Karlhorst Meyer

Aufgaben für ein Trainingslager zur Mathematik-Olympiade

Einmal im Jahr werden für vier bis fünf Tage die guten Schülerinnen und Schüler in Bayern zu einem Trainingscamp zusammengeholt, um ihr Können für die Teilnahme an der Bundesrunde der Deutschen Mathematik-Olympiade abzurunden. Immer wieder hat sich dabei gezeigt, dass die Kenntnisse der Landessieger in Bayern sehr heterogen sind. Darüber hinaus sind die Kenntnisse während der vergangenen 10 Jahre weiter durch Lehrplanreduktionen geschmälert worden. Schon lange gab es deshalb auf diesen Trainingslagern einen Kurs, in dem z. B. das Schulcurriculum in Geometrie zusammenfassend wiederholt aber auch ergänzt wurde, um die vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten auszubauen.

Dies ging lange Zeit gut, bis 2008 Kritik an dem „niedrigen Niveau“ dieses Kurses geübt worden ist. Deshalb habe ich 2009 statt dieses Kurses einige der folgenden Aufgaben im Prüfungsstil gestellt und beobachtet, dass die wenigsten Teilnehmer sie bearbeiten konnten. Für die Abarbeitung dieser Probleme und für das Besprechen der erforderlichen Kenntnis-Ergänzungen war jetzt die doppelte Unterrichtszeit gegenüber vorher erforderlich. D. h. ein solches Verfahren ist zumindest zeitlich nicht effektiv.

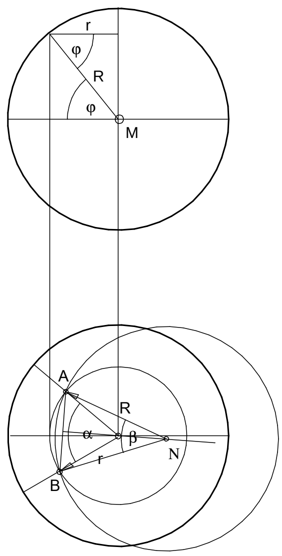
Damit will ich herausstellen, dass das Bearbeiten komplexer Fragestellungen, das Auffinden von Lösungsstrategien in Geometrie auch bei Hochbegabten notwendig ist, trotzdem aber Geometrie im Zusammenhang gelehrt werden muss und eine solche Lehre gegenüber dem Abhandeln von nur Aufgaben zeitsparend ist.

Die folgenden Aufgaben können im Rahmen einer Binnendifferenzierung des Unterrichts guten Schülerinnen und Schülern als Hausaufgaben gestellt werden. Der Lösungsweg soll dabei jeweils so beschrieben werden, dass ein anderer durch Lesen die Lösung verstehen kann.

Aufgabe 1 (ab Jahrgangsstufe 10): Gegeben sind auf der Erde als Kugel die Orte A und B auf dem 50sten Breitenkreis (nördlich), wobei A 40^o westlich und B 30^o östlich von Greenwich ist.
Berechnen Sie den Unterschied der Längen g und b zwischen A und B möglichst genau, wenn g längs eines Großkreises und b längs des Breitenkreises gemessen wird. Der Erdradius habe die Länge 6368 km (nach einer Schulaufgabe am Gymnasium Starnberg in Klasse 10).

Lösung:
In der nebenstehenden Zeichnung sieht man oben den Blick auf die Erde „von vorne“ und unten „von oben“. Dem oberen Teil entnimmt man:
$r = R\,cos\,50^o \approx$ 4093 km. Damit erhält man den Breitenkreisbogen AB als

$$b = \frac{70^o}{360^o} \cdot R\cos 50^o \approx 796 \text{ km.}$$



Wir nennen vorübergehend die Kugelsehne AB = x.
Dann gilt $x = 2r \sin 35^o = 2R \sin \beta/2$ und
$\beta = 2 \cdot \arcsin\left(\cos 50^o \cdot \sin 35^o\right)$. Für die Großkreisbogenlänge g ergibt sich daraus:

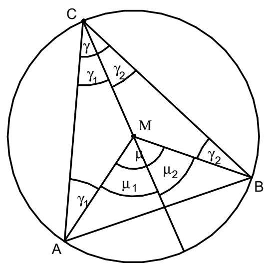
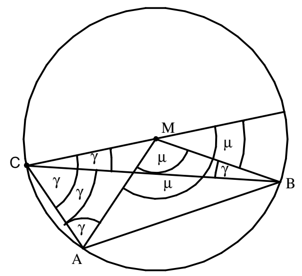
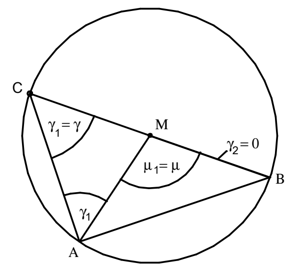
$$g = \frac{2 \cdot \arcsin\left(\cos 50^o \cdot \sin 35^o\right)}{360^o} \cdot R \approx 765 \text{ km}$$

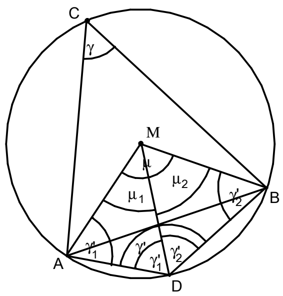
Man erhält: Die Breitenkreislänge ist ca. 31 km länger als die Entfernung auf dem Großkreisbogen.

Aufgabe 2 (ab Jahrgangsstufe 10): Beweisen Sie mit dem Kenntnisstand einer Klasse 9 den Peripheriewinkelsatz: Alle Winkel, deren Scheitel auf einem Kreisbogen oberhalb der festen Sehne AB liegen, sind gleich groß. Weshalb sind die meisten Schulbeweise dieses Satzes falsch? (Nach MEYER U. A. [2]: 1. Beweis Seite 107 (Der dort angegebene zweite Beweis ist falsch.))

Satz:
1. Alle Umfangswinkel γ über einer Sehne AB, die auf derselben Seite dieser Sehne wie der Mittelpunkt liegen, sind gleich dem halben Mittelpunktswinkel μ.
2. Die Umfangswinkel γ und γ' auf verschiedenen Seiten einer Sehne ergänzen sich zu 180^o. Damit sind alle Umfangswinkel γ', die auf der anderen Seite dieser Sehne wie der Mittelpunkt liegen, ebenfalls untereinander gleich groß.

