entlang der Pfeilrichtung rund durch das Möbiusband (entlang der Linie g) geschoben. Kommt er wieder am Start an, so ist er gegenüber dem Anfang, gespiegelt. Links und rechts vertauschen sich. Würde ein 2-dimensionales Wesen entlang g laufen, so ist es bei seiner Rückkehr natürlich gleich geblieben. Fordert ihn aber jemand auf, sein linkes Bein zu heben, so wird er sein rechtes Bein heben. Für das Wesen hat sich in seiner Wahrnehmung links und rechts vertauscht. Der Weg g auf dem Möbiusband heißt *orientierungsumkehrend*. Die Eigenschaft, wo links oder wo rechts ist, ist nicht eine Eigenschaft von uns, sondern davon wie wir in den Raum eingebettet sind. Unser Spiegelbild ist mit uns identisch, nur seine Lage im Raum ist eine andere. Das Möbiusband ist ein Beispiel einer *nicht-orientierbaren Fläche*, also einer Fläche, die einen orientierungsumkehrenden Weg enthält.

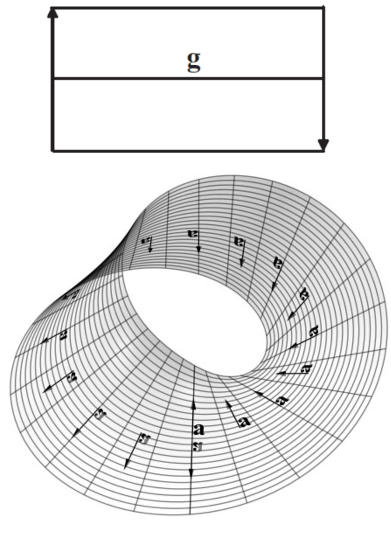

Abbildung 9: Möbiusband

Es gibt auch Flächen, die nicht-orientierbar sind und keinen Rand haben. In Abbildung 10 ist links eine *Klein'sche Flasche* abgebildet. Rechts müssen noch wie üblich gegenüberliegende Kanten, die jeweils dieselbe Bezeichnung tragen, nach Pfeilrichtung identifiziert werden um die Klein'sche Flasche zu erhalten. Identifiziert man zuerst die obere mit der unteren Kante, so erhält man ein Ofenrohr. Von dem sind noch, gemäß den Pfeilen links und rechts, die Ränder zu identifizieren. Wir dürfen aber nicht, wie beim Torus, einfach von außen die Ränder aneinander kleben, sondern müssen von Innen kommen. Das geht nicht in unserem 3-dimensionalen Raum und deswegen ist das Bild in Abbildung 10 links auch nicht ganz richtig, weil das Ofenrohr sich selbst durchdringt. Diese Selbstdurchdringung lässt sich im $\mathbb{R}^3$ nicht vermeiden.

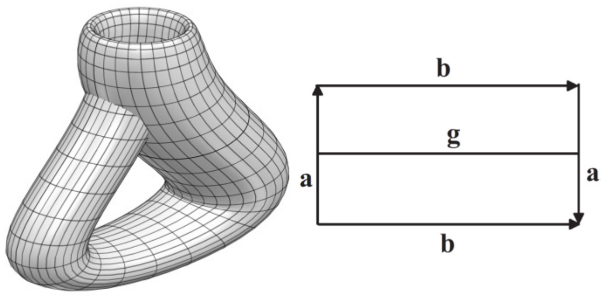

Abbildung 10: Klein'sche Flasche

Auch die Klein'sche Flasche hat einen orientierungsumkehrenden Weg, der Weg g in Abbildung 10 rechts. Die Klein'sche Flasche enthält nämlich ein Möbiusband, was man leicht an Abbildung 10 rechts sieht.

