Peter Ullrich

Man bestimme das Maximum der Funktion …
ohne Differentialrechnung

Optimieren ist eine fundamentale Idee in der Mathematik, die viele ihrer Bereiche durchzieht. Im Unterricht wird sie jedoch oftmals nur als Anwendung des Differentialkalküls in der Sekundarstufe II präsentiert. Die Kultur der „Kochrezept-Aufgaben“ zur Bestimmung von Extrema (bzw., in anderer Sichtweise, zur Kurvendiskussion) reduziert aber nicht nur die Infinitesimalrechnung auf ein schematisches Abarbeiten von Rechenregeln, sie verdeckt auch, dass sich zahlreiche Extremwertprobleme ohne Rückgriff auf den Kalkül der Differentialrechnung lösen und somit bereits in der Sekundarstufe I „elementar“ behandeln lassen. (Einen Überblick über die Vielfalt der Themen und Methoden des Optimierens findet sich in dem Buch [8], vgl. auch [2].)

Bisweilen erwecken die Beispiele von in diesem Sinne elementar behandelten Extremwertproblemen allerdings den Eindruck, sie seien speziell für diesen Zweck „maßgeschneidert“ worden, außer den quadratischen Funktionen gäbe es keine Funktionenklasse nennenswerten Ausmaßes, die sich ohne infinitesimale Hilfsmittel behandeln ließe.

Wie in Abschnitt 2. jedoch gezeigt wird, läßt sich auch für alle *kubischen* Funktionen deren Wachstumsverhalten mit elementaren Methoden bestimmen. Diese Funktionenklasse ist zum einen von Interesse, weil sie in der Jahrgangsstufe 10 neue Beispiele zur Verfügung stellt, um Erfahrungen mit dem Funktionsbegriff zu sammeln, vgl. [4, S. 107–108], [7]. Zum anderen finden sich in den üblichen Aufgabensammlungen für mit infinitesimalen Methoden zu behandelnden Extremwertproblemen zahlreiche Beispiele, die auf eine derartige Funktion führen, – denn deren Ableitung ist ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen sich problemlos mittels der wohlvertrauten Lösungsformel bestimmen lassen.

Der für das Folgende gewählte Zugang geht dabei von einer einzigen Optimierungsaufgabe aus:

> Man bestimme unter allen Quadern mit gegebener Summe der Kantenlängen denjenigen, der das größte Volumen hat.

Diese bietet den Vorteil, dass man recht bald den Würfel als Lösung vermutet. Bei der Verifikation, dass man das Maximum gefunden hat, kann man mithin direkt von der Extremstelle ausgehen und braucht diese nicht erst zu bestimmen. Mittels elementarer, rein algebraischer Transformationen lassen sich dann alle kubischen Polynome mit lokalen Extrema auf diese eine Zielfunktion zurückführen. Dass hierbei die Mittelstufenalgebra ins Spiel kommt, braucht nicht zu stören: Erstens bildet dieses Vorgehen eine Anwendung des in den Jahrgangsstufen 7 und 8 Erlernten, und zweitens steht bei dem (infinitesimal)kalkülmäßigen Lösen von Extremwertaufgaben auch diese Kompetenz im Zentrum.

Die genannte Vorgehensweise läßt sich sogar auf Polynome vierten Grades übertragen (Abschnitt 3.), was dann allerdings doch eine gewisse technische Komplexität mit sich bringt. Daher mag es sich anbieten, danach einen etwas abstrakteren (aber immer noch *prä*-infinitesimalen) Standpunkt einzunehmen:

Jetzt steht mehr Beispielmaterial als nur quadratische Funktionen zur Verfügung, so dass man eine überzeugendere Möglichkeit hat – wie weiland René Descartes (1596–1650) – zu entdecken, dass die Extremstellen polynomialer (und vieler anderer) Funktionen solche Stellen sind, wo der Funktionswert in höherer als nur einfacher Vielfachheit angenommen wird, und dass für diese das Kriterium von Pierre de Fermat (1601/7–1665) gilt (Abschnitt 4.).

1. Zum Warmwerden: Elementare Extremwertuntersuchung quadratischer Funktionen

Zur Einstimmung auf die Behandlung von Polynomfunktionen dritten und höheren Grades werden jedoch erst einmal die quadratischen Funktionen durch Reduktion auf ein geometrisches Extremwertproblem behandelt (im vollen Bewusstsein dessen, dass sich das Wachstumsverhalten quadratischer Funktionen auch direkt aus der

Scheitelpunktsform $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ ablesen läßt).

1.1 Flächeninhaltsmaximierung von Rechtecken bei gegebenem Umfang

Gesucht ist dasjenige Rechteck mit vorgebenem Umfang, das den größten Flächeninhalt besitzt – so es denn existiert.

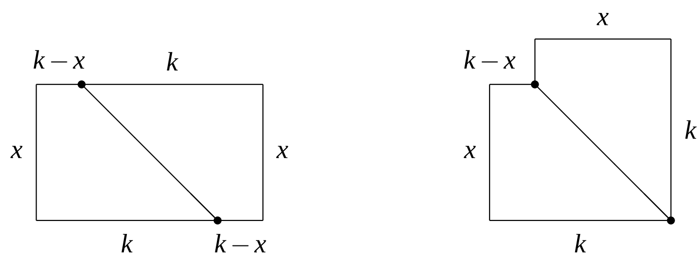
Aufgabe: a) *Für eine selbst gewählten Umfang rechne man den Flächeninhalt von so vielen Rechtecken dieses Umfangs aus, bis man davon überzeugt ist, dass es sich bei dem gesuchten Rechteck um das entsprechende Quadrat handelt. (Alternativ kann man auch ein dynamisches Geometriesoftwareprogramm einsetzen.)*

b) *Man führe a) für so viele Werte des Umfangs durch, bis man davon überzeugt ist, dass das Quadrat stets, d. h., unabhängig von dem gewählten Umfang, die Lösung ist.*

c) *Man mache sich klar, dass Aufgabenteil b) überflüssig ist: Ist das Quadrat für einen gegebenen Umfang die Lösung, so ist es für jeden Umfang die Lösung. (Stichwort: Zentrische Streckung)*

Um zu beweisen, dass bei vorgegebenem Umfang das Quadrat in der Tat dasjenige unter allen Rechtecken dieses Umfang ist, welches den größten Flächeninhalt hat, bezeichne man den gegebenen Umfang mit $4k$, so dass k dann also die Seitenlänge des in Frage kommenden Quadrats ist.

Ist dann ein beliebiges Rechteck mit dem Umfang $4k$ gegeben, so muss eine seiner Seitenlängen kleinergleich k sein. Diese sei mit x bezeichnet. Die andere Seitenlänge beträgt dann $2k - x$ und ist mindestens so groß wie x. Man zerlege die beiden Seiten der Länge $2k - x$ in jeweils in zwei Teilstücke der Länge k und $k - x$, wobei man die Teilungspunkte punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des Rechtecks wähle. Die Verbindungslinie der beiden Teilungspunkte bildet dann einen $45°$-Winkel mit den Rechtecksseiten (Warum?). Von den so entstandenen zwei trapezförmigen Teilen des Rechtecks klappe man das eine (im Raum) um und füge die beiden Teile wieder an der Verbindungslinie der Teilungspunkte zusammen.



Der so entstandene Winkelhaken hat offensichtlich den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck, aber auch den gleichen Umfang (was man durch Nachrechnen einsieht oder, indem man bemerkt, dass die beiden Teile an den diagonalen „Schnittkanten“ wieder zusammengefügt werden).

Der Flächeninhalt des Winkelhakens ist aber gleich dem Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge k minus dem des Quadrats mit der Seitenlänge $k - x$. Daher ist er genau dann maximal, wenn das zweite Quadrat verschwindet, also $k = x$ ist.

