Hans Walser

Winkeldefizite bei konvexen Polyedern

Die Summe der ebenen Winkel an einer konvexen Polyederecke ist kleiner als 360°. Zu jeder Polyederecke gibt es also ein Winkeldefizit als Ergänzung auf 360°. Die Summe dieser Winkeldefizite ist konstant, nämlich 720°. Die Gedankengänge gehen auf René Descartes zurück; der Satz von Descartes ist äquivalent zur Polyederformel von Euler.

Die vorgestellten Beispiele sind geeignet, das räumliche Vorstellungsvermögen zu schulen. Der Beweisgang verwendet eine grundlegende Formel der sphärischen Geometrie. Exemplarisch werden auch einige nicht konvexe Polyeder besprochen.

1. Das Winkeldefizit

Wir bilden die Summe der Winkel der Seitenflächen, welche an einer konvexen Polyederecke zusammenstoßen. Für eine Würfelecke zum Beispiel ist das $3 \cdot 90° = 270°$. Diese Summe ist kleiner als 360°. Das Winkeldefizit an dieser Ecke ist die Ergänzung auf 360°, für eine Würfelecke also 90°. Das totale Winkeldefizit ist die Summe der Winkeldefizite aller Ecken. Für den Würfel ist das $8 \cdot 90° = 720°$.

1.1 Beispiele

Polyeder	Eckenzahl	Winkelsumme an einer Ecke	Winkeldefizit an einer Ecke	Totales Winkeldefizit
Tetraeder	4	180°	180°	720°
Quader	8	270°	90°	720°
Oktaeder	6	240°	120°	720°

Ist das totale Winkeldefizit eine Invariante?

Aufgabe 1: Wie steht es mit dem totalen Winkeldefizit bei einem Dreikant-Prisma?

Aufgabe 2: Wie groß ist das totale Winkeldefizit bei Ikosaeder und Dodekaeder?

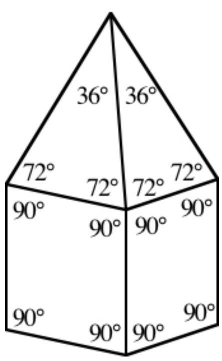

Abb. 1: Würfel mit Pyramidendach

Ein weniger regelmäßiges Beispiel: Wir setzen einem Würfel eine Pyramide auf, deren Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke mit einem Spitzenwinkel 36° sind (Abb. 1).

Das Polyeder hat vier Basisecken mit einem Winkeldefizit von je 90°, vier Ecken an der Pyramidenbasis mit einem Winkeldefizit von je 36° und die Spitze mit einem Winkeldefizit von 216°. Das totale Winkeldefizit ist $4 \cdot 90° + 4 \cdot 36° + 216° = 720°$.

Aufgabe 3: Ein Antiprisma habe ein regelmäßiges Sechseck als Grundfläche und ein um 30° verdrehtes Sechseck als Deckfläche. Der Mantel bestehe aus gleichschenkligen Dreiecken. Wie groß ist das totale Winkeldefizit?

Aufgabe 4: Wie groß ist das totale Winkeldefizit bei einem *unregelmäßigen* Tetraeder?

1.2 Der Satz von Descartes

René Descartes
Zeichnung von Bigna Steiner

Wir vermuten den Satz:

Das totale Winkeldefizit eines konvexen Polyeders ist 720° Α 4š .

Der Satz geht auf René Descartes (1596-1650) zurück.

1.3 Beweis mit sphärischem Bild

Im Beweis arbeiten wir mit dem Bogenmaß.