Lösung:
1. Zeichnen Sie in den drei Fällen, die durch die Lage von M bezüglich des Dreiecks ABC zu unterscheiden sind, die Geraden AM, BM und CM. Dann gilt jeweils nach Anwendung des Außenwinkelsatzes auf die gleichschenkligen Dreiecke AMC und BMC:

		
$2\gamma_1 = \mu_1$; $2\gamma_2 = \mu_2$ $2\gamma = \mu_1 + \mu_2 = \mu$	$2\gamma_1 = \mu_1$; $2\gamma_2 = \mu_2$ $2\gamma = \mu_1 - \mu_2 = \mu$	$2\gamma = 2\gamma_1 = \mu_1 = \mu$

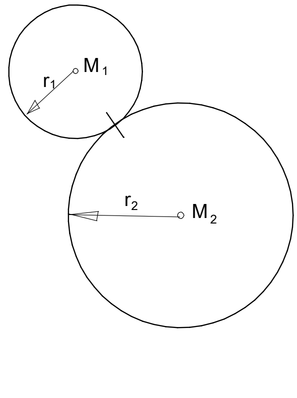


Weil es zu jeder Sehne AB genau einen Mittelpunktswinkel μ gibt, ist die erste Behauptung bewiesen.

2. D sei durch AB von M getrennt. Dann gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck:
$\mu_1 = 180^o - 2\gamma_1'$
$\mu_2 = 180^o - 2\gamma_2'$
Hieraus folgt: $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 360^o - 2\gamma'$;
hieraus folgt: $\gamma = \mu:2 = 180^o - \gamma'$;
also gilt $\gamma + \gamma' = 180^o$.
Die meisten Schulbeweise sind falsch, weil sie nicht die Fallunterscheidung berücksichtigen.

Aufgabe 3 (ab Jahrgangsstufe 6): Ein Kreis *h* rollt auf einem Kreis *k* schlupffrei ab, wenn hierbei die zurückgelegte Kreisbogenlänge *s* auf *h* gleich lang ist wie die zurückgelegte Kreisbogenlänge *t* auf *k* (so genannte Rollbedingung). Manchmal kann man hierbei beobachten, dass
a) nach *einem* Umlauf um *k* die Ausgangsposition wieder erreicht wird,
b) nach einer endlichen Anzahl *u* von Umläufen um *k* die Ausgangsposition erreicht wird,
c) nie wieder die Ausgangsposition erreicht werden kann.
Finden Sie die Ursache und begründen Sie sie.

Lösung:
In der Ausgangslage bringt man an beiden Rädern Marken beim Berührpunkt an. Wenn nach mehreren Umläufen die Ausgangsposition der Marken wieder erreicht wird, gilt wegen der Rollbedingung:



$$a \cdot 2\pi \cdot r_1 = 2\pi \cdot r_2$$

Also ist hier $a = \frac{r_2}{r_1}$.

1. Fall: $a = 1$

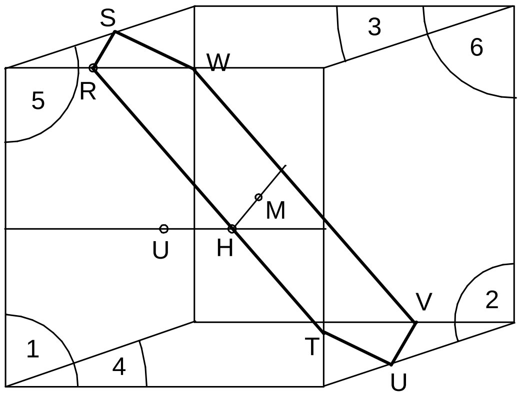
2. Fall: $a = \frac{m}{n}$ ist rational. D. h. nach *m* Umdre-

hungen des Rades 1 um M_1 wurde das Rad 2 um M_2 n-mal umlaufen.

3. Fall: Falls a irrational ist, wird die Ausgangsposition nie mehr erreicht. Beweis durch Widerspruch: Angenommen die Ausgangsposition wird nach endlich vielen Umläufen erreicht, so wäre dies nach m Drehungen um M_1 und n Umläufen um M_2. Also wäre a rational im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 4 (ab Jahrgangsstufe 6): Gegeben ist ein Würfel mit seinen Raumdiagonalen, die sich in M schneiden.
a) Bestimmen Sie alle Ebenen durch M, die den Würfel in einem Viereck schneiden.
b) Welche weiteren Schnittformen gibt es hierfür?
Begründen Sie Ihre Überlegungen.

Lösung:
Nimmt man an, dass der Würfel auf einer seiner Flächen E_4 steht, dann liegen alle Höhenlinien der gesuchten Schnittebenen durch M, dem Schnittpunkt der Raumdiagonalen, parallel zur Grundfläche E_4 des Würfels. Die Höhenlinie h durch M schneidet dann die vordere Würfelfläche E_1 in einem Punkt H auf einer waagrechten Geraden g. Ein dritter Punkt R auf der vorderen Ebene legt dann die gesuchte Schnittebene eindeutig fest.



Man möge beachten, dass der Würfel zu M punktsymmetrisch ist. Die Seitenflächen des Würfels sind so nummeriert, dass sich jeweils die Nummern gegenüberliegender Seiten zu 7 ergänzen.
a) **Fall 1:** Ist H Diagonalenschnittpunkt U im vorderen Quadrat, so liegen die Höhenlinien parallel zu Würfelkanten; damit ist der Würfelschnitt ein Rechteck.
Fall 2: Ist H $\neq$ U und eine Quadratecke der vorderen Fläche auf der Schnittebene, dann liegen die Höhenlinien in der oberen (und unteren) Würfelfläche E_3 (bzw. E_4) so, dass sie notwendig die hinterste Würfelfläche E_6 treffen. Deshalb ist die Schnittfigur ein Parallelogramm. Man beachte: Alle Höhenlinien einer Ebene sind untereinander paralel.
b) **Fall 3:** Ist H $\neq$ U und R keine Quadratecke (und damit keine Würfelecke) und liegt R auf der Schnittebene, dann ist z. B. R ein weiterer Punkt der Kante $P_1 \cap P_3$. RU ist dann ein Randstück des Schnitts. Beim Schnittverlauf über R hinaus in E_3 handelt es sich um eine weitere Höhenlinie, die die Würfelflächen E_5 in einem Punkt S trifft. RH trifft $E_1 \cap E_2$ in T. S, R und T liegen nicht auf einer Geraden. Die Punktsymmetrie liefert drei weitere Punkte U, V, W. Die Schnittfigur ist deshalb notwendigerweise ein Sechseck.