Übersetzt auf das ursprüngliche Rechteck bedeutet dies (natürlich) gerade, dass dessen Flächeninhalt genau dann maximal ist, wenn es ein Quadrat ist. $\square$

Aufgabe: a) *Man vollziehe den Beweis auf algebraischem Wege nach.*

b) *Welche bekannte Formel wird durch die geometrische Umformung des Rechtecks in den Winkelhaken „sichtbar“ gemacht?*

Die geometrisch gefasste Aussage, dass das Quadrat dasjenige unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang ist, das den größten Flächeninhalt hat, läßt sich in die arithmetischer Sprache übersetzen als die Aussage:

> Das Produkt zweier nichtnegativer Faktoren mit konstanter Summe ist genau dann maximal, wenn beide gleich groß sind.

Bereits in dieser Gestalt lassen sich damit auch andere Optimierungsaufgaben lösen, so die

Aufgabe: *Gesucht ist derjenige Quader mit vorgegebener Länge der Kantensummen, der den größten Oberflächeninhalt besitzt – so er denn existiert.*

Hinweise für einen möglichen Lösungsweg: *Die Längen der Quaderkanten seien mit x, y bzw. z bezeichnet. Man halte zunächst die Länge z fest und lasse nur x und y bei fester Kantenlängensumme variieren. Die Flächeninhaltsmaximierung für das Rechteck liefert dann, dass bei dem derart eingeschränkten Problem genau für* $x = y$ *ein Maximum der Oberfläche vorliegt, also, wenn der Quader eine quadratische Säule ist. (Vorsicht! Man vergesse bei der Diskussion der Oberfläche nicht diejenigen Flächen, deren eine Seitenlänge c beträgt.)*

Mithin braucht man nach Kandidaten für den Quader mit dem größten Oberflächeninhalt nur noch unter den quadratischen Säulen zu suchen. Deren Oberflächeninhalt läßt sich aber – bis auf einen konstanten Faktor – als Produkt zweier Faktoren schreiben, deren Summe gleich der Kantenlängensumme (bzw. einem konstanten Vielfachen dieser) ist, also konstanten Wert hat.

Mit dieser Aufgabe wurde schon ein Ausblick auf die räumliche Situation getan, die in Abschnitt 2. im Zentrum stehen wird.

Weitere Optimierungsaufgaben aus der ebenen Geometrie, die sich mit dem bereits Bewiesenen lösen lassen, findet man in [8, S. 6–9], so etwa die Bestimmung des flächeninhaltsgrößten Parallelogramms, welches einem gegebenem Dreieck einbeschrieben ist und mit ihm eine Ecke und den zugehörigen Winkel gemeinsam hat (vgl. EUKLID, „Elemente“, Buch VI, § 27).

1.2 Übertragung auf beliebige quadratische Funktionen

Die Vielzahl der Optimierungsaufgaben, die sich auf die Flächeninhaltsmaximierung bei fixiertem Rechtecksumfang zurückführen lassen, kann den Verdacht nahelegen, *jede* Optimierungsaufgabe mit quadratischer Zielfunktion ließe sich darauf zurückführen.

Dies ist in der Tat so und durch algebraische Umformungen leicht einzusehen: Eine Zielfunktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

mit a, b, c konstant und $a \neq 0$ nimmt genau dann ein Extremum an, wenn dies auf die Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx$$

zutrifft. Nach Division durch $-a$ kann man ohne Einschränkung annehmen, dass der Koeffizient von x^2 gleich -1 ist, und, falls notwendig, nach Ersetzen von x durch $-x$ auch noch, dass der Koeffizient b' bei x nichtnegativ ist:

$$x \mapsto -x^2 + b'x = (b' - x) \cdot x \quad \text{mit } b' \geq 0.$$

Wegen $(b' - x) + x = b' = \text{const.}$ liegt nach dem Obigen das Maximum dieser Funktion für $0 \leq x \leq b'$ in der Situation $x = b' - x$, also $x = \frac{b'}{2}$ vor. Durch Rücktransformieren ergibt sich daraus im Falle $a < 0$ und $b \geq 0$, dass das Maximum der Ausgangsfunktion im Intervall $[0; -\frac{b}{a}]$ an der Stelle $-\frac{b}{2a}$ liegt.

Aufgabe: *Man diskutiere die drei weiteren Möglichkeiten, die sich aus den Möglichkeiten für die Vorzeichen von a und b ergeben.*

Für eine vollständige Extremwertdiskussion benötigt man neben den eben untersuchten lokalen Extrema natürlich noch die Untersuchung auf Randextrema. Eine darüber hinausgehende vollständige Kurvendiskussion der quadratischen Funktion ist jedoch unproblematisch, da die Funktion $x \mapsto x^2$ für $x \geq 0$ streng monoton wächst und für $x \leq 0$ streng monoton fällt, die Funktion

$$x \mapsto ax^2 + bx + c = a\big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 + c - (\tfrac{b}{2a})^2$$

also sowohl für $x \geq -\frac{b}{2a}$ als auch für $x \leq -\frac{b}{2a}$ jeweils streng monoton ist.

Die Nützlichkeit der Aufgabe zur Flächeninhaltsmaximierung bei fixiertem Rechtecksumfang beschränkt sich überdies keinefalls auf quadratische Zielfunktionen: Man löse, etwa unter Verwendung einer zentrischen Streckung, die folgende (zur Ursprungsaufgabe duale)

Aufgabe: *Man bestimme unter allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt dasjenige, welches den kürzesten Umfang hat.*

2. Elementare Extremwertuntersuchung kubischer Funktionen

Dass sich überhaupt eine elementare Diskussion des Wachstumsverhaltens kubischer Funktionen durchführen läßt, ist bereits in der Literatur ausgeführt, etwa in [4, S. 107–109], [5]; in diesen Arbeiten wird der Funktionsterm auf die Gestalt $x^3 + cx$ transformiert.

Dagegen werden im folgenden zunächst Terme der Form $x^3 - bx^2$ mit $b > 0$ untersucht (Unterabschnitt 2.2) und der Allgemeinfall hierauf zurückgeführt (Unterabschnitt 2.3). Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, dass sich bei Termen der Gestalt $x^3 - bx^2$ die *Lage* der (lokalen) Extremstelle $x_E = \frac{2}{3}b$ sofort einsichtig machen läßt: Man kann die gegebene Extremwertaufgabe interpretieren als das Problem der Maximierung des Volumens einer quadratischen Säule bei konstanter Kantenlängensumme. Dass an der vermuteten Stelle wirklich ein Extremwert vorliegt, ist dabei elementar zu verifizieren (Unterabschnitt 2.1).

2.1 Volumenmaximierung bei Quadern mit gegebener Kantenlängensumme

Die in Unterabschnitt 1.1 behandelte Aufgabe, bei konstanter Summe der Seitenlängen dasjenige Rechteck zu bestimmen, welches den größten Flächeninhalt besitzt, läßt sich auf verschiedene Weisen ins Dreidimensionale übertragen: Die Verallgemeinerung, die Quaderoberfläche bei fester Kantenlängensumme zu maximieren, wurde bereits in Unterabschnitt 1.1 behandelt. Eine weitere Möglichkeit ist, das Volumen bei konstanter Oberfläche zu maximieren; dazu siehe man weiter unten.

An dieser Stelle wird dagegen die Aufgabe betrachtet, unter allen Quadern mit gleicher Summe der Kantenlängen denjenigen mit dem größten Volumen zu suchen. Dass solch ein Quader tatsächlich existiert und dass es sich dabei um den Würfel handelt, läßt sich wie folgt zeigen, wobei ähnlich vorgegangen wird wie bei der Aufgabe zur Maximierung der Quaderoberfläche bei gegebener Kantenlängensumme in Unterabschnitt 1.1:

Bezeichnen x, y bzw. z die Längen der Quaderkanten, so halte man zunächst die Länge z fest und variiere nur x und y bei fixierter Kantenlängensumme $4(x+y+z)$, also bei fester Summe $x+y$. Aufgrund der Ergebnisse aus Unterabschnitt 1.1 hat dann genau im Falle $x = y$ das Rechteck mit den Seitenlängen x und y den größten Flächeninhalt und daher, da die dritte Länge z fixiert ist, der Quader das größte Volumen.

