Steffen Juskowiak

Differenzen- und Differentialgleichungen – ein Lernangebot zur Förderung mathematisch interessierter SchülerInnen

In diesem Artikel wird ein Lernangebot zur Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler vorgestellt, das ausgehend von arithmetischen Folgen über Differenzengleichungen einen Bogen zu den Differentialgleichungen spannt. Zielgruppe dieses Lernangebots sind Lernende am Ende der Sekundarstufe I und ältere Schüler[4] aus dem gymnasialen Bereich oder vergleichbaren Schulformen. Das Lernangebot gliedert sich dabei in vier thematische Blöcke: Zunächst werden kurz arithmetische und geometrische Folgen behandelt, um insbesondere im Bereich der arithmetischen Folgen die Grundlagen für die sich anschließende Betrachtung von Folgen mit konstanten zweiten und höheren Differenzen zu legen. An diesen zweiten Themenblock, in dem auch der Zusammenhang zwischen Polynomen und den Folgen mit konstanten höheren Differenzen betrachtet wird, schließt sich ein Abschnitt über Differenzengleichungen an. Nachdem hier das Lösen von Differenzengleichungen am Beispiel der Tilgungsgleichung geübt wurde, ist es möglich, mit einer so genannten Schwefelbahn aufgezeichnete Bewegungsabläufe auszuwerten und die Bewegungsgesetze für eine gleichförmige und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung herzuleiten.

Neben diesen einfachen mechanischen Bewegungen bietet z. B. auch die Schwingung eines Fadenpendels die Möglichkeit, mathematische Inhalte an einfachen, leicht zu verstehenden physikalischen Phänomenen zu motivieren. Dieses Potenzial wird im vierten und letzten Teil des Lernangebots ausgenutzt, in dem bei der Untersuchung der Schwingung eines Fadenpendels der Übergang von Differenzen- zu Differentialgleichungen vollzogen wird. Daran schließt sich eine weitere Untersuchung der freien ungedämpften, gedämpften und erzwungenen harmonischen Schwingung an. Anschließend wird noch ein Überblick über eine mögliche thematische Weiterführung des Lernangebots gegeben.

Ein Ziel des starken Bezuges der letzten beiden Themenblöcke zur Physik ist, den Lernenden zu zeigen, „was Mathematik alles kann“, ihnen also die Rolle der Mathematik auch bei einfachen physikalischen Phänomenen zu verdeutlichen. Des Weiteren können die beiden letzen Themenblöcke dazu dienen, das Interesse der Lernenden an der Physik zu wecken. Besonders geeignet für beiden Ziele scheint insbesondere die zunächst unwirklich erscheinende Zerstörung der TACOMA NARROWS BRIDGE zu sein.

Möglichkeiten zur Umsetzung des beschriebenen Lernangebots sind z. B. eine mathematisch orientierte Arbeitsgemeinschaft, die im Rahmen des an vielen Schulen vorhandenen Arbeitsgemeinschaftsangebotes stattfindet oder eine von solch einem Rahmenprogramm unabhängige regelmäßige Zusammenkunft von mathematisch interessierten Lernenden und Lehrenden. Je nach verfügbarem Zeitrahmen sollte sich die Dauer des Angebots dabei über ein halbes oder ein ganzes Schuljahr erstrecken. Vorteilhaft für eine zeitlich flexible Gestaltung des Lernangebotes ist, dass der Themenblock zu den Folgen mit konstanten zweiten und höheren Differenzen trotz der darin vorgesehenen mathematisch interessanten Inhalte ohne große Einbußen für den weiteren Gang des Lernangebots weggelassen werden kann. Ebenso ist es möglich, dass sich das Lernangebot thematisch nur auf die arithmetischen Folgen und die Folgen mit konstanten zweiten und höheren Differenzen beschränkt und somit die Themenblöcke über Differenzen- und Differentialgleichungen trotz der physikalisch interessanten Hintergründe weggelassen werden.

Im Folgenden werden nun die Inhalte vorgestellt, deren Behandlung sich m. E. anbietet. Der Leser findet dabei am Ende der jeweiligen Abschnitte ausgewählte Übungsaufgaben einschließlich Lösungshinweisen zur Bearbeitung bzw. weiteren Festigung des Themas.

[4] Im folgenden Text wird lediglich aus Gründen der Vereinfachung anstelle von Doppelbezeichnung die männliche Schreibweise verwendet.