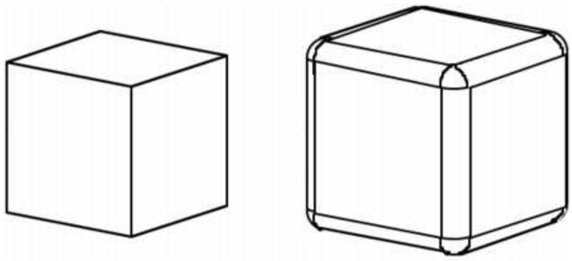

Abb. 2: Würfel und Parallelfläche

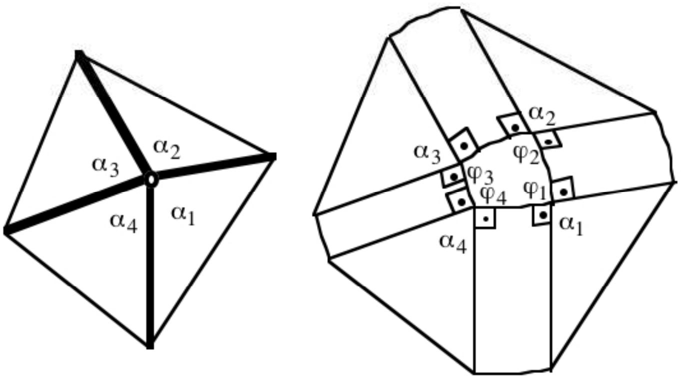

Abb. 3: Polyederecke und Parallelfläche

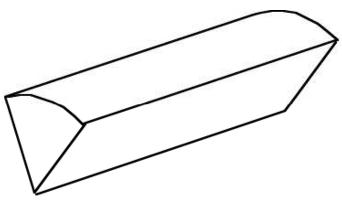

Abb. 4: Zylindersektor

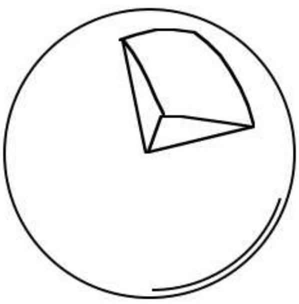

Abb. 5: Sphärisches Viereck

Zum Polyeder denken wir uns die äußere „Parallelfläche“ im Abstand 1. Das ist die Menge aller Punkte, welche im Außenraum des Polyeders liegen und von der Oberfläche des Polyeders den Abstand 1 haben. Die Abbildung 2 zeigt links einen Würfel und rechts die zugehörige Parallelfläche.

Die Abbildung 3 zeigt allgemein eine Polyederecke und ihre Parallelfläche.

Die Parallelfläche besteht zunächst aus ebenen Flächenstücken, welche zu den ursprünglichen Seitenflächen des Polyeders kongruent sind. Den ursprünglichen Seitenflächen sind gerade Prismen der Höhe 1 aufgesetzt.

Über den ursprünglichen Kanten liegen Zylindersektoren (Abb. 4). Solche Zylindersektoren könne wir uns als Spälten (Spalthölzer) denken, welche beim Scheiten (Holzhacken) aus Trämeln (Rundhölzern) entstehen. Die ursprünglichen Kanten des Polyeders sind die Zylinderachsen, die Sektorwinkel sind die Außenwinkel des jeweiligen Winkels zwischen den Flächen an der betreffenden Kante. Die Abwicklungen der Mantelflächen dieser Zylindersektoren sind Rechtecke.

Über den ursprünglichen Ecken ergeben sich sphärische Vielecke. Die Abbildung 5 zeigt ein sphärisches Viereck zusammen mit seiner Trägerkugel.

Die Innenwinkel φ_i (vgl. Abb. 3) dieser sphärischen Vielecke sind die Ergänzungswinkel der anstoßenden Seitenflächenwinkel α_i auf š , da wir im selben Punkt noch zwei rechte Winkel von den Zylindersektoren haben. Ein solches sphärisches Vieleck wird als *sphärisches Bild* der betreffenden Polyederecke bezeichnet. Je spitzer die Ecke, desto so größer ihr sphärisches Bild.

Für den Flächeninhalt A dieser sphärischen Vielecke verwenden wir folgende Formel aus der sphärischen Geometrie der Einheitskugel:

$$A_{\text{Sphärisches Vieleck}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i - (n-2)\pi$$

Dabei sind φ_i die Innenwinkel des sphärischen Vieleckes und n die Eckenzahl. Mit den anstoßenden Winkeln α_i der ebenen Seitenfläche ist $\varphi_i = \pi - \alpha_i$. Für den Flächeninhalt A des sphärischen Vieleckes erhalten wir:

$$A_{\text{Sphärisches Vieleck}} = \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) - (n-2)\pi = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

Das ist aber das Winkeldefizit an der betreffenden Ecke. Nun können wir — und das ist das entscheidende Argument in der Beweisführung — die sphärischen Bilder aller Ecken passgenau zur Einheitskugel zusammenfügen. Diese hat die Gesamtoberfläche 4π. Somit ist das totale Winkeldefizit $4\pi = 720^{o}$.