Mithin kann man sich generell bei der Suche nach dem Quader mit größtem Volumen bei gegebener Summe der Kantenlängen auf Quader mit quadratischer Grundfläche, also quadratische Säulen, beschränken. Eine Symmetrieüberlegung legt dann natürlich schon nahe, dass es sich bei dem gesuchten Quader um den Würfel handeln wird, was allerdings noch zu bestätigen ist, wobei diesmal zunächst die algebraische Beweisführung gewählt wird und dann erst die geometrische:

Die Summe der Kantenlängen eines Würfels ist zwölfmal so groß wie die Länge einer seiner Kanten. Daher sei die gegebene Summe der Kantenlängen als $12k$ geschrieben mit $k > 0$. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche der betrachteten Quader sei mit x bezeichnet, so dass die Höhe den Wert $3k - 2x$ hat. Da alle Ausdehnungen nichtnegativ sind, muss $x \in [0; \frac{3}{2}k]$ gelten. Der Volumeninhalt des Quaders ist gegeben durch

$$V(x) = x^2 \cdot (3k - 2x).$$

Um zu zeigen, dass der rechte Term für $x = k$ – und nur an dieser Stelle – sein Maximum auf $[0; \frac{3}{2}k]$ annimmt, erinnere man sich an die Situation bei quadratischen Funktionen: Betrachtet man dort nicht mehr die Variable x, sondern deren Abweichung $x - x_S$ von der Scheitelstelle x_S als Variable, so erhält man die Scheitelpunktsform $a(x - x_S)^2 + y_S$, von der man das Wachstumsverhalten ablesen kann. In Übertragung dieser Methode fasse man nicht die Kantenlänge x, sondern deren Abweichung $\varepsilon := x - k$ von der vermuteten Extremstelle k ins Auge, setze also $x = k + \varepsilon$. Dann gilt:

$$V(x) - V(k) = -2\varepsilon^2 \cdot (\tfrac{3}{2}k + \varepsilon).$$

Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt $\varepsilon^2 \geq 0$, und für alle $\varepsilon > -\frac{3}{2}k$ gilt $\frac{3}{2}k + \varepsilon > 0$. Somit ist für $\varepsilon \in (-\frac{3}{2}k; +\infty)$, also $x \in (-\frac{1}{2}k; +\infty)$, stets $V(x) - V(k) \leq 0$, wobei $V(x) - V(k) = 0$ genau dann gilt, wenn $\varepsilon = 0$, d.h., $x = k$ ist. □

Aufabe: a) *Die obige Rechnung kann man durch geschickte Verwendung der binomischen Formel für den Exponenten* 3 *eleganter gestalten (und dabei auch die Einführung der Größe* ε *vermeiden): Es gilt*

$$k^3 = (x + (k - x))^3 = \dots.$$

b) *Man interpretiere die Lösung unter a) im Falle $x \leq k$ geometrisch als Zerlegung eines Würfels der Kantenlänge k. Welche analoge Interpretation ist im Falle $x \geq k$ möglich?*

Da das Intervall $[0; \frac{3}{2}k]$ (für x) in $(-\frac{1}{2}k; +\infty)$ enthalten ist, hat man gezeigt, dass das Volumen $V(x)$ einer quadratischen Säule mit fester Kantenlängensumme $12k$ genau dann maximal wird, wenn die Kantenlänge x gleich k ist, also, wenn ein Würfel vorliegt. Insgesamt ist damit nachgewiesen, dass von allen Quadern mit gegebener Summe der Kantenlängen der Würfel derjenige mit dem größten Volumen ist.

2.2 Das Wachstumsverhalten von $x^3 - bx^2$

In Unterabschnitt 1.2 ist festgestellt worden, dass das zweidimensionale Maximierungsproblem bei konstanter Seitenlängensumme bereits die Lösung aller Extremwertprobleme beinhaltet, die auf eine quadratische Zielfunktion führen.

Bevor eine entsprechende Untersuchung für die dreidimensionale Situation und kubische Funktionen angestellt wird, soll zunächst das Wachstumsverhalten derjenigen Funktionsterme untersucht werden, auf die man bei dem obigen Problem gestoßen ist, nämlich

$$x^2 \cdot (3k - 2x) = -2x^3 + 3kx^2 \quad \text{mit } k > 0 \text{ beliebig.}$$

Multiplikation dieses Terms mit $-\frac{1}{2}$ führt auf die normierte Form $x^3 - \frac{3}{2}kx^2$. Da k nur der Bedingung $k > 0$ unterworfen war, kann man für beliebig vorgegebenes $b > 0$ einfach $k := \frac{2}{3}b$ setzen und studiert dann den Funktionsterm

$$x^3 - bx^2 = x^2(x - b).$$

Für die durch $f(x) := x^3 - bx^2$ für $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion mit $b > 0$ beliebig hat man demnach im obigen Unterabschnitt 2.1 gezeigt, dass

$$f(x) - f\big(\tfrac{2}{3}b\big) = f(x) - f(k) = \varepsilon^2 \cdot \big(\tfrac{3}{2}k + \varepsilon\big) = \varepsilon^2 \cdot (b + \varepsilon)$$

ist für $\varepsilon = x - k = x - \frac{2}{3}b$ und dass gilt:

1) Die Funktion f besitzt auf $(-\frac{1}{3}b; +\infty)$ genau eine absolute Minimalstelle (d. h., sie nimmt dort an genau einer Stelle ihr absolutes Minimum an); diese liegt in $\frac{2}{3}b$ vor.

Aus der obigen Gleichung folgt $f(x) = f(\frac{2}{3}b) + (x - \frac{2}{3}b)^2 \cdot (\frac{1}{3}b + x)$. Auf dem Intervall $[\frac{2}{3}b; +\infty)$ sind die Funktionen $x \mapsto x - \frac{2}{3}b$ und $x \mapsto \frac{1}{3}b + x$ positiv und streng monoton wachsend. Also gilt:

2) Die Funktion f wächst auf $[\frac{2}{3}b; +\infty)$ streng monoton.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$. Somit gilt $f(x) = x^2(x - b) \leq 0$ für $x < b$. Dabei ist für diese x genau dann $f(x) = 0$, wenn $x = 0$ ist. Daher gilt:

3) Die Funktion f besitzt auf $(-\infty; b)$ genau eine absolute Maximalstelle; diese liegt in 0 vor.

Weiterhin sind auf dem Intervall $(-\infty; 0]$ die Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto x - b$ negativ und streng monoton wachsend. Also folgt:

4) Die Funktion f wächst auf $(-\infty; 0]$ streng monoton.

