Udo Krzensk

Das Spiel Zwei-Finger-Morra

Das Spiel Zwei-Finger-Morra ist vor allem in einigen Mittelmeerländern (besonders in Italien) bekannt. Die hier beschriebene Variante wird folgendermaßen gespielt: Zwei Spieler heben gleichzeitig einen oder zwei Finger. Zeigen beide Spieler unterschiedlich viele Finger, gewinnt Spieler 1. Andernfalls gewinnt Spieler 2. Der Verlierer muss dem Gewinner so viele Geldeinheiten (GE) ausbezahlen wie insgesamt Finger gezeigt wurden. Statt Geldeinheiten können natürlich auch Streichhölzer, Karten, Murmeln oder etwas anderes verwendet werden.

Frage ich meine Studenten[1] (und Schüler werden ähnlich reagieren), ob dieses Spiel fair oder einer der beiden Spieler im Vorteil ist, erhalte ich oft als Antwort: Spieler 2 ist im Vorteil, da er die Möglichkeit hat zwei bzw. vier GE zu gewinnen. Spieler 1 kann nur drei GE gewinnen. Folglich wird Spieler 2 im Durchschnitt doppelt so viel gewinnen wie Spieler 1. Auf meinen Einwand hin, dass Spieler 2 nur jeweils eine Möglichkeit hat zwei bzw. vier GE zu gewinnen aber Spieler 1 zwei Möglichkeiten hat drei GE zu gewinnen, wird den Studenten dann klar, dass dieses Spiel doch fair ist.

Anzahl der gezeigten Finger		Auszahlungsbetrag [GE] an	
Spieler 1	Spieler 2	Spieler 1	Spieler 2
☝	☝	-2	2
☝	✌	3	-3
✌	☝	3	-3
✌	✌	-4	4
4 mögliche Fälle		$\sum = 0$	$\sum = 0$

Dass dieses Spiel jedoch (überraschenderweise) unfair ist und welcher Spieler im Vorteil ist, zeigt erst eine genauere Betrachtung. Zunächst muss überlegt werden, welche Strategien beide Spieler besitzen. Dann kann auf verschiedene Weise berechnet werden, welcher Spieler im Vorteil ist, wie groß sein Vorteil ist und wie gegebenenfalls optimale Strategien für beide Spieler berechnet werden können.

Für die nun folgenden Ausführungen ist die Mathematik der Oberstufe völlig ausreichend. Besonders schön finde ich, dass diese recht einfache Fragestellung mit Hilfe unterschiedlicher mathematischer Disziplinen behandelt werden kann: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Gleichungssysteme, Extremwertprobleme, lineare Optimierung, Simulation. Man kann auch so viel Feuer fangen, dass man sich gerne damit beschäftigen würde, wie diese Überlegungen auch auf andere und allgemeinere Situationen angewendet werden können. Und dann ist man mitten drin – in der Spieltheorie.

Das hier beschriebene Spiel findet man in vielen Standardwerken zur Spieltheorie wie z. B. in RAUHUT, B.; SCHMITZ, N.; ZACHOW, E.-W. [4].

1. Welche Strategien gibt es?

1.1 Reine Strategien

Die einfachsten Strategien, die ein Spieler haben kann, bestehen darin, immer nur einen oder immer zwei Finger zu zeigen (reine Strategien). Dies ist jedoch nicht sinnvoll, da sich der jeweilige Gegner darauf einstellen kann.

Zeigt Spieler 1 immer einen oder immer zwei Finger, so wird Spieler 2 (nachdem er dies gemerkt hat) immer genau so viele Finger zeigen. Folglich verliert Spieler 1 durch Einsatz einer reinen Strategie bestenfalls 2 GE. Zeigt Spieler 2 immer einen oder immer zwei Finger, so wird Spieler 1 (nachdem er dies gemerkt hat) immer zwei bzw. einen Finger zeigen. Daher verliert Spieler 2 durch Einsatz einer reinen Strategie in jedem Fall 3 GE.

Spieler 1 kann durch den Einsatz einer reinen Strategie also sicherstellen, dass sein Auszahlungsbetrag mindestens -2 GE beträgt, wohingegen Spieler 2 durch den Einsatz einer reinen Strategie nur sicherstellen kann, dass Spieler 1 nicht mehr als 3 GE gewinnt. Daher sind hier reine Strategien nicht optimal. Außerdem lässt sich an dieser Stelle auch noch nicht beurteilen, ob dieses Spiel fair ist.

[1] Hierunter sollen Studentinnen und Studenten verstanden werden. Analog wird in entsprechenden Situationen verfahren.

Der Nachteil beim Einsatz von reinen Strategien besteht darin, dass sich der jeweilige Gegner darauf einstellen kann und immer einen Vorteil erlangen kann. Alternativ können beide Spieler für den Gegner unberechenbar werden, indem sie „zufällig" einen oder zwei Finger zeigen. Dies führt zu den so genannten gemischten Strategien.

1.2 Gemischte Strategien

Bei gemischten Strategien zeigen beide Spieler jeweils einen oder zwei Finger mit festen Wahrscheinlichkeiten. Eine gemischte Strategie für Spieler 1 besteht also in der Angabe einer Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$, mit der er einen Finger zeigt (zwei Finger zeigt er dann mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$). Entsprechend wird eine gemischte Strategie für Spieler 2 mit einer Wahrscheinlichkeit $q \in [0,1]$ angegeben, mit der er einen Finger zeigt (zwei Finger zeigt er dann mit der Wahrscheinlichkeit $1-q$). Der Einsatz gemischter Strategien erscheint sinnvoll, da beide Spieler die Aktion des Gegners bei einem Spiel dann nicht vorhersagen können. Anmerkung: Reine Strategien können als Spezialfälle gemischter Strategien aufgefasst werden ($p \in \{0,1\}$ bzw. $q \in \{0,1\}$). Wenn man mehrere gemischte Strategien mischt, erhält man wieder eine gemischte Strategie, d. h. mehr als mischen geht nicht.

Um möglichst „sehr unberechenbar" zu werden, wird man also versuchen, die reinen Strategien „besonders gut" zu mischen. Man könnte glauben, dies gelänge am besten, wenn man einen bzw. zwei Finger mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten zeigt ($p = 0.5$ und $q = 0.5$). Um zu überprüfen, ob einer der beiden Spieler in dieser Situation im Vorteil ist, muss dieses Spiel jetzt oft gespielt werden. Dazu braucht man etwas Geduld und einen guten Zufallsgenerator (dies kann hier ein homogener Würfel sein). Als Kriterium für diese Überprüfung kann dann die mittlere Auszahlung an Spieler 1 pro Spiel (im folgenden mit $\overline{a}$ bezeichnet) herangezogen werden.

Mit Hilfe einer entsprechenden Simulation ergaben sich folgende Werte, wobei n die Anzahl der simulierten Spiele und $\overline{a}$ jeweils die mittlere Auszahlung an Spieler 1 pro Spiel bei n durchgeführten Spielen bezeichnet:

n	$\overline{a}$
1	3.000
2	0.500
4	0.500
8	0.500
15	-0.400
30	0.500
60	-0.100
125	-0.096
250	-0.160
500	-0.062
1000	-0.037

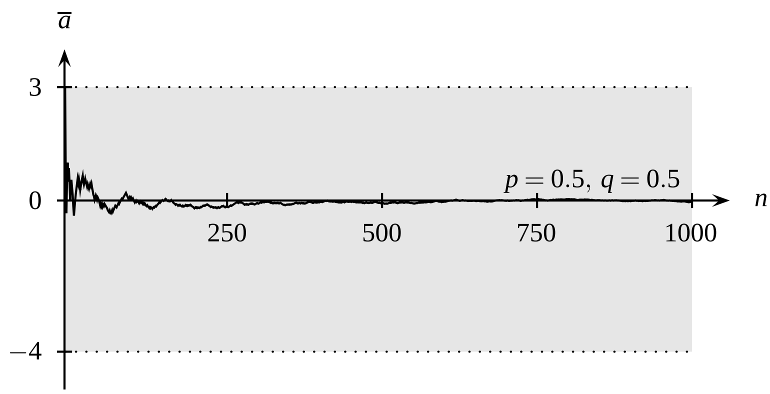

Abbildung 1

In dieser Situation scheint das Spiel ausgewogen zu sein (die mittlere Auszahlung pro Spiel an Spieler 1 strebt gegen 0). Was passiert aber, wenn ein oder beide Spieler einen oder zwei Finger nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigen? In der folgenden Abbildung sind drei Fälle exemplarisch dargestellt.

Behält Spieler 1 seine Strategie bei (gleiche Wahrscheinlichkeiten für das Zeigen eines oder zweier Finger) und zeigt Spieler 2 einen Finger nur noch mit der Wahrscheinlichkeit $q = 0.1$, so gerät Spieler 1 leicht in Nachteil, da seine mittlere Auszahlung pro Spiel gegen einen negativen Wert strebt (mittlere Kurve).

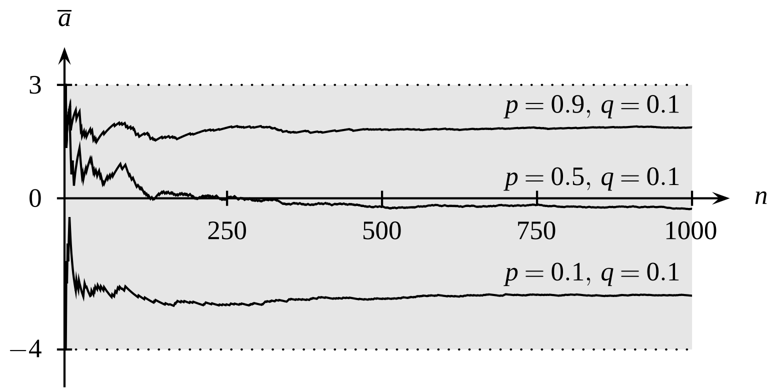

Abbildung 2

Reagiert Spieler 1 jetzt, indem er einen Finger auch nur mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ zeigt, verschlechtert sich seine Situation dramatisch (untere Kurve). Zeigt er jedoch in dieser Situation einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.9$, so liegt seine mittlere Auszahlung pro Spiel bei ungefähr 2 GE (obere Kurve). Darauf würde wiederum Spieler 2 reagieren und einen Finger mit einer anderen Wahrscheinlichkeit ($q \neq 0.1$) zeigen.

Diese Beispiele zeigen, dass es wesentlich darauf ankommt, mit welchen Wahrscheinlichkeiten beide Spieler einen bzw. zwei Finger zeigen. Im folgenden wird nun untersucht, ob es optimale gemischte Strategien gibt, wie diese gegebenenfalls berechnet werden können und ob möglicherweise einer der beiden Spieler beim Einsatz einer optimalen Strategie im Vorteil ist.

2. Erwartete mittlere Auszahlung an Spieler 1

Im folgenden überlegen wir uns, wie die erwartete mittlere Auszahlung pro Spiel an Spieler 1 berechnet werden kann, wenn Spieler 1 einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit p und Spieler 2 einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit q zeigt, d. h. wenn beide Spieler die gemischten Strategien p und q einsetzen ($p, q \in [0, 1]$).

Zeigen beide Spieler einen Finger, so muss Spieler 1 an seinen Gegner 2 GE bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $p \cdot q$ (beide Spieler treffen die Entscheidung, einen oder zwei Finger zu zeigen, unabhängig voneinander). Daher beträgt der gewichtete Auszahlungsbetrag an Spieler 1 in diesem Fall $-2 \cdot p \cdot q$ GE. Zeigt Spieler 1 einen Finger und Spieler 2 zwei Finger, erhält Spieler 1 von seinem Gegner 3 GE. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $p \cdot (1-q)$. Daher beträgt der gewichtete Auszahlungsbetrag an Spieler 1 in diesem Fall $3 \cdot p \cdot (1-q)$ GE. Die restlichen gewichteten Auszahlungsbeträge an Spieler 1 sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Anzahl der gezeigten Finger			Gewichteter Auszahlungsbetrag [GE] an Spieler 1
Spieler 1	Spieler 2		
☝	☝		$-2 \cdot p \cdot q$
☝	✌		$3 \cdot p \cdot (1-q)$
✌	☝		$3 \cdot (1-p) \cdot q$
✌	✌		$-4 \cdot (1-p) \cdot (1-q)$
Erwartete Auszahlung an Spieler 1		➔	$\sum = \overline{a}(p,q)$

Die erwartete mittlere Auszahlung pro Spiel an Spieler 1 in Abhängigkeit der beiden gemischten Strategien p und q beträgt daher:

$$\begin{aligned} \overline{a}(p,q) &= -2 \cdot p \cdot q + 3 \cdot p \cdot (1-q) + 3 \cdot (1-p) \cdot q - 4 \cdot (1-p) \cdot (1-q) \\ &= 7p + 7q - 12pq - 4 \end{aligned}$$

Zeigen beispielsweise beide Spieler einen bzw. zwei Finger mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten, so ist die erwartete mittlere Auszahlung pro Spiel an Spieler 1 gegeben durch $\overline{a}(0.5, 0.5) = 0$. Dies ließ Abbildung 1 bereits vermuten. Entsprechend gilt $\overline{a}(0.5, 0.1) = -0.4$, $\overline{a}(0.1, 0.1) = -2.72$ und $\overline{a}(0.9, 0.1) = 1.92$ (vgl. Abbildung 2).

In Abbildung 3 ist die Funktion $\overline{a}$ mit Hilfe eines Contourplots dargestellt. Hierbei sind die Bereiche mit $\overline{a} \approx 0$ hell dargestellt. Je größer $|\overline{a}|$ wird, desto dunkler werden die entsprechenden Flächen.

In der Mitte ($p = q = 0.5$) ist die Fläche weiß, da dort die Funktion $\overline{a}$ den Wert 0 annimmt. Hier war keiner der beiden Spieler im Vorteil. Dies trifft übrigens auch für alle Punkte auf der eingezeichneten Hyperbel zu: $\overline{a}(p,q) = 0 \Leftrightarrow q = (4-7p)/(7-12p)$

Die Eckpunkte entsprechen den reinen Strategien. Ist $p = 0$ und $q = 0$, so zeigen beide Spieler immer zwei Finger und es gilt $\overline{a}(0,0) = -4$. Im Fall $p = 1$ und $q = 1$ zeigen beide Spieler immer einen Finger und es gilt $\overline{a}(1,1) = -2$. Den beiden anderen Ecken entsprechen die beiden Strategien, bei denen beide Spieler unterschiedlich viele Finger zeigen. In diesen Fällen nimmt $\overline{a}$ den Wert 3 an.

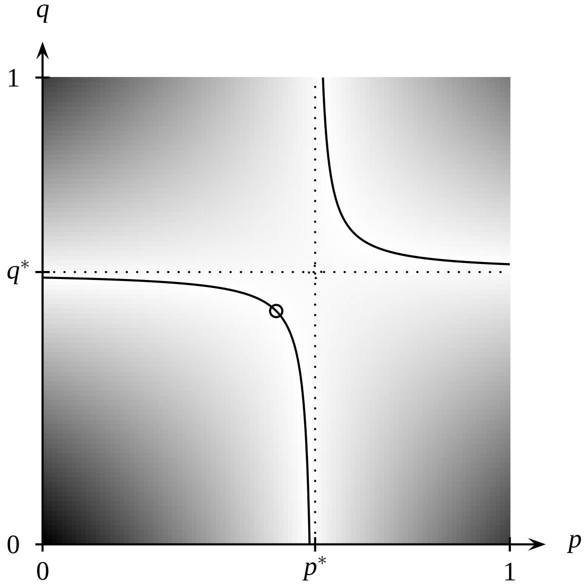

Abbildung 3

An der Stelle $p = p^*$ hat man eine einheitliche Färbung. Dies bedeutet, dass dort die erwartete mittlere Auszahlung pro Spiel konstant bleibt, egal wie sich Spieler 2 verhält. Entsprechend bleibt die erwartete mittlere Auszahlung pro Spiel an der Stelle $q = q^*$ konstant, egal wie sich Spieler 1 verhält. Unter der Annahme, dass dies durch eine entsprechende Rechnung verifiziert wurde, gilt also $\overline{a}(p,q^*) = \overline{a}(p^*,q^*) = \overline{a}(p^*,q)$ für alle $p,q \in [0,1]$.

Dies bedeutet, dass p^* und q^* in folgendem Sinn optimale Strategien für beide Spieler sind: Durch Wahl von p^* kann sich Spieler 1 den mittleren Gewinn von $\overline{a}(p^*,q^*)$ sichern wohingegen Spieler 2 durch Wahl von q^* verhindern kann, dass er im Mittel mehr als $\overline{a}(p^*,q^*)$ an Spieler 1 bezahlen muss. Da die Färbung bei (p^*,q^*) nicht weiß sein kann, ist das Spiel nicht fair. Welcher Spieler jetzt im Vorteil ist, entscheidet das Vorzeichen von $\overline{a}(p^*,q^*)$. Mit $\overline{a}(p^*,q^*)$ wird auch der Spielwert des Spiels bezeichnet.

Im folgenden Abschnitt sollen verschiedene Lösungsmethoden vorgestellt werden, wie der Spielwert des Spiels und gegebenenfalls die optimalen Strategien bestimmt werden können.

3. Bestimmung des Spielwertes und gegebenenfalls optimaler Strategien mit Hilfe ...

3.1 ... eines Gleichungssystems

Falls der Contourplot an der Stelle $p = p^*$ eine einheitliche Färbung aufweist, muss $\overline{a}(p^*,\cdot)$ konstant sein. Insbesondere muss dann gelten $\overline{a}(p^*,0) = \overline{a}(p^*,1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{a}(p^*,0) = \overline{a}(p^*,1) \quad &\Leftrightarrow \quad 7p^* + 7\cdot 0 - 12p^*\cdot 0 - 4 = 7p^* + 7\cdot 1 - 12p^*\cdot 1 - 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = 7 - 12p^* \\
&\Leftrightarrow \quad p^* = 7/12.
\end{aligned}$$

Jetzt muss noch überprüft werden, ob $\overline{a}(p^*,\cdot)$ für alle $q \in [0,1]$ den gleichen Wert annimmt. Es gilt

$$\overline{a}(p^*,q) \;=\; 7p^* + 7\cdot q - 12p^*\cdot q - 4 \;=\; 7\cdot\frac{7}{12} + 7\cdot q - 12\cdot\frac{7}{12}\cdot q - 4 \;=\; \frac{1}{12}$$

für alle $q \in [0,1]$. Falls Spieler 1 also mit einer Wahrscheinlichkeit von $p^* = 7/12$ einen Finger zeigt, sichert er sich einen mittleren Gewinn pro Spiel in Höhe $1/12$ GE unabhängig davon, wie Spieler 2 sich verhält. Dies bedeutet insbesondere auch, dass Spieler 1 die Wahl seiner Strategie ($p^* = 7/12$) seinem Gegner mitteilen kann, da sein Gegner daraus keinen Vorteil ziehen kann.

Analog rechnet man nach, dass für $q^* = 7/12$ und alle $p \in [0,1]$ gilt $\overline{a}(p,q^*) = 1/12$.

Falls Spieler 2 also mit einer Wahrscheinlichkeit von $q^* = 7/12$ einen Finger zeigt, verliert er im Mittel pro Spiel auch nur $1/12$ GE unabhängig davon, wie Spieler 1 sich verhält. Dies bedeutet insbesondere auch, dass Spieler 2 die Wahl seiner Strategie ($q^* = 7/12$) seinem Gegner mitteilen kann, da sein Gegner daraus keinen Nutzen ziehen kann.

Der Spielwert des Spiels beträgt also $1/12$ und $p^* = 7/12$ und $q^* = 7/12$ sind optimale Strategien für beide Spieler.

3.2 ... eines Extremwertproblems

Setzt Spieler 1 die gemischte Strategie $p \in [0,1]$ ein, so erzielt er einen mittleren Gewinn pro Spiel in Höhe von $\overline{a}(p,q)$, falls sein Gegner die gemischte Strategie $q \in [0,1]$ einsetzt. Sein mittlerer Mindestgewinn pro Spiel beträgt in diesem Fall also

$$\begin{aligned}
\min_{q\in[0,1]} \overline{a}(p,q) \quad &= \quad \min_{q\in[0,1]} (7p + 7q - 12pq - 4) \\
&= \quad \min_{q\in\{0,1\}} (7p + 7q - 12pq - 4) \\
&= \quad \min\{7p - 4, -5p + 3\}.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist gültig, da $\overline{a}(p,\cdot)$ eine monotone Funktion ist und daher ihre Extremwerte auf den Rändern annimmt. Um seinen Gewinn zu maximieren, setzt Spieler 1 eine gemischte Strategie p ein, so dass dieser Ausdruck maximal wird. Sein garantierter mittlerer Mindestgewinn pro Spiel beträgt also

$$\overline{a}_* = \max_{p\in[0,1]} \min\{7p-4, -5p+3\}.$$

Den mittleren Mindestgewinn $\overline{a}_*$ pro Spiel für Spieler 1 und die dazugehörige gemischte Strategie p^*, mit der dieser Gewinn erzielt wird, erhält man dann als Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Gleichungen $a_0(p) = 7p-4$ und $a_1(p) = -5p+3$:

$$7p^*-4 = -5p^*+3 \Leftrightarrow 12p^* = 7 \Leftrightarrow p^* = 7/12$$
$$\overline{a}_* = a_0(p^*) = 7p^*-4 = 7\cdot 7/12-4 = 1/12$$

Zeigt Spieler 1 also einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $p^* = 7/12$, so sichert er sich damit einen mittleren Mindestgewinn pro Spiel in Höhe von $\overline{a}_* = 1/12$ GE. Mit jeder anderen gemischten Strategie kann er sich diesen Gewinn nicht sichern.

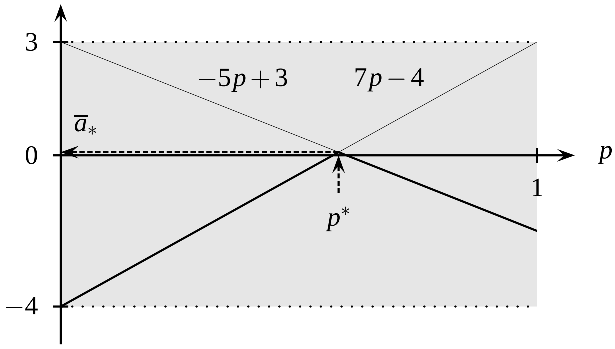

Abbildung 4

Entsprechend kann der minimale mittlere Verlust pro Spiel für Spieler 2 berechnet werden und welche gemischte Strategie er dabei einsetzen muss.

Setzt Spieler 2 die gemischte Strategie $q \in [0,1]$ ein, so erleidet er einen mittleren Verlust pro Spiel in Höhe von $\overline{a}(p,q)$, falls sein Gegner die gemischte Strategie $p \in [0,1]$ einsetzt. Sein mittlerer maximaler Verlust pro Spiel beträgt in diesem Fall also

$$\begin{aligned}\max_{p\in[0,1]} \overline{a}(p,q) &= \max_{p\in[0,1]} (7p+7q-12pq-4)\\ &= \max_{p\in\{0,1\}} (7p+7q-12pq-4)\\ &= \max\{7q-4, 3-5q\}.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist gültig, da $\overline{a}(\cdot,q)$ eine monotone Funktion ist und daher ihre Extremwerte auf den Rändern annimmt. Um seinen Verlust zu minimieren, setzt Spieler 2 eine gemischte Strategie q ein, so dass dieser Ausdruck minimal wird. Sein garantierter minimaler mittlerer Verlust pro Spiel beträgt also

$$\overline{a}^* = \min_{q\in[0,1]} \max\{7q-4, 3-5q\}.$$

Den minimalen mittleren Verlust $\overline{a}^*$ pro Spiel für Spieler 2 und die dazugehörige gemischte Strategie q^*, mit der dieser Verlust erlitten wird, erhält man dann als Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Gleichungen $a_0(q) = 7q-4$ und $a_1(q) = 3-5q$:

$$7q^*-4 = 3-5q^* \Leftrightarrow 12q^* = 7 \Leftrightarrow q^* = 7/12$$
$$\overline{a}^* = a_0(q^*) = 7q^*-4 = 7\cdot 7/12-4 = 1/12$$

Zeigt Spieler 2 also einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $q^* = 7/12$, so erleidet er damit einen minimalen mittleren Verlust pro Spiel in Höhe von $\overline{a}^* = 1/12$ GE. Mit jeder anderen gemischten Strategie kann er sich gegen diesen Verlust nicht absichern.

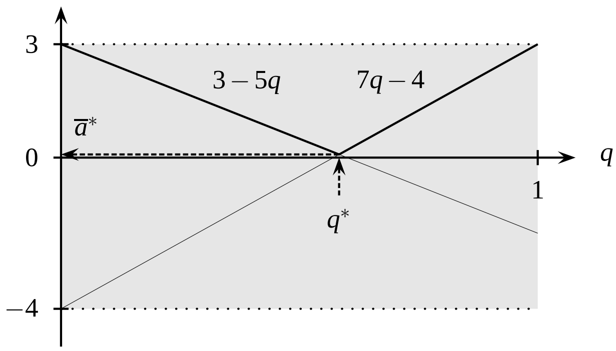

Abbildung 5

Zusammenfassend kann man also festhalten: Zeigt Spieler 1 einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $p^* = 7/12$, so sichert er sich damit einen mittleren Gewinn pro Spiel in Höhe von $1/12$ GE. Auf der anderen Seite verhindert

Spieler 2, dass er im Mittel mehr als $1/12$ GE pro Spiel an Spieler 1 bezahlen muss, wenn er einen Finger ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit $q^* = 7/12$ zeigt. In diesem Sinne sind p^* und q^* optimale Strategien für beide Spieler. Spieler 1 ist aber im Vorteil, da er einen mittleren Gewinn pro Spiel in Höhe von $1/12$ GE bei optimaler Spielweise erhält.

Der Spielwert des Spiels beträgt also $1/12$. Ferner sind $p^* = 7/12$ und $q^* = 7/12$ optimale Strategien für beide Spieler. Die obigen Überlegungen zeigen außerdem, dass dies die einzigen optimalen Strategien für beide Spieler sind.

3.3 ... eines linearen Optimierungsproblems

Das Spiel Zwei-Finger-Morra kann auch mit Hilfe der Spielmatrix

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Die Matrixelemente werden dabei wie folgt gedeutet: Zeigt Spieler 1 i Finger und Spieler 2 k Finger, so erhält Spieler 1 von seinem Gegner a_{ik} GE. Für die erwartete mittlere Auszahlung an Spieler 1 gilt dann

$$\overline{a}(p,q) = (p, 1-p)A \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix},$$

wenn beide Spieler die gemischten Strategien p und q einsetzen. Zwei gemischte Strategien p^* und q^* sind optimal, falls gilt

$$\max_{p\in[0,1]} \overline{a}(p,q^*) = \overline{a}(p^*,q^*) = \min_{q\in[0,1]} \overline{a}(p^*,q).$$

In diesem Fall kann nämlich Spieler 1 durch Einsatz seiner Strategie p^* einen mittleren Mindestgewinn in Höhe von $\overline{a}(p^*,q^*)$ erzwingen (2. Gleichung), wohingegen sein Gegner durch Einsatz seiner Strategie q^* erreichen kann, dass er nicht mehr als $\overline{a}(p^*,q^*)$ bezahlen muss (1. Gleichung). Der Spielwert $W(A)$ ist dann gegeben durch $W(A) = \overline{a}(p^*,q^*)$.

Die optimalen Strategien p^* und q^* sowie der Spielwert $W(A)$ können mit Hilfe eines linearen Optimierungsproblems bestimmt werden. Hierzu sollten jedoch die Koeffizienten a_{ik} der Matrix A größer als 0 sein. Wir addieren nun zu jedem Koeffizienten a_{ik} dieselbe Konstante a, so dass die so erhaltene Matrix $B = (b_{ik}) = (a_{ik} + a)$ nur positive Koeffizienten besitzt. Für die erwartete mittlere Auszahlung an Spieler 1 mit dieser Spielmatrix gilt dann $\overline{b}(p,q) = \overline{a}(p,q) + a$ für alle gemischten Strategien beider Spieler. Insbesondere besitzen beide Spieler hinsichtlich beider Matrixspiele die gleichen optimalen Strategien und für die Spielwerte gilt $W(B) = W(A) + a$.

Im folgenden wird nun beschrieben, wie optimale gemischte Strategien für beide Spieler sowie der Spielwert eines Spiels mit einer Spielmatrix $B = (b_{ik})$, welche nur positive Koeffizienten besitzt, mit Hilfe eines linearen Optimierungsproblems bestimmt werden können. Diese Vorgehensweise ist allgemeiner beschrieben in RAUHUT, B.; SCHMITZ, N.; ZACHOW, E.-W. [4].

Wir betrachten dazu das folgende duale Paar linearer Optimierungsprobleme:

$$(P_1)\left[\begin{array}{l} u_1 + u_2 \overset{!}{=} \max \\[1ex] b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \le 1 \\ b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \le 1 \\[1ex] u_1, u_2 \ge 0 \end{array}\right. \quad \text{und} \quad (P_2)\left[\begin{array}{l} v_1 + v_2 \overset{!}{=} \min \\[1ex] b_{11}v_1 + b_{21}v_2 \ge 1 \\ b_{12}v_1 + b_{22}v_2 \ge 1 \\[1ex] v_1, v_2 \ge 0 \end{array}\right.$$

Da $u_1 = u_2 = 0$ zulässig für (P_1) und $v_1 = v_2 = 1/\min\{b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\}$ zulässig für (P_2) ist, sind beide lineare Optimierungsprobleme zulässig. Sie besitzen daher Lösungen u_1^*, u_2^* bzw. v_1^*, v_2^* mit $u_1^* + u_2^* = v_1^* + v_2^*$. Aufgrund der Nebenbedingungen in (P_2) muss außerdem gelten $v_1^* + v_2^* > 0$. Wir setzen

$$w := 1/(v_1^* + v_2^*) = 1/(u_1^* + u_2^*), \quad p^* := v_1^*/(v_1^* + v_2^*) \in [0,1] \quad \text{und} \quad q^* := u_1^*/(u_1^* + u_2^*) \in [0,1].$$

Dann sind p^* und q^* optimale gemischte Strategien für beide Spieler für das Spiel mit der Spielmatrix B, und für den Spielwert gilt $W(B) = w$.

Um dies nachzuweisen genügt es zu zeigen, dass für alle $p,q \in [0,1]$ gilt $\overline{b}(p,q^*) \leq w \leq \overline{b}(p^*,q)$. Dies folgt aber aus folgender Ungleichungskette ($p,q \in [0,1]$ sind dabei beliebig gewählt):

$$\begin{aligned}
\overline{b}(p,q^*) &= (p,1-p)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^* \\ 1-q^* \end{pmatrix} = (p,1-p)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} \\
&= w\,(p,1-p)\begin{pmatrix} b_{11}u_1^* + b_{12}u_2^* \\ b_{21}u_1^* + b_{22}u_2^* \end{pmatrix} = w\,(p(b_{11}u_1^* + b_{12}u_2^*) + (1-p)(b_{21}u_1^* + b_{22}u_2^*)) \\
&\leq w\,(p \cdot 1 + (1-p) \cdot 1) \quad \text{(aufgrund der Nebenbedingungen in } (P_1)) \\
&= w \\
&= w\,(q \cdot 1 + (1-q) \cdot 1) \\
&\leq w\,(q(b_{11}v_1^* + b_{21}v_2^*) + (1-q)(b_{12}v_1^* + b_{22}v_2^*)) \quad \text{(aufgrund der Nebenbedingungen in } (P_2)) \\
&= w\,(b_{11}v_1^* + b_{21}v_2^*, b_{12}v_1^* + b_{22}v_2^*)\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = w\,(v_1^*, v_2^*)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \\
&= (p^*, 1-p^*)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = \overline{b}(p^*,q)
\end{aligned}$$

Die optimalen gemischten Strategien p^* und q^* für beide Spieler sowie der Spielwert des Spiels Zwei-Finger-Morra können nun wie folgt berechnet werden:

Da nicht alle Elemente der Matrix A positiv sind, addieren wir z. B. die Zahl 5 zu jedem Matrixelement und erhalten die Spielmatrix

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten dann das dazugehörige duale Paar linearer Optimierungsprobleme:

$$\begin{array}{lcl}
u_1 + u_2 \overset{!}{=} \max & & v_1 + v_2 \overset{!}{=} \min \\
3u_1 + 8u_2 \leq 1 & \text{und} & 3v_1 + 8v_2 \geq 1 \\
8u_1 + 1u_2 \leq 1 & & 8v_1 + 1v_2 \geq 1 \\
u_1, u_2 \geq 0 & & v_1, v_2 \geq 0
\end{array}$$

Die Lösungen dieser linearen Optimierungsprobleme können auf unterschiedlichen Wegen bestimmt werden (grafisch, als Lösung eines linearen Gleichungssystems oder mit dem Simplex-Algorithmus). Die Lösungen sind gegeben durch $u_1^* = 7/61$, $u_2^* = 5/61$ und $v_1^* = 7/61$, $v_2^* = 5/61$.

Dann sind $p^* = v_1^*/(v_1^* + v_2^*) = 7/12$ und $q^* = u_1^*/(u_1^* + u_2^*) = 7/12$ optimale gemischte Strategien für beide Spieler für das Spiel mit der Spielmatrix B, und für den Spielwert gilt $W(B) = 1/(v_1^* + v_2^*) = 61/12$. In dem Spiel Zwei-Finger-Morra besitzen beide Spieler dieselben optimalen gemischten Strategien $p^* = 7/12$ und $q^* = 7/12$, und für den Spielwert gilt $W(A) = W(B) - 5 = 1/12$.

3.4 ... einer Simulation

Bei der letzten (approximativen) „Lösungsmethode“ lernen beide Spieler durch das Verhalten des Gegenspielers. Sie merken sich jeweils, wie oft der Gegenspieler seine beiden reinen Strategien bereits eingesetzt hat. Hieraus ergeben sich die entsprechenden relativen Häufigkeiten, mit denen beide Spieler ihre reinen Strategien eingesetzt haben. Dann setzen beide Spieler beim nächsten Spiel gegen die daraus resultierenden (fiktiven) gemischten Strategien optimale (reine) Strategien ein. Diese Lösungsmethode durch fiktives Spielen geht auf Ideen von BROWN, G.W. [1] und ROBINSON, J. [5] zurück. Formal lässt sich dieses Vorgehen folgendermaßen darstellen:

Falls Spieler 1 bei n Spielen $x_{1,n}$ mal einen Finger und $x_{2,n}$ mal zwei Finger gezeigt hat, wurden ein bzw. zwei Finger mit den relativen Häufigkeiten $x_{1,n}/n$ und $x_{2,n}/n$ gezeigt. Hieraus resultiert die entsprechende fiktive gemischte Strategie $p_n = x_{1,n}/n$ (bzw. $1 - p_n = x_{2,n}/n$). Spieler 2 wird nun beim nächsten Spiel eine reine Strategie (Zeigen eines oder zweier Finger) so wählen, dass sein mittlerer Verlust dann minimal wird.

Falls Spieler 2 in dieser Situation einen Finger zeigt, beträgt sein mittlerer Verlust $\overline{a}(p_n, 1) = 3 - 5p_n = 3 - 5x_{1,n}/n$. Entsprechend beträgt sein mittlerer Verlust $\overline{a}(p_n, 0) = 7p_n - 4 = 7x_{1,n}/n - 4$, falls er zwei Finger zeigt. Da er seinen mittleren Verlust minimieren will, wird er beim nächsten Spiel genau dann einen Finger zeigen, wenn $\overline{a}(p_n, 1) \leq \overline{a}(p_n, 0)$, d. h. falls gilt $3 - 5x_{1,n}/n \leq 7x_{1,n}/n - 4$. Dies ist genau dann der Fall, falls $x_{1,n}/n \geq 7/12$ ist.

Für die absoluten Häufigkeiten $y_{1,n}$ und $y_{2,n}$, mit denen Spieler 2 bei n Spielen einen bzw. zwei Finger zeigt, erhält man daher folgende Rekursionsformeln:

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} + 1, \text{ falls } x_{1,n}/n \geq 7/12 \quad \text{und} \quad y_{2,n+1} = y_{2,n} + 1, \text{ falls } x_{1,n}/n < 7/12 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Entsprechende Überlegungen kann man für das Verhalten von Spieler 1 anstellen, falls Spieler 2 bei n Spielen $y_{1,n}$ mal einen Finger und $y_{2,n}$ mal zwei Finger gezeigt hat. Aus den relativen Häufigkeiten $y_{1,n}/n$ und $y_{2,n}/n$ resultiert für Spieler 2 die entsprechende fiktive gemischte Strategie $q_n = y_{1,n}/n$ (bzw. $1 - q_n = y_{2,n}/n$). Spieler 1 wird nun beim nächsten Spiel eine reine Strategie (Zeigen eines oder zweier Finger) so wählen, dass sein mittlerer Gewinn dann maximal wird.

Falls Spieler 1 in dieser Situation einen Finger zeigt, beträgt sein mittlerer Gewinn $\overline{a}(1, q_n) = 3 - 5q_n = 3 - 5y_{1,n}/n$. Entsprechend beträgt sein mittlerer Gewinn $\overline{a}(0, q_n) = 7q_n - 4 = 7y_{1,n}/n - 4$, falls er zwei Finger zeigt. Da er seinen mittleren Gewinn maximieren will, wird er beim nächsten Spiel also genau dann einen Finger zeigen, falls gilt $\overline{a}(1, q_n) \geq \overline{a}(0, q_n)$, d. h. falls gilt $3 - 5y_{1,n}/n \geq 7y_{1,n}/n - 4$. Dies ist genau dann der Fall, falls $y_{1,n}/n \leq 7/12$ ist.

Für die absoluten Häufigkeiten $x_{1,n}$ und $x_{2,n}$, mit denen Spieler 1 bei n Spielen einen bzw. zwei Finger zeigt, erhält man daher folgende Rekursionsformeln:

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + 1, \text{ falls } y_{1,n}/n \leq 7/12 \quad \text{und} \quad x_{2,n+1} = x_{2,n} + 1, \text{ falls } y_{1,n}/n > 7/12 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Durch obige Rekursionsformeln für die absoluten Häufigkeiten ist für beide Spieler eine Folge gemischter Strategien (p_n) bzw. (q_n) definiert, sofern festgelegt wird, wie viele Finger beide Spieler beim ersten Spiel zeigen.

Zeigen beide Spieler beim ersten Spiel einen Finger ($x_{1,1} = y_{1,1} = 1$ und $x_{2,1} = y_{2,1} = 0$, d. h. $p_1 = q_1 = 1$), so ist die weitere Entwicklung in der nachfolgenden Tabelle angegeben:

n	$x_{1,n}$	$x_{2,n}$	$y_{1,n}$	$y_{2,n}$	p_n	q_n	$\overline{a}(p_n, q_n)$
1	1	0	1	0	1.0000	1.0000	−2.0000
2	1	1	2	0	0.5000	1.0000	0.5000
3	1	2	2	1	0.3333	0.6667	0.3333
12	9	3	6	6	0.7500	0.5000	0.2500
120	70	50	62	58	0.5833	0.5167	0.0833
1 200	714	486	709	491	0.5950	0.5908	0.0823
12 000	6 975	5 025	6 941	5 059	0.5813	0.5784	0.0832

Natürlich ist diese deterministische Spielweise beider Spieler nicht optimal. Weiß beispielsweise Spieler 1, dass sein Gegner auf diese Weise spielt, so kann er sich immer (bis auf das erste Spiel) einen Gewinn sichern. Das gleiche gilt entsprechend für Spieler 2. Es kann aber gezeigt werden, dass gilt $\lim_{n\to\infty} \overline{a}(p_n, q_n) = 1/12$. Auf diese Weise kann also der Spielwert des Spiels bestimmt werden. Ferner streben in diesem Fall die gemischten Strategien p_n und q_n gegen die optimalen Strategien beider Spieler.

Wie diese gemischten Strategien gegen die optimalen Strategien streben, ist in Abbildung 6 dargestellt. Hierbei sind nur die ersten 12 gemischten Strategien beider Spieler mit Punkten beginnend mit $(p_1, q_1) = (1, 1)$ dargestellt.

Das gleiche trifft sinngemäß auch zu, wenn sich beide Spieler beim ersten Spiel für eine der drei anderen Möglichkeiten entscheiden. Es ist also egal, wie sich beide Spieler beim ersten Spiel verhalten.

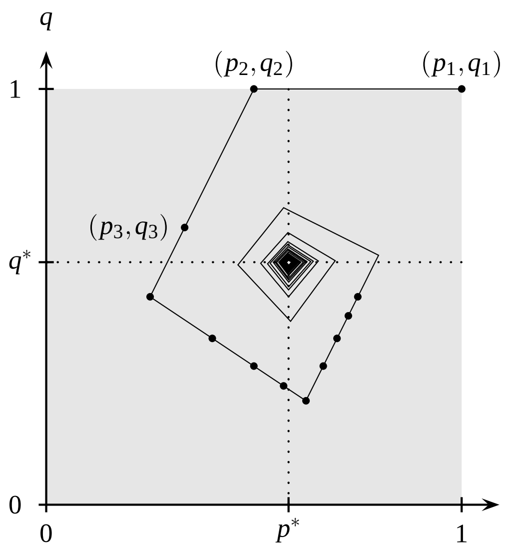

Abbildung 6

4. Generierung der Wahrscheinlichkeit $7/12$

Beide Spieler spielen optimal, wenn sie jeweils einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $7/12$ zeigen. Für das praktische Spielen benötigt man daher ein einfaches Verfahren, mit dem diese Wahrscheinlichkeit generiert werden kann.

Beim Wurf zweier (homogener) Würfel kann die Summe der Augenzahlen nur die Werte $2,3,\ldots,12$ annehmen. Für die Augensumme 2 gibt es nur eine Möglichkeit $(1,1)$. Für die Augensumme 3 gibt es zwei Möglichkeiten $(1,2)$ und $(2,1)$. Für die Augensumme 4 gibt es drei Möglichkeiten $(1,3)$, $(2,2)$ und $(3,1)$. In der nachfolgenden Tabelle ist die Anzahl der Möglichkeiten angegeben, eine bestimmte Augensumme beim Wurf zweier Würfel zu erhalten.

Summe der Augenzahlen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Möglichkeiten	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Es gibt also insgesamt $1+2+\ldots+6=21$ Möglichkeiten eine Augensumme kleiner oder gleich 7 zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt daher $21/36=7/12$.

5. Mindestgewinn nach n Spielen

Da Spieler 1 im Vorteil ist, stellt sich für ihn die Frage, wie schnell er mit diesem Spiel zu Geld kommen kann, falls beide Spieler ihre optimalen gemischten Strategien einsetzen[2]. Nach n Spielen beträgt sein erwarteter Gewinn $n/12$ GE, da sein erwarteter mittlerer Gewinn pro Spiel $1/12$ GE beträgt. Beispielsweise beträgt sein erwarteter Gewinn bei 300 Spielen 25 GE. Er kann aber auch Pech haben und nach 300 Spielen mit einem Verlust von 100 GE dastehen.

Entscheidend ist also nicht nur der erwartete Gewinn[3], sondern auch die Variabilität des Gewinns nach n Spielen. Eine sinnvolle Frage könnte also lauten: Wie hoch ist sein Mindestgewinn nach n Spielen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit (z. B. 90 %)? Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt sich diese Frage leicht beantworten.

Es bezeichne (die Zufallsvariable) X_i den Gewinn beim i-ten Spiel. Dann können der Erwartungswert und die Varianz von X_i wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i) &= \sum_{k\in\{3,-2,-4\}} k\cdot P(X_i=k) \;=\; 3[p^*(1-q^*)+(1-p^*)q^*]-2p^*q^*-4(1-p^*)(1-q^*) \\
&= 3\cdot 2\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12}-2\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}-4\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} \;=\; \frac{1}{12} \;=\; 0.08\overline{3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_i) &= \sum_{k\in\{3,-2,-4\}} [k-\mathrm{E}(X_i)]^2\cdot P(X_i=k) \\
&= \left[3-\frac{1}{12}\right]^2\cdot 2\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{12}+\left[-2-\frac{1}{12}\right]^2\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}+\left[-4-\frac{1}{12}\right]^2\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} \;=\; \frac{1225}{144} \;=\; 8.5069\overline{4}
\end{aligned}$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist der Gewinn nach n Spielen $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ näherungsweise normalverteilt. Für beliebige ganze Zahlen $a,b\in\mathbb{Z}$ gilt

$$P(a\leq S_n\leq b) \;\approx\; \Phi\left(\frac{b+0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung bezeichnet mit $\mu:=\mathrm{E}(X_i)$ und $\sigma^2:=\mathrm{Var}(X_i)$.

[2] Im folgenden wird davon ausgegangen, dass beide Spieler immer ihre optimalen gemischten Strategien einsetzen

[3] Unter Gewinn wird hier immer der Gewinn von Spieler 1 verstanden

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich obige Frage leicht beantworten. Beispielsweise kann ausgerechnet werden, wie hoch der Mindestgewinn UG_n nach n Spielen mit 90 prozentiger Wahrscheinlichkeit ist:

$$\begin{aligned} 0.9 \;=\; P(UG_n \le S_n) \quad &\Rightarrow \quad 0.9 \;\approx\; 1-\Phi\left(\frac{UG_n-0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \;=\; \Phi\left(\frac{0.5+n\mu-UG_n}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\ &\Rightarrow \quad \frac{0.5+n\mu-UG_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \;\approx\; u_{0.9} \\ &\Rightarrow \quad UG_n \;\approx\; 0.5+n\mu-u_{0.9}\cdot\sqrt{n\sigma^2} \;=\; \frac{1}{12}\cdot n+0.5-1.28\cdot\frac{35}{12}\cdot\sqrt{n} \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $u_{0.9} = 1.28$ das 0.9-Quantil der Standard Normalverteilung. Beispielsweise ergibt sich für $n = 300$ der Wert $UG_n \approx -39$ und für $n = 2000$ der Wert $UG_n \approx 0$. D. h. bei 2000 Spielen beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 keinen Verlust macht 90 % oder anders ausgedrückt: bei 2000 Spielen beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust immerhin noch 10 %. Dies sind keine guten Aussichten, liegt aber daran, dass die Varianz σ^2 verhältnismäßig groß ist.

Entsprechend kann mit Hilfe des Ansatzes $0.9 = P(S_n \le OG_n)$ berechnet werden, wie hoch der maximale Gewinn OG_n nach n Spielen mit 90 prozentiger Wahrscheinlichkeit ist:

$$OG_n \approx \frac{1}{12}\cdot n-0.5+1.28\cdot\frac{35}{12}\cdot\sqrt{n}$$

D. h. mit 90 prozentiger Wahrscheinlichkeit ist der Gewinn bei 300 Spielen nicht größer als 89 GE und bei 2000 Spielen nicht größer als 333 GE. In Abbildung 7 sind die näherungsweise berechneten Grenzen UG_n und OG_n grafisch dargestellt.

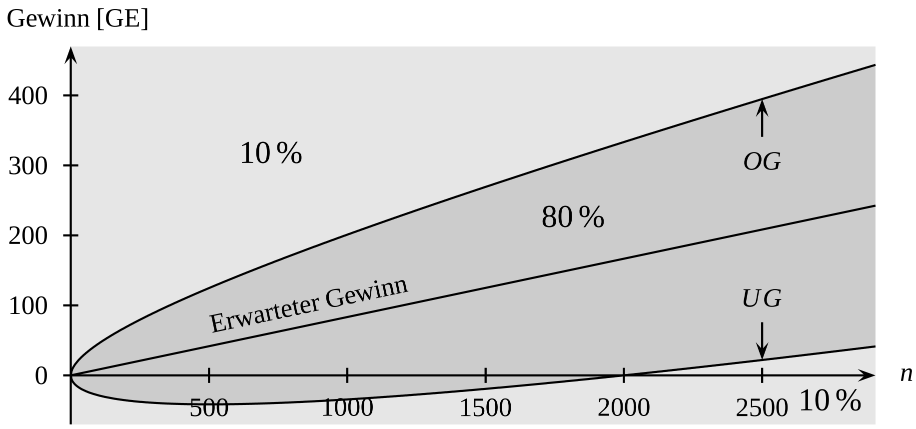

Abbildung 7

6. Schlussbemerkung

Wir haben gesehen, wie eine einfache Fragestellung mit recht unterschiedlichen mathematischen Methoden gelöst werden kann. Diese Methoden lassen sich auch entsprechend anwenden, wenn beide Spieler mehr als zwei reine Strategien zur Verfügung haben. Besitzt Spieler 1 die reinen Strategien $x_1,\ldots,x_m$ und Spieler 2 die reinen Strategien $y_1,\ldots,y_n$, so sind ihre gemischten Strategien gegeben durch die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sie ihre reinen Strategien einsetzen $(p_1,\ldots,p_m)$ bzw. $(q_1,\ldots,q_n)$.

Beispiel 1 (Stein-Schere-Papier[4]):

> Zwei Spieler zeigen gleichzeitig durch Gebärden einen der drei Gegenstände Stein, Schere oder Papier. „Stein gewinnt gegenüber Schere“ (Stein schleift Schere), „Schere gewinnt gegenüber Papier“ (Schere schneidet Papier) und „Papier gewinnt gegenüber Stein“ (Papier wickelt Stein ein). Der Gewinner erhält von seinem Gegner eine GE. Zeigen beide Spieler den gleichen Gegenstand, ist das Spiel unentschieden und es kommt zu keiner Auszahlung.

[4]Chinesische Version: Mann isst Huhn, Huhn frisst Würmer, Würmer fressen Mann

Auch hier besitzen beide Spieler keine optimalen reinen Strategien. Man kann aber nachrechnen, dass beide Spieler optimal handeln, wenn sie die gemischten Strategien $p^* = (1/3, 1/3, 1/3) = q^*$ einsetzen, d. h. jeden dieser Gegenstände mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigen. Der Spielwert dieses Spiels ist 0, d. h. es handelt sich hierbei um ein faires Spiel.

Beispiel 2 (Die kleinste Zahl gewinnt):

Zwei Spieler denken sich gleichzeitig eine natürliche Zahl aus. Haben sich beide Spieler die gleiche Zahl ausgedacht, ist das Spiel unentschieden. Ansonsten hat der Spieler **eine GE gewonnen**, der sich die **kleinste Zahl** ausgedacht hat mit einer Ausnahme: hat sich ein Spieler eine **um eins kleinere** Zahl ausgedacht als sein Gegner, so hat er **zwei GE verloren**.

Auch bei diesem Spiel gibt es keine optimalen reinen Strategien. Hier kann man sich zunächst überlegen, dass es nachteilig ist, sich eine Zahl größer als 5 auszudenken. Dann kann man nachrechnen, dass beide Spieler die optimalen gemischten Strategien $p^* = (1/16, 5/16, 4/16, 5/16, 1/16) = q^*$ besitzen, d. h. beide Spieler sollten sich nur die Zahlen von 1 bis 5 mit diesen Wahrscheinlichkeiten ausdenken. Also die 1 mit der Wahrscheinlichkeit $1/16$, die 2 mit der Wahrscheinlichkeit $5/16$ usw. Der Spielwert dieses Spiels ist ebenfalls 0, d. h. es handelt sich hierbei um ein faires Spiel.

Ziel dieses Aufsatzes war es nicht, die vorgestellten Methoden noch genauer zu diskutieren, sondern Lust zu wecken, sich mit etwas mehr Mathematik zu beschäftigen. Und interessante Anregungen dazu sind reichlich vorhanden. Das hier vorgestellte Beispiel ist nur der erste Schritt in ein umfangreiches (und vielen unbekanntes) Gebiet der Mathematik – der Spieltheorie[5].

7. Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1: Zwei Spieler heben gleichzeitig einen oder zwei Finger. Die Auszahlung an beide Spieler in Abhängigkeit der gezeigten Finger ist in folgender Tabelle angegeben:

Anzahl der gezeigten Finger		Auszahlungsbetrag [GE] an	
Spieler 1	Spieler 2	Spieler 1	Spieler 2
☝	☝	7	−7
☝	✌	−3	3
✌	☝	−2	2
✌	✌	0	0
4 mögliche Fälle		$\sum = 2$	$\sum = -2$

Stellen Sie dieses Spiel mit Hilfe einer Spielmatrix dar und bestimmen Sie optimale Strategien für beide Spieler sowie den Spielwert dieses Spiels mit den in Abschnitt 3 dargelegten Methoden. Handelt es sich hierbei um ein faires Spiel oder ist einer der beiden Spieler im Vorteil?

Lösung:
Die Spielmatrix dieses Spiels ist gegeben durch

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spieler 1 kann sich durch Zeigen zweier Finger seinen Mindestgewinn in Höhe von

$$\max_{i \in \{1,2\}} \min_{k \in \{1,2\}} a_{ik} = \max\{-3, -2\} = -2 \text{ GE}$$

sichern. Andererseits erleidet Spieler 2 durch Zeigen zweier Finger seinen minimalen Verlust in Höhe von

$$\min_{k \in \{1,2\}} \max_{i \in \{1,2\}} a_{ik} = \min\{7, 0\} = 0 \text{ GE}.$$

[5] Die Spieltheorie ist die Theorie strategischer Spiele und wurde von dem Mathematiker J. von Neumann gemeinsam mit dem Wirtschaftswissenschaftler O. Morgenstern entwickelt und dient zur Analyse von ökonomischen Interessensgegensätzen und sozialen Konfliktsituationen. Ihr klassisches Werk ist VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. [3].

Spieler 1 kann durch den Einsatz einer reinen Strategie also sicherstellen, dass sein Auszahlungsbetrag mindestens -2 GE beträgt, wohingegen Spieler 2 durch den Einsatz einer reinen Strategie nur sicherstellen kann, dass Spieler 1 nicht mehr als 0 GE gewinnt. Daher ist ein optimales Spielen hier nicht möglich, wenn beide Spieler nur reine Strategien einsetzen. Optimale Strategien können also nur gefunden werden, wenn beide Spieler gemischte Strategien einsetzen dürfen.

Zeigt Spieler 1 bzw. Spieler 2 einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. q, so beträgt die erwartete mittlere Auszahlung an Spieler 1

$$\begin{aligned}
\overline{a}(p,q) &= (p,1-p)A\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+(a_{21}-a_{22})q+a_{22} \\
&= 12pq-3p-2q.
\end{aligned}$$

Bestimmung des Spielwertes und gegebenenfalls optimaler Strategien mit Hilfe ...

1. ... eines Gleichungssystems:

   Wegen $\overline{a}(p^*,0)=\overline{a}(p^*,1) \Leftrightarrow -3p^*=9p^*-2 \Leftrightarrow p^*=1/6$ nimmt $\overline{a}(p^*,\cdot)$ für alle $q\in[0,1]$ den gleichen Wert an, denn es gilt $\overline{a}(p^*,q)=12p^*q-3p^*-2q=-1/2$ für alle $q\in[0,1]$. Umgekehrt nimmt wegen $\overline{a}(0,q^*)=\overline{a}(1,q^*) \Leftrightarrow -2q^*=10q^*-3 \Leftrightarrow q^*=1/4$ die Funktion $\overline{a}(\cdot,q^*)$ für alle $p\in[0,1]$ den gleichen Wert an, denn es gilt $\overline{a}(p,q^*)=12pq^*-3p-2q^*=-1/2$ für alle $p\in[0,1]$.

   Falls Spieler 1 also mit einer Wahrscheinlichkeit von $p^*=1/6$ einen Finger zeigt, erleidet er einen mittleren Verlust pro Spiel in Höhe $1/2$ GE unabhängig davon, wie sich Spieler 2 verhält. Umgekehrt erzielt Spieler 2 einen mittleren Gewinn pro Spiel in Höhe von $1/2$ GE, falls er einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $q^*=1/4$ zeigt unabhängig davon, wie sich Spieler 1 verhält. Dies bedeutet: p^* und q^* sind optimale (gemischte) Strategien für beide Spieler und der Spielwert dieses Spiels beträgt $W(A)=-1/2$.

2. ... eines Extremwertproblems:

   Der garantierte mittlere Mindestgewinn pro Spiel für Spieler 1 beträgt

$$\begin{aligned}
\overline{a}_* &= \max_{p\in[0,1]}\min_{q\in[0,1]}\overline{a}(p,q) \\
&= \max_{p\in[0,1]}\min_{q\in[0,1]}(12pq-3p-2q) \\
&= \max_{p\in[0,1]}\min_{q\in\{0,1\}}(12pq-3p-2q) \\
&= \max_{p\in[0,1]}\min\{-3p,\,9p-2\}.
\end{aligned}$$

   Den mittleren Mindestgewinn $\overline{a}_*$ pro Spiel für Spieler 1 und die dazugehörige gemischte Strategie p^*, mit der dieser Gewinn erzielt wird, erhält man dann als Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Gleichungen $a_0(p)=-3p$ und $a_1(p)=9p-2$. Es folgt $p^*=1/6$ und $\overline{a}_*=a_0(p^*)=-1/2$.

   Entsprechend beträgt der garantierte minimale mittlere Verlust pro Spiel für Spieler 2

$$\begin{aligned}
\overline{a}^* &= \min_{q\in[0,1]}\max_{p\in[0,1]}\overline{a}(p,q) \\
&= \min_{q\in[0,1]}\max_{p\in[0,1]}(12pq-3p-2q) \\
&= \min_{q\in[0,1]}\max_{p\in\{0,1\}}(12pq-3p-2q) \\
&= \min_{q\in[0,1]}\max\{-2q,\,10q-3\}.
\end{aligned}$$

   Den garantierten minimalen mittleren Verlust $\overline{a}^*$ pro Spiel für Spieler 2 und die dazugehörige gemischte Strategie q^*, mit der dieser Verlust erzielt wird, erhält man dann als Schnittpunkt der beiden Geraden mit den Gleichungen $a_0(q)=-2q$ und $a_1(q)=10q-3$. Es folgt $q^*=1/4$ und $\overline{a}^*=a_0(q^*)=-1/2$.

   Zusammenfassend kann man also festhalten: Zeigt Spieler 1 einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $p^*=1/6$, erleidet er damit einen maximalen mittleren Verlust pro Spiel in Höhe von $1/2$ GE. Auf der anderen

Seite sichert sich Spieler 2 einen mittleren Mindestgewinn in Höhe von $1/2$ GE, wenn er einen Finger mit der Wahrscheinlichkeit $q^* = 1/4$ zeigt. In diesem Sinne sind p^* und q^* optimale Strategien für beide Spieler und für den Spielwert gilt $W(A) = -1/2$.

3. ... eines linearen Optimierungsproblems:

   Da nicht alle Elemente der Matrix A positiv sind, addieren wir z. B. die Zahl 4 zu jedem Matrixelement und erhalten die Spielmatrix

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Das dazugehörige duale Paar linearer Optimierungsprobleme ist gegeben durch:

$$\begin{array}{lcl} u_1 + u_2 \overset{!}{=} \max & & v_1 + v_2 \overset{!}{=} \min \\ 11u_1 + 1u_2 \leq 1 & & 11v_1 + 2v_2 \geq 1 \\ \;\;2u_1 + 4u_2 \leq 1 & \text{und} & \;\;1v_1 + 4v_2 \geq 1 \\ u_1, u_2 \geq 0 & & v_1, v_2 \geq 0 \end{array}$$

   Die Lösungen dieser linearen Optimierungsprobleme sind gegeben durch $u_1^* = 1/14$, $u_2^* = 3/14$ und $v_1^* = 1/21$, $v_2^* = 5/21$.

   Dann sind $p^* = v_1^*/(v_1^* + v_2^*) = 1/6$ und $q^* = u_1^*/(u_1^* + u_2^*) = 1/4$ optimale gemischte Strategien für beide Spieler für das Spiel mit der Spielmatrix B, und für den Spielwert gilt $W(B) = 1/(v_1^* + v_2^*) = 7/2$. In dem Spiel mit der Matrix A besitzen beide Spieler dieselben optimalen gemischten Strategien $p^* = 1/6$ und $q^* = 1/4$, und für den Spielwert gilt $W(A) = W(B) - 4 = -1/2$.

4. ... einer Simulation:

   Wir gehen davon aus, dass Spieler 1 bei n Spielen $x_{1,n}$ mal einen Finger und $x_{2,n}$ mal zwei Finger gezeigt hat. Entsprechend habe Spieler 2 bei n Spielen $y_{1,n}$ mal einen Finger und $y_{2,n}$ mal zwei Finger gezeigt. Hieraus resultieren die entsprechenden fiktiven gemischten Strategien $p_n = x_{1,n}/n$ bzw. $q_n = y_{1,n}/n$.

   Falls Spieler 1 in dieser Situation einen Finger zeigt, beträgt sein mittlerer Gewinn $\overline{a}(1, q_n) = 10q_n - 3 = 10y_{1,n}/n - 3$. Entsprechend beträgt sein mittlerer Gewinn $\overline{a}(0, q_n) = -2q_n = -2y_{1,n}/n$, falls er zwei Finger zeigt. Da er seinen mittleren Gewinn maximieren will, wird er beim nächsten Spiel also genau dann einen Finger zeigen, falls gilt $\overline{a}(1, q_n) \geq \overline{a}(0, q_n)$, d. h. falls gilt $10y_{1,n}/n - 3 \geq -2y_{1,n}/n$. Dies ist genau dann der Fall, falls $y_{1,n}/n \geq 1/4$ ist. Für die absoluten Häufigkeiten $x_{1,n}$ und $x_{2,n}$ erhält man daher folgende Rekursionsformeln:

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + 1, \text{ falls } y_{1,n}/n \geq 1/4 \quad \text{und} \quad x_{2,n+1} = x_{2,n} + 1, \text{ falls } y_{1,n}/n < 1/4 \quad (n \in \mathbb{N})$$

   Falls Spieler 2 in dieser Situation einen Finger zeigt, beträgt sein mittlerer Verlust $\overline{a}(p_n, 1) = 9p_n - 2 = 9x_{1,n}/n - 2$. Entsprechend beträgt sein mittlerer Verlust $\overline{a}(p_n, 0) = -3p_n = -3x_{1,n}/n$, falls er zwei Finger zeigt. Da er seinen mittleren Verlust minimieren will, wird er beim nächsten Spiel genau dann einen Finger zeigen, wenn $\overline{a}(p_n, 1) \leq \overline{a}(p_n, 0)$, d. h. falls gilt $9x_{1,n}/n - 2 \leq -3x_{1,n}/n$. Dies ist genau dann der Fall, falls $x_{1,n}/n \leq 1/6$ ist. Für die absoluten Häufigkeiten $y_{1,n}$ und $y_{2,n}$ erhält man daher folgende Rekursionsformeln:

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} + 1, \text{ falls } x_{1,n}/n \leq 1/6 \quad \text{und} \quad y_{2,n+1} = y_{2,n} + 1, \text{ falls } x_{1,n}/n > 1/6 \quad (n \in \mathbb{N})$$

   Durch diese Rekursionsformeln für die absoluten Häufigkeiten ist für beide Spieler eine Folge gemischter Strategien (p_n) bzw. (q_n) definiert, sofern festgelegt wird, wie viele Finger beide Spieler beim ersten Spiel zeigen.

   Zeigen beide Spieler beim ersten Spiel einen Finger ($x_{1,1} = y_{1,1} = 1$ und $x_{2,1} = y_{2,1} = 0$, d. h. $p_1 = q_1 = 1$), so ist die weitere Entwicklung in der nachfolgenden Tabelle angegeben. Es gilt $W(A) = \lim_{n\to\infty} \overline{a}(p_n, q_n) = -1/2$. Ferner streben in diesem Fall die gemischten Strategien p_n und q_n gegen die optimalen Strategien beider Spieler $p^* = 1/6$ und $q^* = 1/4$. Das gleiche trifft sinngemäß auch zu, wenn sich beide Spieler beim ersten Spiel für eine der drei anderen Möglichkeiten entscheiden.

n	$x_{1,n}$	$x_{2,n}$	$y_{1,n}$	$y_{2,n}$	p_n	q_n	$\overline{a}(p_n,q_n)$
1	1	0	1	0	1.0000	1.0000	7.0000
2	2	0	1	1	1.0000	0.5000	2.0000
3	3	0	1	2	1.0000	0.3333	0.3333
12	5	7	1	11	0.4167	0.0833	−1.0000
120	28	92	29	91	0.2333	0.2417	−0.5067
1 200	211	989	306	894	0.1758	0.2550	−0.4995
12 000	2 086	9 914	2 986	9 014	0.1738	0.2488	−0.5001

Mit diesen vier Methoden wurde jeweils gezeigt, dass $p^* = 1/6$ und $q^* = 1/4$ optimale gemischte Strategien für beide Spieler sind und der Spielwert dieses Spiels $W(A) = -1/2$ ist. Da der Spielwert negativ ist, ist Spieler 2 im Vorteil. Die Rechnungen haben außerdem gezeigt, dass es bei diesem Spiel keine weiteren optimalen Strategien gibt.

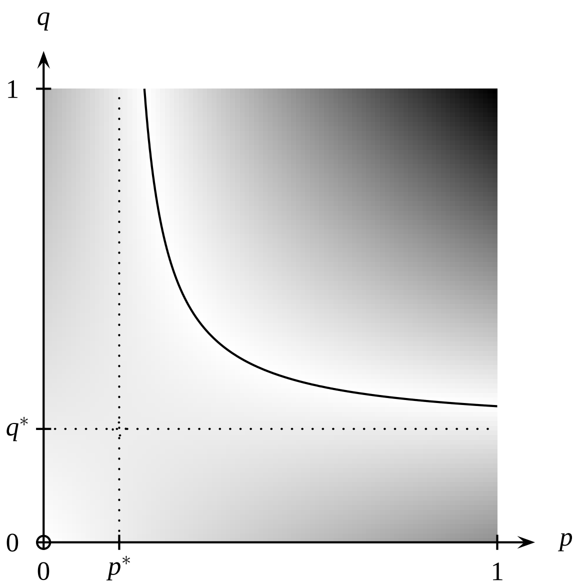

Abbildung 8

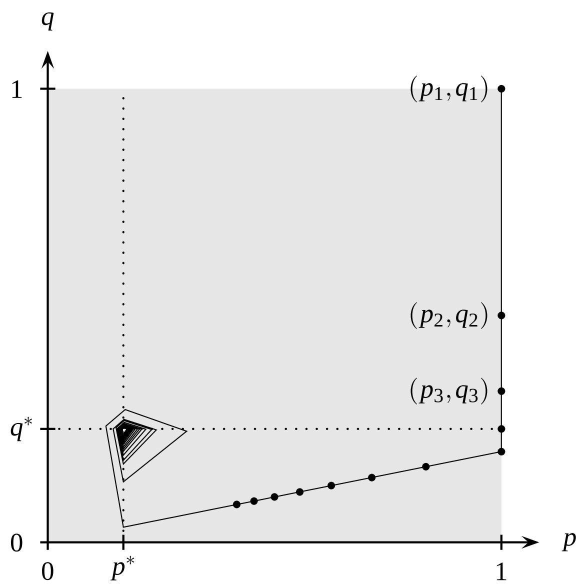

Abbildung 9

In Abbildung 8 ist die Funktion $\overline{a}$ mit Hilfe eines Contourplots dargestellt. Bei der eingezeichneten Hyperbel und dem Punkt $(0,0)$ ist die Fläche weiß, da dort die Funktion $\overline{a}$ den Wert 0 annimmt. Hier ist keiner der beiden Spieler im Vorteil. Im Bereich oberhalb der Hyperbel ist Spieler 1 im Vorteil ($\overline{a} > 0$) und im Bereich unterhalb und links der Hyperbel mit Ausnahme des Punktes $(0,0)$ ist Spieler 2 im Vorteil ($\overline{a} < 0$). Bei den punktierten Linien ($p = p^*$ bzw. $q = q^*$) hat man eine einheitliche Färbung. Dies bedeutet, dass p^* und q^* optimale Strategien für beide Spieler sind und Spieler 2 im Vorteil ist.

In Abbildung 9 ist dargestellt, wie die gemischten Strategien p_n und q_n bei der Simulation gegen die optimalen Strategien beider Spieler streben. Hierbei sind wieder nur die ersten 12 gemischten Strategien beider Spieler mit Punkten beginnend mit $(p_1,q_1) = (1,1)$ dargestellt.

Aufgabe 2: Besitzen zwei Spieler bei einem Spiel jeweils zwei reine Strategien, dann sind zwei gemischte Strategien p^* und q^* genau dann optimal für beide Spieler, falls gilt

$$\min_{q\in[0,1]} \overline{a}(p^*,q) = \max_{p\in[0,1]} \overline{a}(p,q^*),$$

denn Spieler 1 sichert sich durch Einsatz der Strategie p^* einen mittleren Mindestgewinn in Höhe von $\min_{q\in[0,1]} \overline{a}(p^*,q)$, wohingegen Spieler 2 durch Einsatz der Strategie q^* verhindern kann, dass er im Mittel mehr als $\max_{p\in[0,1]} \overline{a}(p,q^*)$ an Spieler 1 bezahlen muss. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die beiden Funktionen $\overline{a}(p^*,\cdot)$ und $\overline{a}(\cdot,q^*)$ konstant sind[6]. Von dieser Tatsache wurde Gebrauch gemacht, um optimale Strategien für beide Spieler mit Hilfe eines Gleichungssystems zu berechnen.

[6] Strategien, die diese Eigenschaften besitzen, heißen auch Egalisatoren.

(a) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt. D. h. die Funktionen $\overline{a}(p^*,\cdot)$ und $\overline{a}(\cdot,q^*)$ müssen nicht konstant sein, wenn p^* und q^* optimale Strategien für beide Spieler sind.

(b) Zeigen Sie, dass p^* bzw. q^* keine optimale Strategien sein müssen, falls nur eine der beiden Funktionen $\overline{a}(p^*,\cdot)$ bzw. $\overline{a}(\cdot,q^*)$ konstant ist.

Betrachten Sie dazu das Spiel mit der Matrix $A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Spieler 1 kann sich durch Einsatz der reinen Strategie $i = 1$ seinen Mindestgewinn in Höhe von

$$\max_{i\in\{1,2\}} \min_{k\in\{1,2\}} a_{ik} = \max\{1,0\} = 1$$

sichern. Andererseits erleidet Spieler 2 durch Einsatz der reinen Strategie $k = 2$ seinen minimalen Verlust in Höhe von

$$\min_{k\in\{1,2\}} \max_{i\in\{1,2\}} a_{ik} = \min\{2,1\} = 1.$$

Daher sind diese reinen Strategien hier bereits optimal. Diese reinen Strategien entsprechen den (optimalen) gemischten Strategien $p^* = 1$ bzw. $q^* = 0$. Wegen

$$\overline{a}(p^*,0) = a_{12} = 1 \neq 2 = a_{11} = \overline{a}(p^*,1) \quad \text{und} \quad \overline{a}(0,q^*) = a_{22} = 0 \neq 1 = a_{12} = \overline{a}(1,q^*)$$

sind die beiden Funktionen $\overline{a}(p^*,\cdot)$ und $\overline{a}(\cdot,q^*)$ nicht konstant.

(b) Die Auszahlungsfunktion dieses Spiels ist gegeben durch $\overline{a}(p,q) = 2pq + p - q$ für alle $p,q \in [0,1]$.

Es ist $\overline{a}(p^*,0) = \overline{a}(p^*,1) \Leftrightarrow p^* = 3p^* - 1 \Leftrightarrow p^* = 1/2$. Für alle $q \in [0,1]$ gilt daher $\overline{a}(p^*,q) = 1/2$, d. h. $\overline{a}(p^*,\cdot)$ ist konstant. p^* ist aber keine optimale Strategie für Spieler 1. Dann gibt es aber kein $q^* \in [0,1]$, so dass die Funktion $\overline{a}(\cdot,q^*)$ konstant ist. Dies zeigt auch die folgende Rechnung: $\overline{a}(0,q^*) = \overline{a}(1,q^*) \Leftrightarrow -q^* = q^* + 1 \Leftrightarrow q^* = -1/2$

Dies war ein sehr einfaches Beispiel. Es gibt aber auch Gegenbeispiele, bei denen beide Spieler keine reinen optimalen Strategien besitzen.

In Abbildung 10 ist die Auszahlungsfunktion $\overline{a}$ als Contourplot dargestellt. Bei der durchgezogenen Linie ist $\overline{a} = 0$. Rechts der Linie ist Spieler 1 im Vorteil ($\overline{a} > 0$) und links davon Spieler 2 ($\overline{a} < 0$). Daher ist sofort klar, dass Spieler 1 im Vorteil ist (für alle $p > 1/3$ und alle $q \in [0,1]$ ist $\overline{a}(p,q) > 0$).

Man sieht hier sehr deutlich, dass $p_e = 0.5$ ein Egalisator für Spieler 1 ist ($\overline{a}(p_e,\cdot)$ konstant). Man sieht aber auch, dass die Funktion $\overline{a}(\cdot,q)$ für alle $q \in [0,1]$ streng monoton wachsend ist. Daher kann der Egalisator $p_e = 0.5$ keine optimale Strategie für Spieler 1 sein, sondern nur $p^* = 1$.

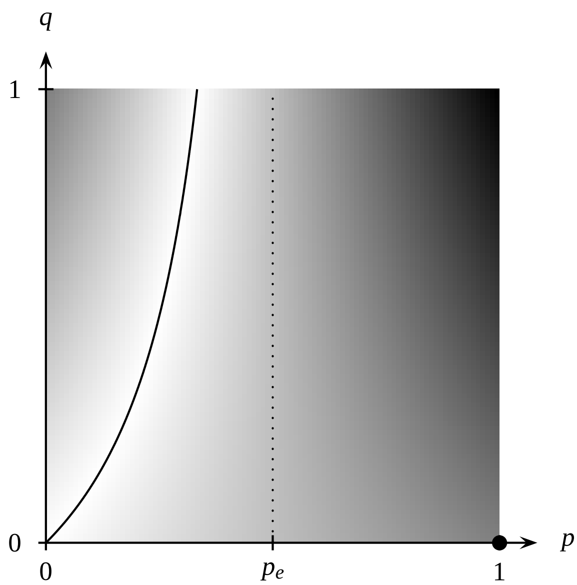

Abbildung 10

Da für kein $q \in [0,1]$ eine einheitliche (waagrechte) Färbung vorliegt, kann Spieler 2 keinen Egalisator besitzen. Man sieht hier, dass Spieler 2 durch Wahl von $q^* = 0$ den maximalen Gewinn seines Gegners am meisten schmälern kann. Daher ist diese Strategie für Spieler 2 optimal.

Aufgabe 3: Stellen Sie das Spiel Stein-Schere-Papier mit Hilfe einer Spielmatrix dar und bestimmen Sie optimale Strategien für beide Spieler sowie den Spielwert dieses Spiels mit den in Abschnitt 3 dargelegten Methoden. Handelt es sich hierbei um ein faires Spiel oder ist einer der beiden Spieler im Vorteil?

Lösung:
Die reinen Strategien Stein, Schere und Papier seien mit 1, 2 bzw. 3 bezeichnet. Ferner sei a_{ik} die Auszahlung

an Spieler 1 in GE, wenn Spieler 1 die Strategie i und Spieler 2 die Strategie k einsetzt. Dann kann das Spiel Stein-Schere-Papier mit Hilfe folgender Matrix beschrieben werden:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beide Spieler können hier durch Einsetzen einer reinen Strategie nur verlieren, wenn sich der jeweilige Gegner darauf einstellt. Optimale Strategien können hier also nur gefunden werden, wenn beide Spieler gemischte Strategien einsetzen dürfen.

Eine optimale Strategie für Spieler 1 besteht in der Angabe von Wahrscheinlichkeiten p_i, mit denen er die reinen Strategien i einsetzt ($i = 1,2,3$). Die Menge der gemischten Strategien von Spieler 1 ist also gegeben durch $P = \{(p_1, p_2, p_3)^T : p_i \geq 0 \text{ und } p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$. Die reinen Strategien i entsprechen dann den gemischten Strategien e_i ($i = 1,2,3$), wobei e_i den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Entsprechend sind die gemischten Strategien von Spieler 2 gegeben durch $Q = \{(q_1, q_2, q_3)^T : q_i \geq 0 \text{ und } q_1 + q_2 + q_3 = 1\}$.

Setzen Spieler 1 und Spieler 2 die gemischten Strategien p bzw. q ein, so beträgt die erwartete mittlere Auszahlung an Spieler 1

$$\overline{a}(p,q) = p^T A q.$$

Bestimmung des Spielwertes und gegebenenfalls optimaler Strategien mit Hilfe ...

1. ... eines Gleichungssystems:

   Ein Egalisator $p_e = (p_1, p_2, p_3)^T$ (vgl. Aufgabe 2) von Spieler 1 muss folgende Eigenschaften besitzen:

   $$\overline{a}(p_e, e_1) \overset{(1)}{=} \overline{a}(p_e, e_2) \overset{(2)}{=} \overline{a}(p_e, e_3) \quad \text{und} \quad p_1 + p_2 + p_3 \overset{(3)}{=} 1$$

   Hier gilt $\overline{a}(p_e, e_1) = -p_2 + p_3$, $\overline{a}(p_e, e_2) = p_1 - p_3$ und $\overline{a}(p_e, e_3) = -p_1 + p_2$. Daher sind die beiden ersten Gleichungen (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn $p_1 = p_2 = p_3$ gilt. Zusammen mit (3) erhält man daraus die eindeutige Lösung $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. Man rechnet leicht nach, dass für $p_e = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ und alle $q \in Q$ gilt $\overline{a}(p_e, q) = 0$. Daher ist p_e ein Egalisator von Spieler 1.

   Entsprechend zeigt man durch Lösen des Gleichungssystems

   $$\overline{a}(e_1, q_e) = \overline{a}(e_2, q_e) = \overline{a}(e_3, q_e) \quad \text{und} \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1,$$

   dass $q_e = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ ein Egalisator von Spieler 2 ist mit $\overline{a}(\cdot, q_e) = 0$.

   Daher sind $p^* = p_e$ und $q^* = q_e$ optimale (gemischte) Strategien für beide Spieler und der Spielwert dieses Spiels beträgt $W(A) = \overline{a}(p_e, q_e) = 0$.

2. ... eines Extremwertproblems:

   Der garantierte mittlere Mindestgewinn pro Spiel für Spieler 1 beträgt

   $$\begin{aligned} \overline{a}_* &= \max_{p \in P} \min_{q \in Q} \overline{a}(p,q) \\ &= \max_{p \in P} \min_{q \in Q} p^T A q \\ &= \max_{p \in P} \min\{p^T A e_1, p^T A e_2, p^T A e_3\} \\ &= \max_{p \in P} \min\{-p_2 + p_3, p_1 - p_3, -p_1 + p_2\}. \end{aligned}$$

   Der mittlere Mindestgewinn pro Spiel für Spieler 1 beträgt daher $\overline{a}_* = 0$ und die dazugehörige gemischte Strategie p^*, mit der dieser Gewinn erzielt wird, ist gegeben durch $p^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$.

Entsprechend beträgt der garantierte minimale mittlere Verlust pro Spiel für Spieler 2

$$\begin{aligned}\overline{a}^* &= \min_{q\in Q}\max_{p\in P}\overline{a}(p,q)\\ &= \min_{q\in Q}\max_{p\in P} p^T A q\\ &= \min_{q\in Q}\max\{e_1^T A q, e_2^T A q, e_3^T A q\}\\ &= \min_{q\in Q}\max\{q_2-q_3, -q_1+q_3, q_1-q_2\}.\end{aligned}$$

Der garantierte minimale mittlere Verlust pro Spiel für Spieler 2 beträgt daher $\overline{a}^* = 0$ und die dazugehörige gemischte Strategie q^*, mit der dieser Verlust erzielt wird, ist gegeben durch $q^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$.

Zusammenfassend kann man also festhalten: Spieler 1 erzielt durch Einsatz der gemischten Strategie p^* einen mittleren Mindestgewinn in Höhe von 0 GE. Auf der anderen Seite verhindert Spieler 2 durch Einsatz der gemischten Strategie q^*, dass er im Mittel mehr als 0 GE an Spieler 1 bezahlen muss. In diesem Sinne sind p^* und q^* optimale Strategien für beide Spieler und für den Spielwert gilt $W(A) = 0$.

3. ... eines linearen Optimierungsproblems:

Da nicht alle Elemente der Matrix A positiv sind, addieren wir z. B. die Zahl 2 zu jedem Matrixelement und erhalten die Spielmatrix

$$B = (b_{ik}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Das dazugehörige duale Paar linearer Optimierungsprobleme

$$\begin{array}{lcl} u_1+u_2+u_3 \overset{!}{=} \max & & v_1+v_2+v_3 \overset{!}{=} \min \\ 2u_1+3u_2+1u_3 \le 1 & & 2v_1+1v_2+3v_3 \ge 1\\ 1u_1+2u_2+3u_3 \le 1 & \text{und} & 3v_1+2v_2+1v_3 \ge 1\\ 3u_1+1u_2+2u_3 \le 1 & & 1v_1+3v_2+2v_3 \ge 1\\ u_1,u_2,u_3 \ge 0 & & v_1,v_2,v_3 \ge 0\end{array}$$

besitzt die Lösungen $u_1^* = u_2^* = u_3^* = 1/6$ und $v_1^* = v_2^* = v_3^* = 1/6$. Ferner gilt $w := 1/(v_1^*+v_2^*+v_3^*) = 1/(u_1^*+u_2^*+u_3^*) = 2$.

Dann sind $p^* = w\cdot(v_1^*, v_2^*, v_3^*)^T = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ und $q^* = w\cdot(u_1^*, u_2^*, u_3^*)^T = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ optimale gemischte Strategien für beide Spieler für das Spiel mit der Spielmatrix B, und für den Spielwert gilt $W(B) = w = 2$. In dem Spiel mit der Matrix A besitzen beide Spieler dieselben optimalen gemischten Strategien, und für den Spielwert gilt $W(A) = W(B) - 2 = 0$.

4. ... einer Simulation:

Wir gehen davon aus, dass Spieler 1 bzw. Spieler 2 bei n Spielen $x_{i,n}$ bzw. $y_{i,n}$ mal die reine Strategie i eingesetzt hat ($i = 1,2,3$). Hieraus resultieren die entsprechenden fiktiven gemischten Strategien $p_n = (x_{1,n}/n, x_{2,n}/n, x_{3,n}/n)^T$ bzw. $q_n = (y_{1,n}/n, y_{2,n}/n, y_{3,n}/n)^T$.

Falls Spieler 1 in dieser Situation die reine Strategie 1, 2 bzw. 3 einsetzt, beträgt sein mittlerer Gewinn $\overline{a}(e_1,q_n) = q_{n_2} - q_{n_3}$, $\overline{a}(e_2,q_n) = -q_{n_1} + q_{n_3}$ bzw. $\overline{a}(e_3,q_n) = q_{n_1} - q_{n_2}$. Er wird beim nächsten Spiel also eine reine Strategie i einsetzen, für die $\overline{a}(e_i,q_n)$ maximal wird, d. h. für die der entsprechende Ausdruck $y_{2,n} - y_{3,n}$, $-y_{1,n} + y_{3,n}$ bzw. $y_{1,n} - y_{2,n}$ maximal ist. Dies ist nicht immer eindeutig.

Falls Spieler 2 in dieser Situation die reine Strategie 1, 2 bzw. 3 einsetzt, beträgt sein mittlerer Verlust $\overline{a}(p_n,e_1) = -p_{n_2} + p_{n_3}$, $\overline{a}(p_n,e_2) = p_{n_1} - p_{n_3}$ bzw. $\overline{a}(p_n,e_3) = -p_{n_1} + p_{n_2}$. Er wird beim nächsten Spiel also eine reine Strategie i einsetzen, für die $\overline{a}(p_n,e_i)$ minimal wird, d. h. für die der entsprechende Ausdruck $-x_{2,n} + x_{3,n}$, $x_{1,n} - x_{3,n}$ bzw. $-x_{1,n} + x_{2,n}$ minimal ist. Auch dies ist nicht immer eindeutig.

Durch die Folge der absoluten Häufigkeiten ist für beide Spieler eine Folge gemischter Strategien (p_n) bzw. (q_n) definiert. Es muss nur noch festgelegt werden, welche reinen Strategien beide Spieler beim ersten Spiel einsetzen.

Setzen beide Spieler beim ersten Spiel die reine Strategie 1 ein, so ist die weitere Entwicklung in der nachfolgenden Tabelle angegeben. Hierbei wurde immer die zahlenmäßig kleinste Strategie gewählt, falls bei n Spielen die nächste reine Strategie nicht eindeutig festgelegt ist.

n	$x_{1,n}$	$x_{2,n}$	$x_{3,n}$	$y_{1,n}$	$y_{2,n}$	$y_{3,n}$	$\overline{a}(p_n, q_n)$
1	1	0	0	1	0	0	0.0000
2	1	0	1	1	0	1	0.0000
3	1	0	2	1	0	2	0.0000
12	5	3	4	5	3	4	0.0000
120	35	45	40	35	45	40	0.0000
1 200	400	408	392	400	408	392	0.0000
12 000	4 030	3 978	3 992	4 030	3 978	3 992	0.0000

Es gilt $W(A) = \lim_{n\to\infty} \overline{a}(p_n, q_n) = 0$. Ferner streben in diesem Fall die gemischten Strategien p_n und q_n gegen die optimalen Strategien beider Spieler $p^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ und $q^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$. Das gleiche trifft sinngemäß auch zu, wenn sich beide Spieler beim ersten Spiel für eine der anderen Möglichkeiten entscheiden und die reinen Strategien bei Mehrdeutigkeit nach einem anderen Algorithmus (z. B. zufällig) ausgewählt werden.

Mit diesen vier Methoden wurde jeweils gezeigt, dass $p^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ und $q^* = (1/3, 1/3, 1/3)^T$ optimale gemischte Strategien für beide Spieler sind und der Spielwert dieses Spiels $W(A) = 0$ ist. Da der Spielwert 0 ist, handelt es sich hierbei um ein faires Spiel. Die Rechnungen haben außerdem gezeigt, dass es bei diesem Spiel keine weiteren optimalen Strategien gibt.

Anmerkungen zu den Aufgaben:

1. Bei allen Spielen, bei denen beide Spieler endlich viele Strategien zur Verfügung haben, besitzen beide Spieler optimale gemischte Strategien p^* bzw. q^* in dem Sinn, dass gilt $\min_{q\in Q} \overline{a}(p^*, q) = \max_{p\in P} \overline{a}(p, q^*)$ (hierbei bezeichnet P und Q die Menge der gemischten Strategien beider Spieler). Dies wurde bereits 1928 bewiesen in VON NEUMANN, J. [2]. Insbesondere gilt: p^* ist genau dann eine optimale gemischte Strategie für Spieler 1, falls gilt $\min_{q\in Q} \overline{a}(p^*, q) = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} \overline{a}(p, q)$ und q^* ist genau dann eine optimale gemischte Strategie für Spieler 2, falls gilt $\max_{p\in P} \overline{a}(p, q^*) = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} \overline{a}(p, q)$. Ohne dieses Wissen mussten wir bei allen Spielen zum Nachweis der Optimalität beider Strategien überprüfen, dass die beiden Ausdrücke $\min_{q\in Q} \overline{a}(p^*, q)$ und $\max_{p\in P} \overline{a}(p, q^*)$ gleich sind.

2. Bei der Bestimmung optimaler Strategien mit Hilfe eines Gleichungssystems haben wir Egalisatoren für beide Spieler berechnet und ausgenutzt, dass Egalisatoren immer optimale Strategien sind, sofern **beide** Spieler Egalisatoren besitzen. In Aufgabe 2 haben wir gesehen, dass diese Methode nicht funktioniert, wenn nur einer der beiden Spieler Egalisatoren besitzt. Wir haben außerdem gesehen, dass optimale Strategien keine Egalisatoren sein müssen.

   Durch eine einfache Rechnung kann man jedoch zeigen, dass für zwei optimale Strategien beider Spieler $p^* = (p_1, \ldots, p_n)^T$ und $q^* = (q_1, \ldots, q_n)^T$ gilt:

   (a) $p_i > 0$ für alle $1 \le i \le n \;\Rightarrow\; q^*$ ist ein Egalisator für Spieler 2

   (b) $q_i > 0$ für alle $1 \le i \le n \;\Rightarrow\; p^*$ ist ein Egalisator für Spieler 1

3. Die Bestimmung optimaler Strategien gelingt (theoretisch) immer mit Hilfe eines Extremwertproblems und eines linearen Optimierungsproblems. Die Lösung mit Hilfe eines Extremwertproblems kann sehr aufwändig werden, wenn beide Spieler mehr als zwei reine Strategien besitzen. Die Lösung mit Hilfe eines linearen Optimierungsproblems erfordert im Allgemeinen den geringsten Rechenaufwand.

4. Die Bestimmung optimaler Strategien mit Hilfe einer Simulation gelingt nicht immer. Sind (p_n) bzw. (q_n) zwei Folgen gemischter Strategien für beide Spieler, die mit den oben beschriebenen Methoden berechnet werden, so konvergiert $\overline{a}(p_n, q_n)$ gegen den Spielwert des Spiels, d. h. der Spielwert kann auf diese Weise immer berechnet werden. Die beiden Folgen (p_n) und (q_n) selbst konvergieren i. Allg. nicht. Sie besitzen jedoch konvergente Teilfolgen.

Literatur

Brown, G.W. [1]	Some notes on computation of games solutions. RAND Report P-78 (1949), Santa Monica
von Neumann, J. [2]	Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. Mathematische Annalen 100 (1928), 295-320
von Neumann, J.; Morgenstern, O. [3]	Theory of Games and Economic Behavior. Princeton (1944)
Rauhut, B.; Schmitz, N.; Zachow, E.-W. [4]	Spieltheorie. Teubner Studienbücher Mathematik (1979), 400 Seiten
Robinson, J. [5]	An iterative method of solving a game. Annals of Mathematics 54 (1951), 296-301

Prof. Dr. Udo Krzensk
Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Moltkestraße 30
76133 Karlsruhe
e-mail: udo.krzensk@hs-karlsruhe.de

Eingereicht und angenommen am 6. 5. 2011