Aufgabe 5 (ab Jahrgangsstufe 10): Die Arktis und die Antarktis sind gleich groß und bedecken jeweils 21,2 Millionen km^2 mit Eis. Hierbei **schwimmt** das Eis im Mittel 3 m dick in der Arktis auf dem Wasser, wohingegen das Eis in der Antarktis Festlandeis ist. Beachte: Das schwimmende Eis schaut nur zu einem Siebtel aus dem Wasser.
Berechnen Sie den Anstieg des Meeresspiegels weltweit, wenn das arktische Eis total schmilzt und gleichzeitig die Eisdecke der Antarktis, in Grönland (etwa 2,2 Millionen km^2 eisbedeckt) und in allen übrigen Gletschern der Welt (geschätzt ca. 2,2 Millionen km^2) im Mittel um 3 m abnimmt. Man beachte, das Flächenverhältnis Land zu Wasser verhält sich wie 2 zu 3. Der Erdradius beträgt etwa 6368 km. Der Einfachheit halber kann angenommen werden, dass 1 m^3 geschmolzenes Eis 1 m^3 Wasser ergibt.

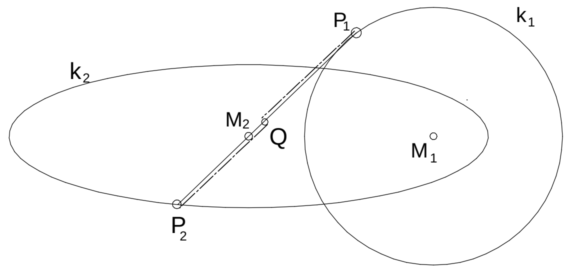
Lösung:
Erdoberfläche = $4 \cdot \pi \cdot 6368^2$ km^2 = 509 584 22,9 km^2 $\approx$ 509,6 Millionen km^2. Davon 3/5 sind 305,8 Millionen km^2 Wasserfläche.

Abschmelzung	der Arktis:	21,2 Billionen $m^2 \cdot 3$ m $\cdot 1/7 \approx$ 9,1 Billionen m^3
	des Festlandeises:	(21,2 Billionen m^2 + $2 \cdot 2{,}2$ Billionen m^2) $\cdot$ 3 m $\approx$ 76,8 Billionen m^3
zusammen:		85,9 Billionen m^3

Diese Menge wird auf 305,8 Billionen m^2 verteilt ergibt 0,28090255.. m $\approx$ 28 cm.
Hinweis: Nimmt man an, dass im Mittel das Festlandeis überall 200 m dick ist und total abschmilzt, steigt der Meeresspiegel um 5,6 m.

Am Gymnasium führt man Koordinaten ein, ja dies sogar in der Unterstufe. Leider zeigt man nicht immer, wozu Koordinaten nutzen. Was dann bei Ähnlichem in der Vergangenheit in einer zweiten Lehrplankürzungswelle stets dazu führte, auf den verbliebenen Rest zu verzichten. Die Kegelschnittslehre am Gymnasium hatte nichts mit der Klassifikation der Kegelschnitte zu tun, da man eine mathematische Kurvenfamilie erst (z. B. an der Hochschule) klassifizieren kann, wenn man sie bereits kennt. Primär ging es am Gymnasium um das Untersuchen von Eigenschaften der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel. Das könnte man auch mit den Kenntnissen der Mittelstufe lehren. Wichtig war aber auch in diesem Zusammenhang, dass der Schüler die Chance bekam, neben den linearen Bausteinen der Geometrie in einfachsten Kurven *nicht lineare* kennen zu lernen. Weshalb hat man das erst in der Oberstufe gelehrt? Nun, es ging auch darum, die synthetisch erreichten Erkenntnisse in Koordinaten zu nutzen, um die Macht der Algebra zu demonstrieren:

Aufgaben 6.1 (1. Aufgabenstellung)**:**
Man hat ein variables Problem, das durch einige wenige auf bekannten Kurven k_i vorgegebene Punkte P_i gesteuert wird. Diese Punkte P_i sind irgendwie mit einem Punkt Q in bekannter Weise z. B. durch ein festes Gestänge verbunden. Man interessiert sich für die Bewegung von Q in Abhängigkeit der bekannten Bewegungen der Punkte P_i.

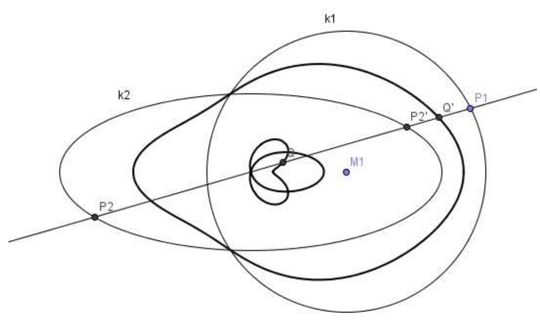


Eine Problematik, die in allen Ingenieurfächern und fast allen Naturwissenschaften auftritt, früher etwas inkonsequent als „geometrische Ortsaufgaben“ bezeichnet (siehe auch MEYER [3]). Ihr Fehlen am Gymnasium führt heute dazu, dass manche Lehramtskandidaten im Staatsexamen nicht mehr in der Lage sind, die Flächenformel für eine Kugel geschweige denn für einen Torus herzuleiten.

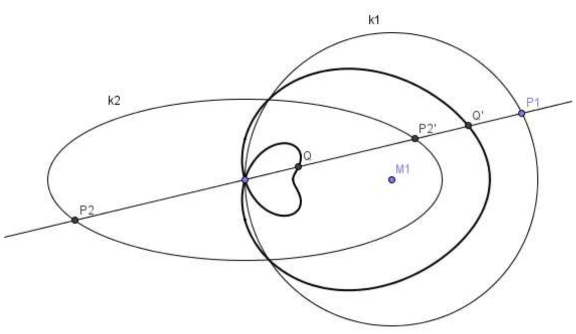
Zurück zu dem genannten Problem. Bei Aufgaben dieser Art muss man als Aufgabensteller sehr vorsichtig sein. Rasch entsteht eine zu schwere Aufgabe, wenn z. B. – wie in der Abbildung – k_1 ein Kreis um M_1 und k_2 eine Ellipse mit Mittelpunkt M_2 sind.