2. Eckenreguläre Körper

Ein konvexes Polyeder mit kongruenten Ecken heißt *eckenreguläres* Polyeder. In diesem Fall haben alle Ecken dasselbe Winkeldefizit, dieses muss also ein Teiler von 720° sein. Wir haben damit eine notwendige Bedingung, mit der wir allenfalls rein rechnerisch gewisse Fälle ausschließen können.

Beispiel 1: An jeder Ecke sollen drei gleichseitige Dreiecke und ein regelmäßiges Fünfeck zusammenstoßen. Das Winkeldefizit an einer Ecke ist $360° - (3 \cdot 60° + 108°) = 72°$. Dies ist ein Teiler von 720°. Wenn es ein solches Polyeder gibt, muss es 10 Ecken haben. Tatsächlich gibt es das, nämlich das Antiprisma mit je einem regelmäßigen Fünfeck als Boden und als Deckel und 10 gleichseitigen Dreiecken auf der Mantelfläche.

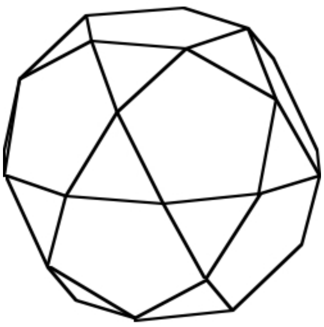

Abb. 6: Ikosidodekaeder

Beispiel 2: An jeder Ecke sollen zwei gleichseitige Dreiecke und ein regelmäßiges Fünfeck zusammenstoßen. Das Winkeldefizit an einer Ecke ist $360° - (2 \cdot 60° + 108°) = 132°$. Dies ist *kein* Teiler von 720°. Es kann also kein derartiges Polyeder geben.

Beispiel 3: An jeder Ecke sollen zwei gleichseitige Dreiecke und zwei regelmäßige Fünfecke zusammenstoßen. Für das Winkeldefizit an einer Ecke ergibt sich $360° - (2 \cdot 60° + 2 \cdot 108°) = 24°$. Dies ist ein Teiler von 720°. Ein passendes Polyeder muss 30 Ecken haben. Wir erhalten ein solches, indem wir bei einem Ikosaeder (oder bei einem Dodekaeder) die Ecken bis zu den Kantenmitten abschneiden. Das resultierende Polyeder heißt *Ikosidodekaeder* (Abb. 6). Seine Oberfläche besteht aus 20 Dreiecken und 12 Fünfecken. Weitere Beispiele siehe [1], S. 56.

Aufgabe 5: An jeder Ecke sollen Seitenflächen gemäß Liste zusammenstoßen. Welche Fälle sind auf Grund des Satzes von Descartes ausgeschlossen? Falls kein Ausschluss möglich ist: Wie könnte das Polyeder aussehen?
a) zwei gleichseitige Dreiecke und zwei Quadrate
b) zwei gleichseitige Dreiecke und ein Quadrat
c) ein gleichseitiges Dreieck und zwei Quadrate

Unsere Bedingung ist notwendig, aber leider nicht hinreichend. Dies können wir an folgendem Beispiel einsehen: An jeder Ecke sollen ein gleichseitiges Dreieck und zwei regelmäßige Neunecke zusammenstoßen. Das

Winkeldefizit an einer Ecke ist $360° - (60° + 2 \cdot 140°) = 20°$. Dies ist ein Teiler von 720°. So weit so gut. Nun nehmen wir eines der Neunecke und fassen eine bestimmte Ecke mit den beiden anstoßenden Neunecksseiten ins Auge. An die eine dieser Neunecksseiten stößt ein weiteres Neuneck, an die andere ein Dreieck an. Weiter müssen nun an den Seiten unseres Neuneckes abwechslungsweise Neunecke und Dreiecke anstoßen. Dies geht aber nicht auf, da neun eine ungerade Zahl ist.