Die Kenntnis der Eigenschaften 1) bis 4) der Funktion f reicht in der Regel zur Behandlung von Extremwertaufgaben völlig aus. Der Vollständigkeit halber soll aber noch nachgewiesen werden, dass auf dem Intervall $(0; \frac{2}{3}b)$ keine (weiteren) lokalen Extrema dieser Funktion vorliegen:

Sei $x \in (0; \frac{2}{3}b)$ beliebig, im folgenden aber fest. Dann gilt für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$, dass

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \big((x+\varepsilon)^3 - x^3\big) - b\big((x+\varepsilon)^2 - x^2\big) = x(3x - 2b) \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 \cdot (3x - b + \varepsilon).$$

Wegen $x \in (0; \frac{2}{3}b)$ ist $x(3x - 2b) < 0$. Damit läßt sich für hinreichend kleines ε der zweite der Summanden im letzten Glied der Gleichungskette beliebig klein machen im Vergleich zum ersten, so dass das Verhalten von $f(x+\varepsilon)$ in einer genügend kleinen Umgebung von x durch $x(3x - 2b) \cdot \varepsilon$ bestimmt wird, es wegen $x(3x - 2b) < 0$ also ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle x' gilt $f(x') > f(x)$ falls $x' \in [x - \delta; x)$ und $f(x') < f(x)$ falls $x' \in (x; x + \delta]$.* Insbesondere ist x dann keine lokale Extremstelle von f, so dass folgt:

*Um hieraus zu folgern, dass auf ganz $(0; \frac{2}{3}b)$ streng monotones Fallen von f vorliegt, ist es bekanntlich im Allgemeinfall notwendig, den Zusammenhang von $\mathbb{R}$ oder eine dazu äquivalente Eigenschaft heranzuziehen. Für den hier vorliegenden Fall eines kubischen Polynoms kann man die globale Eigenschaft allerdings noch direkt nachrechnen, siehe [7, S. 258].

5) Die Funktion f hat nur in 0 und $\frac{2}{3}b$ lokale Extremstellen.

Ist g eine Funktion mit

$$g(x) = x^3 + bx^2, \quad \text{wobei } b > 0,$$

so beachte man, dass gilt

$$-g(-x) = x^3 - bx^2.$$

Wegen $b > 0$ wird das Wachstumsverhalten der Funktion $x \mapsto x^3 - bx^2 = -g(-x)$ durch die Eigenschaften 1) bis 4) (und 5)) beschrieben, so dass – vorbehaltlich der offensichtlichen Änderungen, die sich aus der Punktspiegelung des Graphen am Ursprung ergeben – auch das Wachstumsverhalten von g geklärt ist.

2.3 Das Wachstumsverhalten beliebiger kubischer Funktionen

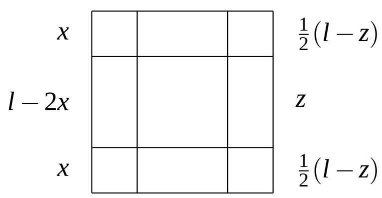
Bisher wurde das Wachstumsverhalten kubischer Funktionen mit einem Funktionsterm des Typs $x^3 + bx^2$ mit $b \neq 0$ untersucht. Dabei wurde bereits benutzt, dass die Multiplikation der Funktionswerte (bzw. der Argumente) mit einer von Null verschiedenen Konstanten das Wachstumsverhalten nur in gut kontrollierbarer Weise ändert. Analoges trifft auch auf die Addition einer Konstanten zu den Funktionswerten zu. Mithin kann man aus dem bisher Gewonnenen auch schon das Wachstumsverhalten aller Polynome der Gestalt

$$ax^3 + bx^2 + d \quad \text{mit } a, b \neq 0$$

erschließen. Leider reicht dies aber nicht unmittelbar für Extremwertbestimmungen an *allen* kubischen Funktionen aus, wie belegt wird durch das wohlbekannte

Beispiel: *Aus einem Quadrat der Kantenlänge l ist der Mantel einer offenen Schachtel mit quadratischer Grundfläche auszuschneiden, die maximales Volumen hat.*

Bezeichnet man die Höhe der Schachtel mit x, so ergibt sich deren Breite als $l - 2x$, siehe die Bezeichnung *links* in der Zeichnung.



Damit erhält man für das Volumen der Schachtel den Term

$$x \cdot (l - 2x)^2 = 4x^3 - 4lx^2 + l^2x,$$

der leider nicht vom obigen Typ ist.

Allerdings kommt man zum Ziel, wenn man sich von der (üblichen) Wahl freimacht, die *Höhe* der Schachtel als Veränderliche zu wählen und stattdessen deren *Breite* nimmt, die mit z bezeichnet sei. Die Höhe hat dann den Wert $\frac{1}{2}(l - z)$ (siehe die Bezeichnung *rechts* in der Zeichnung), und für das Volumen der Schachtel ergibt sich der Term

$$z^2 \cdot \tfrac{1}{2}(l - z) = -\tfrac{1}{2}z^3 + \tfrac{1}{2}lz^2.$$

Dieser ist vom wohlvertrauten Typ, und man erhält, dass die gesuchte Maximalstelle für $z = \frac{2}{3}l$ (und damit $x = \frac{1}{6}l$) vorliegt.

Bei diesem Beispiel hat also geholfen, das Volumen nicht als Funktion von x, sondern von $z = l - 2x$ zu schreiben. Dabei war der entscheidende Schritt, eine Konstante zu x (bzw. $-2x$) zu addieren, denn die zu Anfang des Abschnitts bereits erörterten Transformationen können den linearen Term nicht zum Verschwinden bringen.

Man könnte nun hoffen, dass sich mittels Variablentransformationen des Typs $z := x - \alpha$, mit einem „geeigneten“ $\alpha \in \mathbb{R}$, *jedes* kubische Polynom in x in die Form

$$\widehat{a}z^3 + \widehat{b}z^2 + \widehat{d} \quad \text{mit } \widehat{a}, \widehat{b} \neq 0$$

bringen läßt. Probiert man dies an Übungsaufgaben zur Extremwertbestimmung für kubische Funktionen aus, so stellt sich auch heraus, dass es dort stets geht! (Siehe etwa die Aufgaben weiter unten.)

Allerdings ist klar, dass man nicht bei allen kubischen Funktionen Erfolg haben kann: Jede Funktion des Typs $z \mapsto \widehat{a}z^3 + \widehat{b}z^2 + \widehat{d}$ mit $\widehat{a}, \widehat{b} \neq 0$ hat, wie eben gesehen, (zwei) lokale Extrema. Hingegen ist jede Funktion $x \mapsto x^3 + cx + d$ mit $c \geq 0$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, also ohne lokale Extrema.

Mithin ist zu untersuchen, in welche Gestalt Transformationen des Typs $z = x - \alpha$ ein gegebenes kubisches Polynom bringen können. Zur Vereinfachung der Rechnung sei dieses als normiert vorausgesetzt:

$$x^3 + bx^2 + cx + d,$$

was für die Wachstumsdiskussion offenbar ausreicht.

Wegen $x = z + \alpha$ hat man für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$x^3 + bx^2 + cx + d = z^3 + (b + 3\alpha)z^2 + (3\alpha^2 + 2b\alpha + c)z + (\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d).$$

Setzt man also $\alpha := -\frac{1}{3}b$, so läßt sich das Polynom $x^3 + bx^2 + cx + d$ mittels der Transformation $z = x - \alpha$ in die Gestalt

$$z^3 + \widehat{c}z + \widehat{d} \qquad \text{mit} \quad \widehat{c} = c - \tfrac{1}{3}b^2$$

bringen. Im Falle $\widehat{c} \geq 0$ ist die Funktion $z \mapsto z^3 + \widehat{c}z + \widehat{d}$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und damit auch die Funktion $x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + d$. Somit folgt:

> Genügt das Polynom $x^3 + bx^2 + cx + d$ der Bedingung $c - \frac{1}{3}b^2 \geq 0$, d.h., $b^2 \leq 3c$, so ist die zugehörige Funktion streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Von nun ab sei der komplementäre Fall $b^2 > 3c$ vorausgesetzt. Man betrachte den Koeffizienten $3\alpha^2 + 2b\alpha + c$ von z in der obigen Umrechnung des Polynoms von x auf z als Variable. Die quadratische Gleichung

$$3\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$$

hat dann wegen $b^2 - 3c > 0$ die beiden reellen Lösungen $\alpha_1 = \frac{1}{3}\left(-b + \sqrt{b^2 - 3c}\right)$ und $\alpha_2 = \frac{1}{3}\left(-b - \sqrt{b^2 - 3c}\right)$, die voneinander und von $-\frac{1}{3}b$ verschieden sind.

