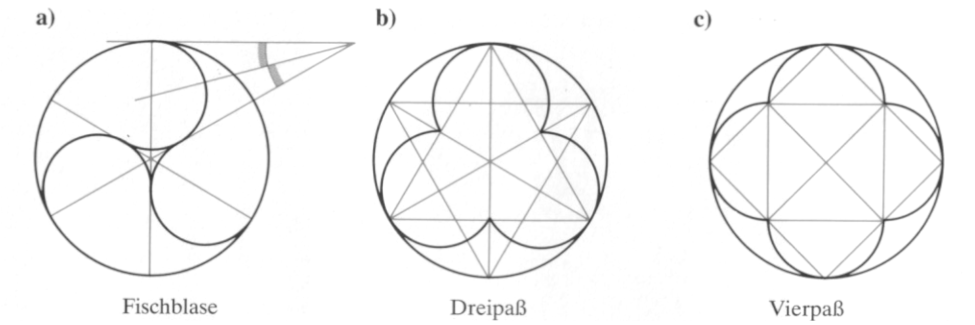
Karlhorst Meyer

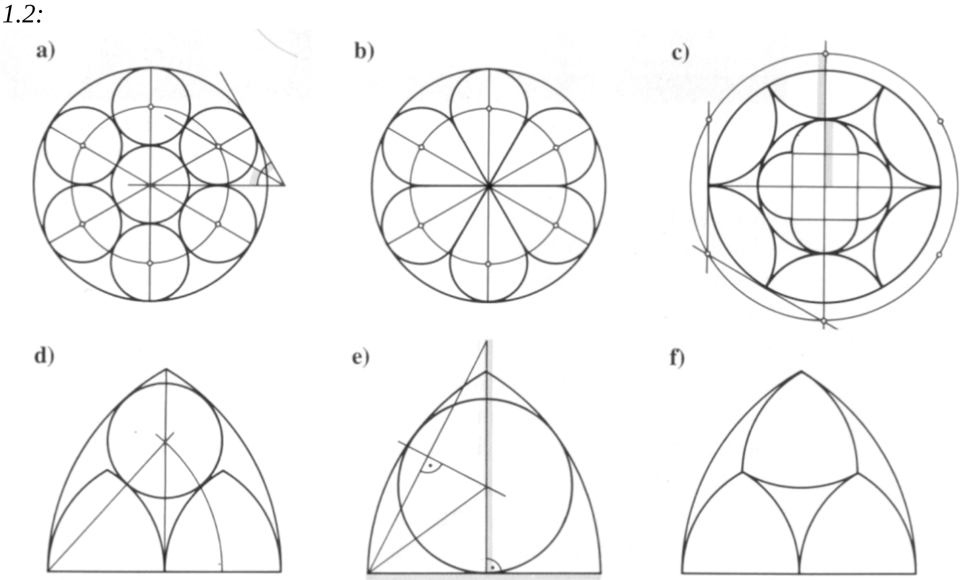
Beweisideen in der Geometrie

1. Das Finden einer Planfigur

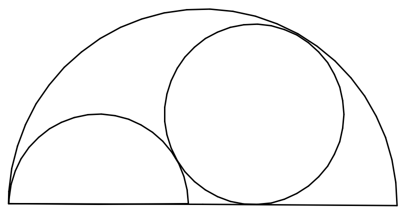
Aufgabe 1.1(nach MEYER U. A. [7])*:* Wie konstruiert man die folgenden gotischen Fenster, wie findet man den Zusammenhang zwischen dem größten und kleinsten Radius?



Aufgabe 1.2:



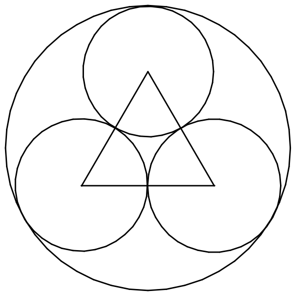
Hierzu gehören auch die Aufgaben MO 481044 und 481145, wie in der nebenstehenden Abbildung.



Zu 1.1 a):
1. Lösung: In der Angabe findet man einen Zusammenhang, der auf die Tangenten von einem Punkt an einen Kreis abzielt. D. h. man zeichnet die waagrechte Tangente und legt durch den Mittelpunkt des großen Kreises eine hierzu um 30° geneigte Gerade. Die Winkelhalbierende legt dann den Mittelpunkt des kleineren Kreises fest. Hiermit kann man bei gegebenem großen Kreis die kleinen Kreise konstruieren.

2. Lösung: Die Mittelpunkte der kleinen Kreise bilden aus Symmetriegründen ein gleichseitiges Dreieck, dessen Schwerpunkt Mittelpunkt des großen Kreises ist. Hier kann man bei gegebenen kleinen Kreisen den großen Kreis konstruieren.

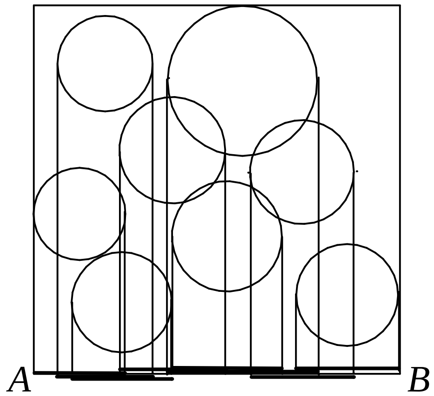
Bemerkung:
1. Für die Berechnung des Zusammenhangs zwischen den beiden Kreisradien ist die 2. Lösung günstiger.
2. Ist der große Kreis gegeben, so konstruiert man zunächst eine zu große aber noch ähnliche Zeichnung und verkleinert dann durch eine zentrische Streckung zum Mittelpunkt des äußeren Kreises. Siehe Aufgabe 2.3.1.



Aufgabe 1.3 (nach MO 471345): Innerhalb eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 befinden sich endlich viele Kreisscheiben, die sich auch überlappen dürfen. Die Summe aller Kreisumfänge sei gleich 10. Man beweise, dass es eine Gerade gibt, die mindestens vier dieser Kreise schneidet oder berührt.

Bemerkung: Man kann Aufgaben durch Spezialisieren, Verändern oder Vereinfachen lösen, um Erfahrungen zu sammeln. Hier führt eine Projektion weiter:

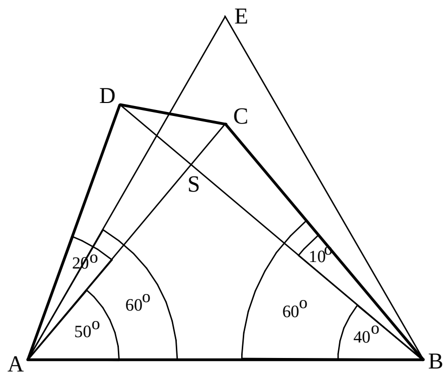
Lösung:
Die Kreise liegen irgendwie im Quadrat. Projiziert man sie auf eine Quadratseite *AB*, so sind die Bilder der Kreise Strecken auf *AB*. Eine zu *AB* senkrechte Gerade *g* hat hierbei als Bild einen Punkt *g'* auf *AB*. Gehört *g'* zu *n* Kreisbildern, wird die Gerade g *n* Kreise treffen.
Annahme: Es gibt auf *AB* keinen Punkt *g'*, für den $n \geq 4$ ist. Damit ist die Summe aller Kreisprojektionen und damit die Summe aller Kreisdurchmesser höchstens $3 \cdot |\overline{AB}| = 3$. Die Summe aller Kreisumfänge kann deshalb höchstens $3 \cdot \pi$ sein; das ist aber kleiner als 10 und damit hat man einen Widerspruch gefunden. D. h. es gibt mindestens eine Gerade *g* (sogar eine zu *AB* Senkrechte), die mindestens 4 Kreise schneidet oder berührt.



2. Grundsätzliches

2.1 Man kann Winkel ausrechnen.

Hierbei nicht vergessen: Peripheriewinkelsatz und seine Umkehrungen auch im Spezialfall THALES-Kreissatz.
Kritik an den MO-Aufgaben: Der Peripheriewinkelsatz wird – wenn überhaupt – in Klasse 9 und nicht in Klasse 8 gelehrt.



*Aufgabe 2.1.1 (MO 470842): E*s sei *ABCD* ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einander in einem Punkt S schneiden. Es sei *E* derjenige Punkt, der auf derselben Seite der Geraden *AB* liegt wie die Punkte *C* und *D* und für den *ABE* ein gleichseitiges Dreieck ist. Ferner gelte:

$\angle CBD = 10^\circ$ $\angle CAD = 20^\circ$ $\angle DBA = 40^\circ$ $\angle BAC = 50^\circ$

a) Berechne $\angle AEC$ b) Berechne die Innenwinkel des Vierecks *ABCD*.

Bemerkung: Man muss sich für die Aufgabe erst einmal eine so genannte Analysisfigur (siehe die vorangehende Seite) beschaffen. Noch besser ist es, wenn man gleich 0überprüft, ob die gegebenen Stücke die Gesamtkonfiguration festlegen können. Deshalb wird die Figur erst einmal konstruiert:

1. Zeichne $\overline{AB}$ beliebig, da die Aufgabe offenbar nur bis auf Ähnlichkeit gegeben ist.
2. Zeichne über $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck ABE, wobei *E* oberhalb von *AB* liegen muss.
3. Man trägt an $\overline{AB}$ in B die Winkel $\angle DBA = 40^o$ und $\angle CBD = 10^o$ in dieser Reihenfolge so an, dass *C* und *D* ebenfalls oberhalb von *AB* liegt.
4. Man trägt an $\overline{AB}$ in A die Winkel $\angle BAC = 50^o$ und $\angle CAD = 20^o$ in dieser Reihenfolge an.
5. Schließlich werden die Punkte *C* und *D* gefunden.

Diese Konstruktion zeigt einmal, dass die Angaben hinreichend für eine Lösung sind, und zum anderen, dass es genau eine Lösung gibt; deshalb kann man jetzt mit den Berechnungen beginnen.