Aufgabe 6: An jeder Ecke sollen ein gleichseitiges Dreieck und zwei regelmäßige Elfecke zusammenstoßen.

Aufgabe 7: An jeder Ecke sollen ein gleichseitiges Dreieck und zwei regelmäßige Zwölfecke zusammenstoßen.

3. Äquivalenz zur Polyederformel von Euler

Es seien E, K und F die Anzahlen der Ecken, Kanten und Seitenflächen des Polyeders. An jeder Polyederecke ist das Winkeldefizit 2π minus die Summe der anstoßenden Seitenflächenwinkel. Das totale Winkeldefizit ist somit $2\pi E$ minus die totale Summe aller Seitenflächenwinkel. Diese totale Winkelsumme berechnen wir nun über die Seitenflächen. Mit F_i, $i \in \{3, 4, 5, \ldots\}$, bezeichnen wir die Anzahl der Seitenflächen mit i Ecken; diese Seitenflächen haben dann auch i Kanten. Es ist:

$$F = \sum_{i=3}^{\infty} F_i$$

Da jede Kante zu genau zwei Seitenflächen gehört, erhalten wir für die totale Anzahl K der Kanten:

$$2K = \sum_{i=3}^{\infty} iF_i$$

Eine Seitenfläche mit i Ecken hat die Winkelsumme $(i-2)\pi$. Für die totale Winkelsumme erhalten wir daher:

$$\text{Totale Winkelsumme } = \sum_{i=3}^{\infty} F_i (i-2)\pi = \left(\sum_{i=3}^{\infty} iF_i - \sum_{i=3}^{\infty} 2F_i \right)\pi = (2K - 2F)\pi$$

Für das totale Winkeldefizit ergibt sich:

$$\text{Totales Winkeldefizit} = 2\pi E - (2K - 2F)\pi = 2\pi (E - K + F)$$

Daher ist:

$$\text{Totales Winkeldefizit} = 4\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad E - K + F = 2$$

Die Aussage $E - K + F = 2$ wird als *Eulersche Polyederformel* bezeichnet. Sie geht zurück auf Leonhard Euler (1707-1783). Man kann umgekehrt den Satz von Descartes über das totale Winkeldefizit aus der Eulerschen Polyederformel herleiten (vgl. [2], S. 159f und [3], S. 209f).

Es besteht aber ein wichtiger Unterschied zwischen dem Satz von Descartes und der Eulerschen Polyederformel. Beim Satz von Descartes werden Maßzahlen von Winkelgrößen verwendet, während die Formel von Euler rein kombinatorisch mit Anzahlen arbeitet. Sie ist daher eleganter und moderner.

4. Analogie zur Außenwinkelsumme bei ebenen Polygonen

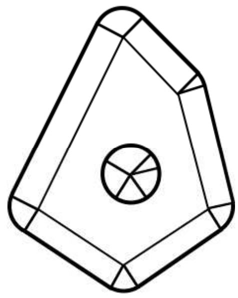

Abb. 7: Parallelkurve

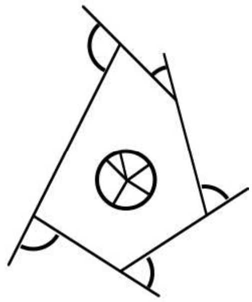

Abb. 8: Außenwinkel

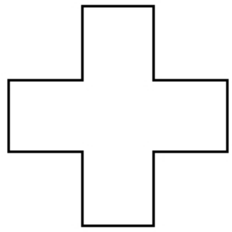

Abb. 9: Außenwinkelsumme?