Wählt man als α eine dieser beiden Lösungen, so transformiert sich das gegebene Polynom $x^3 + bx^2 + cx + d$ vermittels $z = x + \alpha$ in ein Polynom der Gestalt

$$z^3 + \widehat{b}z^2 + \widehat{d},$$

wobei $\widehat{b} = b + 3\alpha$, also von Null verschieden ist. Die durch $z \mapsto z^3 + \widehat{b}z^2 + \widehat{d}$ definierte Funktion ist aber (bis auf die additive Konstante) von dem in Unterabschnitt 2.2 diskutierten Typ.

Mithin gilt:

> Ist $x^3 + bx^2 + cx + d$ ein beliebiges normiertes kubisches Polynom, so gibt es zwei Möglichkeiten:
>
> 1. Falls $b^2 \leq 3c$ gilt, ist die zugehörige Funktion streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
> 2. Falls jedoch $b^2 > 3c$ gilt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $3\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$. Die Variablentransformation $z = x + \alpha$ überführt dann das gegebene Polynom in eines der Gestalt $z^3 + \widehat{b}z^2 + \widehat{d}$.

Damit ist gezeigt, dass sich *alle* (nicht-trivialen) Optimierungsprobleme, die auf eine kubische Zielfunktion führen, mit Hilfe der in den Unterabschnitten 2.1 und 2.2 gefundenen Ergebnisse behandeln lassen. Das Problem der Maximierung des Quadervolumens bei konstanter Kantenlängensumme ist also so allgemein, dass sich alle diese Optimierungsprobleme mit elementaren algebraischen Methoden darauf zurückführen lassen, genauer sogar auf die eingeschränkte Version, dass man nur unter Quadern mit quadratischer Grundfläche variiert!

Im folgenden werden daher nur zwei Beispiele für Aufgaben angegeben, eines, das zu den Ausgangsproblemen in der zwei- und dreidimensionalen Situation passt, und eines, das von historischem Interesse ist:

Aufgabe: *Gesucht ist derjenige Quader mit vorgegebenem Oberflächeninhalt, der das größte Volumen besitzt – so er denn existiert.*

Hinweise für einen möglichen Lösungsweg: *Die Längen der Quaderkanten seien mit x, y bzw. z bezeichnet. Man halte zunächst die Länge z fest. Die um diese Randbedingung ergänzte Ausgangsaufgabe führt auf die Maximierung der Größe xy bei festem $2(xy+xz+yz) = 2xy+2z(x+y)$, also auf die Minimierung von $x+y$ bei festem $xy+xz+yz$. Durch Addition geeigneter Terme kann man darin die Minimierung einer Summe von nichtnegativen Zahlen mit konstantem Produkt sehen. Dann benutze man die letzte Aufgabe aus Unterabschnitt 1.2.*

Aufgrund dieser Überlegung braucht man sich bei der Untersuchung nur auf quadratische Säulen zu beschränken. Für diese läßt sich aber die Gleichung, die die Oberflächenkonstanz beschreibt, problemlos nach der Höhe auflösen und diese dann in die Volumenformel einsetzen, was auf ein kubisches Polynom in der Seitenlänge der quadratischen Grundfläche führt.

Aufgabe (nach JOHANNES KEPLER **(1571–1630), „Nova Stereometria Doliorum Vinariorum" (1615)):** *Gegeben sei ein zylinderförmiges Fass mit Höhe h und Durchmesser d. Der Maximalabstand von einem in der Mitte einer Mantellinie des Fasses befindlichem Spundloch zum Boden bzw. Deckel des Fasses sei vorgegeben. In welchem Verhältnis müssen dann h und d zueinander stehen, damit in das Fass möglichst viel Wein passt?*

3. Ausblick I: Elementare Extremwertuntersuchung von Polynomfunktionen vierten Grades

In Abschnitt 2. wurde gezeigt, dass sich für alle nicht-monotonen kubischen Funktionen die Bestimmung der Extremstellen zurückführen läßt auf das Problem der Maximierung des Volumens einer quadratischen Säule bei konstanter Kantenlängensumme. Insbesondere ist für alle kubischen Funktionen eine elementare Diskussion deren Wachstumsverhaltens möglich. Im folgenden werden diese Überlegungen auf die Situation von Polynomfunktionen vierten Grades übertragen. Dabei wird allerdings neben elementaren algebraischen Hilfsmitteln zusätzlich benötigt, dass jedes Polynom dritten Grades eine reelle Nullstelle besitzt – was allerdings auch bei der „kalkülmäßigen" Lösung derartiger Extremwertprobleme verwendet werden muss.†

Ansonsten folgt der Aufbau im wesentlichen der Behandlung der kubischen Funktionen in Abschnitt 2.: Zunächst wird ein Problem vorgestellt, für das die Lage zumindest einer Extremalstelle sofort einsichtig ist (Unterabschnitt 3.1). Daraus wird in eine Aussage über gewisse Polynomfunktionen vierten Grades hergeleitet (Unterabschnitt 3.2), wobei es sich herausstellt, dass diese Funktionen diejenigen umfassen, deren Funktionsterm die Gestalt

$$x^4 + bx^3 + cx^2 \quad \text{mit } c \leq 0$$

hat (Unterabschnitt 3.3). Zuletzt wird der Allgemeinfall einer Polynomfunktion vierten Grades diskutiert (Unterabschnitt 3.4).

3.1 Maximierung des Hypervolumens bei Hyperquadern mit konstanter Summe der Kantenlängen

Nachdem in Abschnitt 1. erörtert wurde, dass unter allen Rechtecken mit konstanter Summe der Seitenlängen das Quadrat den größten Flächeninhalt hat, und in Abschnitt 2., dass unter allen Quadern mit gleicher Summe der Kantenlängen der Würfel das größte Volumen hat, geht es jetzt um die vierdimensionalen Situation: Unter allen Hyperquadern mit konstanter Kantenlängensumme ist derjenige mit dem größten (Hyper)Volumen gesucht. Das es sich dabei um den Hyperwürfel handelt, läßt sich zeigen, indem man die in Unterabschnitt 2.1 verwendete Methode vom Übergang vom Zwei- ins Dreidimensionale auf die Situation des Übergangs vom Drei- ins Vierdimensionale überträgt:

Man hält zunächst wieder erst einmal eine der Kantenlängen fest. Da der Würfel unter allen Quadern mit gleicher Kantenlängensumme das größte Volumen besitzt, erhält man in dieser modifierten Version der Optimierungsaufgabe das größte Hypervolumen für jenen Hyperquader, bei dem die drei noch variierbaren Kantenlängen alle gleich groß sind.

Also kann man sich bei der Suche nach Hyperquadern der Kantenlängensumme $32k$ für $k > 0$ mit größtmöglichem Hypervolumen auf jene beschränken, für die drei Seiten die gleiche Länge, x, haben. Die vierte Seite hat dann

†Der Artikel [3] belegt, dass sich für alle ganzen und auch gebrochen rationalen Funktionen die Extremwertdiskussion allein auf der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel aufbauen läßt; die dort dargebotene Methode zeigt allerdings in den Details einige Tücken.

die Länge $4k-3x$, so dass das Hypervolumen des betreffenden Hyperquaders gegeben ist durch

$$H(x) = x^3 \cdot (4k-3x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq \tfrac{4}{3}k.$$

Mit $\varepsilon := x-k$, also $x = k+\varepsilon$, gilt dann

$$H(x) - H(k) = -3\varepsilon^2 \cdot (\varepsilon^2 + \tfrac{8}{3}k\varepsilon + 2k^2).$$

Da die Diskriminante des hinteren in ε quadratischen Faktors gleich $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 = -\frac{2}{9} < 0$ und dieser normiert ist, hat er stets echt positive Werte. Die durch $H(x)$ beschriebene Funktion hat somit genau für $\varepsilon = 0$ bzw. $x = k$ eine globale Maximalstelle; speziell liegt dort das absolute Maximum für diejenigen x vor, die sinnvolle Seitenlängen des Hyperquaders beschreiben.