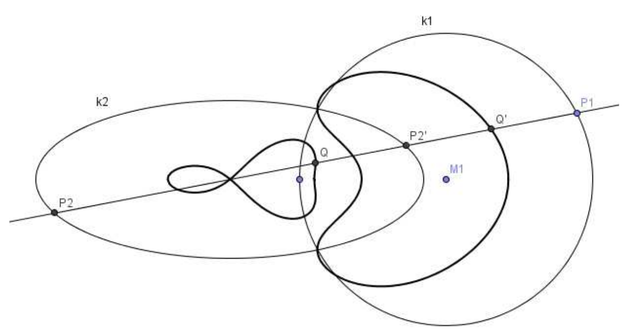
Man bekommt heute mit einer Dynamischen Geometriesoftware (abgekürzt DGS) einen ersten Eindruck einer Lösung. BERND ULITZKA hat dankenswerterweise die folgenden Bilder mit einer DGS gefertigt, um Ideen für Lösungen zu bekommen.

Nebenstehend findet man eine **GDS-Lösung für die 1. Aufgabenstellung**. Man erkennt für die Lage von Q eine Kurve von mindestens sechster Ordnung.

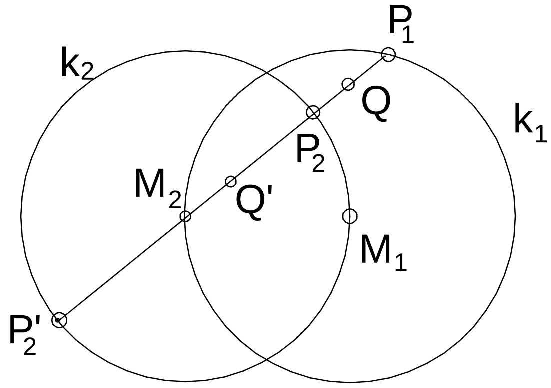


Mit anderen Maßen erhält man für die 1. Aufgabenstellung weitere Lösungen:

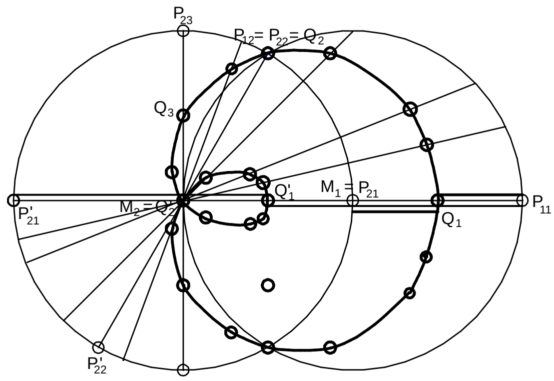




Aufgabe 6.2 (2. Aufgabenstellung)**:**
Eine Vereinfachung:
Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 um M_1 bzw. M_2, wobei jeweils der erste Kreismittelpunkt auf dem zweiten Kreis und umgekehrt liegt. P_1 liege variabel auf k_1 und werde mit M_2 verbunden. Die Gerade P_1M_2 schneidet k_2 in P_2. Gesucht wird die Menge der Punkte Q, die jeweils die Strecke P_1P_2 halbieren.
Man beachte, zu jedem P_1 gibt es zwei Schnittpunkte P_2 und P_2' und damit auch zwei Punkte Q und Q'.



Nebenstehend findet man die Punktkonstruktion für eine Lösung der 2. Aufgabenstellung, die man auch mit einer DGS finden kann.

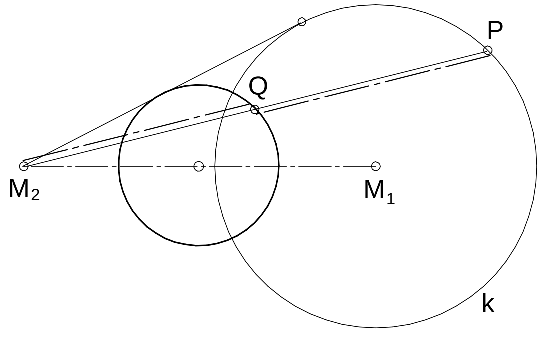


Da heute nahezu in jeder Schule eine DGS vorhanden ist, sollte man durchaus den Schülern auseinander setzen, mit welchen Schwierigkeiten der Lehrer zu kämpfen hat, wenn er eine solche Aufgabe neu entwerfen will.

Der Schüler kann hierbei auch lernen, dass man zwar mit einer dynamischen Geometriesoftware eine Vorstellung vom zu erwartenden Ergebnis bekommt, u. U. auch eine entscheidende Idee erhält, die weiterhilft; Lösungen aber im mathematischen Sinn sind diese nicht. Mathematisch exakt kann man eine Reihe von Punkten durch Überlegung ohne eine Berechnung finden. Selbst begabten Schülern fällt das Folgende schwer, weil dies zu selten im Normalunterricht vorkommt:

1. Lösung der 2. Aufgabenstellung:
Man findet die Kurvenpunkte Q_1, Q_1', Q_2, Q_2' und Q_3 als Spezialfälle aus der Sonderlage der dazugehörigen P_{1i}. Da die Ausgangsfigur zu M_1M_2 symmetrisch liegt, erhält man daraus zwei weitere Punkte Q. Konstruiert man zu einer weiteren Lage von P_1 – näherungsweise – zwei weitere Punkte Q, so erkennt man den Doppelpunkt Q_2'. Die Kurve ist also eine Schleife. Da diese Schleife von jeder Geraden durch M_2 – einem Doppelpunkt – noch zweimal geschnitten wird, erkennt man, dass die algebraische Ordnung der Kurve mindestens 4 sein muss.

Aufgabe 6.3 (3. Aufgabenstellung)**:**
Man lässt in der 1. Aufgabenstellung die Ellipse um M_2 zu diesem Punkt schrumpfen. Dann werden alle Verbindungen PM_2 halbiert, was einer zentrischen Streckung S(k_1; ½) entspricht. Q bewegt sich dann also auf einem Kreis.