Zu einem ebenen konvexen Polygon zeichnen wir die äußere „Parallelkurve“ im Abstand 1 (Abb. 7). Diese besteht aus Strecken, welche parallel im Abstand 1 und kongruent zu den Polygonkanten sind, sowie Kreis-Sektoren mit Radius 1 über den Ecken. Die Sektorwinkel sind die Außenwinkel des Polygons, sie werden als *Eckenbilder* bezeichnet. Diese Eckenbilder können wir passgenau zum Einheitskreis zusammensetzen. Daher ist die Außenwinkelsumme gleich 2š = 360^{o}.
Natürlich können wir bei ebenen Polygonen die Außenwinkel auch direkt einzeichnen (Abb. 8) und sektorenweise zu einem Kreis zusammenfügen. Gegenüber den Eckenbildern der Abbildung 7 sind die Sektoren um 90° verdreht.

Aufgabe 8: Wie groß ist die Außenwinkelsumme des aus fünf Quadraten zusammengesetzten Kreuzes der Abbildung 9?

5. Nicht konvexe Polyeder

Wie groß ist das totale Winkeldefizit des aus 7 Würfeln zusammengesetzten 3d-Kreuzes der Abbildung 10?

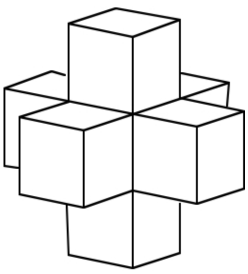

Abb. 10: Totales Winkeldefizit?

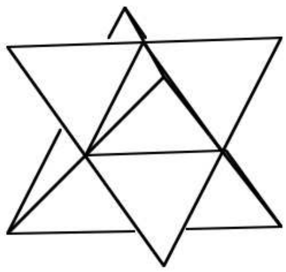

Abb. 11: Kepler-Stern

Für die 24 konvexen Außenecken erhalten wir je ein Winkeldefizit 90°. Spannend sind nun die acht nicht konvexen Ecken bei den Kreuzarm-Ansätzen. Es kommen dort je 6 Quadrate zusammen. Für das Winkeldefizit einer solchen Ecke gilt also $360° - 6 \cdot 90° = -180°$. Das Winkeldefizit ist negativ. Für das totale algebraische Winkeldefizit erhalten wir $24 \cdot 90° + 8 \cdot (-180°) = 720°$.

Der Satz von Descartes funktioniert offenbar auch bei nicht konvexen Polyedern. Für den Beweis müsste mit negativ orientierten Flächeninhalten von sphärischen Vielecken gearbeitet werden.

Aufgabe 9: Wie groß ist das totale Winkeldefizit des so genannten Kepler-Sternes (Abb. 11)? — Der Kepler-Stern besteht aus einem zentralen Oktaeder mit acht aufgesetzten Tetraedern. Er kann aber auch als Durchdringungskörper zweier Tetraeder gedeutet werden.

6. Polyeder mit Löchern

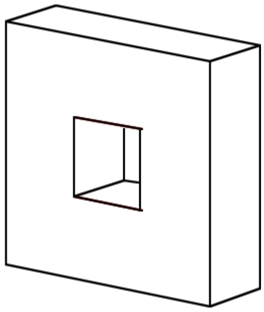

Abb. 12: Polyeder mit Loch

Das aus acht Würfeln zusammengesetzte Polyeder der Abbildung 12 hat in der Mitte ein Loch — dort wäre der neunte Würfel. Wie groß ist das totale Winkeldefizit dieses Polyeders?

Zunächst haben wir außen acht konvexe Ecken mit je einem Winkeldefizit von $360° - 3 \cdot 90° = 90°$. Für eine der acht zum Lochrand gehörenden Ecken erhalten wir das Winkeldefizit $360° - (270° + 2 \cdot 90°) = -90°$. Das totale Winkeldefizit ist Null. — Das haben wir dem Loch zu verdanken.

Es gibt Löcher und Löcher. Das Loch in unserem Modell ist durchgehend, wie etwa das Schraubenloch bei einer Sechskant-Mutter, das Loch bei einem Gugelhupf, das Loch bei einem Rettungsring oder das Loch bei einem aufgeblasenen Autoschlauch. Wenn wir uns das Polyeder als Kartonmodell gebastelt vorstellen, kämen wir durch das Loch nicht ins Innere des Modells. Dazu müssten wir ein Loch in die Kartonoberfläche schneiden. Bei einem aufgeblasenen Autoschlauch müssten wir entsprechend die Gummioberfläche durchstechen, dann ginge die Luft raus.