Damit ist gezeigt, dass in der Tat der Hyperwürfel derjenige unter den Hyperquadern mit gegebener Kantenlängensumme ist, der das größte Hypervolumen besitzt. $\square$

Die naheliegende Verallgemeinerung des Vorgehens aus Abschnitt 2. für kubische Polynome wäre, jetzt das Polynom $x^3 \cdot (4k-3x)$ weiter zu untersuchen, zum einen auf sein Wachstumsverhalten hin, zum anderen daraufhin, welche Polynome vierten Grades sich durch geeignete Transformationen in diese Gestalt bringen lassen. Was den letzten Punkt betrifft, sieht man allerdings sofort ein Problem: Bei diesem Polynom fehlt neben dem linearen auch der *quadratische* Term (der absolute bereitet hingegen keine Schwierigkeiten). Die Überlegungen von Unterabschnitt 2.2 dienten ja in gewisser Weise einzig und allein dazu zu untersuchen, ob sich ein kubisches Polynom in eines ohne linearen Term transformieren läßt. Man sieht nun aber leicht, dass man im allgemeinen keine Chance haben wird, sowohl den linearen als auch den quadratischen Term zum Verschwinden zu bringen.

Daher wird an dieser Stelle ein anderer Weg gewählt. Zunächst wird die obige Aussage stärker algebraisch formuliert:

> Ist $k > 0$ beliebig, aber fest und sind u, v, w, z reelle Größen mit $u+v+w+z = 4k$, so liegt an der Stelle $u = v = w = z = k$ ein absolutes Maximum von $u \cdot v \cdot w \cdot z$ vor für den Bereich $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, z \geq 0$, insbesondere ein lokales Maximum.

Und dann wird in gewisser Weise „ein Schritt zurück" gemacht: Beim zweiten Teil des obigen Beweises waren drei der vier Größen u, v, w, z gleich gesetzt worden ($u = v = w =: x$). Im folgenden wird dies nur für zwei von diesen getan, man wählt etwa

$$u = v =: x$$

als Variable; die restlichen beiden Größen werden als (weitere) lineare Funktionen in x angesetzt, die in k den Wert k haben.

3.2 Spezialisierung auf Polynomfunktionen vierten Grades

Sei $k > 0$ fixiert. Für $p > 0$ beliebig setze man

$$u = x, \quad v = x, \quad w = p(x-k)+k, \quad z = -(p+2)(x-k)+k$$

mit einer reellen Variablen x. Dann ist $u+v+w+z = 4k$, und $x = k$ ist die einzige Stelle, an der u bzw. v bzw. w bzw. z den Wert k annimmt.

Somit hat

$$u \cdot v \cdot w \cdot z = x^2 \cdot \left(-p(p+2)(x-k)^2 - 2k(x-k) + k^2\right)$$

an der Stelle $x = k$ ein lokales Maximum.

Nimmt p jeden echt positiven Wert an, so nimmt $p(p+2) = (p+1)^2 - 1$ genau die Werte aus $(0; +\infty)$ an und daher $Q := \left(-p(p+2)\right)^{-1}$ genau die aus $(-\infty; 0)$. Es gilt dabei

$$x^2 \cdot \left(-p(p+2)(x-k)^2 - 2k(x-k) + k^2\right) = Q^{-1} \cdot x^2 \cdot \left(x^2 - 2k(Q+1)x + k^2(3Q+1)\right).$$

Mit $R := Q+1$ schreibt sich der letzte Term als

$$Q^{-1} \cdot x^2 \cdot \left(x^2 - 2kRx + k^2(3R-2)\right).$$

Wenn p jeden echt positiven Wert annimmt, so durchläuft Q das Intervall $(-\infty; 0)$, also R das Intervall $(-\infty; 1)$. Wegen $Q < 0$ folgt somit aus den obigen Überlegungen:

> Für jedes $R \in (-\infty; 1)$ besitzt die durch
> $$x^2 \cdot \big(x^2 - 2kRx + k^2(3R-2)\big)$$
> definierte Funktion an der Stelle $x = k$ ein lokales Minimum.

3.3 Das Wachstumsverhalten von $x^4 + bx^3 + cx^2$ mit $c \leq 0$

1. Fall: $c = 0$

Dann hat der Term die Gestalt $x^4 + bx^3 = -\frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot (-3b - 3x)$.

Falls $b < 0$ ist, kann man in Unterabschnitt 3.1 setzen $k := -\frac{3}{4}a$. Dann liegt aufgrund des dort Gezeigten in k die einzige globale Minimalstelle der durch $x^4 + bx^3$ definierten Funktion f vor.

Falls hingegen $b > 0$ ist, betrachte man anstelle von f die durch $g(x) = f(-x) = x^4 + (-b)x^3$ gegebene Funktion und führe dadurch diesen Fall auf den eben behandelten zurück.

Es bleibt noch der Fall $b = 0$ zu erwähnen, in dem allerdings das Wachstumsverhalten offensichtlich ist.

2. Fall: $c < 0$

In diesem Fall besitzt die Gleichung $x^2 + \frac{3}{4}bx + \frac{1}{2}c = 0$ die positive reelle Lösung
$$k = -\tfrac{3}{8}b + \sqrt{(\tfrac{3}{8}b)^2 - \tfrac{1}{2}c}.$$
Setzt man noch $R := \frac{-b}{2k}$, so gilt
$$b = -2kR \quad \text{und} \quad c = k^2(3R-2),$$
wie man leicht nachrechnet. Somit ist
$$x^4 + bx^3 + cx^2 = x^2 \cdot \big(x^2 - 2kRx + k^2(3R-2)\big).$$

Im Falle $b \geq 0$ gilt dabei $R = \frac{-b}{2k} \leq 0$, mithin $R \in (-\infty; 1)$. Im Falle $b < 0$ ist hingegen $-b = |b|$, wegen $c < 0$ also
$$k = \tfrac{3}{8}|b| + \sqrt{(\tfrac{3}{8}|b|)^2 - \tfrac{1}{2}c} > \tfrac{3}{8}|b| + \tfrac{3}{8}|b| = \tfrac{3}{4}|b| > 0,$$
mithin $0 < \frac{1}{k} < \frac{4}{3}\frac{1}{|b|}$ und daher
$$R = \frac{-b}{2k} = \frac{|b|}{2} \cdot \frac{1}{k} < \frac{|b|}{2} \cdot \frac{4}{3}\frac{1}{|b|} = \frac{2}{3},$$
so dass auch in diesem Fall $R \in (-\infty; 1)$ gilt.

Somit folgt aus dem in Unterabschnitt 3.2 Gezeigten:

> Die durch $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ mit $c < 0$ definierte Funktion f hat ein lokales Minimum an der Stelle
> $$-\tfrac{3}{8}b + \sqrt{(\tfrac{3}{8}b)^2 - \tfrac{1}{2}c} > 0.$$

Betrachtet man nun die durch $g(x) = f(-x) = x^4 + (-b)x^3 + cx^2$ gegebene Funktion, so hat diese aufgrund der gleichen Argumentation ein lokales Minimum an der Stelle $-\frac{3}{8}(-b) + \sqrt{\left(\frac{3}{8}(-b)\right)^2 - \frac{1}{2}c} > 0$. Daher liegt für f ein weiteres lokales Minimum vor an der Stelle
$$-\tfrac{3}{8}b - \sqrt{(\tfrac{3}{8}b)^2 - \tfrac{1}{2}c} < 0.$$

Wegen $c < 0$ ist $f(x) = x^2(x^2 + bx + c) < 0$, falls x nahe bei 0, aber von 0 verschieden ist. Somit ist daneben 0 eine lokale Maximalstelle von f.