Aber auch 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten können orientierungsumkehrende Wege enthalten: Den 3-Torus gibt es in einer nicht-orientierbaren Version namens $\tilde{T}^3$. Dazu stellen wir uns wieder vor, wir identifizieren gegenüberliegende Seiten eines Würfels. Wir kleben aber diesmal nur zwei der Seitenpaare wie im letzten Kapitel von außen aneinander. Das letzte Paar gegenüberliegender Seiten wird von innen aneinander geklebt. Das ist nicht leicht vorstellbar. In Abbildung 11 wird dargestellt, wie die rechte und die linke Seite des Würfels zu verkleben sind. Ecken mit gleichen Ziffern müssen aufeinander geklebt werden. Letztlich ist er dem Verklebungsprozess, der beim Bau der Klein'schen Flasche auftritt, sehr ähnlich, nur eben eine Dimension höher. Der Weg h in Abbildung 11 ist geschlossen und orientierungsumkehrend, weil der Verklebungsprozess so durchgeführt wurde, dass sich beim Übergang durch die Seite gerade links mit rechts vertauscht.

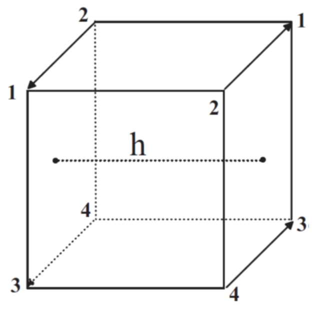

Abbildung 11: Nicht-orientierbarer Torus $\tilde{T}^3$

Stellen wir uns vor, unser Weltraum wäre ein gigantischer, nicht-orientierbarer 3-Torus $\tilde{T}^3$. Stellen wir uns weiter vor, es wäre möglich, weite Entfernungen zurückzulegen und jemand fliegt einen orientierungsumkehrenden Weg von der Erde wieder zurück zur Erde. Seine Lage im Raum hat sich verändert, wenn er zurückgekommen ist. Für ihn ist die ganze Welt spiegelverkehrt. Schrift wird zur Spiegelschrift; für ihn leichter lesbar, wenn er einen Spiegel jeweils vor die Schrift hält. Links und rechts ist für ihn vertauscht. Erhält er die Aufforderung, seinen rechten Arm zu heben, so wird er denselben Arm heben, den er schon immer als rechten Arm angesehen hat, aber alle anderen werden der Meinung sein, es sei sein linker Arm. Begriffe wie rechts und links machen hier keinen Sinn mehr. Je nachdem, wie oft man einen orientierungsumkehrenden Weg fliegt, hat links und rechts eine andere Bedeutung.

Stellen wir uns weiter vor, unser Raumfahrer besitzt eine Schuhfabrik. Es genügt, wenn er nur linke Schuhe produziert. Die Hälfte der Schuhe wird auf dem Raumflug mitgenommen und wird so zu rechten Schuhen. Streng genommen ist das sprachlich falsch: Die Schuhe werden nicht anders, sie liegen nur anders im Raum. Es ist keine innere Eigenschaft eines Schuhs, linker oder rechter zu sein. Linke oder rechte Schuhe (sofern sie vom selben Typ sind) sind genau gleich, unterschiedlich ist nur ihre Lage im Raum. Der Raumfahrer ist aber gut beraten, wenn er eventuelle Beschriftungen an den Schuhen erst anbringt, nachdem er sie entlang einem orientierungsumkehrenden Weg geschickt hat, sonst verkehrt sich die Schrift in Spiegelschrift.

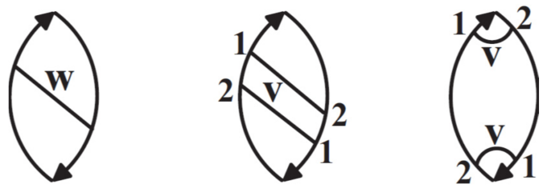

Abbildung 12: Drei projektive Ebenen P^2

Wir betrachten eine weitere nicht-orientierbare Fläche, die *projektive Ebene* P^2. Wir erhalten sie, wenn wir die Ränder einer Scheibe identifizieren und zwar so wie in Abbildung 12 links. Dabei muss wieder die Pfeilrichtung beachtet werden. Jeder Punkt vom Rand der Ebene wird mit seinem gegenüberliegenden Randpunkt verklebt. Auch in der projektiven Ebene ist ein orientierungsumkehrender Weg enthalten. Schneidet man nämlich die Spitzen oben und unten ab, so bleibt ein Möbiusband, die projektive Ebene enthält also ein Möbiusband.

Auf der projektiven Ebene betrachten wir einmal den Weg *w* in Abbildung 12 links. Dieser Weg ist geschlossen, denn sein rechtes oberes Ende ist mit dem linken unteren verklebt. Er ist nicht zusammenziehbar. Wir können versuchen ihn zusammenzuziehen: rutschen wir sein linkes Ende nach unten, so rutscht das rechte nach oben und umgekehrt. Es gibt keine Möglichkeit der Zusammenziehung. w ist außerdem orientierungsumkehrend, denn er verläuft einmal rund um das Möbiusband, das in P^2 enthalten ist.

In Abbildung 12 Mitte betrachten wir den geschlossenen Weg *v*. Es handelt sich um einen einzigen geschlossenen Weg, denn der Punkt 1 links oben ist mit dem Punkt 1 rechts unten und der Punkt 2 links mit dem Punkt 2 rechts verklebt. Den Weg *v* erhalten wir, wenn wir den Weg *w* links im Bild doppelt durchlaufen. Nur zur leichteren Lesbarkeit wurde der Weg *v* etwas auseinander gezogen. Das Erstaunliche ist jetzt, dass der Weg *v* zusammenziehbar ist: ziehen wir die untere Hälfte des Wegs *v* nach unten, so wandert automatisch die obere nach oben wie in Abbildung 12 rechts. Dazu muss man sich nur wieder vergegenwärtigen, wie die Randpunkte im Bild verklebt sind. Jetzt können wir aber den Weg *v* in Abbildung 12 rechts über die Ecke ganz unten – das ist dieselbe Ecke wie die ganz oben -- zusammenziehen. Der Weg ist zum Punkt geworden. Es gibt also nicht zusammenziehbare geschlossene Wege auf Flächen, wie der Weg *w* links in Abbildung 12, die zusammenziehbar werden, wenn wir sie doppelt durchlaufen.

Auch zur projektiven Ebene gibt es ein 3-dimensionales Analogon. Die projektive Ebene erhalten wir, wenn wir gegenüberliegende Punkte des Randes einer Scheibe identifizieren. Den projektiven Raum P^3 erhalten wir, wenn wir gegenüberliegende Punkte des Randes einer Vollkugel identifizieren. Auch P^3 ist eine 3-Mannigfaltigkeit, denn dadurch, dass gegenüberliegende Punkte vom Rand einer Vollkugel identifiziert werden, haben auch solche Punkte eine Umgebung, die ein Ball ist. P^3 ist aber wieder orientierbar, denn beim

Verkleben wird oben/unten und rechts/links vertauscht. Vertauscht man zweimal die Orientierung, so hat man wieder einen orientierbaren Raum.

Wie sieht jetzt unser Weltraum wirklich aus? Es gibt viele 3-Mannigfaltigkeiten mit endlichem Volumen, die randlos sind. Welche davon nun der Raum ist, in dem wir leben, bleibt weiterhin offen.

Literatur

[1] Colerus, Egmont — Vom Punkt zur vierten Dimension, Paul Zsolnay Verlag; Berlin, Wien, Leipzig 1935.

[2] Filler, Andreas — Euklidische und nichteuklidische Geometrie, BI Wissenschaftsverlag, 1993.

[3] Hilbert, D., Cohn-Vossen, S. — Anschauliche Geometrie, Springer 1996.

[4] Petit, Jean-Pierre — Die Abenteuer des Anselm Wüßtegern – Das Geometrikon, physik-verlag 1982.

[5] Petit, Jean-Pierre — Die Abenteuer des Anselm Wüßtegern – Das Topologikon, vieweg-Verlag 1995.

[6] Carter, J. Scott — How surfaces intersect in space, World Scientific 2000.

[7] Weeks, Jefferey R. — The Shape of Space, Marcel Dekker 2002.

Dr. Stephan Rosebrock
Goldregenweg 4, 76297 Stutensee
rosebrock@ph-karlsruhe.de

Stefanie Ginaidi,
Rödelheimer Landstraße 26, 60487 Frankfurt
StefanieGinaidi@gmx.de