Aufgabe 10: Zwei gegenüberliegende Seitenflächen eines Ikosaeders sind um 60° verdrehte gleichseitige Dreiecke (Abb. 13). Wir können diese zu einem Antiprisma ergänzen. Nun entfernen wird dieses Antiprisma aus dem Ikosaeder. Wie groß ist dass totale Winkeldefizit des Restkörpers, also des gelochten Ikosaeders?

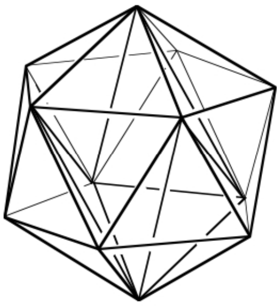

Abb. 13: Gelochtes Ikosaeder

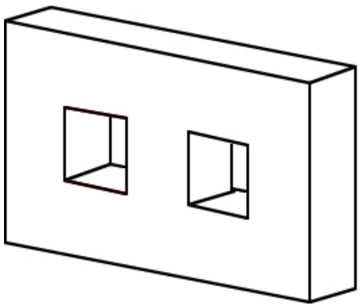

Abb. 14: Zwei Löcher

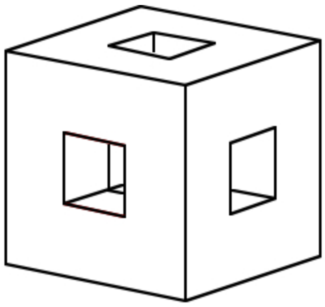

Abb. 15: Wie viele Löcher?

Aufgabe 11: a) Das Polyeder der Abbildung 14 ist aus 13 Würfeln zusammengesetzt und hat 2 Löcher. Wie groß ist sein totales Winkeldefizit? b) Wie ist es allgemein bei n Löchern?

Aufgabe 12: Wie viele Löcher hat das aus 20 Würfeln zusammengesetzte Polyeder der Abbildung 15? Das Polyeder entsteht aus einem $3 \times 3 \times 3$-Würfelcluster bei Wegnahme des 3d-Kreuzes der Abbildung 10. Tipp: Totales Winkeldefizit berechnen, mit Resultat von Aufgabe 11b) vergleichen, nachdenken.

7. Lösungshinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1: Das Dreikant-Prisma hat sechs Ecken, an jeder Ecke zwei rechte Winkel (vom Prismen-Mantel) und einen Winkel von 60°. Die Winkelsumme an einer Ecke ist 240°, das Winkeldefizit 120°. Das totale Winkeldefizit ist 720°.

Zu Aufgabe 2:

Polyeder	Eckenzahl	Winkelsumme an einer Ecke	Winkeldefizit an einer Ecke	Totales Winkeldefizit
Ikosaeder	12	300°	60°	720°
Dodekaeder	20	324°	36°	720°

Zu Aufgabe 3: Es seien $\alpha = \beta$ die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke auf der Mantelfläche und $\gamma = 180° - 2\alpha$ entsprechend der Spitzenwinkel. Wir haben an jeder der 12 Ecken des Antiprismas die Winkelsumme $120° + \alpha + \beta + \gamma = 120° + 180° = 300°$ und das Winkeldefizit 60°. Das totale Winkeldefizit ist 720°.

Zu Aufgabe 4: Es seien A, B, C, D die Ecken des unregelmäßigen Tetraeders. Das Dreieck ABC habe die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, das Dreieck ABD die Winkel $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$, das Dreieck ACD die Winkel $\alpha_3, \gamma_3, \delta_3$ und das Dreieck BCD die Winkel $\beta_4, \gamma_4, \delta_4$. Die einzelnen Winkeldefizite sind:

Ecke	Winkeldefizit an der betreffenden Ecke
A	$360° - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$
B	$360° - \beta_1 - \beta_2 - \beta_4$
C	$360° - \gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_4$
D	$360° - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4$

$$\begin{aligned}\text{Totales Winkeldefizit} &= 360° - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + 360° - \beta_1 - \beta_2 - \beta_4 + 360° - \gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_4 + 360° - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 \\ &= 4 \cdot 360° - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) - (\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) - (\alpha_3 + \gamma_3 + \delta_3) - (\beta_4 + \gamma_4 + \delta_4) \\ &= 4 \cdot 360° - 4 \cdot 180° = 720°\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 5:

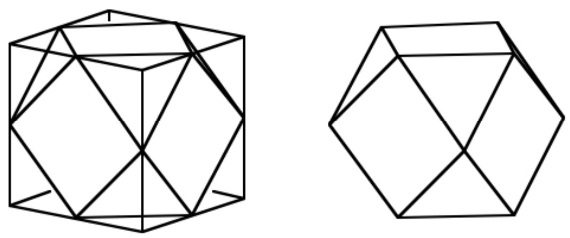

Abb. 16: Würfel und Kuboktaeder

a) Zwei gleichseitige Dreiecke und zwei Quadrate: Das Winkeldefizit an einer Ecke ist 60°, also ein Zwölftel von 720°. Eine passende Lösung ist das Kuboktaeder, das wir durch Abschneiden der Ecken eines Würfels bis zu den Kantenmitten erhalten (Abb. 16).
b) Zwei gleichseitige Dreiecke und ein Quadrat: Das Winkeldefizit an einer Ecke ist 150°. Dies ist *kein* Teiler von 720°. Forget it.
c) Ein gleichseitiges Dreieck und zwei Quadrate: Dreikantprisma.

Zu Aufgabe 6: Ein gleichseitiges Dreieck und zwei regelmäßige Elfecke: Das Winkeldefizit an einer Ecke ist $360° - \left(60° + 2 \cdot \frac{9}{11} \cdot 180°\right) = \frac{60°}{11}$. Dies ist ein Teiler von 720°. Trotzdem gibt es kein passendes Polyeder; an die Seiten eines Elfeckes müssten abwechslungsweise Dreiecke und Elfecke anstoßen. Dies steht im Widerspruch dazu, dass elf eine ungerade Zahl ist.

Zu Aufgabe 7: Ein gleichseitiges Dreieck und zwei regelmäßige Zwölfecke: Das Winkeldefizit an einer Ecke ist $360° - (60° + 2 \cdot 150°) = 0°$. Auweia! — Die Ecke ist flach. Es gibt aber ein passendes unendlich großes ebenes Parkettmuster (Abb. 17). Wer Lust hat, darf die Dreiecke ausmalen.

Zu Aufgabe 8: Die Kreuz-Figur der Abb. 9 ist nicht konvex. Wir haben zwar acht konvexe Ecken mit je einem Außenwinkel von 90°, aber vier nach innen gerichtete Ecken mit je einem negativen „Außenwinkel" von $-90°$, in der Abbildung 18 dunkel getönt. Die Außenwinkelsumme ist nach wie vor 360°.

Zu Aufgabe 9: Beim Kepler-Stern (Abb. 11) haben wir acht konvexe Außenecken mit je einem Winkeldefizit 180°. An die sechs nicht konvexen Ecken stoßen je acht gleichseitige Dreiecke an. Wir haben also an einer solchen nicht konvexen Ecke ein Winkeldefizit $360° - 8 \cdot 60° = -120°$. Für das totale Winkeldefizit ergibt sich $8 \cdot 180° + 6 \cdot (-120°) = 720°$.

Zu Aufgabe 10: Vom Ikosaeder her haben wir 6 konvexe Außenecken mit je einem Winkeldefizit von 60°. Der Mantel des antiprismatischen Loches besteht aus gleichschenkligen Dreiecken mit Basiswinkeln α (den wir nicht explizit zu berechnen brauchen) und einem Spitzenwinkel $180° - 2\alpha$. An jeder der sechs Ecken des Lochrandes ergibt sich das Winkeldefizit $360° - \left(4 \cdot 60° + 2\alpha + (180° - 2\alpha)\right) = -60°$. Wir haben also sechs

Ecken mit einem Winkeldefizit von je 60° und sechs Ecken mit einem Winkeldefizit von je $-60°$. Das totale Winkeldefizit ist null.

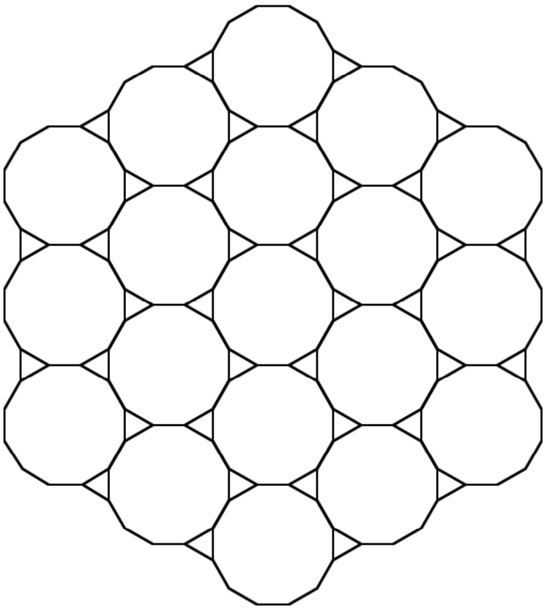

Abb. 17: Parkettmuster mit Dreiecken und Zwölfecken

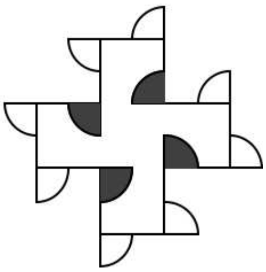

Abb. 18: Nicht konvex

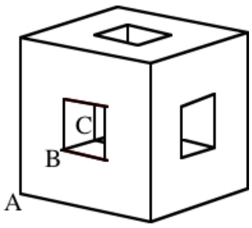

Abb. 19: Eckentypen

Zu Aufgabe 11:
a) Zwei Löcher: Totales Winkeldefizit $-720°$.
b) n Löcher: Totales Winkeldefizit $(1-n)\cdot 720°$.

Zu Aufgabe 12: Wir haben drei Eckentypen (Abb. 19). Für diese gilt:

Typ	Anzahl	Winkelsumme	Winkeldefizit
A	8	270°	90°
B	24	450°	–90°
C	8	540°	–180°

Totales Winkeldefizit:

$$8\cdot 90° + 24\cdot(-90°) + 8\cdot(-180°) = -2880°$$

Nun ist aber $-2880° = (1-5)\cdot 720°$; nach der bei Aufgabe 11b) gefundenen Formel weist das Polyeder also fünf Löcher auf. Dies hat den Autor recht irritiert, da er zunächst dachte, das Polyeder sei ein dreifach durchlochter $3\times 3\times 3$-Würfelcluster.

Wir können uns das so vorstellen: Vom $3\times 3\times 3$-Würfelcluster nehmen wir den Würfel oben in der Mitte sowie den darunter liegenden Würfel (das ist der Würfel ganz im Zentrum des Clusters) einmal weg. Damit haben wir eine Vertiefung abgeteuft, die aber in unserem Sinne noch kein Loch ist, sondern eine Delle. Nun können wir aber von den vier Seitenflächen und vom Boden her je durch Ausziehen eines Würfels ein wirkliches Loch öffnen.

Literatur

Heinrich, Frank [1]: Existenz- und Eindeutigkeitsbetrachtungen bei räumlichen archimedischen Gebilden. MU Der Mathematikunterricht. Polyeder im Mathematikunterricht. Jahrgang 55. Heft 1. Februar 2009. Friedrich Verlag, Seelze. S. 48-60

Hilton, Peter / Pedersen, Jean [2]: Build Your Own Polyhedra. Menlo Park: Addison-Wesley 1994. ISBN 0-201-49096-X

Hilton / Pedersen / Walser [3]: Die Kunst der Mathematik. Von der handgreiflichen Geometrie zur Zahlentheorie. Dillingen: Akademie für Lehrerfortbildung und Personalführung 2003

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
e-mail: hwalser@bluewin.ch
http://www.math.unibas.ch/~walser/