Insgesamt besitzt f also in diesem Falle eine lokale Minimalstelle im Negativen, eine lokale Maximalstelle in 0 und eine lokale Minimalstelle im Positiven.

Das Monotonieverhalten von $x^4+bx^3+cx^2$ mit $c \le 0$

Bislang sind nur lokale Extrema der Funktion f angegeben worden, was für die meisten Bestimmungen von Extrema ausreicht. Will man jedoch einsehen, dass die bisher gefundenen bereits *alle* lokalen Extrema von f sind, muss man noch weitere Überlegungen anstellen.

Zunächst sieht man leicht, dass sich f für „große" Argumente monoton verhält: Wegen $c \le 0$ besitzt das Polynom x^2+bx+c eine nichtpositive und eine nichtnegative Nullstelle; die erste sei mit x_1, die zweite mit x_2 bezeichnet. Dann fallen die durch x^2 und x^2+bx+c gegebenen Funktionen auf $(-\infty;x_1]$ streng monoton, wachsen auf $[x_2;+\infty)$ streng monoton und sind auf beiden Intervallen bis auf den jeweiligen Randpunkt positiv. Daher fällt f auf $(-\infty;x_1]$ streng monoton und wächst auf $[x_2;+\infty)$ streng monoton, wobei $f(x_1)=0=f(x_2)$ ist.

Im Falle $c<0$ kann man das Intervall $[x_1;x_2]$ weiter mit Hilfe des Zwischenwertsatzes untersuchen. (Auf diesen wird man möglicherweise ohnehin noch zurückgreifen müssen, wenn es um die Existenz von Nullstellen kubischer Polynome in Unterabschnitt 3.4 geht.): Es bezeichne k_1 die negative, k_2 die positive der beiden lokalen Minimalstellen von f und m das Maximum von $f(k_1)$ und $f(k_2)$. Dann wird jede reelle Zahl zwischen m und 0 aufgrund des Zwischenwertsatzes im Intervall $[x_1;k_1]$ mindestens einmal angenommen, ebenso im Intervall $[k_1;0]$, in $[0;k_2]$ und in $[k_2;x_2]$, also (mit Vielfachheiten gezählt) im Intervall $[x_1;x_2]$ insgesamt mindestens viermal. Da f aber den Grad vier hat, kann dieser Wert nicht häufiger als viermal angenommen werden. Daher muss der Werteverlauf von f in jedem der vier Teilintervalle streng monoton sein, so lange die Werte von f zwischen m und 0 liegen.

Den jetzt noch verbleibenden Bereich kann man ähnlich wie in Unterabschnitt 2.2, zu 5) behandeln, was allerdings auf eine elementare Diskussion der Taylorentwicklung von f hinausläuft.

3.4 Das Wachstumsverhalten beliebiger Polynomfunktionen vierten Grades

Sei f eine Funktion, die durch ein beliebiges Polynom vierten Grades gegeben wird, welches allerdings der Einfachheit halber schon als normiert angenommen sei:

$$f(x) = x^4+bx^3+cx^2+dx+e.$$

Ersetzt man in dem Term $f(x)$ die Variable x durch $z+\alpha$ mit einer beliebigen, aber fixierten reellen Zahl α, so erhält man durch Ausmultiplizieren ein (ebenfalls normiertes) Polynom vierten Grades, dessen linearer Term den Koeffizienten $4\alpha^3+3b\alpha^2+2c\alpha+d$ hat. Man setze

$$h_f(x) := \tfrac{1}{4}\left(4x^3+3bx^2+2cx+d\right) = x^3+\tfrac{3}{4}bx^2+\tfrac{1}{2}cx+\tfrac{1}{4}d.$$

Dann gilt für alle Nullstellen α von $h_f(x)$, dass $f(x-\alpha)$ als Polynom in x einen verschwindenden linearen Term hat. Als Polynomfunktion dritten Grades besitzt h_f dabei drei oder nur eine reelle Nullstelle (mit Vielfachheiten gezählt).

1. Fall: h_f besitzt drei reelle Nullstellen.

Man wähle als α die mittlere oder – falls es keine solche gibt – die mehrfache der Nullstellen von h_f. Dann hat die durch $g(x) := f(x-\alpha)$ gegebene Polynomfunktion vierten Grades einen verschwindenden linearen Term, und es gilt zudem: Bildet man für g analog das Polynom h_g, so sind dessen Nullstellen gerade die um $-\alpha$ verschobenen von h_f. Daher hat h_g nicht nur die offensichtliche Nullstelle 0, sondern auch noch zwei weitere; diese sind weder beide echt positiv noch beide echt negativ.

Zum Zwecke der Untersuchung von Extremalstellen kann man die Variablentransformation von x zu $x+\alpha$ ignorieren und annehmen, dass die für g genannten Eigenschaften bereits auf f selbst zutreffen. Weiterhin kann man den absoluten Term von f als verschwindend annehmen. Damit darf man über f voraussetzen, dass es durch einen Term der Gestalt

$$f(x) = x^4+bx^3+cx^2$$

gegeben ist, wobei das Polynom

$$h_f(x) = x^3+\tfrac{3}{4}bx^2+\tfrac{1}{2}cx = x\cdot(x^2+\tfrac{3}{4}bx+\tfrac{1}{2}c)$$

neben der Nullstelle 0 noch zwei weitere besitzt, die weder beide echt positiv noch beide echt negativ sind. Nach dem Satz von VIETA, angewandt auf den konstanten Term des Polynoms $x^2+\frac{3}{4}bx+\frac{1}{2}c$, folgt somit $\frac{1}{2}c \le 0$, also

$$c \le 0.$$

Daher ist f in diesem Fall von dem in Unterabschnitt 3.3 untersuchten Typ, besitzt also im Falle $c<0$ je eine lokale Minimalstelle im Positiven und im Negativen und eine lokale Maximalstelle in 0.

2. Fall: h_f besitzt nur eine reelle Nullstelle.

Diese Nullstelle sei α. Nach der Variablentransformation von x zu $x+\alpha$ kann man in diesem Fall ohne Einschränkung annehmen, dass f durch einen Term der Gestalt

$$f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$$

gegeben wird, wobei das Polynom

$$h_f(x) = x^3 + \tfrac{3}{4}bx^2 + \tfrac{1}{2}cx = x \cdot (x^2 + \tfrac{3}{4}bx + \tfrac{1}{2}c)$$

im Reellen nur die Nullstelle 0 hat. Daher muss die Diskriminante von $x^2 + \frac{3}{4}bx + \frac{1}{2}c$, d. h., $\left(\frac{3}{8}b\right)^2 - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{32}b^2 - c\right)$ echt negativ sein. Wegen $\frac{9}{32} > \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ folgt daraus $0 > \frac{1}{4}b^2 - c = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$. Somit hat das normierte Polynom $x^2 + bx + c$ keine reelle Nullstelle, nimmt also nur echt positive Werte an.

Also nimmt die Funktion f wegen $f(x) = x^2(x^2 + bx + c)$ außerhalb der Stelle 0 nur echt positive Werte an. Wegen $f(0) = 0$ liegt also in 0 die einzige Stelle vor, an der f sein globales Minimum annimmt.

Weitherhin ist die durch $x^2 + bx + c$ gegebene Funktion streng monoton fallend auf $(-\infty; -\frac{1}{2}b]$ und streng monoton wachsend auf $[-\frac{1}{2}b; +\infty)$. Daher sieht man unmittelbar: Im Falle $b > 0$ fällt f auf $(-\infty; -\frac{1}{2}b]$ streng monoton und wächst auf $[0; +\infty)$ streng monoton; im Falle $b < 0$ fällt es auf $(-\infty; 0]$ streng monoton und wächst auf $[-\frac{1}{2}b; +\infty)$ streng monoton.