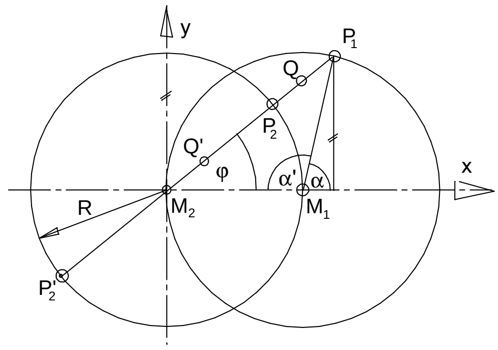


Mit dem Verschwinden der so genannten geometrischen Ortsaufgaben verschwanden auch Übungsaufgaben, die darauf fußten, dass aus mehreren Funktionen Variablen eliminiert wurden, um einen Zusammenhang zwischen zwei Variablen herzustellen, wie etwa:

Aus den Angaben einer Aufgabe fand man f(x,y,z) = 0 und g(x,y,z) = 0. Hieraus wurde dann die Funktion y = h(x) durch Eliminieren von z hergeleitet. Man beachte: Das genannte Problem muss nicht immer lösbar sein. Auch die Kettenregel des Differenzierens wurde hierzu u. U. eingesetzt. Das Ganze war nicht auf geometrische Probleme beschränkt.

Zurück zur 2. Aufgabenstellung:
Eine parallel hierzu durchgeführte Koordinatenrechnung gibt dem Schüler ein Gefühl, dass sehr häufig „unüberwindbare“ Rechenprobleme entstehen, wenn man nicht mehr Theorie hineinsteckt. Beim Bestimmen der Kurve zeigt sich, dass kartesische Koordinaten ungeeignet sind, man kommt rascher mit Polarkoordinaten zum Ziel.

2. Lösung der 2. Aufgabenstellung:
In kartesischen Koordinaten (siehe die Abb.) hat
Kreis k_2 die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$
Kreis k_1 die Gleichung $(x - R)^2 + y^2 = R^2$
In Polarkoordinaten (siehe die Abbildung) hat
Kreis k_2 die Gleichung $r = R = \text{const.}$
Berechnung der Gleichung für Kreis k_1 durch P_1 mit den Koordinaten $(r_1;\varphi) = (x_1 | y_1)$:
$\alpha = 180^\circ - 180^\circ + 2\varphi = 2\varphi$ für $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$
$x_1 = R + R\cos 2\varphi$
$y_1 = R\sin 2\varphi$
$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = R^2(1 + \cos 2\varphi)^2 + \sin^2 2\varphi$



Mit einem Additionstheorem findet man:

$$r_1 = R\sqrt{2+2\cos 2\varphi} = R\sqrt{2}\sqrt{1+\cos 2\varphi} = R\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = 2R\cos\varphi .$$

Q bzw. Q’ haben dann die Koordinaten $(r;\varphi)$ mit $r = \dfrac{r_1 \pm\pm R}{2} = \dfrac{R(2\cos\varphi \pm\pm 1)}{2}$. Im Folgenden verursachen nicht nur Quadratwurzeln Probleme, sondern auch die Vorzeichenwechsel $\pm$. Es kommen zwei vor, die voneinander unabhängig sind. Es wird hierfür die unübliche Unterscheidung $\pm\pm$ bzw. $\pm$ getroffen.
In kartesischen Koordinaten stellt sich die Gesamtheit der Q = $(r;\varphi) = (x | y)$ wie folgt dar:

$$x = r\cdot\cos\varphi = R\cos^2\varphi \pm\pm \frac{R\cos\varphi}{2} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{R(2\cos\varphi \pm\pm 1)\sin\varphi}{2}$$

Aus der x-Gleichung folgt eine quadratische Gleichung: $\cos^2\varphi \pm\pm \dfrac{\cos\varphi}{2} - \dfrac{x}{R} = 0$ in $\cos\varphi$ mit den Lösungen

$$\cos\varphi = \frac{\mp\mp\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4x}{R}}}{2} = \frac{\mp\mp\frac{1}{2} \pm\sqrt{a}}{2}.$$ Zur Vereinfachung wurde $\dfrac{1}{4} + \dfrac{4x}{R} =: a$ gesetzt. (1)

Damit erhält man:

$$x = r\cdot\cos\varphi = \frac{R(2\cos\varphi \pm\pm 1)}{2}\cos\varphi \quad \text{und}$$

$$y = r\cdot\sin\varphi = \frac{R(2\cos\varphi \pm\pm 1)}{2}\sin\varphi .$$ Hieraus folgt mit (1):

$$\frac{4(x^2+y^2)}{R^2} = (2\cos\varphi \pm\pm 1)^2 = \left(2\frac{\mp\mp\frac{1}{2}\pm\sqrt{a}}{2} \pm\pm 1\right)^2 = \left(\mp\mp\frac{1}{2} \pm\sqrt{a} \pm\pm 1\right)^2 = \left(\pm\pm\frac{1}{2}\pm\sqrt{a}\right)^2 = \frac{1}{4} + a \pm\pm\left(\pm 2\sqrt{a}\right)$$

$$\left(\frac{4(x^2+y^2)}{R^2} - \frac{1}{4} - a\right)^2 = \pm 4a$$

$$\left(\frac{4(x^2+y^2)}{R^2} - \frac{1}{4} - a\right)^4 = 16a^2$$

Es folgt mit (1) das Ergebnis, ein Polynom vom Grad 8:

$$\left(\frac{4(x^2+y^2)}{R^2} - \frac{1}{2} - \frac{4x}{R}\right)^4 = 16\left(\frac{1}{4} + \frac{4x}{R}\right)^2$$

Wenn zukünftig am Gymnasium keine Additionstheoreme mehr gelehrt werden, kann man obige Rechnung auch mit Hochbegabten nicht mehr durchführen, es sei denn, solches wird in einem Ergänzungsunterricht gelehrt.

Aufgabe 7 (ab Jahrgangsstufe 9): Verpackungsproblem: Gegeben ist eine beliebige Anzahl Kugeln mit einem Durchmesser von 8,00 cm und ein Quader der Höhe h. Der Boden des Quaders habe die Maße 64,00 cm und 40,00 cm.
a) Beschreiben Sie wesentlich verschiedene Arten A_i, wie man die Kugeln in die Schachtel hineinschlichten kann, um den Raum möglichst gut auszufüllen. Hierbei soll zunächst die unterste Schicht gefüllt und weitere Schichten darauf gesetzt werden.
b) Es sei h = 24 cm. Wie viele Kugeln passen jeweils in den Quader bei *vier* verschiedenen Packungsarten A_i? Welche hiervon ist die beste?
c) Geben Sie ein h so an, dass eine andere Ihrer Arten als in b) die beste wird.
(Nach MEYER [1]: Seite 225ff)

Lösung:
a) Dichte Packungen entstehen, wenn sich benachbarte Kugeln berühren.
In der ersten Schicht können die Kugeln so liegen, dass die Mittelpunkte M_j benachbarter Kugeln ein

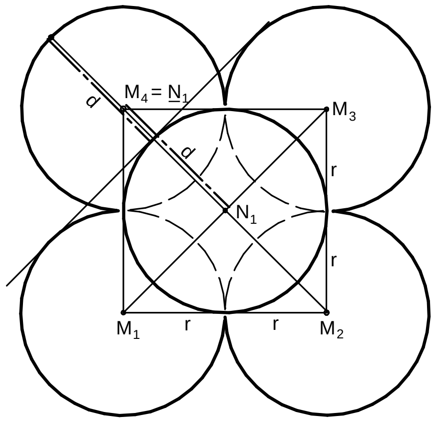
- Quadrat oder
- gleichseitiges Dreieck bilden.

Die nächst obere Schicht kann

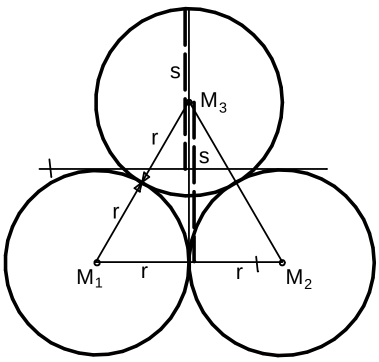
- dieselbe wie die darunter liegende sein oder
- die jeweils oberen Kugeln liegen in den „Mulden" der darunter liegenden, d. h. ihre Mittelpunkte liegen tiefer als im zuerst genannten Fall.

Man findet damit die folgende Fallunterscheidung:
A_1: M_j bilden ein Quadrat, alle Schichten sind kongruent.
A_2: M_j bilden ein Quadrat, die Kugeln der zweiten Schicht liegen jeweils in den Mulden der unteren Schicht.
A_3: M_j bilden ein gleichseitiges Dreieck, alle Schichten sind kongruent. Die erste Reihe liegt entlang der Breite 40 cm oder
A_4: entlang der Länge 64 cm.
A_5: M_j bilden ein Dreieck, die darüber liegenden Kugeln liegen in den Mulden der unteren Schicht. Diese hat ihre erste Reihe längs der Breite 40 cm oder
A_6: längs der Länge 64 cm.

b) Im **Fall A_1** bekommt man (64:8)·(40:8)·(24:8) = **120 Kugeln** in den Kasten.



Fall A_2: In der nebenstehenden Zeichnung sieht man 4 Kugeln der 1. Schicht. Aus Symmetriegründen liegt eine Kugel der 2. Schicht über N_1, dem Mittelpunkt des Quadrats.
Man legt durch die Konfiguration einen Schnitt durch M_1M_2 senkrecht auf dem Quadrat und klappt diesen wiederum in die Zeichenebene. Die Umrisse der Kugeln um M_1 und M_2 bleiben die bereits vorhandenen. Der Umriss der Kugel um N_1 ist ein Kreis um $\underline{N}_1$, der die Kreise um M_1 und M_2 berührt, dessen Mittelpunkt also z. B. die Ecke M_4 ist. D. h. die Kugel um $\underline{N}_1$ liegt um *d* höher als eine auf den Kugeln der 1. Schicht ruhenden Ebene. Leicht lässt sich begründen, dass *d* die halbe Diagonallänge des Quadrats ist. Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS folgt:
$2d^2 = (2r)^2$ d. h. $d = r\sqrt{2}$. 5,6 cm,
wobei $r = 4$ cm der Kugelradius ist.
Die 2. Schicht hat eine Reihe Kugeln weniger und in jeder Reihe eine Kugel weniger. Die 3. Schicht ist dann wiederum kongruent der 1. Schicht usw. In die Schachtel passen n Schichten, wobei
8 cm + $(n-1)\cdot 4\sqrt{2}cm \le 24cm$.
Man findet n = 3. D. h.
1. Schicht: 8·5 = 40 Kugeln
2. Schicht: 7·4 = 28 Kugeln
3. Schicht: 40 Kugeln
zusammen: **108 Kugeln**



Fall A_3: Jetzt rücken in der 1. Schicht die Reihen näher zusammen. Die 2. Reihe benötigt nur noch den Abstand *s*. Leicht kann man sich überlegen, dass dies die Höhe im gleichseitigen Dreieck ist. Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS gilt

$s^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$ und damit

$s = r\sqrt{3} \approx 6{,}93$.

Drei Schichten der Dicke 8 cm haben Platz. In der 1.Reihe liegen 5 Kugeln. Sie benötigt 8 cm Raum,
2.Reihe liegen 4 Kugeln,
3.Reihe liegen 5 Kugeln usw.

In jeder Reihe nach der 1. Reihe benötigt man $s = r\sqrt{3} \approx 6{,}93$ Platz. Man erhält n Reihen mit

$8 + (n-1)\cdot 4\sqrt{3} \le 64$.

Hieraus folgt n = 9. D. h. In der 1. Schicht hat man nach dem Fall A_3 9 Reihen mit 41 Kugeln.
In der 2. Schicht sind es in den Reihen 1, 3, 5 und 7 jeweils 4 Kugeln und in den Reihen 2, 4, 6 und 8 jeweils 5 Kugeln, also zusammen 36 Kugeln; allerdings ist hier noch zu klären, ob es nicht eine 9. Reihe gibt: Hier ist die folgende Differenz entscheidend: $64 - 8 - (8-1)\cdot 4\sqrt{3} \approx 7{,}5$ cm. Es existiert also in dieser Schicht genau eine weitere Reihe 9 und damit hat diese Schicht 40 Kugeln. Die Schachtel hat m Schichten mit $8 + (m-1)\cdot 4\sqrt{2} \le 24$, also $m = 3$. D. h.: Die 1. und 3. Schicht haben jeweils 41 Kugeln und die 2. Schicht 40 Kugeln; zusammen enthält die Schachtel **122 Kugeln.**

Fall A_4: In der 1. Schicht liegen dann $3\cdot 8 + 2\cdot 7 = 38$ Kugeln. Eine 6. Reihe gibt es nicht, weil der Restplatz von 5,35 cm < 6,93 cm, die man benötigen würde. Bei 3 kongruenten Schichten sind dies 114 Kugeln.

Fall A_5: Nach A_3 hat man in der 1. Schicht 41 Kugeln. Auf drei Kugeln liegt jeweils eine vierte. D. h. jede weitere Schicht benötigt 56 cm : 3 zusätzliche Höhe; d. h. es gibt 3 Schichten und keine 4. Die 1. Schicht hat man 41 Kugeln. Die 2. Schicht hat dann 40 Kugeln, weil für eine weitere Reihe kein Platz ist. Die 3. Schicht hat wieder 41 Kugeln, also insgesamt 122 Kugeln, weil es keine weitere Schicht geben kann.

Fall A_6: In diesem Fall liegt die erste Reihe der 1. Schicht längs der 64 cm; sie hat also 8 Kugeln. Nach Fall A_4 hat also die 1. Schicht 5 Reihen mit 38 Kugeln. In der 2. Schicht hat man zunächst nur 4 Reihen, wobei die Reihen 1 und 4 jeweils 7 Kugeln und die Reihen 2 und 4 jeweils 8 Kugeln haben, das macht zusammen 30 Kugeln. Es ist allerdings zu klären, ob nicht eine 5. Reihe Platz hat: $40 - 8 - (4-1)\cdot 4\sqrt{3} \approx 11{,}21..$ besagt, dass eine weitere Reihe mit 7 Kugeln vorhanden ist und damit in der 2. Schicht 37 Kugeln Platz finden. Wie bei A_5 haben nur 3 Schichten Platz: Die 1. und 3. Schicht haben jeweils 38 Kugeln und die 2. Schicht 37 Kugeln; insgesamt passen so in die Schachtel **112 Kugeln.**

Ergebnis:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Stück	120	108	123	114	122	112

A_3 hat mit 123 Kugeln das beste Ergebnis.

c) Erhöht man um 5 cm die Höhe h auf 29 cm, so kann man in den Fällen A_1, A_3 und A_4 keine weitere Schicht in die Schachtel bringen, was dagegen bei den Fällen A_2, A_5 und A_6 gelingt.

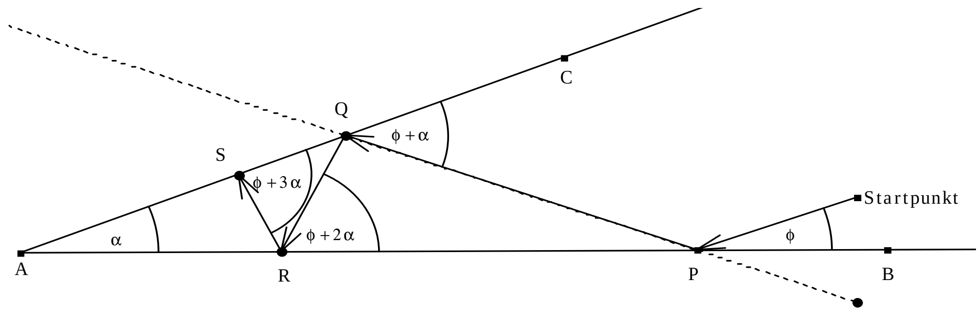
Ergebnis:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Stück	120	136	123	114	142	149

A_6 hat mit 149 Kugeln das beste Ergebnis.

Aufgabe (ab Jahrgangsstufe 7): Winkelspiegel: Gegeben ist ein Winkelspiegel mit dem spitzen Öffnungswinkel α. In diesem Winkel liegt der Ausgangspunkt T eines Lichtstrahls, der ungefähr auf den Winkel zuläuft, vor dem Scheitel aber auf den einen Spiegel mit dem Winkel φ auftrifft.
Finden Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass sich der Lichtstrahl nach
$k + 1$ Reflexionen an dem Winkelspiegel
a) dem Scheitel nähert,
b) vom Scheitel entfernt oder
c) auf dem gleichen Weg durch T zurückläuft.
(Aus ENGELHAUPT [1]: Seite 29)

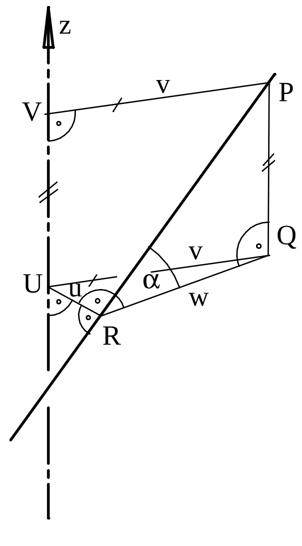
Lösung:
Ein Lichtstrahl ausgehend vom Startpunkt fällt in einen Winkelspiegel mit dem Winkel α und bildet mit dem einen Schenkel einen Winkel $\varphi < 90°$. Die Konstruktionen mit Hilfe von Spiegelungen oder Loten im Reflexionspunkt sind der besseren Übersichtlichkeit wegen weggelassen:



Betrachtet man der Reihe nach die Winkel, die der reflektierte Strahl mit den Spiegeln bildet, so gilt:
$\angle PQC$ ist Außenwinkel des Dreiecks APQ; deshalb gilt: $\angle PQC = \varphi + \alpha$
$\angle PRQ$ ist Außenwinkel des Dreiecks ARQ; deshalb gilt: $\angle PRQ = \varphi + 2\alpha$ analog: $\angle RSQ = \varphi + 3\alpha$
Allgemein gilt nach der $(k+1)$-ten Reflexion:
Genau dann, wenn $\varphi + k\alpha < 90°$ ist, nähert sich der Strahl dem Scheitel A nach dieser Reflexion.
Genau dann, wenn $\varphi + k\alpha > 90°$ ist, entfernt sich der Strahl vom Scheitel A nach dieser Reflexion.
Genau dann, wenn $\varphi + k\alpha = 90°$ ist, läuft der Strahl nach dieser Reflexion auf dem gleichen Weg zurück und die Zahl der Reflexionen ist ungerade.

Aufgabe 9 (ab Jahrgangsstufe 10): Gegeben ist die Gerade a in einem kartesischen Koordinatensystem (x,y,z) durch x = y = 0 und eine weitere Gerade b durch z = x und y = u mit u > 0.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Fläche, die entsteht, wenn b um a rotiert.
(Nach MEYER [3]: Seite 10)
b) Geben Sie nur an: Welche ebenen Schnitte hat diese Fläche?

Lösung:
a) Die Gerade a ist die z-Achse. b ist eine zu a windschiefe Gerade, die den Abstand u (kürzeste Entfernung) zur z-Achse hat. u zwischen zwei windschiefen Geraden steht auf beiden Geraden senkrecht. Vergleichen Sie die nebenstehende Zeichnung. So ist u senkrecht auf der z-Achse und auf der Geraden RP = a. Weil PQ parallel zur z-Achse gewählt werden kann, ist dann u Lot auf der Ebene PQR, d. h. dass sowohl RP wie auch w auf u senkrecht stehen. Die Gerade PR ist also bis auf Rotation um z festgelegt durch den Abstand u zur z-Achse und ihrem Neigungswinkel α zur x-y-Ebene.
Wir lassen diese Gerade PR um die z-Achse rotieren. Jeder Punkt P auf ihr läuft dann längs eines Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 = v^2$, wobei v = VP = UQ gilt, da VPQU ein Rechteck ist.



Nach Konstruktion gilt dann für jeden Punkt $P(x\,|\,y\,|\,z)$:
$w = \dfrac{z}{\tan\alpha}$ und $u^2 + w^2 = v^2$. Andererseits läuft P auf einem Rotationskreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = v^2$.
Setzt man in diese Gleichung die vorher abgeleiteten Beziehungen ein, so erhält man die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung:

$$x^2 + y^2 = u^2 + \frac{z^2}{\tan^2\alpha}$$

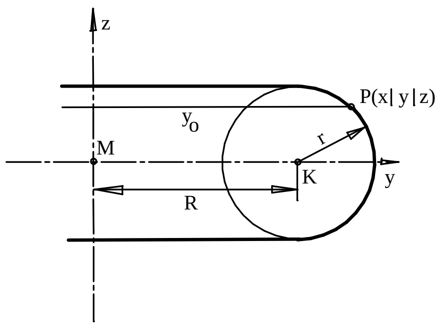
b) Es handelt sich hierbei um ein einschaliges Rotationshyperboloid. Die Schnitte parallel zur z-Achse sind Hyperbeln, die Schnitte senkrecht zur Rotationsachse Kreise. Manche Schnitte sind zwei sich schneidende Geraden, alle anderen Ellipsen.

Aufgabe 10 (ab Jahrgangsstufe 9): In einem kartesischen Koordinatensystem $(x|y|z)$ ist ein Kreis durch die Gleichungen $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ und $y = 0$ und eine Achse b durch die Gleichungen $x = y = 0$ gegeben. Bestimmen Sie die Gleichung der Fläche, die entsteht, wenn der Kreis um b rotiert. Zeigen Sie durch Skizzen, welche grundsätzlich verschiedenen Flächen hierbei entstehen können. (Nach MEYER [3]: Seite 16)

Lösung:

b ist die z-Achse. Jeder Punkt $P(x|y|z)$ rotiert auf einem Kreis $x^2 + y^2 = y_o^2$, wobei y_o die Gleichung $(y_o - R)^2 + z^2 = r^2$ erfüllt. Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so erhält man:

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{r^2 - z^2} + R\right)^2$$



Beseitigt man in dieser Gleichung die Wurzel, so erhält man eine Gleichung der Ordnung 4:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - (R^2 + r^2))^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$$

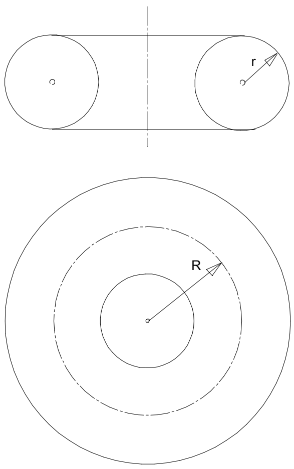
Das sind Tori.

Ist $R > r$, so hat der Torus ein Loch. Mathematiker sagen, der Torus ist vom Geschlecht 1.

Ist $R = r$, so schrumpft das Loch zu einem Punkt.

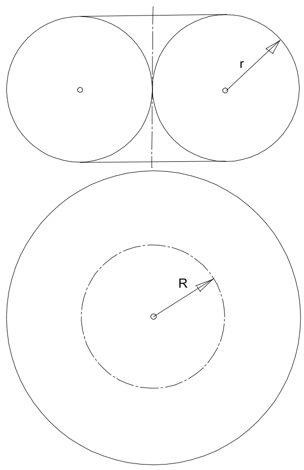
Ist $R < r$, so entsteht eine Fläche, die „oben“ und „unten“ eine in einer Spitze endende Eindrückung hat, solange $R \neq 0$ ist. Der Mathematiker spricht vom Geschlecht 0.

Im Fall $R = 0$ entsteht eine „doppelt überdeckte“ Kugel vom Geschlecht 0.



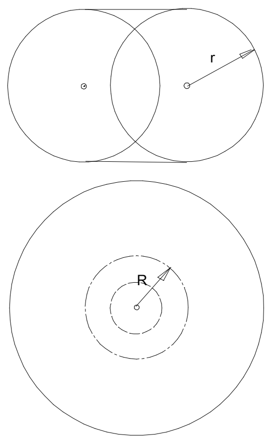
$R > r$

In der Mitte kann man durch den Torus schauen.



$R = r$

In der Mitte hat der Torus oben und unten eine Mulde, die in einer Spitze endet.



$R < r$

In der Mitte hat der Torus oben und unten eine Mulde, die in einer Spitze endet. Innerhalb der Fläche gibt es ein weiteres Flächenstück, dessen Umriss gestrichelt ist.

Literaturverzeichnis

Engelhaupt Hans	[1]	Kürzeste Wege, Mathematikinformation Nr. 41 (2004) Seiten 24 – 61
Meyer, Karlhorst	[1]	Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht, Algebra und Geometrie, Hirschgrabenverlag Frankfurt/Main 1980, 316 Seiten
Meyer u. a.	[2]	Brennpunkt Geometrie 8, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover 1991, 168 Seiten
Meyer, Karlhorst	[3]	Kegelschnitte II, Mathematikinformation Nr. 34 (2001), Seiten 5 – 30

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
Tel. 089/60600800
Fax 089/60600802
e-mail: karlhorst@meyer-muc.de

Eingereicht am 1. Juli 2009.