1. Arithmetische und geometrische Folgen

1.1 Inhaltliche und didaktische Anmerkungen

Dem Leser ist sicherlich bekannt, wie arithmetische und geometrische Folgen definiert sind:

Definition 1.1:
Eine Folge (a_n) *heißt* arithmetische Folge, *wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *das Folgeglied* a_{n+1} *aus dem Folgeglied* a_n *durch Addition einer Konstanten* d *hervorgeht, wenn also* $a_{n+1} = a_n + d$ *mit* $d = konst.$ *gilt.*
Eine Folge (a_n) *heißt* geometrische Folge, *wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *das Folgeglied* a_{n+1} *aus dem Folgeglied* a_n *durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor* q *hervorgeht, wenn also* $a_{n+1} = q \cdot a_n$ *mit* $q = konst. \neq 0$ *und* $a_1 \neq 0$ *gilt.* (vgl. SCHMID / SCHWEIZER [1])

Leider kann dieser Kenntnisstand bei Schülern der 10. Klassen auch am Gymnasium nicht mehr vorausgesetzt werden, denn inzwischen sind Folgen und Reihen nicht mehr in allen Bundesländern verpflichtend als Lehrinhalte vorgesehen (vgl. z. B. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM [1], NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM [1], SÄCHSISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR KULTUS [1]). Da jedoch Vorkenntnisse zu arithmetischen Folgen, insbesondere für den Themenblock über Folgen mit konstanten zweiten und höheren Differenzen, zwingend notwendig und auch für die Behandlung der Differenzengleichungen nützlich sind, müssen mit den Schülern eingangs die Grundlagen zu arithmetischen Folgen erarbeitet werden.

Dazu zählt neben der Definition arithmetischer Folgen auch das Herleiten der expliziten Bildungsvorschrift $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ aus der rekursiven. Je nach Zeitrahmen bietet es sich hier an, einen Exkurs über die Beweismethode der vollständigen Induktion nach n einzufügen, die sich an dem Beispiel der expliziten Bildungsvorschrift gut einführen lässt.

1.2 Aufgaben

Zu arithmetischen Folgen lässt sich bekanntermaßen eine Vielzahl von reinen Berechnungsaufgaben finden, in dem man drei der vier Variablen in der expliziten Bildungsvorschrift vorgibt und die fehlende berechnen lässt. Interessanter als diese rein innermathematischen Aufgaben sind jedoch Aufgaben, die sich an tatsächlich oder fiktiv auftretenden Phänomenen orientieren. Zwei Beispiele dafür sind:

1.2.1) Im Erdinnern wächst die Temperatur pro $100\ \text{m}$ Tiefe um $3\ °\text{C}$. In $25\ \text{m}$ Tiefe beträgt die Temperatur $10\ °\text{C}$. (a) In welcher Tiefe beträgt die Temperatur $70\ °\text{C}$? (b) Welche Temperatur muss ein Bergmann in einem etwa $1000\ \text{m}$ tiefen Stollen aushalten?

1.2.2) Eine Eisenbahngesellschaft betreibt in einer durch ausgedehnte Waldgebiete geprägten Region erfolgreich eine Bahnlinie. Nach den schweren Sturmschäden in den letzten Jahren sind noch große Mengen Sturmholz abzufahren. Im Verlauf der Bahnstrecke stehen insgesamt 15 Nebengleise für die Beladung von Wagen zur Verfügung, auf denen jeweils drei vierachsige Wagen abgestellt werden können. Aufgrund der Dienstvorschriften darf ein Zug auf der Strecke nicht mehr als 92 Achsen haben. Wie viele Nebengleise können mit einer Zugfahrt „geleert“ werden, wenn jeder Zug einen zweiachsigen Aufenthaltswagen für das Rangierpersonal mitführt?

Diese Aufgaben lassen sich, wie auch die folgende, auch ohne die explizite Verwendung von Bildungsvorschriften von (arithmetischen) Folgen lösen. Jedoch sind diese und ähnliche Aufgaben nach Meinung des Autors gut geeignet, um den Umgang damit zu üben. Eine Aufgabe, zu deren Lösung sich die Verwendung sowohl einer arithmetischen als auch einer geometrischen Folge anbietet, findet sich bei MÜLLER-FONFARA / SCHOLL [1] (vgl. Seite 366):

1.2.3) Ein Baggersee von $1200\ \text{m}^2$ Größe wird weiter ausgebaggert und wächst dadurch jede Woche um $600\ \text{m}^2$. Eine Algenart bedeckt zu Beginn der Baggerarbeiten $1\ \text{m}^2$ Wasserfläche. Die mit Algen bedeckte Fläche verdreifacht sich jede Woche. Als dies einer der Bauarbeiter feststellt, sagt er: „Bald wird der ganze See mit Algen überwuchert sein!“ Hat er Recht?