4. Ausblick II

Spätestens die doch im Detail recht aufwendigen Rechnungen des letzten Abschnitts 3. legen die Suche nach einem generellen Schema nahe:

Aufgrund der Ergebnisse von Unterabschnitt 2.3 findet man die lokalen Extremstellen des (normierten) kubischen Polynoms $x^3 + bx^2 + cx + d$ unter den Nullstellen des Polynoms $3x^2 + 2bx + c$; entsprechend die lokalen Extremstellen eines Polynoms vierten Grades $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ unter den Nullstellen des Polynoms $4x^3 + 3x^2 + 2cx + d$ (und die eines quadratischen Polynoms $x^2 + bx + c$ als Nullstelle von $2x + b$).

Die (notfalls formal gebildete) Ableitung des Polynoms springt hier so ins Auge, dass ein automatischer Reflex in Richtung Differentialrechnung nahe liegt. „Das Infinitesimale“ kann jedoch durchaus noch etwas warten, wenn man sich daran erinnert, wie die Hilfspolynome entstanden sind :

Die in den Unterabschnitten 2.1, 3.1 und 3.2 verwendeten Ausgangsbeispiele

$$x^2 \cdot (3k - 2x) \quad \text{bzw.} \quad x^3 \cdot (4k - 3x) \quad \text{bzw.} \quad x^2 \cdot \left(x^2 - 2kRx + k^2(3R - 2)\right)$$

besitzen allesamt keinen linearen Term, und die Hilfspolynome entstanden aus der Bedingung an die Zahl α (um die die Variable verschoben werden muss), damit das transformierte Polynom ebenfalls keinen linearen Term besitzt.

Die lokalen Extremalstellen besitzen mithin allesamt die Eigenschaft, dass in ihnen der Funktionswert in mehr als einfacher Vielfachheit angenommen wird, wie schon DESCARTES 1637 in seiner „Géométrie“ bemerkte.

Gestützt wird die Vermutung, dass generell an lokale Extremstellen x_E von polynomialen (oder auch allgemeineren) Funktionen f mehrfache Nullstellen von $f(x) - f(x_E)$ vorliegen, durch die Beobachtung (Übersetzung nach [1, Band 2, S. 828]):

> „An solchen Stellen, wo der Übergang von einem Kleinen zum Grösseren und wieder zum Kleineren stattfindet, ist der Unterschied immer bis zu einem gewissen Grad unmerklich.“,

die KEPLER bei seiner Untersuchung zum Fassinhalt machte (vgl. die letzte Aufgabe in Unterabschnitt 2.3). Aus einer Darstellung $f(x) - f(x_E) = (x - x_E)^2 g(x)$ folgt nämlich sofort, dass sich die Funktionswerte in der Nähe von x_E nur sehr wenig von $f(x_E)$ unterscheiden.

Mit dem Ansatz, diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$ zu suchen, für die $f(x - \alpha)$ keinen linearen Term besitzt, kann man alle bisher gestellten **Aufgaben** erneut lösen. Allerdings wird dabei rechnerisch nichts eigentlich Neues getan, da die Bestimmungsgleichungen für α im Fall eines gegebenen Polynoms dritten (oder auch vierten) Grades bereits in den Unterabschnitten 2.3 und 3.4 aufgestellt wurden.

Interessant wird es jedoch, wenn andere Kriterien zur Verfügung stehen, um diejenigen Stellen α aufzufinden, an denen eine gegebene, (zunächst) als polynomial anzunehmende Funktion f ihren Funktionswert mit mehr als einfacher Vielfachheit annimmt, es also eine Darstellung

$$f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)^2 g(x)$$

gibt, wobei g ebenfalls polynomial, auf jeden Fall aber in α definiert ist.

Die im folgenden beschriebene Methode ist gemeinhin als das Kriterium von FERMAT bekannt (siehe etwa dessen „Methodus ad disquirendam maximam et minimam“ aus dem Jahre 1629); es wird hier ohne Rückgriff auf infinitesimale Überlegungen hergeleitet:

Wie schon zuvor geschehen, sei die neue Variable $z := x - \alpha$ eingeführt, unter deren Verwendung sich die gewünschte Darstellung schreibt als

$$f(z+\alpha) - f(\alpha) = z^2 g(z+\alpha).$$

Hieraus soll eine Bestimmungsgleichung für α erhalten werden und zwar, der Rechenökonomie halber, ohne dass man g ausrechnet. Dazu liegt es nahe, die rechte Seite der Gleichung zum Verschwinden zu bringen. Unmittelbar $z = 0$ zu setzen, bringt aber keinen Erfolg, da dann die linke Seite automatisch verschwindet. Genauer gesagt, gibt es ein Polynom $h(z)$, so dass gilt:

$$f(z+\alpha) - f(\alpha) = zh(z).$$

Damit ist aber $zh(z) = z^2 g(z+\alpha)$ als Gleichheit zwischen Polynomen, so dass folgt:

$$h(z) = zg(z+\alpha).$$

Setzt man hier nun auf beiden Seiten $z = 0$, so verschwindet die rechte Seite immer noch, und man erhält als – nichttriviale ! – Bedingung $h(0) = 0$, d. h.,

$$\left.\frac{f(\alpha+z) - f(\alpha)}{z}\right|_{z=0} = 0$$

bzw.

$$\left.\frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha}\right|_{x=\alpha} = 0.$$

Für eine kubische Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ ist $h(z) = z^2 + 3z\alpha + 3\alpha^2 + bz + 2b\alpha + c$, so dass sich hier gerade die bereits wohlbekannte quadratische Gleichung

$$3\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$$

für α ergibt. Eine ausführliche Behandlung (nebst Arbeitsblättern für den Unterricht) des KEPLERschen Fassproblems nach dem FERMATschen Verfahren findet man in [6].

Es sei betont, dass FERMAT sein Verfahren als reinen Algorithmus präsentiert und keine Bemerkung der Art macht, dass x gegen α strebt. Die Interpretation, dass zunächst ein Differenzenquotient gebildet, dann dessen Limes für x gegen α gebildet, also der Differentialquotient gebildet wird, und dieser (vorbehaltlich einer Stetigkeitsannahme) zuletzt gleich 0 gesetzt wird, ist zwar hilfreich für das bereits infinitesimal geschulte Verständnis, aber ahistorisch.

Literatur

[1] Moritz Cantor: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*. 9 Bände. Verlag B. G. Teunber: Leipzig 1880–1898; 2. Auflage 1894–1901; Nachdruck Johnson Reprint: New York 1965

[2] Rainer Danckwerts, DANKWART VOGEL: Extremwertprobleme ohne Analysis – die Kraft elementarer Methoden, *Der Mathematikunterricht* **47** (2001), Heft 4, 32–38.

[3] Heinrich Dörrie: Ein neues elementares Verfahren zur Lösung von Extremaufgaben, *Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* **50** (1919), 153-177; erneut veröffentlicht in *Der Mathematikunterricht* **18** (1972), Heft 5, 23–51.

[4] Martin Glatfeld: Lernsequenzen zum Thema „Extremwerte: Probleme und Lösungsmethoden“, *Der Mathematikunterricht* **28** (1982), Heft 5, 86–112.

[5] —: Bemerkungen zur Extremwertbestimmung kubischer Funktionen, *Praxis der Mathematik* **26** (1984), Heft 9, 267–270.

[6] Gerhard Heinz, JOACHIM VOGT: Ein historisch orientierter Zugang zum Ableitungsbegriff, Johannes Kepler – Pierre de Fermat, *mathematik lehren* **19** (1986), S. 37–41.

[7] Günter Pickert: Kubische Gleichungen, *Praxis der Mathematik* **26** (1984), Heft 9, 257–266.

[8] Hans Schupp: *Optimieren – Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht*. B. I. Wissenschaftsverlag: Mannheim et al. 1992.

Peter Ullrich
Universität Koblenz · Landau, Campus Koblenz, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland