Dr. Karlhorst Meyer

Über Ursachen des Niedergangs der Mathematikvermittlung an Schulen und ihre Behebung[1]

Will man eine Sache verbessern, so sollte man sich zunächst einen Überblick verschaffen, weshalb eine Verbesserung erforderlich geworden ist. Das ist nicht einfach, da unser deutsches Schulsystem im Moment aus vielen kaum mehr überschaubaren Teilen besteht, wie z. B. in der Süddeutschen Zeitung [1] dargestellt worden ist.

Wie ich immer betont habe, ist für den Erfolg eines Schulbesuchs weniger das ausgewählte Schulsystem (Grund-, Realschule, Gymnasium, Gesamtschule u. a.) als die Güte der einzelnen Unterrichtsstunde entscheidend. Der Unterricht ist letztlich verantwortlich für das, was am Ende des Schulbesuchs z. B. im Fach Mathematik herauskommt. Und hier sind sich alle Abnehmer der Absolventen einig: Die Schulentlassenen beherrschen immer weniger Inhalte und Fähigkeiten.

Vorab ist aber noch eine Einschränkung erforderlich: Im Folgenden wird vor allem unter **Schule** das Gymnasium oder adäquate Schulformen verstanden, es geht also um die Sekundarstufen I und II. Die Kritik bei der Primarstufe, d. h. Grundschule wird hier nicht berücksichtigt, weil im Primarstufenbereich ganz andere Dinge eine Rolle spielen: Wenn man am Gymnasium kritisiert, dass die Abgänger immer weniger Kenntnisse z. B. in der Mathematik haben, so muss man im Grundschulbereich vor allem kritisieren, dass heute Dinge dort gelehrt werden, die früher erst in höheren Jahrgangsstufen eine Rolle gespielt haben, wie z. B.:

- Die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9, also die Regeln mit der Quersummenbildung, stehen heute in Klasse 3 oder 4 und waren früher in Klasse 5 oder 6 angesiedelt, weil man die Quersummenregeln erst nach einer gewissen Vertrautheit im Umgang mit dem Distributivgesetz erklären kann:

  $\mathbf{486} = \mathbf{4}\cdot 100 + \mathbf{8}\cdot 10 + \mathbf{6} = \mathbf{4}\cdot(99 + 1) + \mathbf{8}\cdot(9 + 1) + \mathbf{6} = \mathbf{4}\cdot 33\cdot 3 + \mathbf{4} + \mathbf{8}\cdot 3\cdot 3 + 8 + \mathbf{6} =$
  $= (\mathbf{4}\cdot 33 + \mathbf{8}\cdot 3)\cdot 3 + (\mathbf{4} + \mathbf{8} + \mathbf{6})$

  Offenbar ist die erste Klammer durch 3 teilbar; die zweite Klammer ist durch 3 teilbar, wenn die so genannte *Quersumme* $\mathbf{4} + \mathbf{8} + \mathbf{6} = 18$ durch 3 teilbar ist. Es gilt aber hier auch:

  $\mathbf{486} = \mathbf{4}\cdot 100 + \mathbf{8}\cdot 10 + \mathbf{6} = \mathbf{4}\cdot(99 + 1) + \mathbf{8}\cdot(9 + 1) + \mathbf{6} = \mathbf{4}\cdot 11\cdot 9 + \mathbf{4} + \mathbf{8}\cdot 9 + 8 + \mathbf{6} =$
  $= (\mathbf{4}\cdot 11 + \mathbf{8})\cdot 9 + (\mathbf{4} + \mathbf{8} + \mathbf{6})$

  Offenbar ist die erste Klammer durch 9 teilbar; die zweite Klammer ist durch 9 teilbar, wenn die so genannte *Quersumme* $\mathbf{4} + \mathbf{8} + \mathbf{6} = 18$ durch 9 teilbar ist.
  Hat man das Distributiv- und das Assoziativgesetz in einer Klasse 3 nicht, so kann man diesen Zusammenhang nicht erklären. Kein Wunder, wenn dann die Quersummenregel vom Schüler falsch angewendet wird, weil er schließt: Die Quersumme von 482 ist durch 7 teilbar, also auch die Zahl 482.

- Wie will man ohne Potenzgesetze und ohne Divisionsalgorithmus Zahlen im Zehnersystem geschrieben ins Zweier- oder Fünfer- oder 16er-System und umgekehrt umwandeln? Deshalb war dieser Stoff früher in Klasse 10 am Gymnasium angesiedelt und nicht für das 3. oder 4. Schuljahr vorgesehen usw.:

  In einer Klasse 3 soll die Zahl 152 ins Dualsystem übertragen werden. Man kann dies durch eine schreibintensive Tabelle billig erreichen, wenn man die Zahlen 1 bis 132 untersucht. Oder man schließt:

  Die Zweierpotenzen sind $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $64 = 2^6$, $128 = 2^7$, $256 = 2^8$. Welche dieser Zahlen ist die größte, die in 152 enthalten ist? Offenbar ist dies 128. Jetzt braucht der Schüler – ohne Taschenrechner, man übt ja auch stets Kopfrechnen – den Divisionsalgorithmus:
  152 : 128 = 1 Rest 24
  $\underline{128}$
  24
  Man weiß jetzt also $152 = 2^7 + 24$
  Jetzt führt man die Überlegung mit der Zerlegung des Restes fort:

[1] Gleichnamiger Vortrag auf dem „9. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen“ an der Jade-Hochschule Wilhelmshaven 2011.

24 : 16 = 1 Rest 8
Damit hat man $152 = 2^7 + 2^4 + 8$.
Dann führt man die Überlegung mit der Zerlegung des Restes fort:
8 : 8 = 1
und findet $152 = 2^7 + 2^4 + 2^3$; das entspricht im Dualsystem 10011000.
Solches kann man ohne Divisionsalgorithmus und ohne Potenzschreibweise nicht finden.

Um die scheinbare Konkurrenz mit dem Fernsehen an der Grundschule in den Griff zu bekommen, geht man heute oft vom Grundsatz aus, in jeder Stunde ein neues Phänomen in Angriff nehmen zu müssen und dann wieder fallen zu lassen. Wenn im Folgenden über das Zuwenig an mathematischen Inhalten und Fähigkeiten in den Sekundarstufen I und II geklagt wird, müsste man in der Primarstufe von einem Zuviel an Inhalten schreiben, was letztlich auch dazu führt, dass die Kinder immer weniger vom Dargebotenen mit nach Hause nehmen. Das sind die Gründe, dass man im Folgenden den Begriff Schule auf die Sekundartstufen I und II einschränken muss.

1. Gründe für den Niedergang

Die Gründe für den Niedergang sind vielfältig: Die Gesellschaft hat sich in Deutschland in einer Form weiterentwickelt, die die Schule schädigt. Man war und ist bemüht, durch Änderungen der Schule an sich – also z. B. statt des gegliederten Schulsystems die Gesamtschule einzuführen – die Qualität zu verbessern; hierauf komme ich hier nicht zu sprechen, das überlasse ich z. B. den Philologenverbänden.

Der Staat hat viel Geld ausgegeben, um Didaktiklehrstühle für die Schule (siehe obige Einschränkungen) einzurichten; der bisherige Erfolg ist gering. Auch der Schule fernstehende Verbände wie der Verein Deutscher Ingenieure e. V. (VDI) u. a. reden oft unangebracht mit. Zunächst will ich mich befassen mit:

1.1 Die Erfolgreichen bei den Veränderungen

Es ist erfreulich, dass die Gesellschaft mittlerweile beim Erziehen der Kinder den unbedingten Gehorsam des Wilhelminischen Zeitalters überwunden hat. Das damalige Contra, die so genannte antiautoritäre Erziehung, spielt heute keine Rolle mehr. Die moderne Praxis der Pädagogik hilft hier weiter: Erziehen ist ein Wechselspiel u. a. zwischen Strenge – Gehorsam – und Nachgeben, Überzeugen durch Reden, Vorbild sein usw.

Deshalb ist es schon verwunderlich, dass die moderne Didaktik zwar viel von Psychologie und Pädagogik spricht, aber dann die eben genannte doch sehr wesentliche Entwicklung der Pädagogik bei den eigenen Belangen übersieht und sich scheinbar auf eine einzelne Methode ausrichtet; sie wird damit zu einseitig:

Man berücksichtigt heute in allen Bereichen der Didaktik die Denkeigenarten des Kindes:

Früher hat man einfach über die Köpfe einer Klasse hinweg gelehrt. Erstaunlicherweise gab es trotzdem immer einige Schülerinnen und Schüler, die alles verstanden haben. Wer weniger verstand, bekam schlechtere Noten. Wer in mehr als einem Fach ganz schlechte Noten bekam, konnte wiederholen. Nutzte dies auch nichts, wurde der Jugendliche schulentlassen oder in eine andere Schulart zugewiesen. Das Wiederholen hält man ja heute auch nicht mehr für sinnvoll: Die Süddeutsche Zeitung berichtete am 16. 5. 2011, dass das Wiederholen der Klassen 5 und 6 im Saarland abgeschafft wird, weil man es nicht für sinnvoll hält. Sicher werden bald andere Bundesländer diesem Schritt nachfolgen, obwohl die meisten Lehrer[2], zumindest an den weiterführenden Schulen wissen, dass ein Wiederholungsjahr in den meisten Fällen durchaus hilft.

Dann kam die Zeit, in der man sich bemühte, allen Kindern etwas beizubringen – das ist falsch ausgedrückt, denn auch früher waren die Fälle, in denen ein Kind in allen Fächern die schlechteste Note bekam, kaum zu beobachten. Also hat auch schon früher jedes Kind in der Schule etwas gelernt. Ich verbessere mich:

Dann kam die Zeit, in der man sich bemühte, im Unterricht allen Kindern fast alles beizubringen. Die unterschiedlichen Begabungen hatten zur Folge, dass die Lehrer hierzu mehr Zeit als früher benötigt hätten, die man ihnen aber nicht gegeben hat. In Folge haben zu viele Lehrer seit 1900 die Lehrpläne nicht mehr bis Schuljahresende erfüllen können, Teile weglassen, was sich in den Folgejahren subsummiert hat, wie auch heute noch zu

[2] Der Leser möge für Lehrer stets „Lehrerin oder Lehrer“ lesen.

beobachten ist: In aller Regel – etwas übertrieben – wird in 4 Monaten das gelehrt, was für 3 Monate vorgesehen ist. Ganz verständlich, wenn Lehrer über die daraus entstehende Belastung jammern und versuchen Lehrplankürzungen zu erreichen. Aber auch Eltern und Kinder sind damit nicht glücklich, wenn z. B. jeweils in den letzten drei Monaten des Schuljahres aus Zeitgründen keine Raumgeometrie gelehrt wird und schließlich der Schulabsolvent keine Ahnung über die Geometrie im Raum hat.

Schlimm ist, dass sich die Didaktik seit 1900 stetig weiterentwickelt hat, immer ausgefeiltere Vorschläge beschafft hat, die gut sind, von Lehrern, denen die Vorschläge bekannt werden – was an sich auch ein Problem ist –, gern praktiziert werden. Leider steht dann bereits die nächste Lehrplankürzung ins Haus, weil erneut mit den ausgefeilteren Bemühungen um die Lehrvermittlung die Unterrichtszeit abermals nicht ausreicht.

Konsequenz: Schon KERSCHENSTEINER hat in anderem Zusammenhang „Mut zur Lücke" empfohlen. Die Didaktik wäre gut beraten, klarzustellen, dass das ins mathematisch-didaktische Detail-Gehen eine Sache ist, die aber nicht bei allen Schülern eingesetzt werden muss. Der Lernende sollte willens sein, sich auch nicht völlig verstandene Inhalte anzueignen und vor allem anzuwenden – wie man dies etwa im Ingenieurwesen mit der Mathematik so durchführt. Oft reicht es schon, wenn Mathematik dem Lernenden anschaulich plausibel gemacht wird, zudem dieses Vorgehen oft den exakten Weg der Mathematik beinhaltet und nur die mathematische Niederschrift hierfür unexakt bleibt. Mathematik lehren heißt doch nicht automatisch Mathematiker ausbilden.

Wenn ich über Didaktiker schreibe, sieht es immer so aus, als würde ich dahingehend pauschalieren, dass ich eine ganze Gilde verurteile. Ich weiß natürlich, dass es an Hochschulen auch Didaktiker gibt, die sich durchaus positiv um das Gymnasium bemühen, gute Vorschläge für eine Änderung der Schulmathematik hinsichtlich moderner Entwicklungen geben u. v. m. Entscheidend ist aber meines Erachtens, *wie* dies geschieht und vor allem *was* hiervon bei Lehrern ankommt. Didaktiker, die zu dem beschriebenen Typus passen, werden innerhalb der Didaktik oft als so genannte Stoffdidaktiker – einer zweitrangigen Gattung – abgetan. Sie zählen nicht, da sie im Sinne der Wissenschaftlichkeit – eine Forderung maßgeblicher Didaktiker – keine Forschungsbeiträge liefern. Die Themen der Stoffdidaktiker sind auch für Lehrer oft uninteressant, weil sie sich viel zu selten mit dem Schulalltag befassen.

Zur Misere gehört, dass sich die meisten Lehrer keine Zeit nehmen, die Publikationen der Didaktiker zu lesen; denn die Stoffdidaktiker – abgesehen von den paar Lehrbuchautoren – schreiben in aller Regel nur für die Belange der Arbeitsgemeinschaften an den Schulen und dann auch vornehmlich für die leistungsstarken Schüler der Sekundarstufe II, also für Schüler kurz vor dem Eintritt ins Studium, weil man von ihnen auch schon einige Jahre vor Studienbeginn erwarten kann, dass sie mathematische Vorlesungen verstehen oder zumindest den Stil solcher vertragen.

Einige Nicht-Stoffdidaktiker publizieren sehr hochgeistig und lieben das Zitieren. Sie betrachten Didaktik als eine eigenständige Wissenschaft, die unabhängig von den Schulen zu betrachten ist. Sie sind wegen ihrer philosophischen Art im Kreis der Didaktiker die Hochanerkannten. Leider kann man als Lehrer diesen Stil nicht lesen, es sei denn, man ist selbst ein Philosoph; man hat aber auch nicht die Zeit, all die Verweise auf andere Literatur (oben Zitate genannt) nachzuvollziehen, d. h. sich weitere Literatur zu besorgen und zu lesen, um die eigentliche Abhandlung zu verstehen.

Das kann man nur ändern entweder dadurch, dass

- sich die Didaktiker ändern, d. h. sich die Stoffdidaktiker mit dem Lehrplan-Curriculum vor allem der Sekundarstufe I befassen und die anderen so schreiben, dass sie verständlich sind, ohne dass man z. B. die zitierte Literatur nachliest oder
- die Lehrer wesentlich weniger Unterricht geben müssen und sich weniger mit den Sozialproblemen ihrer Schüler beschäftigen müssen; sie würden Zeit gewinnen, Literatur – auch ungewohnte – zu lesen.

Anmerkung: Die soeben pointierten Nicht-Stoffdidaktiker muss man leider seit Erfindung der Standards und Kompetenzen als die Erfolgreichen bezeichnen, da sie vor allem auf Ministerialebene hohe Anerkennung genießen und den Glauben verursacht haben, in Zukunft wird alles ohne weiteres Zutun besser.

1.2 Die Mathematiker haben die moderne Didaktik verursacht.

Wenn sich die Didaktik der letzten 50 Jahre bemühte, das Grundsätzliche der Schulmathematik unabhängig von Sachinhalten immer mehr in den Vordergrund zu stellen, das „übergeordnete Mathematische" endgültig herauszukristallisieren, ja vom Schüler entdecken zu lassen, dann ist dies auch innnerhalb der Mathematik so gewesen:

Man hat zu Beginn des 2. Weltkriegs mit der Gründung der Buchreihe NICOLA BOUBAKI (Z. B. [1]) in Paris versucht, eine mathematische Enzyklopädie dahingehend zu konstruieren, dass alles in der Mathematik – zumindest unter dem Aspekt der bestehenden Forschung – bis ins letzte Detail schlüssig und damit nicht mehr verbesserungsfähig beschrieben wird. Bis heute – 70 Jahre später – konnte man mit dieser Methode *nicht* die bestehende Mathematik abarbeiten, z. B. Verfahren der Angewandten u. ä.

Diese Bemühungen aber passen zu den Bestrebungen der Didaktiker, die Schulmathematik so einzuschränken, dass sie in allen ihren Teilen mit absoluter Exaktheit jedem kindlichen Verstand angepasst werden kann, was ich seit vielen Jahren den **didaktischen Bourbakismus** nenne. Es ist längst erwiesen, dieser Weg ist manchmal sinnvoll, stets angewandt kommt es aber dann zu der Erscheinungsform, Lehrpläne durch Rahmenrichtlinien mit extrem geringen mathematischen Inhalten zu ersetzen, die in den Vorbereitungen des kindlichen Denkens stecken bleiben, aber auch ein Lehrplan nicht mehr durchführbar ist, weil von vornherein nicht abgeschätzt werden kann, welche Zeit das einzelne Kind benötigt, diesen Weg zu gehen. Jedenfalls aber muss dieser Weg hinsichtlich der Kinder mit sehr unterschiedlichen Befähigungen so langsam gegangen werden, dass das einzelne Kind nicht hinreichend viel Mathematik z. B. für das spätere Leben, vor allem Berufsleben, erfährt.

Vor der Vermittlung irgendeiner komplexen Rechnung glaubt man also dem Kind das *Denken* hinsichtlich Mathematik beibringen zu müssen, hierzu ist die Umgangssprache besonders zur Fachsprache zu formen, weshalb man glaubt, *Argumentieren* und *Diskutieren* unabhängig von den klassischen Sachinhalten lehren zu müssen, um schließlich dem kindlichen Vestand das *Mathematische* auseinanderzusetzen, also ganz äquivalent zu BOURBAKI, auch wenn der einzelne Didaktiker vermutlich diese sehr mathematischen Bücher selten gelesen hat.

Das alles geschieht ohne Nutzung mathematischer Anwendungen[3], weil man Angst hat, sich mit Anwendungen zu blamieren, da die Lehrer diese ja nicht studiert haben. Es fällt vor allem auf die Mathematikvorlesungen für Lehramtskandidaten zurück, in denen meist die Anwendungen ebenfalls zu kurz kommen.

An sich ist ja zunächst das Bemühen der Didaktiker, aus dem kindlichen Denken heraus so zur Mathematik zu kommen, dass das Kind die Mathematik selbstständig findet, äußerst lobenswert. Man übersieht aber dabei, dass die historische Entwicklung zum Teil Jahrtausende benötigte, was ein Kind jetzt innerhalb einer Schulstunde selbstständig – natürlich unter Anleitung eines Lehrers – finden soll. Ein Beispiel:

Schon immer hat die Menschheit Längen gemessen, aber erst im 20. Jahrhundert mathematisch das schon lange vorhandene Vorgehen verstanden. Heute nennen wir in diesem Zusammenhang den Satz des PYTHAGORAS, dessen Stellenwert erst im 19ten Jahrhundert durch das Finden der nichteuklidischen Geometrien erkannt worden ist und im 20sten Jahrhundert noch erhebliche Erweiterungen erfahren hat. Man kann aber doch von einem Kind, auch wenn man es an die Hand nimmt, nicht erwarten, dass es während einer Schulstunde einen 3000 Jahre langen Weg selbstständig findet. D. h. der Unterricht betrügt sich selbst, wenn er glaubt, in einer solchen Form unterrichten zu müssen, die man bestenfalls Suggestion nennen kann. Das Kind findet zwar scheinbar selbstständig einen solchen Satz, stellt aber 10 Jahre später fest, so ganz genau kennt es ihn doch nicht. So kommen dann auf die Frage nach diesem Satz Antworten zustande wie $a^2 + b^2 = c^2$, was doch nur sinnvoll ist, wenn man weiß und dann auch sagt, es handelt sich um die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und man sich an die Bedeutung der Buchstaben a, b, c erinnert, aber auch noch weiß, wozu man diesen Satz braucht.

Noch einmal zurück zu dem Bemühen ums Denken und um Exaktheit: Beides geschieht in der Mathematik anhand ihrer Inhalte. Auch in der Didaktik geht es ums Denken und um seine exakte Analyse, wobei beobachtet werden kann, dass sich die Lehrplanauswirkungen der Didaktik immer mehr um Lösungen ohne mathematische Inhalte bemühen. Man könnte hier vermuten, die Didaktik geht ergonomisch in dem Sinne vor, dass die Analyse des Denkens auch außerhalb der Mathematik eine Rolle spielt und solches auf dem eingeschlagenen Weg gleich mit erledigt wird. Kritiker wie etwa BENDER [1] nennen dies so: „Die Didaktik hat sich von der Mathematik wegentwickelt“. Schon deshalb wäre es klug, zukünftig bei der Richtungsdiskussion der Schule nicht mehr allzu viel Wert auf die Meinung der Didaktiker zu legen, denn sie beschäftigen sich ja, zumindest scheinbar, mit ganz anderen Dingen.

Noch immer ist bei den Lehrern Frontalunterricht verpönt, obwohl BAUMERT (siehe z. B. BRÜNING und SAUM [1]) wiederholt erklärt hat, dass Frontalunterricht an der Schule durchaus auch seine Berechtigung hat und nicht vergessen werden darf. Was ist gemeint?

[3] Wenn hier von Anwendung die Rede ist, wird nicht der Einsatz der Mathematik in der Schule gemeint, sondern die Dokumentation, wo Mathematik in den verschiedensten Lebensbereichen eine Rolle spielt. Dies wird vor allem durch Fächerübergriff hinsichtlich der Schulfächer aber auch außerhalb wie etwa Naturwissenschaften und Ingenieurwesen erreicht (siehe hierzu MEYER [3] und SCHMIDT [4]).

Früher hat der Lehrer an der Tafel die Theorie oder die Lösung eines Problems entwickelt und seinen Schülern gelegentlich diesbezügliche Fragen gestellt.
Übergang: Dann kam die Zeit, in der man in den Studienseminaren die angehenden Lehrer gezwungen hat, die gesamte Entwicklung der Theorie in eine vollständige Fragenkette zu verpacken. Schon hierbei ist übersehen worden, was oben im Zusammenhang mit dem Lehrsatz des PYTHAGORAS angedeutet worden ist: Man kann die Fragen einer 3000-jährigen Geschichte nicht in eine Fragenkette von 40 Minuten einbetten, ohne über Lücken hinwegzuschludern. Meine Arbeit mit Studenten zeigte mir aber immer wieder, dass sie sich genau diese Schludrigkeit der Schule erschreckend gut angewöhnt haben.
Heute im Zeitalter des Argumentierens und Diskutierens setzt man die Klasse an einen runden Tisch möglichst so, dass nur sehr wenige Schüler die Tafel sehen können. Man diskutiert – möglichst in Gruppen – mit dem Erfolg, dass für meinen Geschmack eine solche Unruhe im Klassenzimmer herrscht, dass der einzelne Schüler nur mit Mühen den Lehrer hören kann, dafür aber sehr einprägsam all die Fehler seiner Mitschüler vermittelt bekommt. Die erforderliche Konzentration ist eine enorme Anstrengung, die der Normalschüler kaum 5 Stunden lang durchhält und in Folge irgendwann nicht mehr aufpasst und das Unterrichtsgeschehen an ihm spurlos vorübergeht. Das geht so weit, dass sich manche Schüler zu Hause nicht einmal mehr daran erinnern können, welche Kapitel in den letzten Schulstunden gelehrt worden sind. **Dieser Unfug muss jedenfalls ein Ende haben,** wenn Schule überhaupt noch einen Sinn haben soll.

Bevor wir mit Obigem weitermachen, muss ich gestehen, dass auch andere negativen Einflüsse das Schulsystem vernichten:

- An erster Stelle ist hier die Art und Weise zu nennen, wie Mathematiker publizieren. Druckraum ist teuer, also muss die dargestellte Idee möglichst kurz gefasst werden. Alles scheinbar „Überflüssige“ wird weggelassen.
  Das Problem liegt aber noch tiefer: Nur ganz selten wird dargestellt, wie man zu dem neuen mathematischen Ergebnis gekommen ist, wo es angewandt werden kann und wo die Grenzen seiner Anwendung liegen. Leider wurden auch die noch halbwegs guten Schulbücher der 60er-Jahre so geschrieben.

- Die Mathematik des Einzelnen ist ein Netzwerk, das zunächst nicht alle Punkte enthält, die man braucht. Man kann aber das Netzwerk so einsetzen, dass man – um im Bild zu bleiben – jeden solchen Punkt durch Verfahren, Algorithmen, Strategien u. a. erreichen kann. V. GOETHE soll ja so weit gegangen sein, dass er hinsichtlich dieses Netzwerks sagte: „ Mathematik ist keine Wissenschaft, da sie nur aus Trivialitäten besteht“. Er hat dabei ganz übersehen, dass die eigentliche Schwierigkeit der Mathematik darin besteht, in diesem „Netzwerk“ Lösungswege – eben Strategien – zu finden. Also – so schließt die moderne Schule – verlangt Mathematik nicht nur Denken sondern auch das Finden von Strategien.
  Bei guten Schülern[4] und ebensolchen Lehrern sind deshalb mathematische Wettbewerbe sehr beliebt, man bemüht sich hierbei vor allem um das Auffinden von Lösungsstrategien. Dies schlägt sich auch beim „Normalschüler“, der nicht am Wettbewerb teilnimmt, durch bis hin zu den Ministerialbeamten, die beim Genehmigen von Lehrbüchern nicht so sehr auf Lehrtexte achten, sondern vor allem viele Aufgabenstellungen finden wollen. Lehrer und Ministeriale lieben zwar so genannte „komplexe“ Aufgaben, also solche, bei denen das Finden einer Strategie Probleme macht, bei denen der Lehrer nicht ohne Vorbereitung in den Unterricht gehen kann. Deshalb kann dieser Aufgabentyp nicht zu häufig vorkommen; viel häufiger wünscht der Lehrer sich einfache Aufgaben, wo nur das eben Gelehrte unmittelbar angewendet wird – und dann rasch vergessen werden kann.

- Man darf allerdings trotzdem nicht übersehen, wie Wettbewerbe mittlerweile die Schulentwicklung beeinflussen. Leider sind Wettbewerbsaufgaben für die Schulmathematik nicht flächendeckend: Ausgerichtet auf die internationale Situation erscheinen keine Aufgaben der Analysis, der Analytischen Geometrie und der Stochastik, wenn man einmal von Aufgaben der Kombinatorik absieht. Schwerpunkte der Wettbewerbe sind vor allem einfache elementare Zahlentheorie, Kombinatorik und einige geometrische Sätze, die in keinem Lehrplan stehen. Auch wenn man Kritik an diesem Verhalten übt, zeigt sich keine Änderung am Bisherigen. Man liebt eben seine Kiste mit bekannten Beispielen, die in Deutschland an der Schule seit 1900 nicht mehr gelehrt werden und kommt gleichzeitig auf die Gebiete der gymnasialen Oberstufe nicht zu sprechen, weil diese in USA und Asien nicht gelehrt werden. D. h. eigentlich muss ein Deutscher, der an einem internationalen Wettbewerb teilnehmen will, in den Klassen 5 bis 10, also in 6 Schuljahren das lernen, was in anderen Ländern in 8 oder sogar 9 Jahren gelehrt wird. Anwendungsaufgaben kommen nicht vor, da die Erfahrung zeigt, dass gerade diejenigen Schülerinnen

[4] Wenn hier der Lesbarkeit halber stets nur von Schülern die Rede ist, sind natürlich auch die Schülerinnen gemeint.

und Schüler, die die genannten Gebiete, die an deutschen Schulen nicht gelehrt werden, sich selbstständig aneignen, äußerst ungeschickt mit Anwendungen umgehen. Das ist wohl auch der Grund, dass manche Betriebe mehrfache Wettbewerbssieger ungern einstellen, weil sie Anwendungen scheuen und darüber hinaus als geschulte Einzelkämpfer für Teamwork ungeeignet sind.

Dies hat zur Folge, dass sich die „guten", lernbereiten Schüler vor allem im Lösen von schwierigen Problemen weiterbilden und doch für ein Mathematik anwendendes Studium und Beruf – außerhalb der eigentlichen Mathematik – nur bedingt geeignet sind, da ihnen auch wichtige Theorien (z. B. umfassende Trigonometrie, elementare Theorie der Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung, Eigenschaften des Logarithmus, Zurückführung der Raumgeometrie auf Sätze der ebenen Geometrie, händisches Integrieren u. v. m.) fehlen. Erschwerend kommt bei Wettbewerbssiegern hinzu, dass sie auf Grund ihrer eigenen Erfolge nicht glauben können, dass es wichtige für sie unbekannte mathematische Theorien geben kann. Dies mag auch eine Folge davon sein, dass sich immer weniger Lehrer in ihrer eigenen Ausbildung damit befassen.

1.3 Andere Einflüsse

Verzeihen Sie mir, wenn ich nun vielleicht auch meinen Zuhörern eine Teilschuld zuschreibe: Immer wieder hört man Ingenieure, auch leitende, sagen: Mathematik spielt im Ingenieurwesen keine Rolle. Braucht ein Ingenieur Mathematik, so nimmt er ein Buch, liest nach und wendet an. Diese Meinung vertritt auch der Verein Deutscher Ingenieure (VDI), eine gewaltige, einflussreiche Organisation. Ingenieure wollen vor allem ein Fach Technik an der Schule einrichten, am liebsten wöchentlich 4-stündig über 8 Schuljahre hinweg. Bei solchen Ambitionen macht man nichts anderes als Politische Parteien, die Sozialkunde und Wirtschaftswissenschaften eingeführt haben und bei den Fächern Umwelt- und Friedenskunde gescheitert sind, und solche, die noch weitere Pflichtfremdsprachen sehen möchten.
Sie alle übersehen, dass dies stets auf Kosten der Wochenstundenzahl der wichtigen Kernfächer Deutsch, Englisch und Mathematik geht.

Es gibt auch eine Reihe von Argumenten, die immer wieder gesagt werden, obwohl sie nicht maßgebend sind:

- Die Gesellschaft braucht mehr Akademiker und damit mehr Reifeprüflinge, fachgebunden oder nicht. Es ist deshalb gut, wenn immer mehr Eltern ihre Kinder auf eine weiterführende Schule schicken. Vor allem Lehrer sehen als Ursache für den Umstand, immer weniger in der einzelnen Stunde unterrichten zu können darin, dass heute wesentlich mehr unbegabte Kinder als vor 10 Jahren ein Reifeprüfungszeugnis erreichen wollen. Diese Argumentation ist falsch, da sich seit 1995 z. B. laut SZ [1] die Gymnasiasten in Deutschland nur von 2,2 auf 2,5 Millionen erhöht haben, also um weniger als 14%. 1995 wurde aber an den Gymnasien in allen Bundesländern noch erheblich mehr als heute gelehrt.

- Eine Kollegin jammerte schon 1980 über das Fernsehen. Sie fühle sich mit ihrem Unterricht in Konkurrenz zum Fernsehen und könne deshalb vor allem am Montag kaum etwas unterrichten, da sie die Dinge nicht mit dem aus dem Fernsehen am Wochenende gewohnten Aufwand bieten könne. Also, ich fühlte mich in Mathematik keineswegs durch ein Fernsehen behindert. Der Didaktik muss man hier den Vorwurf machen, keine geeigneten Abhandlungen publik gemacht zu haben, die zeigen, wie man auf der einen Seite Fernsehen im Unterricht einsetzt, aber auch abgrenzt, und wo man Eltern und Schüler über einen sinnvollen häuslichen Einsatz aufklären muss und wo man es nicht braucht.

- Eltern haben heute viel häufiger als früher Angst, dass ihre Kinder zu viel lernen müssen. Ihnen scheint nicht der Slogan eines „lebenslangen Lernens" bekannt zu sein. Lernen heißt natürlich auch wiederholen, dessen Einhaltung dann nicht nur Pflicht der Eltern sondern auch des Lehrers ist. Aber was hilft es, wenn der Lehrer etwa als Hausaufgabe eine Sache zweimal zu lesen aufgibt, wenn die Schüler in Klasse 5 noch so schlecht lesen, dass sie bestenfalls beim zweiten Mal den Text halbwegs flüssig lesen können und ihn damit immer noch nicht verstanden haben. Besser wäre, wenn der Lehrer gesagt hätte: „Lest den Text so oft, bis ihr ihn verstanden habt."
  Übrigens ist die Angst vor dem Lernen in der Schule nicht neu; so schrieb der Frankfurter Arzt LORINSER schon 1836 eine Abhandlung „Zum Schutze der Gesundheit in den Schulen" contra Schulmathematik (siehe FRANZ PAHL [1] bzw. KATJA KRÜGER [1]). Die Redensart „Mathe macht krank" ist also schon ziemlich alt.

- Oder, was mir selbst etwa 1980 in meiner Sprechstunde ein Schülervater erzählte: „Ich habe meinem Sohn erklärt, wenn er jetzt auf das Gymnasium geht, kommt es vor allem auf sein Durchsetzungsver-

mögen an. Jedes Mittel ist hierbei erlaubt.“ Der Sohn hatte sich dann nicht nur als Abschreiber spezialisiert sondern auch als Schläger.

2. Was kann man ohne zu großen Aufwand zunächst verbessern

Das bisher Dargestellte entspricht dem heute immer öfter zu hörenden Gejammere. Ich will es nicht dabei belassen, auch wenn mir klar ist, das Fahrzeug Schulsystem ist seit langem im Morast stecken geblieben, aus dem es nicht so leicht herausgefahren werden kann. Da die Misere zu vielfältig ist, weiß man gar nicht, wo man den Hebel ansetzen soll. Macht man einen Vorschlag zur Verbesserung, dann fallen mehrfach Leute über einen her und setzen auseinander, ja das sei ja alles recht und schön, aber man müsse auch an dies und jenes denken, was noch viel bedeutsamer sei. Dieses Verhalten ist bei Lehrern, Didaktikern, Hochschullehrern, Psychologen, Pädagogen, Ingenieuren oder anderen zu beobachten. Man hat wieder einmal einen Vorschlag ausgehebelt und alles bleibt beim Alten.

Meine folgenden Vorschläge möchte ich bescheiden nennen, sie aber trotzdem aufzählen, um einen Anfang zu machen.

2.1 Aufklären

Zuletzt war oben von den Ängsten der Eltern die Rede. Man sollte sie ihnen nehmen. Hierfür gibt es in allen Bundesländern Möglichkeiten, z. B. Klassenelternabende, bei denen man darüber reden kann, wie sich heute das Gymnasium und adäquate Schulen bemühen, kindgerecht (was immer das sein mag) den Unterricht zu gestalten, wie man angepasst ans Lerntempo der Grundschule allmählich dieses bis hin zum Vorlesungsniveau der Hochschule steigert. Das einzelne Kind wird nicht immer den gerade gestellten Forderungen gerecht. Man geht aber von einer Bandbreite des Entwicklungsstandes aus und wird das „hängen gebliebene“ Kind zu fördern wissen – auch im Normalunterricht, aber auch durch Zusatzeinrichtungen, wie sie in nahezu allen Bundesländern heute vorgesehen sind. Der einzelne Lehrer wie auch die Klassengemeinschaft werden selbst im Krankheitsfall behilflich sein.

Trotz allem aber bleiben das Gymnasium und hoffentlich auch die adäquaten Schulen Ausleseschulen. Sollte das weitere Vorrücken nicht gewährleistet sein, so gibt es für das einzelne Kind andere Bildungsmöglichkeiten und Eltern wie Kind finden diesbezüglich intensive Beratung, auch durch Psychologen.

Das Lernniveau wird auf der weiterführenden Schule gegenüber der Primarstufe gesteigert. In Mathematik wird es hierbei zunächst um den Aufbau einer Fachsprache gehen, deren Fachausdrücke allmählich soweit eingeführt werden, wie dies hinsichtlich der Schulmathematik erforderlich ist. Es geht aber auch darum, dass Schüler z. B. Verfahren wie etwa den Divisionsalgorithmus gut beherrschen, was allerdings nur dann möglich ist, wenn das Einmaleins sitzt.

Das Auswendig-lernen wie beim Einmaleins ist von der Aufnahmefähigkeit zunächst vom Kurzzeitgedächtnis und dann nach geeignetem Wiederholen auch vom Langzeitgedächtnis abhängig. Anfangs wird es Schwierigkeiten geben, aber dieses **algebraische Merkgedächtnis** muss durch Schulung gebildet werden, sonst kann man keine Mathematik machen. Will man z. B. hinsichtlich eines Erfordernisses einen komplizierten Bruch vereinfachen, so muss man gleichzeitig die Möglichkeiten, die man zur Umformung kennt und die dazu denkbaren Ergebnisse im Gedächtnis haben, um die passende Umsetzung zu rechnen. Das erfordert Schulung, die der Lehrer quasi in passenden Dosen ins Spiel bringt. Das Kind ist nur dann damit erfolgreich, wenn es bereits über ein geschultes Zahlgedächtnis verfügt, und so muss auch der Schüler des 21. Jahrhunderts noch Kopfrechnen lernen, damit er ein algebraisches Merkgedächtnis bekommt, um etwa die folgende halbschriftliche Rechnung aus KRÄMER und MEYER [5] auszuführen:

$$\frac{(-5)^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 2^6 \cdot 2^2 \cdot 5^0}{10^3 \cdot (-2)^4 \cdot 5^{-3}} = -2^{-3} \cdot 5^7 = -9765{,}625$$

Sicher benötigt dieser Weg weniger Zeit als das Eintippen des gegebenen Terms in den Taschenrechner; außerdem ist er genauer, da jeder Einzelschritt im Rechner fehlerbehaftet ist: Eine kurze Rechnung ist genauer als eine lange.

Gedächtnisschulung sollte aber nicht nur im Mathematikunterricht stattfinden, hierzu müssen auch die anderen Schulfächer mithelfen durch Gedichte-lernen u. v. m.; fehlt dies, ist der Mathematiklehrer allein gelassen. HERGET U. A. [1] aber auch andere haben ja äußerst intensiv nachgefragt, ob im Zeitalter der Taschenrechner überhaupt dies alles noch erforderlich ist. Ich glaube schon, wie KRÄMER und MEYER in [5] gezeigt haben.

2.2 Überflüssiges in den Lerninhalten weglassen!

Die moderne Gesellschaft macht das doch gerade und wird deshalb in Kapitel 1 kritisiert und jetzt ist es trotzdem wichtig? Nun, es sieht so aus, dass Ministerien zusammen mit Lehrern und Didaktikern gerade in der jüngsten Vergangenheit Inhalte aus den Lehrplänen gestrichen haben, die vor allem die Abnehmer der Schulabsolventen heute an ihnen vermissen. Hierzu ist ein interessantes zu beobachtendes Phänomen nicht unwesentlich:

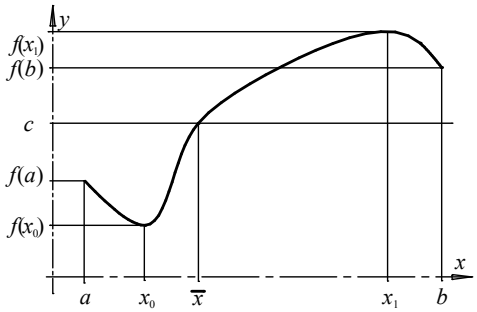
In einer kleinen Studie konnte 2007 Begabtenförderung Mathematik e. V. (siehe MEYER [3]) feststellen, dass sich die meisten Lehrer aller Bundesländer *nicht* für die Erwartungen der Abnehmer der Schulabgänger interessieren und deshalb auch kaum über einschlägige Kenntnisse verfügen. Zugegebenermaßen ist es nicht einfach, solche Kenntnisse zu erwerben, und schon damals habe ich empfohlen, dass Ministerien und Staatsinstitute verpflichtet sind, ihren Mitarbeitern, eben den Lehrern, regelmäßig Übersichten über die Erwartungen der einzelnen Berufe zusammenzustellen, regelmäßig deshalb, da sich diese immer wieder ändern, wie etwa beim Medizinstudium, in dem man heute z. B. Stochastik-Kenntnisse vor dem so genannten 3. Staatsexamen erwartet.

Gerade Lehrer des Schulfaches Mathematik unterliegen durch ihr Studium der Mathematik der Gefahr, einen zu sehr an den Belangen der Wissenschaft Mathematik ausgerichteten Unterricht anzustreben. Dabei ist doch bekannt, dass Mathematik-Anwender wie Ingenieure, Naturwissenschaftler, also auch Mediziner, unter ganz anderen Aspekten an „ihre Hilfswissenschaft“ Mathematik herangehen. Es kann doch nicht sein, dass der kleine Kreis von wissenschaftlichen Mathematikern bestimmt, was an allgemeinbildenden Schulen für alle zu geschehen hat.

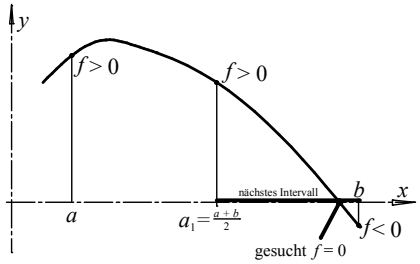
Das Problem ist eben nur, dass die Hochschullehrer recht gut ihren Studenten vermitteln, was sie unter dem „Mathematischen“ verstehen, aber andere Einstellungen hierzu Lehrern nicht bekannt werden. Das ist vielleicht auch der Grund, dass so viele Ingenieure glauben, weitab von der Mathematik zu sein.

Ein hervorragendes Beispiel dafür, wie man es besser machen kann, haben MEYBERG und VACHENAUER in ihrer „Höheren Mathematik“ geschaffen. Sie haben nicht alle Sätze formal bewiesen, sondern vor allem dort, wo der Sachverhalt aber auch der Beweis durch eine Skizze dem Studenten nahegebracht werden kann (wie etwa bei den Mittelwertsätzen), den Beweis wegzulassen um Zeit für Anwendungen, auch technischen, zu bekommen. So schreiben z. B. MEYBERG und VACHENAUER in [1] auf den Seiten 108 und 109:

„Satz 6.5. Für jede auf einem abgeschlossenen Intervall $a \le x \le b$ stetige Funktion f gilt: ……
c) Zwischenwertsatz: Zu jeder Zahl c zwischen dem Minimum $f(x_0)$ und dem Maximum $f(x_1)$ (d. h. $f(x_0) \le c \le f(x_1)$) gibt es wenigstens ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = c$.“
„Der Beweis dieses …. so einleuchtenden Satzes (Red.: siehe die nebenstehende Zeichnung) ist nicht so einfach; er benötigt wesentlich das Vollständigkeitsaxiom und andere hier nicht behandelte Eigenschaften der reellen Zahlen (Satz von der Intervallschachtelung). Wir lassen ihn aus.“



Dann folgt:
„**Satz 6.6.** $f(a)f(b)$-**Nullstellen-Test. a)** Ist f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen (…), dann gibt es wenigstens eine Nullstelle $\bar{x}$ im Innern von $[a, b]$ …..“



Dieses Vorgehen schafft in der Vorlesung Platz für Wichtigeres, zumindest aus Sicht der angehenden Ingenieure, z. B. das **Bisektionsverfahren,** mit dem man eine solche Nullstelle finden kann. Ja, es wird bei MEYBERG, VACHENAUER hierfür sogar ein PASCAL-Programm angegeben.
Unter den dann folgenden Übungsaufgaben findet man den Unterschied zwischen der Klemmenspannung einer Gleichspannungsquelle und der dortigen Spannung bei Vorhandensein eines (endlichen) Außenwiderstands neben den üblichen Übungsaufgaben für die „Höhere Mathematik“.

Man muss also das Richtige im Lehrplan streichen. Dabei sollte es aber doch beim Terminus Lehrplan bleiben, der festsetzt, welche Kenntnisse und Fähigkeiten in welcher Klasse für welche Schüler wann zu behandeln sind. Konkrete Vorschläge hierzu will ich nicht machen, weil ich nur über einen kleinen Teil von akademischen Berufen Bescheid weiß wie Ingenieure, Physiker, Chemiker, vielleicht noch theoretische Biologen. Immerhin wären das etwa 33% der von Abiturienten ergriffenen Berufe, Tendenz steigend. Aber gerade hinsichtlich der oben beschriebenen Ängste der Eltern ist es durchaus eine berechtigte Frage, ob eine Klasse „so viel" Mathematik lernen soll, nur weil ein Drittel einschlägige Berufe ergreifen will oder auch soll. Begabtenförderung Mathematik e. V. hat deshalb in einem Schreiben an alle Kultusministerien und Generalsekretäre der demokratischen Parteien in Deutschland empfohlen, wieder so genannte „Oberrealschulen" einzurichten mit gediegenen Lehrplänen in Mathematik, Physik und Chemie. Hierzu wären allerdings andere Stundentafeln erforderlich mit einer 5-stündigen Mathematik in der Sekundarstufe I und einer u. U. 8-stündigen Mathematik in Sekundarstufe II. Diese Erweiterung ist nur möglich, wenn die Fremdsprachen auf höchstens zwei reduziert werden und auch andere Beschränkungen durchgeführt werden. Nur wenige Ministerien bzw. Generalsekretäre haben geantwortet und dann meist beschönigt, wenn sie behaupteten, durch die jüngsten Einrichtungen der Kompetenzen und Standards werde ohne weiteres Zutun alles besser.

2.3 Erforderliches dem heutigen Lehrplan hinzufügen!

„Was ist eine Zahl, was *ist* insbesondere die Eins oder die Null", sind sicher Fragen, die philosophisch von Interesse sind, aber weniger die Mathematiker und die Anwender der Mathematik interessieren, da für sie von Bedeutung ist, was man mit Zahlen *machen kann*.

Genauso verhält es sich bei den Fragen nach dem Sosein eines Punktes, einer Geraden u. a. Was gerichtete Winkel sind – und vor allem, weshalb alle Winkel gerichtet sind, – habe ich erst bei den Didaktikern erfahren; weder im Studium und der anschließenden Berufspraxis in Mathematik und Physik noch in der Forschung in moderner Geometrie habe ich sie gebraucht. Müssen sie dann wirklich im Schul-Unterricht präsent sein?

Viel wichtiger wäre es, wenn man wieder anständig Trigonometrie und nicht nur die trigonometrischen Funktionen ohne ihre Umkehrungen lehren würde. Es ist doch ein Unding, dass kein Reifeprüfling mehr einfache goniometrische Gleichungen lösen kann, weil in aller Regel hierzu Additionstheoreme erforderlich sind. Gerade die Entwicklung der deutschen Lehrpläne in diesem Punkt ist ein Witz:

Zuerst hielt man Additionstheoreme für so wichtig, dass der Schüler sie alle auswendig hat lernen müssen. Heute steht man auf dem Standpunkt, dass Additionstheoreme in jeder Formelsammlung zu finden sind und deshalb nicht mehr gelehrt werden. Man vergisst, dass ein Schüler, der von ihnen nie etwas gehört hat, kaum beim Faktorisieren von $\sin\alpha + \sin\beta$ auf die Idee kommt, in seiner Formelsammlung unter den Buchstaben A zu suchen, um das Ergebnis $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ zu finden. Hiermit kann man nun zum Beispiel die folgende „goniometrische Gleichung" lösen:

$\sin\alpha + \sin\beta = 0$
$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$ also $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$ oder $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$
Im ersten Fall ist also $\frac{\alpha+\beta}{2} = k\cdot\pi$ mit ganzzahligem k und damit $\alpha + \beta = 2k\pi$ usw.
Im zweiten Fall ist also $\frac{\alpha-\beta}{2} = k\cdot\pi$ mit ganzzahligem k und damit $\alpha - \beta = 2k\pi$ usw.

Ein weiteres Beispiel:

Aufgabe (siehe HEMME [1])*:* In einem Labor wird ein laufender Viertaktmotor untersucht. Mit einer Sonde können gleichzeitig der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens gemessen werden. Beim Einschalten der Sonde (Zeit $t = 0$) stellt man fest, dass zu diesem Zeitpunkt der Kolben gerade **5 cm unterhalb** seiner Mittelstellung im Zylinder ist, dass er sich mit einer Geschwindigkeit von **20 m/s nach unten** bewegt und dass er mit **2000 m/s² nach oben** beschleunigt wird. Die Bewegung des Kolbens kann durch eine harmonische Schwingung beschrieben werden. Die Koordinatenachse zeigt nach oben.

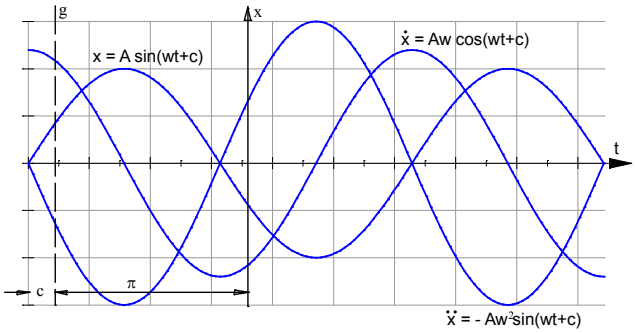
a) Welche Kreisfrequenz ω hat der Motor?
b) Welche Phasenkonstante c hat der Motor?

Lösung: $A > 0$ I Ortsbeschreibung $x = A\sin(\omega t + c)$
II Geschwindigkeit $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + c)$
III Beschleunigung $\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + c)$
Nach den Angaben der Aufgabe folgt hieraus für $t = 0$:
I – 0,05 m = $A\sin c$
II – 20 m/s = $A\omega\cos c$
III 2000 m/s^2 = $-A\omega^2\sin c$

Hieraus folgt: III:I $-40\,000\ \mathrm{s}^{-2} = -\omega^2$, also $\omega = 200\ \mathrm{s}^{-1}$, also 200 Umdrehungen pro s.
I:II $\frac{-0{,}05\ \mathrm{m}}{-20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{1}{200\ s^{-1}}\tan c$, also $\tan c = 0{,}5$ oder $c = \tan^{-1} 0{,}5 = 0{,}4636.. \approx 0{,}46$.

Nimmt man diesen berechneten Wert c, so ergibt sich die Gerade g als x-Achse. Das kann nicht sein, da die Vorzeichen von $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ nicht passen. Die Funktion arc tan als Umkehrung der Funktion tan hat aber nicht nur den 1. Hauptwert, sondern noch andere. Der Graphik entnimmt man, dass $c + \pi$ passt.

Die Amplituden in der nebenstehenden Zeichnung sind willkürlich.



Diese Aufgabe macht deutlich, dass schon einfache Probleme Kenntnisse über die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen erforderlich machen. Die Computerlösung wäre also falsch. Die heute von Lehrern und Didaktikern vertretene Meinung: „Wir schaffen solches an der Schule nicht mehr. Wenn immer noch einige Hochschullehrer glauben, Trigonometrie in ihren Vorlesungen zu benötigen, dann müssen sie eben dieses Fach selbst lehren“, ist Unsinn. Denn jedes Studium – auch an den Fachhochschulen – soll an die Forschung heranführen, wie soll das mit einer Regelstudienzeit von 8 bis 12 Semestern möglich sein, wenn sich zukünftig das Studium im Bachelorteil mit Trigonometrie und all dem, was man an Schulen glaubt nicht mehr machen zu können, befassen muss, vielleicht auch mit dem Kopfrechnen? Die Regelstudienzeit zu verlängern wäre auch Unfug, da so die Jungakademiker immer älter werden und international nicht mehr in Konkurrenz treten können.

Man wird also nicht umhin kommen, Gespräche mit den Abnehmern der Schulabsolventen zu führen, um herauszubekommen, was vorhanden sein muss, wie ich in vielen Publikationen (siehe MEYER [1] bis [4] und weiteren) in der Zeitschrift „Mathematikinformation“ immer wieder dargestellt habe.

2.4 Hierarchie der Vorgesetzten

Für Nicht-Lehrer ist es unverständlich, dass es Bundesländer gibt, in denen auf 2 400 Lehrer *ein einzelner Fachvorgesetzter,* der zuständige Ministerialrat, kommt. Es gibt zwar Fachbetreuer in Mathematik an jedem Gymnasium, aber diese Leute sind nicht „weisungsbefugt“, d. h. sie geben Ratschläge, die sich der untergebene Kollege anhören aber nicht ausführen muss.

Nun haben die Didaktiker an Hochschulen und anderswo auch gute Vorschläge für die Schule gemacht – und ich hoffe, dass ich das in Kapitel 1 deutlich werden ließ –, und sie lehren dies auch den nachfolgenden Studentengenerationen, aber man darf hierbei nicht übersehen, dass in aller Regel bei einem Fachbereich Mathematik von bis zu 14 Kolleginnen und Kollegen 20 Jahre benötigt werden, um das Kollegium als Ganzes zu erneuern. In Anbetracht des Umstandes, dass gerade diese Zeitspanne gegenüber dem Wechsel in der Mode der Didaktik lang ist, folgt eine weitere Ursache, dass sich didaktische Ideen *nicht* an die Schule fortpflanzen können, wenn nicht der Staat dafür Sorge trägt, eine hierfür geeignete Hierarchie zu schaffen. D. h.: Die Fachbetreuer müssen weisungsbefugt werden; u. U. umfasst die Tätigkeit eines zukünftigen Fachbetreuers mehrere benachbarte Gymnasien. Vor solchen Vorgesetzten – unterhalb des Schulleiters angesiedelt – fürchten sich die Lehrer, da sie glauben, dass heute der (vor allem beamtenrechtliche) vorgesetzte Schulleiter den einzelnen Fachlehrer nur unter dem Aspekt der Beurteilung sieht; man vermutet, dass dies bei weisungsbefugten Fachbetreuern nicht anders sein wird. Lehrer sind gar nicht gewöhnt, Vorgesetzte als verantwortliche Betreuer zu sehen. Fachliche Beratung, was man verbessern könnte, wie man mit weniger Härte durchaus anspruchsvolle Prüfungen halten kann, ist ungewohnt.

Diesem Vorschlag scheint z. B. das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus sehr positiv gegenüberzustehen, aber man stellt dort auch fest, dass im Moment (seit 20 Jahren?) nicht genug qualifizierte Fachbetreuer für ca. 350 Gymnasien gefunden werden können, um solche Stellen sinnvoll zu besetzen. Ich frage mich nur, weshalb man nicht z. B. die Qualifizierungsmaßnahmen zum Oberstudiendirektor in Baden-Württemberg als Vorbild nehmen kann, um Analoges für Fachbetreuer aufzubauen.

2.5 Stilwechsel

Das Vorstehende zeigt, dass die Zeit, in der ein Lehrer allein hat bestimmen können, was im Unterricht geschieht, endgültig vorbei ist. Schon im Studium hat er sich neben seinen zwei Pflichtfächern für anderes zu interessieren, um dann im Beruf den Fächerübergriff, also die Beziehungen zu anderen Wissenschaften, zu pflegen. In diesem Zusammenhang ist allerdings auch unverständlich, wenn sich Lehrer weigern, englische Text zu lesen.

Die Verantwortlichen – noch besser alle Lehrer – sollten das Gespräch mit den Abnehmern ihrer Schüler suchen und das, was man dabei lernt, zukünftig berücksichtigen. Das betrifft nicht nur Studienrichtungen sondern auch zum Abschluss der Jahrgangsstufen 9 bzw. 10 den Übergang in Handwerks- und Facharbeiterberufe.

In diesem Zusammenhang sind auch laufende Kontakte mit den Grundschullehrerinnen und den Hochschullehrern erforderlich. Nach 30-jähriger Berufsausübung reicht nicht mehr die Erinnerung an die eigene Schulzeit und ans Studium. Lehrplanverschiebungen zwischen Grundschule und Gymnasium sind nur in Absprache sinnvoll, wenn man Zeitvergeudung vermeiden will.

Lehrer brauchen in ihren Schulen Handbibliotheken nicht nur aus Schulbüchern sondern auch wissenschaftlicher Literatur, die sie bei Bedarf lesen sollten.

Der Stil der Jahresberichte an den Schulen ist wieder dahingehend zu ändern, dass dort wissenschaftliche Abhandlungen des Lehrpersonals zu finden sind und nicht nur für Eltern und Schüler nichtssagende Statistiken. Überhaupt bin ich der Meinung, ist es wichtig, Lehrer wieder dazu zu bringen, Fachvorträge auf verschiedensten Ebenen zu halten und gelegentlich besonders gelungene zu publizieren. Seit 1998 bemüht sich um diesen Punkt Begabtenförderung Mathematik e. V. mit seinen Jahrestagungen, Foren genannt, die sie jeweils jährlich gemeinsam mit den Mathematikern einer Universität oder Hochschule veranstalten. Seit 1981 bemühe ich mich in der Zeitschrift „Mathematikinformation“ Lehrer zum Publizieren zu bringen aber auch Hochschullehrern auseinanderzusetzen, wie Publikationen beschaffen sein müssen, damit Lehrer bereit sind, sie zu lesen.

2.6 Differenzierung des Unterrichts

Trotz aller Bemühungen muss man einsehen, in Zukunft wird kaum noch ein „Gymnasialprofessor“ Hochschullehrer, auch wenn er regelmäßig publiziert. Auch sind die Zeiten des HUMBOLDTschen Gymnasiums vorbei, wo angeblich nur Hochbegabte dem Unterricht des „Gymnasialprofessors“ lauschten; vielleicht erwartete man damals von ihnen nicht mehr.

Unsere Gesellschaft benötigt heute mehr Akademiker als im 19ten Jahrhundert. In Folge wird es große Unterschiede in der Leistungsfähigkeit der einzelnen Schüler geben, über die man nicht einfach hinwegsehen kann; das lassen sich Schüler und Eltern – mit Recht – nicht mehr gefallen. D. h. der Lehrer muss seinen Unterricht binnendifferenzieren, also in *einem* Zimmer der Klasse verschiedenen Unterricht geben.

Die Industrie bietet ja bereits hierfür eine Rahmensoftware an (siehe CHRISTIAN CZAPUTA [1]). Das reicht aber nicht, denn der praktizierende Lehrer verfügt nicht über die Zeit, ein Lehrplanthema für nur zwei verschiedene Leistungsgruppen zu entwerfen. Hier sind die Didaktiker aber auch Staatsinstitute und andere gefordert.

Ich stelle mir vor, dass man z. B. die guten Schülerinnen und Schüler in einer Ecke des Klassenzimmers ein Arbeitsblatt ausführen lässt und als Hausaufgabe hierzu Musterlösungen austeilt, damit die Schüler ihre in der Schule gefertigten Lösungen kontrollieren können. Man möge sich hierzu meinen Vorschlag MEYER: „Komplexe Zahlen“ [4] ansehen und mir seine Meinung u. U. als Leserbrief zuschicken. Man wird allerdings auch nicht umhinkommen, gelegentlich diesen guten Schülern eine Extrastunde zu geben. Das ist durchaus möglich, wenn die Bundesländer eine Notverordnung etwa aus dem Jahre 1923 aufheben und das Stundenmaß für Gymnasiallehrer wieder auf 18 Stunden zurücksetzen, wie dies damals bei einer 54-Stunden-Arbeitswoche üblich war. Die

Argumentation, hierzu fehlt es an Lehrern, zählt nicht mehr, wenn die Bundesländer im Rahmen ihrer Verordnungen, aber auch Presse und Gesellschaft mit der Diskriminierung des Lehrerstandes aufhören.

Das folgende Beispiel aus MEYER [4] zeigt für eine Binnendifferenzierung u. a. die folgende Aufgabe: „Bestimme die Lösungsmenge L in der Grundmenge $\mathbb{R}$."

Während Gruppe A an der Tafel „Normalunterricht" bekommt, erhalten die „besseren" Schüler ein Arbeitsblatt (siehe Gruppe B), das eine erheblich schwierigere Fallunterscheidung beim Lösen erforderlich macht.

Gruppe A:

$$\frac{x+7}{x+3} = \frac{2x+13}{2x+5} \qquad (1)$$

Lösung:

$(x+3)(2x+5)$ ist der Hauptnenner.

$D = \mathbb{R}\setminus\{-3; -\frac{5}{2}\}$. Aus (1) folgt in D:

$$(x+3)(2x+5) = (2x+13)(x+3)$$

Äquivalenzumformungen:

$$2x^2 + 11x + 15 = 2x^2 + 19x + 33$$
$$-8x = 18$$
$$x = -\frac{9}{4} \in D$$

Deshalb ist $L = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$.

Gruppe B: .... in Abhängigkeit vom Parameter e.

$$\frac{e+2}{3x+e} + \frac{e-3}{3x-e} = \frac{6e^2-8e}{9x^2-e^2} \qquad (1)$$

Lösung:

$(3x+e)(3x-e) = 9x^2 - e^2$ *ist der Hauptnenner.*

$D = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{e}{3}; \frac{e}{3}\}$. *Aus (1) folgt in D:*

$$3xe - e^2 + 6x - 2e + 3xe + e^2 - 9x - 3e = 6e^2 - 8e$$

Äquivalenzumformungen

$$6xe - 3x + 5e = 6e^2 - 8e$$
$$3x(2e-1) = 3e(2e-1)$$
$$x(2e-1) = e(2e-1) \qquad (2)$$

1. Fall: $2e-1 \neq 0$, *also* $e \neq 1:2$ $x = e$		*2. Fall* $2e-1 = 0$, *also* $e = 1:2$ *(2) lautet hier* $x \cdot 0 = 0$; *also:* $L = D = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{e}{3}; \frac{e}{3}\}$
Für $e \neq 0$ *ist* $x \in D$, *also* $L = \{e\}$.	*Für* $e = 0$ *ist* $x \notin D$, *also* $L = \emptyset$.	

Nach dem Unterricht erhalten dann die guten Schüler ein Arbeitsblatt mit der hier dargestellten Lösung der Gruppe B und der Aufforderung, zu Hause ihre Rechnung damit zu kontrollieren. Die hier gezeigte Unterrichtsvorbereitung umfasst etwa 10 bis 15 Minuten des Unterrichtsgeschehens. D. h. der Gesamtvorbereitungsaufwand in diesem Stil würde wöchentlich ca. 60mal größer sein.

Solche Dinge für den Unterricht vorzubereiten, stellt also einen nicht unerheblichen Arbeitszeitaufwand dar. Man kann nicht erwarten, dass der im Klassenzimmer praktizierende Lehrer über die hierfür erforderliche Zeit verfügt. Helfen Sie deshalb alle mit, möglichst rasch den Lehrern einschlägige Vorschläge zusammenzustellen.

2.7 Disziplin

Den Vorschlag 2.6 habe ich vor kurzem einem alten Oberstudiendirektor aus Niedersachsen erzählt. Er schlug nur die Hände über dem Kopf zusammen und stöhnte „unmöglich". Er glaubt, hinsichtlich der vielen Arbeitszeit aber auch hinsichtlich der daraus entstehenden nervlichen Belastung können Lehrer nie mehr solch einen entscheidenden Schritt wagen.

Man möge mir verzeihen, wenn ich anderer Meinung bin:

Wie laut es heute in so manch einem Klassenzimmer dank der „schöpferischen Unruhe" der Schüler zugeht, ist skandalös. Disziplin-halten ist nicht nur eine Sache der Schule, das hat auch etwas mit Manieren und gutem Ton zu tun. Auch in den Werkshallen der Industrie kann nicht jeder Arbeiter das ohnedies u. U. laute Getöse der Maschinen aus Spaß an der Freud laufend durch eine schreiende Unterhaltung mit den Nachbarn noch unangenehmer werden lassen. Sicher, man flüstert dem Nachbarn schon einmal etwas zu, aber man weiß auch, dass dies nicht zur Sache gehört.

Schon am Anfang dieses Artikels habe ich geschrieben, dass die Mode, die Schultische zu einem Kreis oder in U-Form zu stellen und dann zu unterrichten, Unfug ist, da kaum ein Schüler halbwegs senkrecht an die Tafel

sehen kann, wo u. U. eine geometrische Konstruktion abzuzeichnen ist. Wie sollen die armen Schüler die rechten Winkel oder die Parallelitäten erkennen, wenn sie alles verzerrt sehen?

Von den schönen Didaktikvorschlägen mancher Kollegen in diesem Zusammenhang halte ich nicht viel: Wie soll das ablaufen, wenn die folgende Unterrichtsreihenfolge für etwa 45 Minuten vorgeschlagen wird:

- Zuerst kommen 5 Minuten Tafelunterricht mit Hausaufgabenbesprechung,
- dann folgt etwa 10 Minuten Frontalunterricht, also durch dozieren, die Darstellung eines Problems.
- Das gestellte Problem wird in der „Runde“ (s. o.) etwa 15 Minuten lang durch Diskutieren und Argumentieren gelöst.
- Jede Gruppe stellt jetzt an der Tafel ihre Lösung vor; Dauer etwa 10 Minuten. Wahrscheinlich werden hierzu die Tische wieder zum Frontalunterricht umgestellt oder meint man, dass es genügt, wenn ein paar Schüler dem Lehrer ihre Lösung an der Tafel zeigen und alle anderen dürfen währenddessen Unsinn machen?
- Schließlich endet die Stunde mit Frontalunterricht, wenn der Lehrer die nächste Hausaufgabe erläutert.

Das klingt in einem Vortrag, u. U. mit Videounterstützung prima, aber wenn man das Tische-rücken praktizieren will, geht zu viel Arbeitszeit verloren.

Disziplin ist auch noch etwas anderes, wenn es um die Disziplin des Lehrers geht:

Viele Lehrer jammern, dass zu viel Zeit sowohl in der Schule wie auch zu Hause mit Verwaltungsaufgaben verloren geht. Hier muss man zunächst einmal feststellen, dass beim Verwalten – in verstärktem Maße beim Vorbereiten und Reparieren der Rechner – wirklich oft ungeschickt vorgegangen wird. Kein Wunder, denn kein Lehrer wurde hierfür ausgebildet. Deshalb sollte seitens der Standesvertretungen immer wieder gefordert werden, dass der Staat mehr Wert auf Ergonomie einerseits und Zeitsparen andererseits legt. Hierzu bedarf es einer gezielten Vorbereitung des Arbeitgebers, eben dem Staat, auch einer eigenen Fortbildungsmaßnahme bzw. Unterricht im Studium etwa durch Didaktiker.

Man muss aber auch feststellen, dass viele Verwaltungsaufgaben eleganter und zeitsparender von einem Verwaltungsfachpersonal an den Schulen erledigt werden könnten. Man sollte einmal überlegen, ob der Vorschlag, die gesamte Verwaltungsarbeit dem Lehrer zu nehmen und er als Gegenleistung eine Stunde wöchentlich mehr Unterricht gibt, sich nicht auszahlen würde.

All dies muss aber in einer Demokratie durch weitere Maßnahmen begleitet werden:

2.8 Sind die Falschen auf den Didaktik-Lehrstühlen?

Nach dem bisher Geschilderten kann man sehr wohl diese Frage stellen.

Im Herbst 2010 hat der Verein „Begabtenförderung Mathematik e. V.“ ein Gutachten an alle mathematischen Institute deutscher Universitäten, die Sekundarstufenlehrer ausbilden, verschickt mit den folgenden **Gedanken zu einer gymnasialen Didaktik an der Universität:**

„Der immer größere Anteil der Bevölkerung, der an die Gymnasien drängt, ist wohl eine der Ursachen, dass man in der immer kürzeren Unterrichtszeit mit den herkömmlichen Methoden nicht mehr zurechtkommt. Oft sieht es so aus, als würden Lehrer nur mit *einer* Idee dieser Entwicklung gegensteuern, nämlich mit Lehrplankürzungen. Trotzdem beobachtet man allenthalben, dass auch die stark reduzierte Kenntnisvermittlung wie auch die verbliebenen Fähigkeiten keineswegs von allen Reifeprüflingen beherrscht werden. So ist heute eine bestandene Reifeprüfung keine Gewähr mehr, jedes Studium ergreifen zu können (und mit Erfolg in der Regelstudienzeit zu beenden), da z. B. die Vorbereitung des Gymnasiums für Mathematik anwendende Studienrichtungen nicht mehr ausreichend ist (vgl. Meyer [2]). Die jüngste Entwicklung der gymnasialen Curricula wie auch der Ausbildung der Lehramtskandidaten verlangt deshalb eine Neuordnung. Es wäre gut, wenn sich die Didaktik an der Universität hieran beteiligen könnte. In den folgenden Thesen wird das Gymnasium der Zukunft wieder als Auslese-schule betrachtet, die als Ziel die allgemeine Hochschulreife hat, d. h. zur Studierfähigkeit oder Berufen mit entsprechenden Voraussetzungen führt. Die genannten Punkte sind Wünsche von Hochschul- und Gymnasiallehrern:

1. Didaktik für gymnasiale Mathematik hat nicht die Aufgabe „Basiskompetenzen“ zu finden, wie dies etwa 2009 in einem Arbeitskreis[5] versucht wird, sondern Methoden zu entwickeln, die zeigen, wie man möglichst vielen Schülern hinreichend viel Mathematik vermitteln kann. Hierbei ist es wichtig, von vornherein den Unterricht mit geschickten Wiederholungen so abzusichern, dass beim Schüler Fähigkeiten und Kenntnisse langfristig vorhanden sind.

2. Es geht in der Didaktik nicht um Untersuchungen, die klären, was man am Gymnasium noch alles lehren könnte, sondern allein um das Normalcurriculum, dessen Umfang an Kenntnissen und Fähigkeiten wieder gesichert und mit den Abnehmern der Reifeprüflinge *abgestimmt werden muss*.

3. Das Wort Gymnasium soll hier nicht stellvertretend für den Terminus Sekundarstufe II stehen, da die Probleme der Ausbildung weniger in der Oberstufe als vielmehr in der Mittelstufe zu sehen sind. Die Versäumnisse der Mittelstufe können nicht erst in der Oberstufe ausgeglichen werden, zudem diese um 1 Jahr gekürzt worden ist.

4. Der Punkt 1. zeigt bereits, dass es nicht ausreicht, für alle Fächer gemeinsam im Rahmen eines einzelnen Lehrstuhls „gymnasiale Pädagogik“ fachunabhängig aufzubereiten. So benötigt die Ausbildung zum Höheren Lehramt an jeder Hochschule einen Didaktiker in Mathematik für das Gymnasium. Dieser Didaktiker *arbeitet eng* mit dem mathematischen Fachbereich der Hochschule zusammen.

5. Auch seitens der Didaktiker wird der mathematische Fachbereich angehalten, den Umfang der Vorlesungen außerhalb der Didaktik zu optimieren. Hierbei gilt der Grundsatz: Jeder angehende Gymnasiallehrer beherrscht die Grundlagen der derzeit zu unterrichtenden Mathematik. Die Gesamtheit der Gymnasialmathematiker – nicht der einzelne – ist darüber hinaus so auszubilden, dass jeder Gymnasiallehrer Kenntnisse und Fähigkeiten in weiteren mathematischen Spezialgebieten hat, um möglichst viel mathematisches Fachwissen für die Weiterentwicklung des Gymnasiums zu gewährleisten (siehe auch Meyer [1]). D. h. im Fächerkanon der Hochschulfachbereiche sind Wahlpflichtveranstaltungen einzurichten.

6. Die Didaktiker für das Gymnasium helfen mit, in der Öffentlichkeit klarzustellen, dass eine Ausbildung vornehmlich in Pädagogik und Psychologie für den Gymnasiallehrer nicht ausreicht. Er muss vor allem über *gediegene umfangreiche Kenntnisse* in seinen Unterrichtsfächern und deren Didaktik im Bereich Gymnasium verfügen.

7. Zu viele Hochschulmathematiker betreiben ihre Tätigkeit hinsichtlich des eigenen Nachwuchses und scheinen zu übersehen, dass Mathematik in viel weiteren Bereichen der Gesellschaft eine zentrale Stellung einnimmt. Die Hochschullehrer haben zwar Recht, wenn sie sich beim eigenen Nachwuchs vor allem um die einschlägigen Hochbegabten kümmern; diese allein aber reichen für die Belange der High-Tech-Gesellschaft nicht, wenn sich nicht eine *breite* Bevölkerungsschicht laufend mit Mathematik auseinandersetzt, um sie erfolgreich anzuwenden. Unter diesem Aspekt ist die häufig zu hörende Meinung falsch: Welche Mathematik man an der Schule lehrt, ist völlig unwesentlich, allein wichtig ist, dass man überhaupt Mathematik macht, um in das „Mathematische“ einzuführen, um etwa „Denken zu lehren“. Die mindestens 33% der Reifeprüflinge, die die moderne Gesellschaft für Mathematik anwendende Studienrichtungen braucht, sind sicher nicht alle hochbegabt und sehr wohl davon abhängig, was sie in der Schule an Mathematik gelernt haben. Vor allem sollte man am Gymnasium und dann auch an der Hochschule bei der Ausbildung von Gymnasialmathematikern nicht übersehen, dass Anfängervorlesungen in den Anwendungsgebieten der Mathematik nur für diese 33% verständlich werden, wenn ihnen die hierzu erforderlichen Techniken *an der Schule* gelehrt worden sind.

8. Sicher kann die Hochschule das Postulat 7 dahingehend auffangen, dass das Erforderliche in einem zwei- bis dreijährigen Vorkurs nach angelsächsischem Vorbild (Kollege an den Universitäten) bei gleichzeitigem Streichen der Oberstufe des Gymnasiums gelehrt wird. Dann aber bleibt immer noch Postulat 3, nämlich das Problem der Mittelstufe.

9. Der Terminus „Mathematik“ umfasst in diesem Papier auch die Geometrie und die Informatik, soweit sie für das Gymnasium relevant sind.

10. Die Didaktik an der Universität bietet zusätzlich zu einem 2-jährigen Referendariat den Auszubildenden Vorlesungen, Übungen, Praktika und Seminare an. Hierbei arbeiten die Didaktiker eng mit dem Fachbereich aber auch mit den Seminarschulen des zweiten Ausbildungsabschnittes u. ä. zusammen. Hierbei

[5] AK Geometrie der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. Herbst 2009 in Königswinter

sollte allerdings beachtet werden, Didaktik – ähnlich der übrigen Mathematik – konzentriert zu unterrichten bzw. die „übrige“ Mathematik wieder auszubauen, jedenfalls aber keine ersatzlosen Streichungen mehr vorzunehmen. Um eine Arbeitsüberlastung für die Didaktiker an der Hochschule zu vermeiden, dürfen diejenigen, deren Arbeitsfeld das Gymnasium ist, *nicht* außerhalb des Berufsbildes Gymnasiallehrer eingesetzt werden, zudem andere Schularten auch *grundlegend andere* didaktische Voraussetzungen haben.

11. Die Veranstaltungen der Didaktik befassen sich also nur mit dem zu erwartenden Berufsbild der Lehramtskandidaten für das Gymnasium, behandeln u. a. die didaktischen Anforderungen des Gymnasiums in übergeordneter Form und sind vor allem keine Nachhilfestunden hinsichtlich des Curriculums am Gymnasium bzw. der Hochschulveranstaltungen. Sie stellen vor allem den Zusammenhang zwischen Schule und den hierzu erforderlichen wissenschaftlichen Grundlagen her.

12. Die Didaktiker der Universität führen an die didaktische Forschung heran und klären ab, inwieweit diese im Schulalltag berücksichtigt oder nicht berücksichtigt werden kann oder muss. Hier unterscheidet sich die Didaktik nicht von der übrigen Hochschulmathematik: Der Lehramtskandidat erfährt in Vorlesungen usw. wichtiges Hintergrundwissen, das sein Handeln beim Unterrichten später lenken soll. Er erwirbt diese Kenntnisse aber nicht, um sie anschließend 1:1 im Unterricht zu nutzen.

13. Die Didaktik stellt Arbeitsweisen der Ergonomie – auch hinsichtlich Schulverwaltung – bereit, damit zukünftig bei der Verwaltungsarbeit nicht zu viel Arbeitszeit vor allem dort vergeudet wird, wo man diese durch billigere Verwaltungsangestellte bewerkstelligen kann.

14. Hauptaufgabe der Didaktik in der Lehre ist, Methoden zu vermitteln, die sicherstellen, dass in einem stetigen Prozess der Lernaufwand der Schüler und damit die Lehrdichte vom Stand des Grundschülers bis hin zu den Erfordernissen eines Studiums gesteigert wird. Die Ziele des Gymnasiums im Fach Mathematik können sich nicht nur an den Bedürfnissen des Hochschulfaches Mathematik orientieren, sondern müssen sich vor allem an den Mathematik anwendenden Studienrichtungen und Berufen ausrichten. Hierbei gilt die Faustregel: Zeichnen und Rechnen lehrt die Schule, soweit dies ohne maschinelle Unterstützung (also z. B. ohne numerische Mathematik) geschehen kann. Universitätsvorlesungen in Mathematik z. B. für Anwender fundieren und bauen dann das vorher kennen gelernte händische Rechnen und Zeichnen der Schule wissenschaftlich aus.

15. Fächerübergriff von der Mathematik zu den mathematischen Anwendungen in Industrie und Wirtschaft aber auch zu den anderen gymnasialen Fächern ist in den Hochschulveranstaltungen der Fachdidaktik zu pflegen.

16. Im Moment scheinen Gymnasiallehrer keinen Überblick über das bestehende gymnasiale Gesamtcurriculum in Mathematik zu haben, was sich dahingehend äußert, dass immer häufiger in Lehrplankommissionen auf Teile des Curriculums verzichtet wird, deren Kenntnisse man eigentlich im Anschluss, also in einer späteren Klasse, dringend benötigt. Der Besuch des Gymnasiums wird hierdurch für viele Schüler nicht erleichtert sondern erschwert. So scheint es – wenn auch vielleicht nur vorübergehend – erforderlich, dass sich Hochschullehrer um den inneren Zusammenhang des Gesamtcurriculums kümmern und in Lehrplankommissionen und an Seminarschulen diesbezüglich beratend mitwirken.

17. Zur Berufung auf eine Didaktikstelle ist durch Publikationen der Nachweis zu erbringen, im obigen Sinne bereits für das mathematische Normalcurriculum des Gymnasiums geforscht zu haben und nicht nur gelegentlich ein oder zwei Publikationen z. B. etwa über Bereiche der Elementarmathematik geschrieben zu haben, die man am Gymnasium in Arbeitsgemeinschaften mit guten Schülern *vielleicht* lehren kann. Bei den Berufungsgesprächen ist ein Programm für die geplante Forschung im Bereich der gymnasialen Didaktik vorzulegen. Es reicht also nicht der Nachweis einer dreijährigen Schulpraxis.

18. Sicher freut man sich, wenn der zu Berufende bereits internationale Kontakte pflegt und außerhalb von Deutschland große Anerkennung findet, doch scheint es, dass man im Moment hierauf zu großen Wert legt.

19. Auch ist es für jede Hochschule von Vorteil, wenn ein zu Berufender bereits über Beziehungen zu Drittmitteln verfügt; doch sollte man beachten, dass im Bereich Didaktik das bisherige Bemühen z. B. der Deutschen Forschungsgemeinschaft von so manchem Mathematiker als zu eng angesehen wird und vielleicht gerade das Nicht-eingebunden-sein eines zu Berufenden eine Chance bietet, diesen Bereich zu vergrößern.

20. Die Didaktiker an den Universitäten wie auch an den Seminarschulen werden sich hinsichtlich der immer größeren Unterschiede bezüglich der Aufnahmefähigkeit der Schüler notgedrungen mit Binnendifferenzierung des Gymnasialunterrichts wie auch mit den Möglichkeiten eines Ergänzungsunterrichts für begabte Schüler auseinandersetzen müssen.

Angesprochene Didaktiker der Universitäten beteuern in „Privatgesprächen" auf die oben aufgeführten Punkte in bekannter Form: Die hier angesprochenen Dinge sind doch längst erforscht. Das zu langsame Umsetzen in die tägliche Schulpraxis sei nicht ihre Aufgabe, sondern eindeutig die Aufgabe der Lehrer. Wenn hier bis heute nichts geschehen ist, so liegt das allein an den Lehrern, die z. B. laufend verhindern, dass sich Didaktiker an der Lehrerfortbildung beteiligen. Lehrer wollen nicht zugeben, dass man außer bei LIETZMANN [1] auch an anderer Stelle über didaktische Forschung nachlesen kann.

Lehrer können hierauf nur erwidern, dass es an der Schule an Zeit fehlt und darüber hinaus Didaktiker nach LIETZMANN häufig in einem Stil schreiben, der erst mit riesigem Zeitaufwand in Unterricht umgesetzt werden kann, ja oft geradezu für Lehrer unverständlich bleibt. Die Aussage, man sollte „Lehrern durchaus wissenschaftliche Texte zumuten können", da sie hinsichtlich solcher ausgebildet werden, greift nicht, da es ca. 20 Jahre benötigt, bis ein ganzes Lehrerkollegium ausgetauscht ist, Didaktik sich aber zumindest während der vergangenen 20 Jahre stilistisch wie auch inhaltlich im Abstand von höchstens 10 Jahren geändert hat.

Aus diesem Grund werden hier einige offene „Forschungsfragen" aufgelistet, auf die Lehrer hinsichtlich verständlicher Lösungen seit mindestens 20 Jahren warten.

– Bis heute gibt es keine umfassend anerkannte Forschung, die Unterlagen bereitstellt, was an Schulmathematik Anfangssemester benötigen bzw. von Schulabgängern, die nicht studieren, an Schulmathematik erwartet wird. Man könnte sich vorstellen, dass eine solche Untersuchung von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt werden könnte. Hierbei sollte nicht in dem Stil untersucht werden, dass nur solche Teilgebiete für die Schule in Frage kommen, die mindestens 80% der Bevölkerung im Leben brauchen. So ist nicht die Frage von Interesse: „Wie viele Ingenieure benötigen täglich Integrieren?" sondern: „Wie viel Analysis braucht der angehende Ingenieur, um z. B. der Vorlesung „Technische Mechanik" im 1. Semester folgen zu können?"

– Heute sieht die Grundschule mehr als früher das Mathematische. Leider geht dies auf Kosten der vertieften Vermittlung von Fähigkeiten und Kenntnissen, die z. B. das Gymnasium von den Übertrittsschülern erwartet: Beherrschung der vier Grundrechenarten, also auch des Divisionsalgorithmus. Letzteres verlangt die Beherrschung des kleinen Einmaleins. Sauberes Zeichnen mit Zirkel und Lineal, sauberes Ausmalen, deutliches Schreiben der Buchstaben und Ziffern werden erwartet. Leider ist zu beobachten, dass nach dem Erstellen der Übertrittszeugnisse die Lehrdichte im Unterricht der Grundschule deutlich abfällt; eigentlich sollten gerade die Übertrittsschüler auf das Tempo des Gymnasiums vorbereitet werden. Vieles streift der Grundschulunterricht heute: Bausteine der Geometrie wie Strecken, Geraden, Längen, Flächeninhalte, Flächenmaße, Spiegelungen, Falten und in der Algebra Primzahlen, Primfaktorzerlegung, andere Zahlsysteme (ohne Kenntnis der Potenzen), Teilbarkeitsregeln (ohne deren Nachweis zu erbringen) u. v. m.
  Kinder, die nachdenken wollen, bekommen immense Probleme. Als Gymnasiallehrer hört man in der 5. Klasse sehr häufig: „Das kenne ich schon." Schließlich stellt sich dann heraus, dass nichts Genaues bekannt ist, ja das „Ich-kenne-schon" zu Unaufmerksamkeit führt und sehr das Lehren in der 5. Klasse am Gymnasium belastet. Insgesamt bekommt man den Eindruck, dass die Inhalte des Grundschulcurriculums sehr weitläufig sind, damit aber leider das Einüben abgedrängt worden ist. Es fehlen Untersuchungen, die nachweisen, ob sich die in Mathematik an der Grundschule heute vielseitiger unterrichtete Schülergruppe an Folgeschulen besser durchsetzt als die Gruppe, in der vor allem die Rechenfertigkeiten eingeübt worden sind.

– Wenn man schon Teile des gymnasialen Curriculums in die Grundschule verpflanzt, sollte dies vollständig und in Absprache mit dem Gymnasium geschehen.

– Man kann einiges in der Didaktik über Binnendifferenzierung in der alten u. U. einklassigen Grundschule erfahren; nur glauben viele Lehrer, es wäre günstiger, weniger über den Begriff Binnendifferenzierung zu philosophieren als z. B. mehr mathematische Beispiele vorzustellen.

– Auch wenn man neuerdings viel von Binnendifferenzierung des gymnasialen Mathematikunterrichts spricht, ja man hat sogar (siehe CZAPUTA [1]) bereits Software hierfür bereitgestellt, sollte man sich doch im Klaren sein, dass abgesehen von Einzelfällen Lehrer nicht die Zeit haben, etwa eine Binnendif-

ferenzierung einer Unterrichtsstunde in 3 Gruppen zu programmieren, da hierfür wohl mindestens 5 Arbeitsstunden für einen 45-Minuten-Unterricht erforderlich sind. Auch würden Lehrer – aus Ergonomiegründen – dazu neigen, solche Unterlagen genauso zu benutzen, wie sie dies eine Generation vorher mit den Overheadfolien gemacht haben: Sie werden die einmal mit Software ausgearbeitete Binnendifferenzierung ohne Modifikation bis zur Pensionierung einsetzen. Wie man weiß, führt dies nicht zu einer Belebung des Unterrichts. Hier ist also gleich zweierlei zu machen:

1. Unterrichtsbeispiele für Binnendifferenzierung einzelner Unterrichtsthemen müssen dem Lehrer zur Verfügung gestellt werden.
2. Grundsätzliches für Binnendifferenzierung sollten z. B. in Vorlesungen und Lehrerfortbildung angeboten werden.

– Das Gymnasium – vermutlich genauso die Grundschule – benötigt dringend Beispiele, die guten Schülern als häusliche Vorbereitung gegeben werden können und doch didaktisch besser als die Briefzirkel und Arbeitsgemeinschaften der Hochbegabtenförderung (vgl. KÖNIG [1]) sind. Hierbei verstehe ich unter guten Schülern einen weitaus größeren Bevölkerungsanteil als den der Hochbegabten.

– Auch die Grundschule braucht ausgearbeitete Methoden, die einem größeren Schülerkreis als bisher gestatten, mit Erfolg ans Gymnasium überzutreten. Man klebt seitens der Grundschule – vor allem in den Ballungszentren – an den Prozentsätzen der Übertritte Mitte des vergangenen Jahrhunderts und vergisst, dass unsere High-Tech-Gesellschaft mehr Abiturienten für die Mathematik anwendenden Studienrichtungen als früher benötigt und damit auch höhere Übertrittsquoten von der Grundschule ans Gymnasium erforderlich werden. Hier fehlen eindeutig empirische Untersuchungen und vor allem methodische Vorschläge, wie man dies erreichen kann. Man kann aber auch feststellen, dass in die Ausbildung aller Lehrer die Weiterentwicklung der Hauptberufe einer Gesellschaft gehört.

– Es reicht nicht, wenn Grundschüler als Hochbegabte bewundert werden, wie sie eine ganz rationale Funktion differenzieren können, wenn ihnen diese Technik aus dem Zusammenhang gerissen „gelehrt“ worden ist. Wir brauchen für alle Schultypen Unterrichtssequenzen für die Begabten – nicht nur Hochbegabten –, die auch berücksichtigen, dass es neben den wirklich Hochbegabten nicht so sehr Begabte gibt. Auch an der Grundschule sollte man Ergänzungsunterricht für verschiedene Begabungsniveaus anbieten. Auch hierzu kann der praktizierende Lehrer allein keine Ausarbeitungen schaffen, da es ihm an Arbeitszeit fehlt. Es wäre also sehr zu begrüßen, wenn ihm hierbei z. B. Didaktiker für die Grundschule helfen könnten. Bei all diesen Forderungen sollte man beachten, mindestens dreimal so viele Übungsaufgaben zu entwerfen wie ein einzelner Lehrer zum Unterrichten benötigt. Es ist dem praktizierenden Lehrer auch hilfreich, wenn jeweils nicht nur ein Lösungsweg sondern mehrere skizziert werden. Auch sollte man sich nicht scheuen, Benotungshinweise zu geben, damit Lehrer nicht zu kleinlich benoten.

Wie bereits oben erwähnt wird es der weiteren Entwicklung gut tun, wenn Didaktiker der Universitäten mehr als bisher Kontakte zu den Seminarlehrern pflegen.“

Ich hoffe, Anregungen gegeben zu haben, auch wenn es hier nicht die Absicht war, Endgültiges zu sagen. Helfen Sie alle mit, auch die Ingenieure und Naturwissenschaftler vor allem im Rahmen Ihrer Verbände, endlich mit einer sinnvollen Weiterentwicklung anzufangen, um die einzelne Unterrichtsstunde effektiver werden zu lassen.

3. Literatur

Brüning L., Saum T.	[1]	Frontalunterricht und kooperatives Lernen, Seiten 53 – 56, Schulmagazin 5 bis 10, September 2006
Bender, Peter	[1]	Was nützen Pisa & Co?, Hauptvortrag der Sektion Gymnasium am 12. Forum für Begabungsförderung in Mathematik, OHM-Hochschule Nürnberg 2010
Bourbaki, Nicolas	[1]	La Theorie des Esembles, Hermann Paris
Czaputa, Christian	[1]:	Innere Differenzierung, L. A. Multimedia 3-2009, Seiten 20 – 23
Hemme, Heinrich	[1]:	Trigonometrie und Studierfähigkeit, MI Nr. 49 (15. September 2008),

		Seite 3, Mathematikinformation Nr. 53, 2010
Herget W., Heugl H., Kutzler B., Lehmann E.	[1]	Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? Keine weiteren Angaben in der Homepage „Wilfried Herget“.
König, Helmut u. a. bzw. Bezirkskomitee Chemnitz	[1]	Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften – Außerunterrichtliche Arbeit für die Klassen 1 bis 10
Krainer, Konrad	[1]	Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes. Lang, Frankfurt/Main 1990
Krüger, Katja	[1]	Erziehung zum funktionalen Denken – Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips, Logos Verlag Berlin 2000, 1999 Dissertation
Lietzmann, Walther	[1]	Methodik des mathematischen Unterrichts, Band I und II, Quelle & Meyer, Heidelberg 1953
	[2]	Methodik des mathematischen Unterrichts, bearbeitet von Richard Stender, Quelle & Meyer, Heidelberg 1961
Meyberg, Vachenauer	[1]	Höhere Mathematik 1, 2. Auflage, Springer-Lehrbuch, Berlin u. a. 1993
Meyer, Karlhorst	[1]	Zur Weiterentwicklung der Gymnasiallehrerbildung, Mathematikinformation Nr. 41, 15. September 2004, Seiten 3 -23
	[2]:	Kämpfen die Gymnasialmathematiker gegen Trends? Mathematikinformation Nr. 51, 15. September 2009, Seiten 43 – 54
	[3]:	Mathematik und Gymnasium, Seiten 3 – 27, Mathematikinformation Nr. 47, 2007
	[4]:	Komplexe Zahlen als Beispiel für eine Binnendifferenzierung, Seiten 7 – 37, Mathematikinformation Nr. 50, 2009
Meyer Kh., Krämer A.	[5]:	Zur Arithmetik der Klassen 5 und 6, Seiten 11 – 27, Mathematikinformation Nr. 36, 2002
Osel J., Schultz T.	[1]	Schule als Irrgarten, Süddeutsche Zeitung, Seite 6, 30. 4. / 1. 5. 2011
Pahl, Franz	[1]	Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts, Seite 282, Quelle Meyer Leipzig 1913

Autor:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
e-mail: Meyer-muc@Karlhorst.de