Lösung zu Aufgabe 2.1.1:

a) Nach Konstruktion ist $\angle CBA = 50^o$. Deshalb ist das Dreieck *ABC* gleichschenklig und *C* liegt mit *E* auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, die im gleichschenkligen Dreieck auch Winkelhalbierende ist. Deshalb ist $\angle AEC = 30^o$.

b) Nach Voraussetzung ist $\boldsymbol{\angle BAD = 70^o}$ und $\boldsymbol{\angle ABC = 50^o}$. Hieraus ergibt sich für das Dreieck *ABD* nach dem Innenwinkelsatz $\angle BDA = 70^o$.

Deshalb ist das Dreieck *ABD* gleichschenklig, also $|\overline{AB}| = |\overline{DB}|$. Im gleichseitigen Dreieck *ABE* gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AE}|$, also gilt $|\overline{AE}| = |\overline{DB}|$. Da das Dreieck *ABC* gleichschenklig ist, gilt $|\overline{BC}| = |\overline{AE}|$.

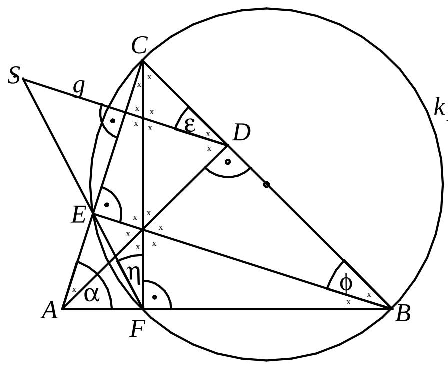
$\angle CAE = \angle ABC + \angle ACD - \angle ABE = 10^o$.

Nach dem Kongruenzsatz sws sind also die Dreiecke *ACE* und *BCD* kongruent. Hieraus ergibt sich $\boldsymbol{\angle ADC = 100^o}$. Aus der Innenwinkelsumme für das Dreieck *ACE* findet man $\boldsymbol{\angle DCB} = \angle ACE = \boldsymbol{140^o}$**.**

Aufgabe 2.1.2(MO 480842): In einem spitzwinkligen Dreieck *ABC* seien *D*, *E* und *F* die Höhenfußpunkte auf den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden *EF* mit der Geraden *g*, die auf $\overline{AC}$ senkrecht steht und durch *D* verläuft.

a) Beweise, dass die Winkel *CFS* und *CDS* gleich groß sind.

b) Beweise, dass das Dreieck *DSE* gleichschenklig ist.



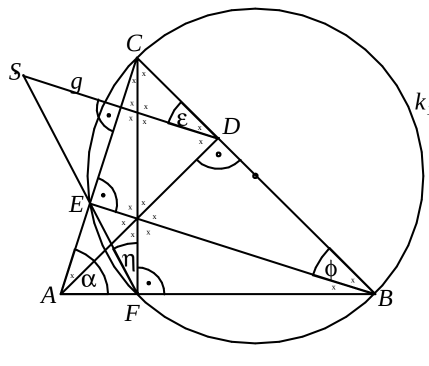
Bemerkung: Auch hier wird eine Analysisfigur möglichst genau gezeichnet (siehe die Abbildung).

Lösung:

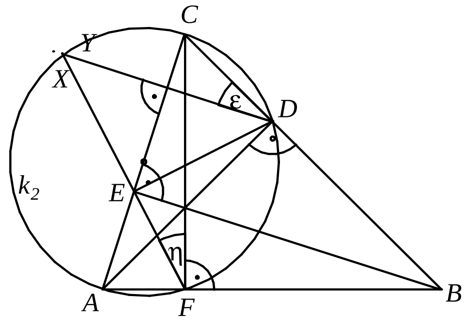
Zu a) Mit Winkelsätzen findet man an parallelen Geraden $\varepsilon = \phi$.

$\overline{CE}$ ist Sehne und deshalb ist $\varepsilon = \phi = \eta$.

Durch andere Sätze kann man alle mit x gekennzeichneten Winkel ausrechnen, nur η nicht. Es sei denn, man findet: Die beiden rechten Winkel bei *E* und *F* liegen auf dem THALESkreis k_1 über $\overline{BC}$. Dieser Kreis ist auch Peripheriewinkelkreis zur Sehne $\overline{CE}$ und deshalb ist $\varepsilon = \phi = \eta$.



Zu b) Nach der Umkehrung U1 des THALES-kreissatzes geht k_2 mit Durchmesser $\overline{AC}$ durch *D* und *F*. *X* sei der Schnittpunkt von *EF* mit k_2, *Y* sei der Schnittpunkt von *g* mit k_2 und *X* bzw. *Y* liegen auf der anderen Seite von *AC* wie *D* und *F*. k_2 wird jetzt als Peripheriewinkelkreis über den Sehnen $\overline{CX}$ und $\overline{CY}$ betrachtet:



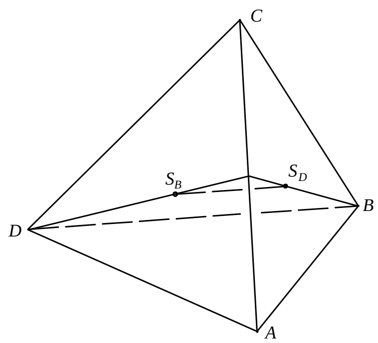
Über der Sehne $\overline{CX}$ ist dann
$\angle CDX = \angle CFX$.
Über der Sehne $\overline{CY}$ ist dann
$\angle CDY = \angle CDY$.

Da *S* auf der Geraden $XF = EF$ und auf der Geraden $YD = g$ liegt, folgt aus a) $\angle CFX = \angle CDY$.
Da *X* und *Y* auf derselben Seite von *AC* liegen, sind also alle Winkel gleich:
$\angle CDX = \angle CFX = \angle CDY = \angle CDY$.
Die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liefert dann $X = Y$ und damit
$X = Y = S$.
Da *AC* Symmetrieachse des Kreises ist und auf *SD* senkrecht steht, ist also gezeigt, dass das Dreieck *CDS* gleichschenklig ist.

Bemerkung: Es gibt zum THALESkreissatz zwei Umkehrungen:
U1: Wenn ein rechter Winkel über einem Durchmesser eines Kreises liegt, dann ist er Peripheriewinkel dieses Kreises.
U2: Ist ein Peripheriewinkel eines Kreises ein rechter Winkel, dann liegt er über einem Kreisdurchmesser.

2. 2 Man fertigt Skizzen, auch möglichst genaue Zeichnungen, u. U. mehrere, um etwas zu sehen.

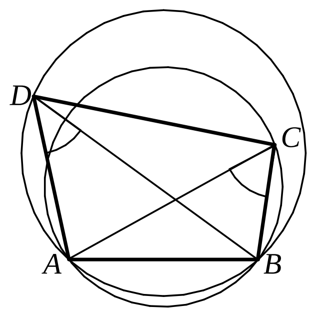
Aufgabe 2.2.1 (nach MO 480942): Gegeben ist ein allgemeines Tetraeder mit dem Volumen 1. Man bildet einen zweiten Tetraeder mit dem Volumen *v* aus den vier Schwerpunkten der Seitenflächen des ersten Tetraeders. Berechne *v*.



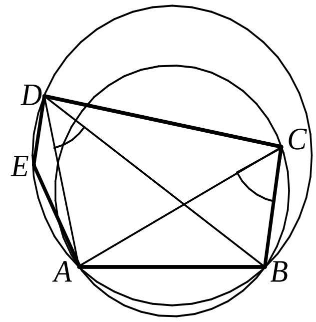
Bemerkung: Auch hier muss die Analysisfigur so gezeichnet werden, dass man $S_BS_D \parallel BD$ vermuten kann.

Lösung:
Man macht eine Skizze. S_A sei der Schwerpunkt des Dreiecks *BCD* usw. Aus der Zeichnung bekommt man z. B. die Vermutung S_BS_D ist parallel zu *BD* usw. Diese Vermutung begründet man damit, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt. Aus der Umkehrung des Vierstreckensatzes folgt dann die gewünschte Parallelität.
Der Vierstreckensatz liefert jetzt das Ergebnis $3|\overline{S_BS_D}| = |\overline{BD}|$. Entsprechendes gilt für alle Kanten des zweiten Tetraeders. D. h. das Volumen des zweiten Tetraeders verhält sich zum Ausgangsvolumen wie 1 : 27.

Aufgabe 2.2.2 (MO 470844):
a) Es sei *ABCD* ein konvexes Viereck. Beweise, dass es dann stets einen Kreis gibt, der durch drei der vier Eckpunkte geht und der das ganze Viereck bedeckt.
b) Es sei *ABCDE* ein konvexes Fünfeck. Beweise, dass es dann stets einen Kreis gibt, der durch drei nebeneinander liegende Eckpunkte geht und der das ganze Fünfeck bedeckt.

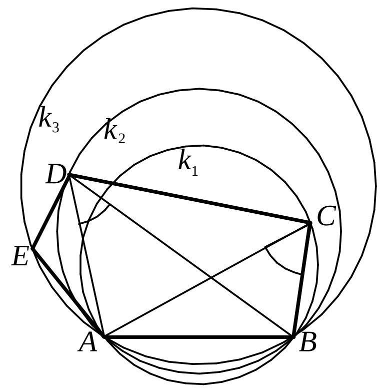


Kritik: Der Begriff konvex ist nicht Schulstoff. Der erforderliche Peripheriewinkelsatz wird bestenfalls in Klasse 9 gelehrt, wenn überhaupt, sicher nicht in der folgenden Fassung:



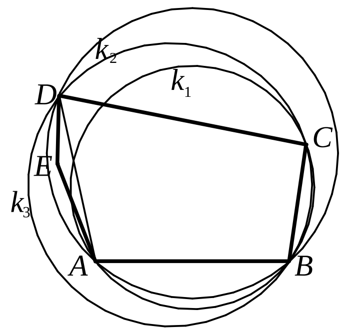
Peripheriewinkelsatz:
Alle Peripheriewinkel (Umfangswinkel) eines Kreises mit dem Radius r, die über derselben Sehne AB stehen, sind einander gleich. Behält man die Sehne AB bei und vergrößert (verkleinert) den Radius r, so verkleinert (vergrößert) sich der Peripheriewinkel.

Definition: Eine ebene Figur mit dem einfach geschlossenen Rand d (d. h. Doppelpunkte auf dem Rand fehlen) heißt **konvex**, wenn die Strecke $\overline{BA}$ für alle Paare A, B auf d ganz im Inneren der Figur liegt. Eine konvexe Figur F_1 überdeckt eine Figur F_2, wenn kein Punkt von F_2 äußerer Punkt von F_1 ist.



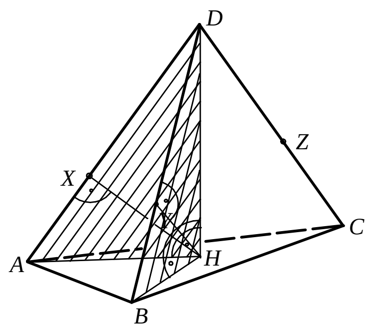
Man beschafft sich zunächst einmal eine Zeichnung (siehe die letzte Abbildung der vorhergehenden Seite), um eine „geometrische“ Vorstellung zu bekommen.

Lösung:
Zu a) Fall 1: Überdeckt zufällig der Umkreis von ABC auch den Punkt D, ist man fertig.
Fall 2: Ist dies nicht so, liegt D auf einem größeren Peripheriewinkelkreis über $\overline{AB}$, dessen oberer Teil dann den Umkreis von ABC überdeckt und damit alle 4 Punkte. Er geht durch D, A, B (siehe die erste Zeichnung dieser Seite).



Zu b) Fall 1: Man betrachtet den Kreis k_1 durch A, B, C, der zufällig alle 5 Punkte überdeckt.
Fall 2: Der Kreis k_2 durch A, B, D von a) Fall 2 geht durch E, dann überdeckt er alle 5 Punkte und geht durch die Punkte E, A, B (siehe die zweite Figur).
Fall 3: Liegt E außerhalb von k_1, dann gibt es einen Peripheriewinkelkreis k_2 über $\overline{AB}$ durch E, A, B, der alle Punkte überdeckt (siehe die dritte Figur).
Fall 4: Liegt E innerhalb von k_2, dann kann man den Kreis k_2 als Peripheriewinkelkreis über $\overline{BD}$ auffassen. Wegen der Konvexität des Fünfecks liegen die Punkte A und C auf verschiedenen Seiten von $\overline{BD}$. Deshalb überdeckt der Umkreis k_3 von BCD den Kreis k_2 so weit, dass damit die Punkte A und E (siehe die letzte Figur) überdeckt sind.

Aufgabe 2.2.3 (MO 470943): Es ist ein nicht notwendig reguläres Tetraeder $ABCD$ gegeben. Der Fußpunkt H des Lotes, welches von D auf die durch ABC bestimmte Ebene gefällt wird, liege im Inneren des Dreiecks ABC. Die Fußpunkte der Lote von H auf die Geraden AD, BD, CD seien X, Y, Z.
Man zeige, dass die Punkte A, B, C, X, Y, Z auf einer gemeinsamen Kugel (-oberfläche) liegen.



Kritik an der Aufgabenstellung: Zur Zeit der Bundesrunde der MO hat der Schüler einer 9. Klasse noch nicht die zur Lösung erforderlichen Kenntnisse über eine Kugel.

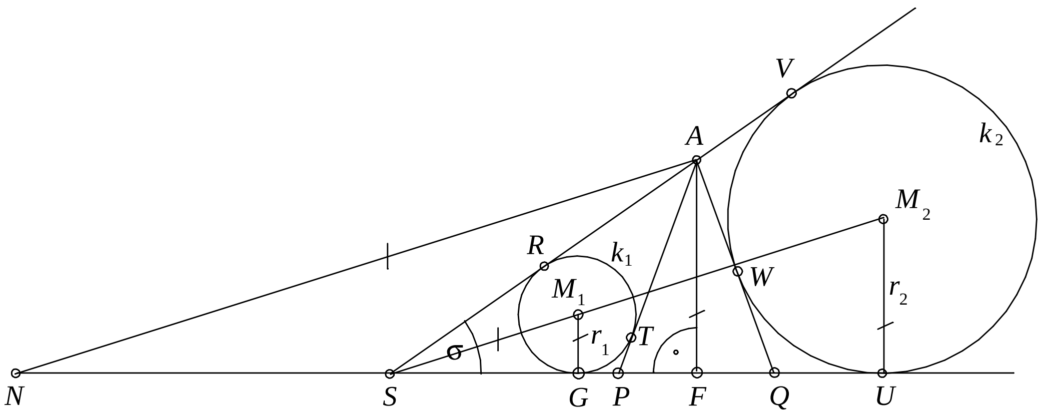
Bemerkung: Auch hier wird man mehrere Zeichnungen ausführen, bis man das Wesentliche sieht.

Lösung: Das Dreieck *AHD* (in der letzten Zeichnung schraffiert) hat nach Angabe bei *H* einen rechtenWinkel. Deshalb gilt für dieses Dreieck nach dem Satz des EUKLID: $|\overline{DH}|^2 = |\overline{DX}| \cdot |\overline{DA}|$
Analog findet man über Dreieck *BDH*: $|\overline{DH}|^2 = |\overline{DY}| \cdot |\overline{DB}|$ also: $|\overline{DX}| \cdot |\overline{DA}| = |\overline{DY}| \cdot |\overline{DB}|$
Da die Punkte *A, B, D, X, Y* alle in der Ebene *ABD* liegen, folgt aus der Umkehrung des Sekantensatzes, dass diese Punkte auf einem gemeinsamen Kreis k_1 liegen. Sei nun [Ku] die Kugel, die durch die Punkte *A*, *B*, *C* und *X* bestimmt ist. Der Schnitt der Ebene *ABD* mit dieser Kugel ist ein Kreis k_2, auf dem nach Konstruktion die Punkte *A*, *B* und *X* liegen. Nach Obigem liegt *Y* auf einem Kreis k_1 durch *A*, *B*, *X*. Da aber durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, genau ein Kreis geht, ist $k_1 = k_2$ und dieser liegt auf [Ku].

Bemerkung: Grundsätzlich kann man ein Koordinatensystem einführen und die Kugel durch ihren Mittelpunkt (mit drei unbekannten Koordinaten) und einem unbekannten Radius (die vierte Unbekannte) vorgeben. Aus den gegebenen Koordinaten von *A, B, C, D* berechnet man die Koordinaten von *X, Y, Z* und stellt 6 quadratische Gleichungen in den 4 Unbekannten für die Lage der Punkte auf der Kugel auf. Doch man bedenke, welch algebraischen Aufwand dies erfordert; deshalb gilt bei Überlegungen in der Geometrie stets der Grundsatz: Eine synthetische Lösung ist einer analytischen vorzuziehen.

Aufgabe 2.2.4 (MO 471342): Das Dreieck *SFA* ist bei *F* rechtwinklig. Die Punkte *P* und *Q* liegen so auf der Geraden *SF*, dass *P* zwischen *S* und *F* liegt und *F* der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ist. Der Kreis k_1 ist der Inkreis des Dreiecks *SPA.* Der Kreis k_2 Ankreis am Dreieck *SQA* so, dass er die Geraden *QA*, *SQ* und *SA* berührt. Man beweise, dass die Summe der Radien der beiden Kreise gleich der Länge $|\overline{FA}|$ ist.

Lösung:
Man beschafft sich eine Zeichnung, um die Vorstellung anzuheben. Dann kommt das „geometrische Auge" dran, ihm fällt die Ähnlichkeit der Dreiecke SGM_1 und SUM_2 auf.



Zeichnet man die gegebene Figur, so fallen die 3 Lote GM_1, *FA* und UM_2 auf der Geraden *SF* auf. M_1M_2 ist die Winkelhalbierende von $\angle FSA$. Damit hat man die ähnlichen Dreiecke GSM_1 und USM_2. Die Frage ist, ob man hierzu ein drittes ähnliches Dreieck mit dem Lot *FA* bekommen kann. Die ungefähre Lage eines solchen Dreiecks *FNA* ist sofort klar, auch, dass *NA* zu SM_2 parallel liegen muss.
Weil SM_1 die Winkelhalbierende von σ bei S ist, hat man bei *N* einen Innenwinkel der Größe σ:2 wegen
$SM_1 \parallel NA$ nach Konstruktion von *N*. Berechnet man dann den Innenwinkel des Dreiecks *NSA* bei *A* nach der Innenwinkelsumme eines Dreiecks, so ergibt sich auch bei *A* ein Innenwinkel der Größe σ:2. Das Dreieck *NSA* ist also gleichschenklig und somit $|\overline{SN}| = |\overline{SA}|$. Aus den 3 ähnlichen Dreiecken findet man:
$\frac{r_1}{|\overline{SG}|} = \frac{r_2}{|\overline{SU}|} = \frac{|\overline{AF}|}{|\overline{NF}|}$
Mit korrespondierender Addition (siehe 3.1.7 Hilfssatz) findet man deshalb
$\frac{r_1+r_2}{|\overline{SG}|+|\overline{SU}|} = \frac{|\overline{AF}|}{|\overline{NF}|}$. (1)
Nach dem Satz über gleich lange Tangentenabschnitte folgt für den Ankreis k_2
$|\overline{SU}| = \frac{1}{2}(|\overline{SA}| + |\overline{SQ}| + |\overline{AQ}|)$. (2)
Nach dem gleichen Satz folgt für den Inkreis k_1

$2|\overline{SG}| + 2|\overline{TA}| + 2|\overline{GP}| = |\overline{SP}| + |\overline{SA}| + |\overline{AP}|$. Hieraus bekommt man
$2|\overline{SG}| = |\overline{SP}| + |\overline{SA}| + (|\overline{AP}| - |\overline{TA}|) - |\overline{GP}| - (|\overline{TA}| + |\overline{GP}|) = |\overline{SP}| + |\overline{SA}| - |\overline{AP}|$, also
$|\overline{SG}| = \frac{1}{2}(|\overline{SP}| + |\overline{SA}| - |\overline{AP}|)$. (3)
Addiert man (2) und (3) so erhält man $|\overline{SG}| + |\overline{SU}| = |\overline{SA}| + |\overline{SF}| = |\overline{NF}|$, (4)
weil $|\overline{AP}| = |\overline{AQ}|$ ist und das arithmetische Mittel von $|\overline{SP}|$ und $|\overline{SQ}|$ gleich $|\overline{SF}|$ ist.
Wegen (4) folgt aus (1) $r_1 + r_2 = |\overline{AF}|$.

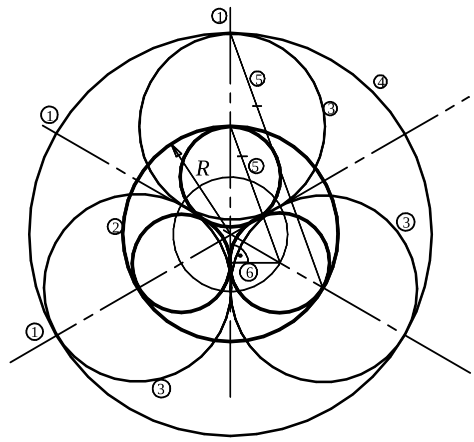
Weitere Lösungen sind in MO [1] angegeben.

Bemerkung: Die gegebenen Stücke der Aufgaben reichen zur Lösung nur dann, wenn „man sieht", dass sie durch die Gerade *NA* oder anderem ergänzt werden müssen. Solche Aufgaben sind für den Unerfahrenen schwer.

2.3 Man konstruiert zunächst nur eine ähnliche Figur.

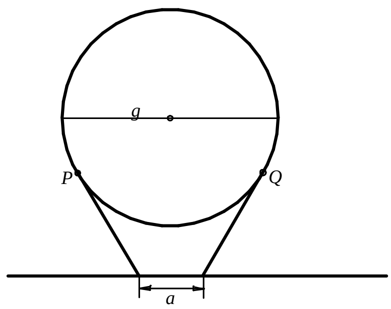
Aufgabe 2.3.1: Konstruiere ein gotisches Fenster mit drei Fischblasen. Gegeben ist der Radius *R* des Fensters.

Lösung:
1. Zeichne die 60°-Einteilung mit Schnittpunkt *M*
2. Zeichne um *M* einen Kreis mit Radius *R*.
3. Zeichne in die 60°-Einteilung die Fischblasenkreise.
4. Zeichne um *M* den Hüllkreis.
5. Verkleinere den Fischblasenradius im Verhältnis des unter 4. gefundenen Hüllkreisradius zu *R*.
6. Man erhält den gesuchten Fischblasenradius *r*.



Hierzu gehören auch diejenigen Aufgaben, bei denen man zunächst irgendwo eine kongruente Figur konstruiert und dann in die gegebene Zeichnung durch eine Bewegung hineinbringt:

Aufgabe 2.3.2[1] (aus MEYER [1])*:* Ein zylindrischer Behälter von 20 m Durchmesser wird von Stützen der Länge 10,9 m getragen. Die Stützen berühren den Behälter. Der tiefste Behälterpunkt liegt 2,5 m über dem Boden (siehe die Skizze). Man finde durch Konstruktion:
a) Wie groß ist der Fußabstand *a* zweier gegenüber liegender Stützen?
b) Wie viele Meter unterhalb von *g* (Durchmesser) liegen die Anschweißpunkte *P* und *Q* für die Stützen?



2.4 Weitere allgemeine Lösungshinweise

- Man kann an alle „anderen" Lehrsätze denken und prüfen, welche man eventuell brauchen kann.
- Man wägt mehrere Wege hinsichtlich ihres Aufwandes ab und entschließt sich für den aufwandsgeringsten.
- Verallgemeinern der Situation, um einen übergeordneten Satz zu entdecken.

Das soll im Hinblick auf ein späteres Problem geschehen.

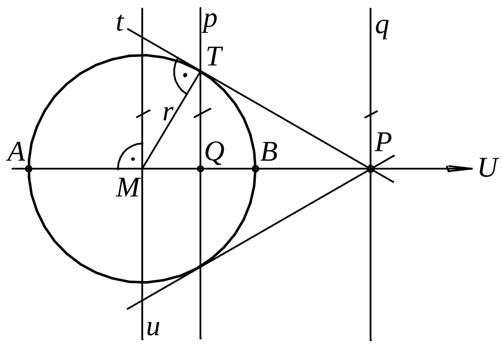
[1] Die Lösungen der „eingerückten" Aufgaben findet man in Kapitel 5.

3. Pol - Polare

3.1 Definitionen

3.1.1 Definition: Mit Hilfe eines Kreises (allgemein eines nicht zerfallenden Kegelschnittes) ordnet man den Punkten Geraden und den Geraden Punkte gemäß der folgenden Konstruktion zu:

1. P ↔ p
   Q ↔ q
   T ↔ t
   M ↔ Ferngerade
   u ↔ Richtung U
   Der große Buchstabe ist jeweils der Pol des zugehörigen kleinen Buchstabens.



2. *P* und *Q* heißen zueinander **konjugierte Pole.**

Wird diese Abbildung zweifach angewendet, so ergibt sich als Verkettung die identische Abbildung. Man sagt: Die Pol-Polarenbeziehung ist **involutorisch**.

Aus der Zeichnung kann man mit Hilfe des Kathetensatzes von EUKLID sofort den folgenden Satz ableiten:

3.1.2 Satz: Der Kreisradius *r* ist das geometrische Mittel der Abstände konjugierter Pole *P* und *Q* vom Mittelpunkt**.**

Den Zusammenhang von 3.1.1 Definition kann man auch noch anders interpretieren:

3.1.3 Definition der Inversion am Kreis oder Spiegelung am Kreis: Durch die Konstruktion wird die folgende Punktzuordnung getroffen:
P→Q
Q→P
Die Kreispunkte T seien fix.

Offenbar ist diese Abbildung ebenfalls involutorisch.

Um eine zweite Definition der Pol-Polaren Beziehung zu bekommen, wird zunächst an früheren Algebra-Geometrieunterricht erinnert, den es heute in dieser Form nicht mehr gibt:

3.1.4 Definition Doppelverhältnis:

1. Liegen die Punkte *A, B, C, D* in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, so heißt DV(*A,C;B,D*) = $\left|\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}\right| : \left|\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}\right| \cdot$ sign Doppelverhältnis dieser Punkte. Die Strecken sind hierbei gerichtet. Gleichgerichtete Strecken haben dasselbe Vorzeichen; hieraus ergibt sich sign.
2. Liegen *A, B, P* und *Q* auf einer Geraden, so sagt man: Das Paar *A, B* trennt das Paar *P, Q* **harmonisch**, wenn das Doppelverhältnis DV(*A,B;P,Q*) = $\left|\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\right| : \left|\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}\right| \cdot$ sign = –1 ist.

Leicht kann man nachrechnen:

3.1.5 Hilfssatz: Wenn das Paar *A, B* das Paar *P,Q* harmonisch trennt, dann trennt auch das Paar *P, Q* das Paar *A, B* harmonisch.

Aufgabe 3.1.1: Teile durch Konstruktion eine Strecke $\overline{AB}$ innen und außen harmonisch. Welche Werte kann das Doppelverhältnis annehmen?

3.1.6 Satz: *A*, *B*, *P*, *Q* sind die Punkte obiger Zeichnung; dann gilt DV(*A,B;P,Q*) = –1.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir Hilfsmittel aus der ehemaligen Klasse 7 (siehe MEYER U. A. [6] Band 7 Seite 87) :

3.1.7 Hilfssatz: Die Proportionen x : y = a : b oder y : x = b : a oder x : a = y : b oder a : x = b : y besagen offenbar dasselbe. Es gilt aber dann auch die so genannte **korrespondierende Addition und Subtraktion**, vorausgesetzt, dass keine Strecke die Länge null hat:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{a+b}{x+y}=\frac{a-b}{x-y}$$

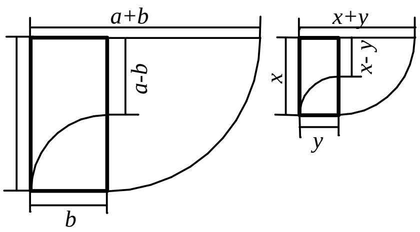
Algebraischer Beweis:
Aus a : b = x : y folgt ay = bx und damit:

bx + by = ay + by also
b(x + y) = y(a + b) also
b: y = (a+b):(x+y)

oder

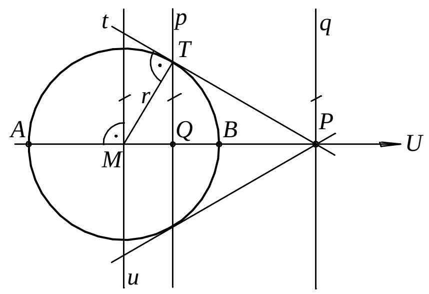
2bx = 2ay also
ax + bx - ay - by = ax + ay - bx - by also
(a + b):(x + y) = (a - b):(x - y)

Geometrischer Beweis:
Man kann stets aus den gegebenen Größen a, b, x und y zwei Rechtecke, wie sie nebenstehend angezeigt sind, zeichnen. Das eine Rechteck geht dann durch eine zentrische Streckung aus dem anderen hervor. Deshalb gilt dies auch für die Strecken a + b und a – b bzw. x + y und x – y. Die zu beweisenden Streckenproportionen kann man dann der Zeichnung entnehmen.



Beweis zum Satz 3.1.6:
Im Dreieck *MTP* der Abbildung auf der letzten Seite gilt nach dem Kathetensatz $r^2 = |\overline{PM}| \cdot |\overline{QM}|$. Hieraus folgt $\frac{r}{|\overline{MP}|} = \frac{|\overline{MQ}|}{r}$ oder mit obiger korrespondierenden Addition und Subtraktion $\left|\frac{r+|\overline{MQ}|}{r-|\overline{MQ}|}\right| : \left|\frac{r+|\overline{MP}|}{r-|\overline{MP}|}\right| = 1$. Damit ergibt sich die Proportion $\left|\frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{BQ}|}\right| : \left|\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|}\right| \cdot \text{sign} = -1$, da sign sich als negativ ergibt. So ist gezeigt, daß das Paar *P*,*Q* das Paar *A*,*B* harmonisch trennt.

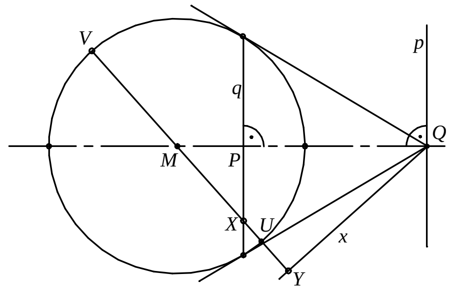
Gehen vier Geraden durch einen festen Punkt und jede von ihnen durch einen Punkt von vier harmonischen Punkten einer Geraden, so heißen die vier Geraden **harmonische Geraden**.



3.1.8 Definition: Werden auf dem Durchmesser *AB* eines Kreises *k* die Punkte *A* und *B* von den Punkten *P* und *Q* harmonisch getrennt und ist *p* die Senkrechte auf *AB* in *Q*, so nennt man *P* den Pol zur Polaren *p* bezüglich des Kreises *k*. Die Punkte *P* und *Q* heißen **zueinander konjugierte Pole**, da die Definition symmetrisch in *P* und *Q* ist.

Unmittelbar folgt daraus:

3.1.9 Hilfssatz: *P* und *Q* trennen in der nebenstehenden Zeichnung *A* und *B* harmonisch. *a* und *b* seien die Kreistangenten in *A* bzw. *B*. Dann trennen *p* und *q* die Geraden *a* und *b* harmonisch.



3.1.10 Satz: „Läuft" bei der Pol-Polarenbeziehung *P* (siehe die Zeichnung) auf der Geraden *q*, so „dreht" sich die Polare *p* zu *P* um den Pol *Q* zu *q*.

Beweis:
X sei ein Punkt auf der Polaren q zu Q. x sei das Lot durch Q auf die Gerade XM (siehe Abb.). QYM ist ähnlich zu QYM und deshalb gilt $\frac{|\overline{PM}|}{|\overline{YM}|} = \frac{|\overline{XM}|}{|\overline{QM}|}$, oder mit dem Kathetensatz gilt:

$r^2 = |\overline{PM}| \cdot |\overline{QM}| = |\overline{XM}| \cdot |\overline{YM}|$

Beim Beweis zu 3.1.6 Satz stellte sich aber heraus, dass dann die vier Punkte Y, U, X und V harmonische sind und deshalb die Gerade x durch Q Polare zum Punkt X ist.

> *Aufgabe 3.1.2:* Hier ist laufend zwischen Innen und Außen des Kreises zu unterscheiden, obwohl nicht genauer gesagt, was eine so angeordnete Ebene axiomatisch ist. So ergibt sich die Frage: Was ist hier nicht in Ordnung, was muss an dem Beweis ergänzt werden? Führe eine passende Ergänzung durch.

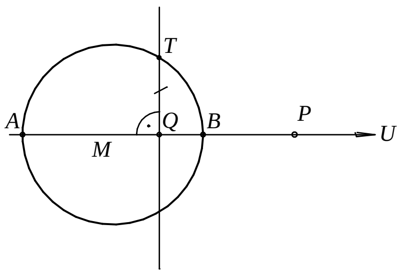
Eine „Grenzlage“, die zunächst nicht berücksichtigt scheint, bekommt man, wenn X ein Kreispunkt ist. Dann ist nach dem Beweis zu 3.1.10 Satz $|\overline{MX}|$ Kreisradius und das Lot darauf durch Q die Tangente von Q an den Kreis. X, Y und U sind derselbe Punkt und das Paar UV wird trivial von XY harmonisch getrennt. D. h.:

3.1.11 Satz: Bezüglich eines Kreises k ist die Polare zu jedem Kreispunkt B die Tangente in B an k.

3.1.12 Satz: Die Definitionen 3.1.1. und 3.1.8 sind äquivalent.

Beweis:

a) Bis jetzt wurde hergeleitet: 3.1.1 $\Rightarrow$ 3.1.8
b) Umkehrung von a):
Aus DV(A,B;P,Q) = –1 folgt
$\left|\frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{BQ}|}\right| : \left|\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|}\right| \cdot \text{sign} = -1$. Sign ergibt sich als negativ. Das Doppelverhältnis kann man auch schreiben als
$\left|\frac{r+|\overline{MQ}|}{r-|\overline{MQ}|}\right| : \left|\frac{r+|\overline{MP}|}{r-|\overline{MP}|}\right| = 1$. Mit 3.1.7 (korrespondierende Addition und Subtraktion) folgt $\frac{r}{|\overline{MP}|} = \frac{|\overline{MQ}|}{r}$ und damit $r^2 = |\overline{MQ}| \cdot |\overline{MP}|$. Es ist $TP \perp MT$ nach der Umkehrung des Satzes von EUKLID, also TP Tangente an k.



3.1.13 Satz: Die Definition 3.1.3 kann jetzt wie folgt beschrieben werden: Gegeben ist ein Kreis $k(M,r)$ und ein beliebiger Punkt $P \neq Q$. Die Verbindung MP schneidet den Kreis in A und B. Man suche den vierten harmonische Punkt Q gemäß DV(A,B;P,Q) = –1. Die Zuordnung $P \to Q$ heißt Spiegelung am Kreis.

Wegen 3.1.12 sind auch die beiden Definitionen für die Spiegelung am Kreis äquivalent.

Unter Einsatz der bisher bewiesenen Sätze findet man leicht den Übergang zur analytischen, d. h. berechnenden Geometrie in Koordinaten:

3.1.14 Satz: Ein Kreis um $M(x_0|y_0)$ mit Radius r hat in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Gleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

> *Aufgabe 3.1.3:* Beweise den folgenden Satz:

3.1.15 Satz: Gegeben ist der Kreis $k(M,r)$ und der Pol $(x_1|y_1)$. Die zugehörige Polare hat die Gleichung $(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(x_1 - x_0) = r^2$. Damit hat man auch die Tangentengleichungen.

3.2 Pol-Polarenbeziehung und Projektive Ebene

Nun soll eine wesentliche Eigenschaft der hier untersuchten Ebenen etwas genauer fixiert werden:

3.2.1 Definition: Eine Ebene, die Punkte und Geraden hat, heißt **projektive Ebene**, wenn für ihre Punkte und Geraden die folgenden Axiome gelten:

P1: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade.
P2: Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
P3: Es gibt mindestens 4 Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen und es gibt mindestens 4 Geraden, die nicht alle durch denselben Punkt gehen.

Veränderungen der projektiven Ebene, die diese Eigenschaften elementweise invariant lassen, nennt man **projektive Abbildungen.**

Die Anschauungsebene, in der wir zeichnen, erfüllt P2 nicht, da es ja auch parallele Geraden gibt. Das kann man aber ändern, wenn man jedem Parallelbüschel einen so genannten **Fernpunkt** zuordnet und der Gesamtheit aller Fernpunkte eine so genannte **Ferngerade**. Diese Zusätze werden im Folgenden vorausgesetzt. Dann gilt:

3.2.2 Satz: Vertauscht man die Begriffe Punkt und Gerade, Schneiden und Verbinden einer projektiven Ebene so, dass bestehende Inzidenzen (also Punkt P liegt auf der Geraden g oder g geht durch P) in entsprechende übergeführt werden, so wird die Ebene in sich übergeführt. Man sagt: Die projektive Ebene ist zu sich selbst **dual**.

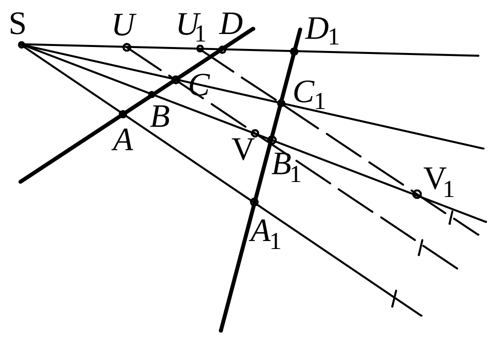
Der Beweis folgt unmittelbar aus P1 bis P3. P3 ist zu sich selbst dual. P1 und P2 sind zueinander dual.

3.2.3 Satz: Die Pol-Polaren-Beziehung bezüglich eines festen Kreises ist eine projektive involutorische Abbildung, genannt **Polarität**, die die projektive Ebene auf ihre duale abbildet, die mit ihr identisch ist.

Wie in MEYER [2] gezeigt wird, ist jede Polarität eine Orthogonalität. Solche Orthogonalitäten können sehr allgemein (also mit Radikal und Isotropen) in geometrischen Verbänden (d. h. semimodularen, atomaren, endlichdimensionalen Verbänden) eingeführt werden. Die hier durchgeführten Untersuchungen in der Anschauungsebene sind also fundamental.

3.2.4 Definition: Schneidet man 4 sich in S schneidende Geraden a, b, c, d mit einer Geraden g, die nicht durch S geht, und sind die Schnittpunkte von a, b, c, d mit g in dieser Reihenfolge die Punkte A, B, C, D mit dem Doppelverhältnis DV($A,C;B,D$), dann gibt man den Geraden a, b, c, d das Doppelverhältnis
DV($a,c;b,d$) = DV($A,C;B,D$).

3.2.5 Satz:
Werden vier sich in S schneidende Geraden von einer fünften Geraden außerhalb S geschnittten, so ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte konstant.



Beweis:
Zeichne $CV \parallel SA \parallel C_1V_1$.
Nach dem Strahlensatz gelten:

$$|\overline{AD}| : |\overline{CD}| = |\overline{AS}| : |\overline{CU}| \quad \text{und} \quad |\overline{AB}| : |\overline{CB}| = |\overline{AS}| : |\overline{CV}|$$

Hieraus folgt: $\quad \mathrm{DV}(A,C;B,D) = \dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CB}|} : \dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|} = \dfrac{|\overline{CV}|}{|\overline{CU}|}$

und $\quad \mathrm{DV}(A_1,C_1;\, B_1,D_1) = \dfrac{|\overline{C_1V_1}|}{|\overline{C_1U_1}|} = \dfrac{|\overline{A_1B_1}|}{|\overline{C_1B_{11}}|} : \dfrac{|\overline{A_1D_1}|}{|\overline{C_1D_1}|}$

Nach dem Strahlensatz folgt $\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{CB}\right|} : \frac{\left|\overline{AD}\right|}{\left|\overline{CD}\right|} = \frac{\left|\overline{CV}\right|}{\left|\overline{CU}\right|} \;=\; \frac{\left|\overline{C_1V_1}\right|}{\left|\overline{C_1U_1}\right|} = \frac{\left|\overline{A_1B_1}\right|}{\left|\overline{C_1B_{1}}_1\right|} : \frac{\left|\overline{A_1D_1}\right|}{\left|\overline{C_1D_1}\right|}$.

Also ist das Doppelverhältnis unabhängig von der Wahl der Geraden.

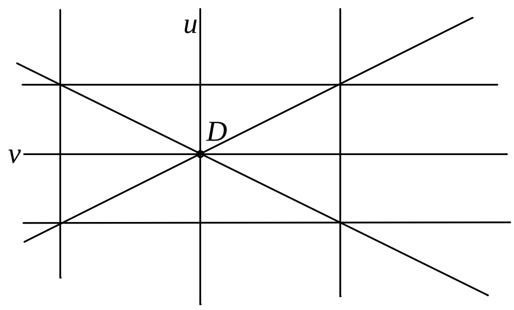
Bemerkung: In der Kongruenzgeometrie bleiben die Strecken- und Winkelgrößen erhalten. In der Ähnlichkeitsgeometrie bleiben die Winkelgrößen und Streckenverhältnisse erhalten. In der Projektiven Geomertie sind nur die Doppelverhältnisse konstant.

3.2.6 Definition: In der projektiven Geometrie heißt eine inzidenztreue Abbildung projektiv, d. h. eine Abbildung die die Punkt-Geraden-Paare in eine ebensolche und hierbei die Inzidenzen in entsprechende überführt.

Ohne Beweis:
3.1.5 besagt also, dass die projektiven Abbildungen das Doppelverhältnis erhalten.

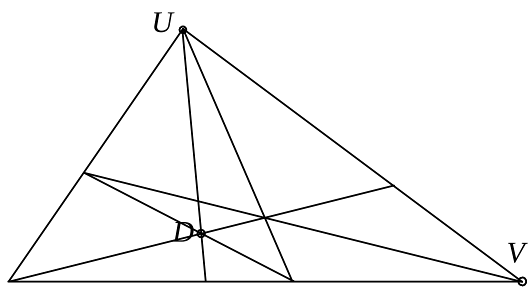
Ohne Beweis geben wir den folgenden Satz an:

3.2.7 Satz: Durch Vorgabe von drei nicht kollinearen Punkten und hierzu willkürlich gewählten, nicht kollinearen Bildpunkten ist eine projektive Abbildung festgelegt.



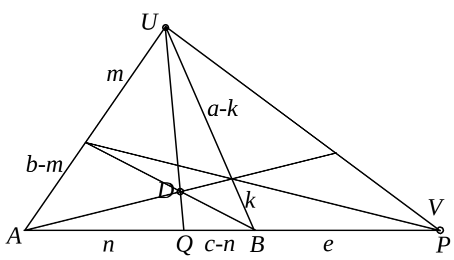
Um wieder zu den Polaritäten, jetzt als speziellen projektiven Abbildungen zurückzukehren, übertragen wir diese Dinge auf harmonische Punkte (bzw. Geraden).

Nimmt man in der nebenstehenden Zeichnung die Ferngerade *f* hinzu und stehen *u* und *v* senkrecht zueinander, so ist offensichtlich
DV($a,b;u,f$) = DV($c,d;v,f$) = –1.



Man wendet nun 3.2.7 Satz folgendermaßen an: Die Fernpunkte von *u* und *v* verlegt man in die endlichen Punkte *U* bzw. *V* unter Beibehaltung des Punktes *D*. Es entsteht die nebenstehende Figur. Hätte man 3.2.7 als Satz bewiesen, dann wüsste man, dass an der neuen Figur jeweils 4 auf einer Geraden liegende Punkte harmonische Punkte sind. Zum Glück kann man solches auch elementargeometrisch durchführen:

3.2.8 Satz: Die nebenstehende Figur dient zum Konstruieren von harmonischen Punkten- und Geraden-Quadrupeln.



Beweis: Aus der nebenstehenden Zeichnung entnimmt man nach dem Satz von CEVA:
$(a\text{-}k)(b\text{-}m)(c\text{-}n) = knm$ oder:

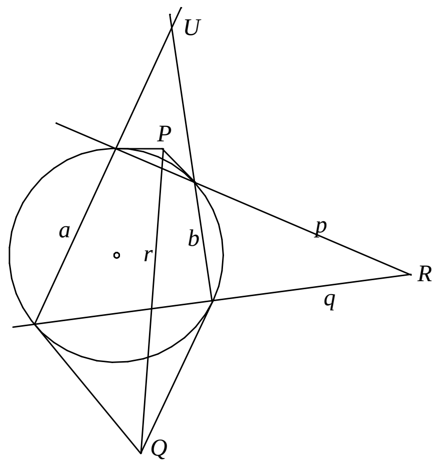
$$\frac{n}{c-n} = \frac{(a-k)(b-m)}{km} \qquad (1)$$

Nach CEVA folgt $km(c+e) = (a\text{-}k)(b\text{-}m)$e oder

$$\frac{c+e}{e} = \frac{(a-k)(b-m)}{km}\,. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt: $n(c - n) = (c + e):e$
Also ist $\mathrm{DV}(A,B;\, D,P) = -1$.
Der DV-Wert der anderen Quadrupel folgt über harmonische Geradenquadrupeln.

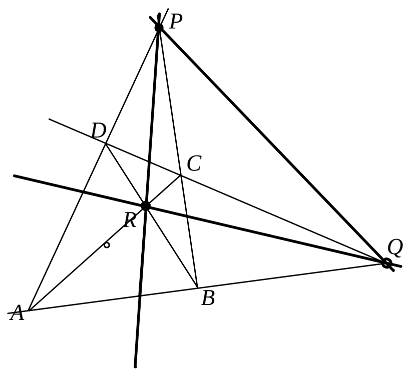
Nun kommt die Anwendung auf die Pol-Polarenbeziehung:



Zu den sich in R schneidenden Kreissekanten p und q konstruiert man die Pole P und Q. Damit ist deren Verbindung r die Polare zu R und die jeweils vier auf den Geraden p und q liegenden Punkte sind harmonisch angeordnet. a und b schneiden sich in U. Damit sind die Geraden a, b und UR zusammen mit r harmonische.
Würde nun U nicht auf r liegen, so gäbe es auf p zu drei gegebenen Punkten zwei verschiedene vierte harmonische. Das kann nicht sein. Also liegt U auf r und somit gilt der folgende Satz:

3.2.9 Satz: In nebenstehender Figur sind in dieser Reihenfolge die Geraden a,b von r, UR harmonisch getrennt.

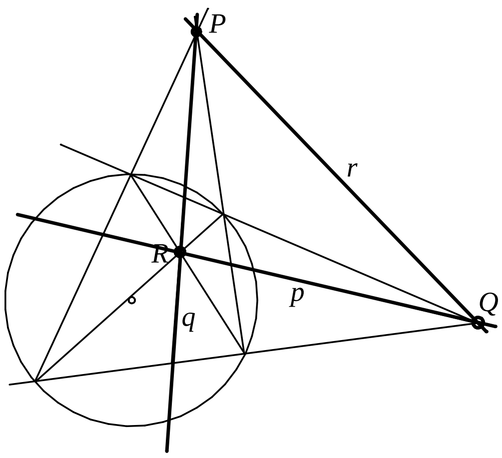
3.2.10 Definition: Die in der nebenstehenden Abbildung dünn gezeichnete Figur heißt **vollständiges Viereck** *ABCD* mit den drei Diagonalpunkten *P*, *Q*, *R*.



Bemerkung: In der projektiven Geometrie ist jedes Viereck vollständig, hat also – abgesehen von der Ausnahme der Charakteristik 2 – drei nicht kollineare Diagonalpunkte.

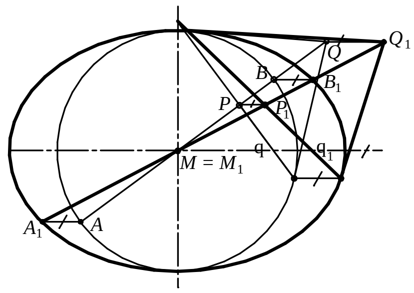
3.2.11 Satz: Liegen die Ecken eines Vierecks auf einem Kreis, so ist die Zuordnung
$P \to p$
$Q \to q$
$R \to r$
eine Polarität.

Beweis:
Gegeben ist ein Viereck auf einem Kreis. Nach 3.2.9 ist gezeigt: Wenn dann auf einer Geraden 4 Punkte liegen, so sind diese harmonische. Da aber alle Geraden durch einen Pol, die Nullenkreise haben, diese durch den Pol und den Schnittpunkt mit der dazugehörigen Polaren harmonisch trennen und das hier gegeben ist, sind die genannten Beziehungen die einer Polarität.



Abschließende Bemerkungen:
1. Die projektive Geometrie zeigt, dass ein Kreis mit der Ferngeraden entweder keinen oder genau einen oder genau zwei Punkte gemeinsam haben kann. Interpretiert man das wiederum in der Zeichenebene, so ist dieser Kreis in der Zeichenebene eine Kurve, die entweder keinen (Ellipse), genau

einen (Parabel) oder genau zwei (Hyperbel) Punkte mit der Ferngeraden gemeinsam haben. Hieraus vermutet man, dass die kennen gelernte Polarität am Kreis durch eine Projektivität in eine Polarität an Ellipse oder Parabel oder Hyperbel übergeführt werden kann. Das lässt sich beweisen (die nebenstehende Skizze verdeutlicht dies).

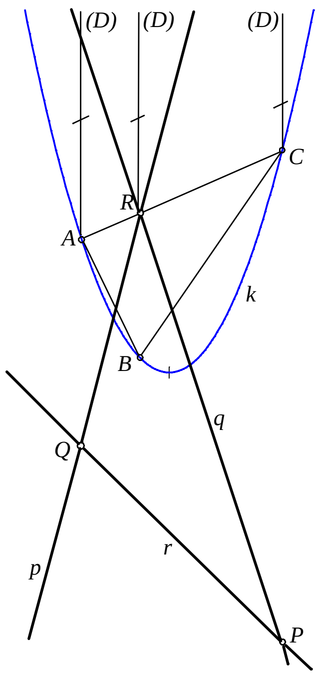


2. In der projektiven Geometrie hat jede Gerade der Zeichenebene genau einen Fernpunkt (gekennzeichnet durch ihre Richtung). Oben wurde aber auch einmal die Kreisgeometrie erwähnt. Hier zeigte RIEMANN, dass überhaupt alle Geraden durch denselben Fernpunkt gehen.

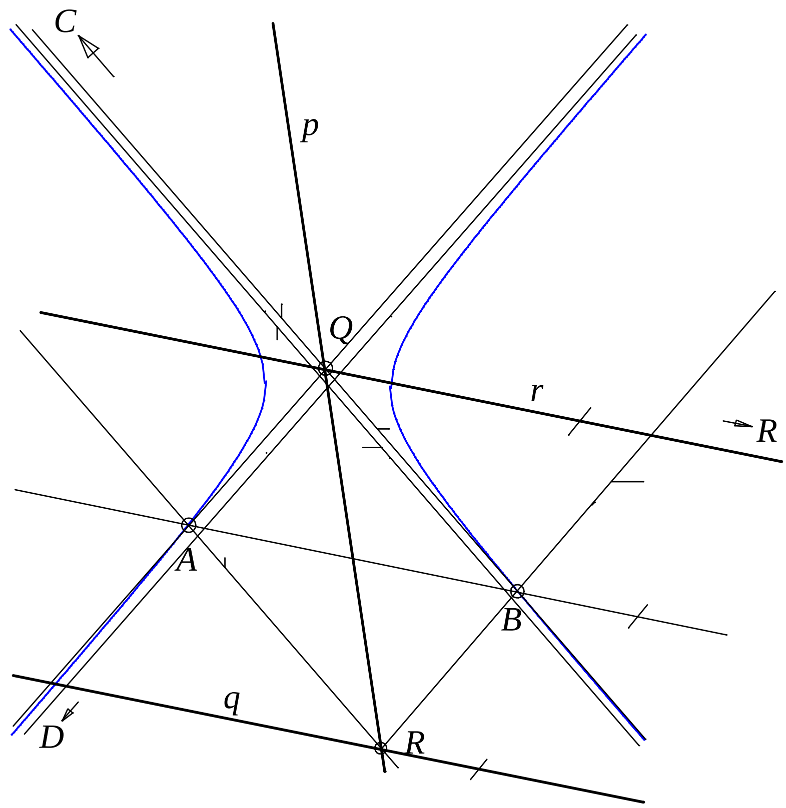
Kommentar zur Bemerkung 1:

1. Eine **Ellipse** geht aus einem Kreis durch eine Achsen-Affinität an der Achse *a* hervor; diese Abbildung ist eine inzidenztreue Abbildung. Deshalb geht Tangente in Tangente und Schnittpunkt in Schnittpunkt usw. über. Die Abbildung erhält nach dem Strahlensatz die Verhältnisse und damit die Doppelverhältnisse; deshalb trennen die Punkte P_1, Q_1 die Punkte A_1, B_1 harmonisch, weil dies die Punkte P, Q mit A und B getan haben. In der letzten Abbildung ist der Zusammenhang am Kreis dünn und der an der Ellipse dick gezeichnet. Dieser Fall wurde noch konstruiert. Letzteres ist bei den folgenden Fällen grundsätzlich auch noch möglich. Hierzu sind aber weitere Kenntnisse erforderlich.

2.



3.

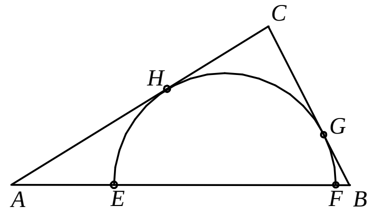


Bei obigen Abbildungen wurde jeweils die Zeichnung zu 3.2.10 Satz realisiert. Links wurde nur der Kreispunkt D nach unendlich verlegt und damit die Situation der Parabel herbeigeführt, rechts sind die Punkte C und D zu Fernpunkten geworden und es entstand die Síuation der Hyperbel. Die konstruierten Polaren sind jeweils fett gezeichnet.

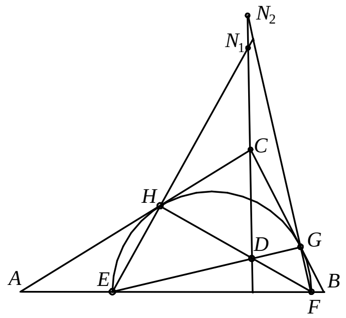
4. Weitere Aufgaben

Hierbei nicht vergessen: Sekanten-Tangentensatz, Um-, In-, Ankreise zu einem Dreieck.
Kritik an der MO-Aufgabenstellung: Die erwarteten Kenntnisse werden in kaum einem Bundesland am Gymnasium vermittelt.

Aufgabe 4.1 (MO 481144 bw. 481344):
Einem Dreieck ABC ist ein Halbkreis so einbeschrieben, dass der Durchmesser $\overline{EF}$ des Halbkreises auf der Seite AB liegt. Dabei befindet sich E zwischen F und A, der Halbkreis berührt die Dreiecksseiten BC und AC in den Punkten G bzw. H.
Man beweise, dass der Schnittpunkt der Geraden EH und FG auf der Geraden liegt, die durch den Punkt C geht und auf der Geraden AB senkrecht steht.



Lösungen:
Zunächst versucht man an einer möglichst genauen Zeichnung Ideen zu sammeln, d. h. vorher zu untersuchen, ob die Behauptung überhaupt stimmen kann.
Nach der vorliegenden Zeichnung ist das Senkrechtstehen unwahrscheinlich. Es folgt zunächst eine Lösung ähnlich der Musterlösung von MO:

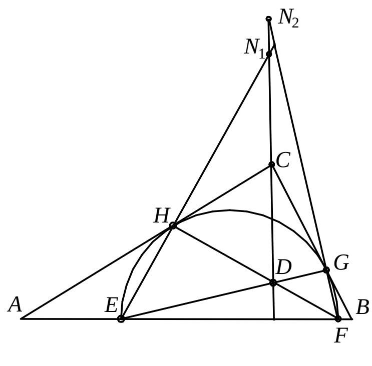


Lösung 1:
Es sei $D = HF \cap GE$ und $N_1 = HE \cap CD$ bzw. $N_2 = GF \cap CD$, d. h. CD trägt zwei verschiedene Punkte N_i.
Der THALESkreis liefert bei H und G rechte Winkel. Deshalb gilt $\angle HFE = \angle EN_1D$. Auf Grund des Sehnen-Tangentenwinkelsatzes ist dann $\angle HFE = \angle CHN_1$, also Dreieck N_1HC gleichschenklig. Analog zeigt man, dass das Dreieck N_2CG gleichschenklig ist. Da die Tangentenabschnitte CH und CG gleich lang sind, folgt $N_1 = N_2$. Hieraus folgt die Behauptung. ND hat einen Fernpunkt, dessen Polare AB ist; also stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander.

Lösungsansatz 2:
Ein analytischer Weg wäre, aus den gegebenen Punkten die Koordinaten der Punkte N und C zu berechnen und dann den Nachweis des Senkrechstehens zu erbringen. Das ist sicher sehr aufwändig.

Lösung 3:
Man ergänzt die Figur zu $ABCFGHFDNQ$. Es ist zu klären, ob der Schnittpunkt C der Tangenten in H und G auf DN liegt und ob DN auf AB senkrecht steht.

In der nebenstehenden Figur ist nach 3.2.10 Satz Q der Pol zu ND. Weil EF Kreisdurchmesser ist, gilt $CD \perp EF$. Da nach der Konstruktion C Pol zu HG durch Q ist, muss der Pol C auf der Polaren ND zu Q liegen. Damit sind die Behauptungen bewiesen.



Aufgabe 4.2 (MO 470945 und 471045): Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit Umkreismittelpunkt O. Die Umkreismittelpunkte der Dreiecke AOC und BCO werden mit Q bzw. R bezeichnet. Man zeige, dass sich die Umkreise der Dreiecke ABO und QOR berühren.

Lösung:
Die Mittelpunkte der Umkreise der Dreiecke ABO und QOR werden mit S bzw. T bezeichnet. Nach Voraussetzung haben die zu betrachtenden Dreiecke den Punkt O gemeinsam. Die Umkreise können sich in ihm nur berühren, wenn die Punkte O, S, T auf einer Geraden liegen. Siehe die Zeichnung der nächsten Seite.
Wenn $\beta := \angle CBA$ ist, gilt nach dem Mittelpunktwinkelsatz (erweiterten Peripheriewinkelsatz) $\beta_1 := \angle COA = 2\beta$.

Da $\overline{OA}$ und $\overline{OC}$ Radien des Umkreises zum Dreieck *ABC* sind, ist Dreieck *AOC* gleichschenklig. Daher ist die Mittelsenkrechte zu $\overline{AC}$ Winkelhalbierende zu πCOA und es gilt

$\beta_2 := \angle COQ = \beta.$

Die Gerade *QR* steht als Zentrale zweier Kreise auf deren gemeinsamer Sehne *CO* senkrecht. Deshalb gilt im rechtwinkligen Dreieck *UOQ*

$\beta_3 := \angle OQR = 90^o - \beta.$

Mit dem Mittelpunktwinkelsatz im Umkreis des Dreiecks *ORQ* bezogen auf die Sehne $\overline{OR}$ gilt:

$\beta_4 := \angle OTR = 2 \cdot \beta_3 = 180^o - 2\beta$

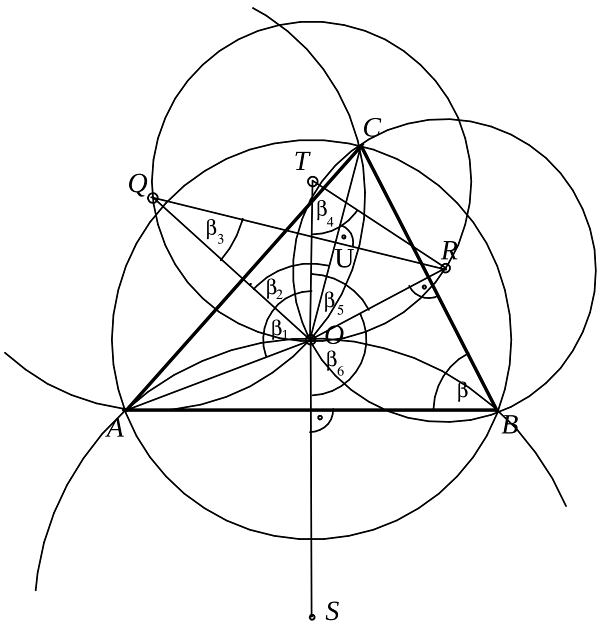
Da $\overline{OT} = \overline{RT}$ sind, findet man im gleichschenkligen Dreieck *ORT*

$\beta_5 := \angle ROT = ½(180^o - \beta_4) = \beta.$ (1)

Da $OS \perp AB$ und $OR \perp BC$ sind, ergibt sich im Viereck *BVOW*

$\beta_6 := \angle ROS = 180^o - \beta.$ (2)

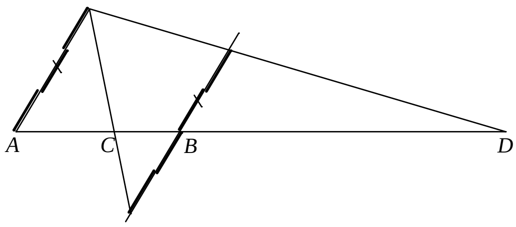
Aus (1) und (2) folgt: Die Punkte *T*, *O*, *S* liegen auf einer Geraden und deshalb berühren sich die Umkreise zu *ABO* und *QOR*.



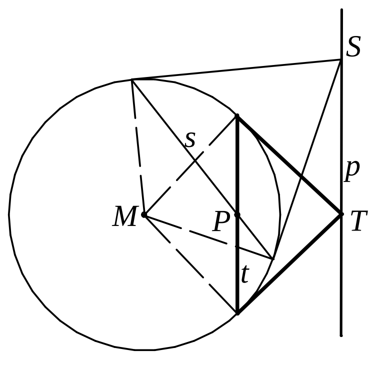
5. Lösungen der eingerückten Aufgaben

Zu Aufgabe 2.3.2:
Fertige eine maßstabsgetreue Zeichnung. Drehe den Zylinder so, dass ohne Probleme die Stütze „angeschweißt“ werden kann (also Vorgehen wie beim Handwerker). Dann drehe den Zylinder so weit zurück, dass die Stütze gerade den Boden berührt. Der Anschweißpunkt am Zylinder sei *B*. Die Parallele zum Boden durch *B* gibt den 2. Anschweißpunkt. Die übrigen Fragen können durch Messungen gefunden werden.

Zu Aufgabe 3.1.1:
Die nebenstehende Zeichnung zeigt, wie man eine gegebene Strecke „innen und außen“ im selben Verhältnis (hier 3:2) teilt. Die Konstruktion benutzt zweimal den Vierstreckensatz. Die beiden Strecken *DA* und *DB* sind gleich gerichtet. Die Strecken *CA* und *CB* sind entgegengesetzt, also ergibt sich ein Doppelverhältnis –1.



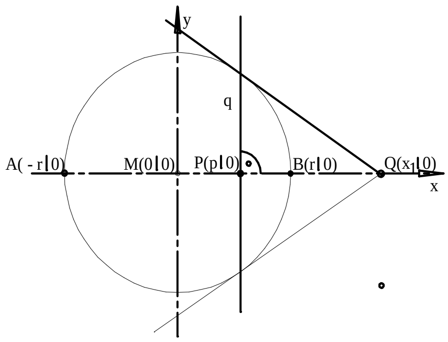
Das Doppelverhältnis kann alle reellen Zahlen annehmen. Ist das DV positiv, so liegen beide Teilungspunkte *C* und *D* außerhalb oder beide innerhalb. Ist das DV negativ, so liegt ein Punkt von *C* und *D* innerhalb und einer außerhalb der zu teilenden Strecke. Fallen *A* und *C* zusammen und *D* liegt irgendwo, so ist das DV = 0. Fallen *B* und *C* zusammen, *D* und *B* aber nicht und *D* liegt außerhalb der Strecke *AB*, so ist der Wert – ∞. Im Fall *A* = *C* und *B* = *D* ist das DV = ∞.



Zu Aufgabe 3.1.2:
Die Definitionen für die Pol-Polarenbeziehung sind so gemacht, dass auch die inneren Punkte des Kreises berücksichtigt sind. Man muss eigentlich bei den inneren Polen nur die Polarenkonstruktion anders machen. Hier führt einmal der Weg von 3.1.1 Definition zum Ziel aber auch 3.1.10 Satz, wenn man die nebenstehende Konstruktion ausführt.

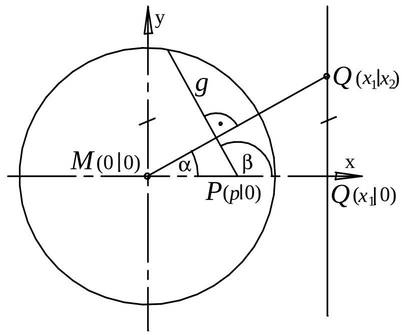
Zu Aufgabe 3.1.3:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat der Kreis den Mittelpunkt $M(0|0)$.
1. Zunächst nimmt man an: Der Pol Q liegt auf der x-Achse. Dann schneidet seine Polare q die x-Achse in $P(p|0)$ senkrecht. Es gilt p zu berechnen:
P,Q trennen A, B harmonisch; deshalb gilt: $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|} : \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{BQ}|} \cdot sign = -1$
Berücksichtigt man die Richtungen der Strecken, so folgt hieraus: $\frac{p+r}{p-r} = \frac{x_1+r}{r-x_1}$
Durch einfaches Ausmultiplizieren erhält man:

$$p = \frac{r^2}{x_1} \qquad (1)$$



Die Polarengleichung hat also im vorliegenden Fall wie behauptet die Form $xx_1 = r^2$.

2. Betrachten wir jetzt einen Pol $Q(x_1|y_1)$ mit der Polaren g, die wegen 3.1.10 Satz durch den bereits berechneten Punkt $P(p|0)$ geht. Es ergibt sich das nebenstehende Bild.



Hat man das Additionstheorem für den Tangens und daraus die Beziehung für die Steigungskoeffizienten zweier aufeinander senkrecht stehender Geraden, so berechnet sich die Gleichung für g wie folgt: $\tan\alpha = \frac{y_1}{x_1}$

g: $\frac{y-0}{x-p} = \tan\beta = -\frac{x_1}{y_1}$
Durch Ausmultiplizieren und Umordnen erhält man:
$x_1x + y_1y = r^2$
Verschiebt man den Ursprung M und die ganze Situation um den Vektor $(x_0|y_0)$, so erhält man die Behauptung.

Literatur

Mathematik-Olympiaden e. V. [1] 47. Mathematik-Olympiade 2007/2008 4. Stufe Bundesrunde Aufgaben und Lösungen Klassen 8 – 13

[2] 48. Mathematik-Olympiade 2008/2009 4. Stufe Bundesrunde Aufgaben und Lösungen Klassen 8 – 13

Meyer, Karlhorst [1] Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht Band 1 Algebra und Geometrie, Hirschgraben-Verlag Frankfurt/Main 1979

[2] Verbandstheoretische Orthogonalität aus Teorie Combinatorie Tomo II Accademia Nazionale dei Lincei Roma 1976, Seiten 281 – 311

[3] Zur spiegelungstheoretischen Kennzeichnung von Miquelebenen mit Berührbüschelsatz aus Beiträge zur Geometrischen Algebra, Seiten 269 – 274, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1977

[4] Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26, Seiten 3 – 24, 1. März 1996

[5] Trainingslager der bayerischen Olympiamannschaft in Altdorf vom 20. bis 23. März 1996, Mathematikinformation Nr. 27, Seiten 1 bis 12, 1. September 1996

Meyer u. a. [6] Brennpunkt Algebra, Bände 7, 8, 9, Schroedel Schulbuchverlag Hannover 1990 bis 1992

[7] Brennpunkt Geometrie, Bände 7, 8, Schroedel Schulbuchverlag Hannover 1988 bis 1992

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg

Diese Arbeit wurde am 12. 2. 2010 angenommen.