Lösungshinweise:

zu 1.2.1) Als arithmetische Folge für die Beschreibung der Temperaturzunahme findet man $a_n = 10\ °C + (n-1) \cdot 3\ °C$, wobei n ein Hundertstel der um $25\ m$ verringerten Tiefe angibt. Somit herrscht in $2125\ m$ Tiefe eine Temperatur von $70\ °C$ und ein Bergmann muss in einer, für Bergwerke nicht ungewöhnlichen, Tiefe von $1025\ m$ eine Temperatur von $37\ °C$ aushalten.

zu 1.2.2) Die Bildungsvorschrift der die Achsanzahl der Züge beschreibenden arithmetischen Folge lautet $a_n = 2 + (n-1) \cdot 12$, wobei n die Anzahl der vollständig geleerten Nebengleise ergibt. Entsprechend können die Wagen aus sechs Nebengleisen vollständig in einen Zug aufgenommen werden. Ein weiteres Nebengleis könnte nur zur Hälfte geleert werden.

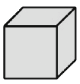
zu 1.2.3) Die Ausbaggerung des Sees wird durch die arithmetische Folge $a_n = 1200\ m^2 + (n-1) \cdot 600\ m^2$ beschrieben. Das Algenwachstum erfolgt gemäß der geometrischen Folge $b_n = 1\ m^2 \cdot 3^n$. In beiden Folgen gibt n die Wochen an, wobei $n = 1$ für die erste Woche der Baggerarbeiten steht. Durch das Berechnen und evtl. Auftragen von a_n und b_n gegen n erkennt man, dass ab dem Ende der achten Woche die von den Algen bedeckte Fläche größer als die des Sees ist. Hieran kann und sollte sich eine Diskussion anschließen, in wie weit eine solche Wachstumsmodell für die Algen sinnvoll und realistisch ist.

2. Folgen mit konstanten zweiten und höheren Differenzen

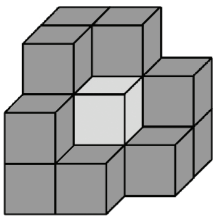
2.1 Folgen mit konstanten zweiten Differenzen

Aufbauend auf den arithmetischen Folgen bzw. der Behandlung von Zahlenfolgen überhaupt bietet es sich bei der Gestaltung des Lernangebots an, Folgen zu betrachten, die auf den ersten Blick bzgl. der Differenzen zwischen den Folgegliedern keiner Regel zu gehorchen scheinen. Dafür ist die Betrachtung der folgenden dreidimensionalen Figuration geeignet:

Ein Würfel der Kantenlänge 1 LE, im Folgenden als Einheitswürfel bezeichnet, wird so mit weiteren Einheitswürfel umbaut, dass ein Würfel der Kantenlänge 3 LE entsteht. Dieser Würfel wird wiederum so mit Einheitswürfeln umschlossen, dass der nächst größere Würfel entsteht usw.. (vgl. HEINRICH [1])



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

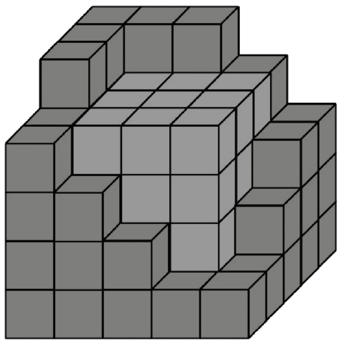


Abb. 1 *Abb. 2* *Abb. 3*

Betrachtet wird nun die Zahlenfolge der Anzahlen von Einheitswürfeln, die zum Bau des jeweils nächst größeren Würfels zum bereits vorhandenen Würfel hinzugefügt werden müssen. Mit anderen Worten sind also die Anzahlen der Einheitswürfel, die zum Bau von Hohlwürfeln der Kantenlänge 3 LE, 5 LE, 7 LE usw. benötigt werden, gesucht. Als geübter Mathematiker findet man schnell heraus, dass die Folge $(a_n) = (26, 98, 218, 386, 602, 866, ...)$ entsteht, bei der es sich offensichtlich nicht um eine arithmetische Folge handelt.

Die mathematische Neugier verleitet jedoch dazu, es nicht bei der Bildung der ersten Differenzen zu lassen, sondern auch die Differenzen der Differenzen der Folgeglieder zu bilden. Man erhält dann folgendes Schema:

Zahlenfolge:	$(a_n) =$	(26,	98,	218,	386,	602,	866,	...)
Erste Differenz:	$(a_n^{(1)}) =$	(	72,	120,	168,	216,	264,	...)
Zweite Differenz:	$(a_n^{(2)}) =$	(	48,	48,	48,	48,		...)

(Die Notation, die k-te Differenzenfolge mit $(a_n^{(k)})$ zu bezeichnen, wurde von DÜRR / ZIEGENBALG [1] übernommen. Allgemein werden die Folgeglieder der k-ten Differenzen definiert als: $a_j^{(k)} := a_{j+1}^{(k-1)} - a_j^{(k-1)}$.)
Derartige Zahlenfolgen werden als arithmetische Zahlenfolgen zweiter Ordnung (vgl. HEINRICH [1]) oder auch als Folgen mit konstanten zweiten Differenzen (vgl. DÜRR / ZIEGENBALG [1]) bezeichnet. Eine mögliche Definition ist:

Definition 2.1:
Eine (Zahlen-)Folge (a_n), bei der die zweiten (k-ten) Differenzen der Folgeglieder konstant sind, heißt arithmetische (Zahlen-)Folge zweiter (k-ter Ordnung) oder Zahlenfolge mit konstanten zweiten (k-ten) Differenzen.

Analog zu arithmetischen Folgen (erster Ordnung) ist es bei den arithmetischen Folgen zweiter Ordnung leicht möglich, ausgehend von $(a_n^{(2)})$ und $a_1^{(1)}$ die entsprechende Folge (a_n) zu finden. Dieses Vorgehen ist jedoch sehr mühselig. Angenehmer wäre es, eine allgemeine explizite Bildungsvorschrift analog zu $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ zur Verfügung zu haben. Diese soll hier nun hergeleitet werden.

Die allgemeine rekursive Bildungsvorschrift für arithmetische Folgen zweiter Ordnung lautet $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}^{(1)}$. Analog gilt für die ersten Differenzen $a_n^{(1)} = a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1}^{(2)}$ mit $a_{n-1}^{(2)} = \text{konst.}$. Somit ist die Folge der ersten Differenzen eine arithmetische Folge, woraus sich direkt $a_n^{(1)} = a_1^{(1)} + (n-1)\cdot a_1^{(2)}$ bzw. $a_{n-1}^{(1)} = a_1^{(1)} + (n-2)\cdot a_1^{(2)}$ ergibt. Für a_n folgt daraus $a_n = a_{n-1} + a_1^{(1)} + (n-2)\cdot a_1^{(2)}$ bzw. $a_{n-1} = a_{n-2} + a_1^{(1)} + (n-3)\cdot a_1^{(2)}$ und $a_{n-2} = a_{n-3} + a_1^{(1)} + (n-4)\cdot a_1^{(2)}$.

Setzt man nun a_{n-1} und a_{n-2} in a_n ein, erhält man nach Umordnen und Zusammenfassen schließlich $a_n = a_{n-3} + 3\cdot a_1^{(1)} + \big((n-4)+(n-3)+(n-2)\big)\cdot a_1^{(2)}$. Dies lässt den induktiven Schluss zu, dass für a_n

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + \big(1+2+...+(n-2)\big)\cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + \left(\sum_{i=1}^{n-2} i\right)\cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}\cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + \frac{(n-1)}{1!}\cdot a_1^{(1)} + \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2!}\cdot a_1^{(2)} \end{aligned}$$

gilt. Natürlich bedarf es noch eines Beweises, dass das tatsächlich der Wahrheit entspricht. Dieser erfolgt über vollständige Induktion nach n:

Induktionsanfang: Betrachtet wird hier die bei der Hohlwürfelbildung entstehende Folge:

$$a_1 = 26, \quad a_1^{(1)} = 72, \quad a_1^{(2)} = 48$$

Einsetzen dieser Anfangswerte in die zu beweisende Bildungsvorschrift ergibt

$$\begin{aligned} a_n &= 26 + (n-1)\cdot 72 + \tfrac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot 48 \\ &= 26 + 72n - 72 + 24\cdot(n^2 - 3n + 2) \\ &= 24n^2 + 2 \end{aligned}$$

bzw. $a_1 = 26$, $a_2 = 98$ und $a_3 = 218$ und somit richtige Werte für die Folgeglieder.

Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n = a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_1^{(2)}$

Induktionsschluss: Aus der rekursiven Bildungsvorschrift $a_{n+1} = a_n + a_n^{(1)}$ erhält man mit $a_n^{(1)} = a_1^{(1)} + (n-1) \cdot a_1^{(2)}$ direkt $a_{n+1} = a_n + a_1^{(1)} + (n-1) \cdot a_1^{(2)}$. Unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung kann a_{n+1} wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 + (n-1) \cdot a_1^{(1)} + \tfrac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_1^{(2)} + a_1^{(1)} + (n-1) \cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + n \cdot a_1^{(1)} + \tfrac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_1^{(2)} + \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (n-1) \cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + n \cdot a_1^{(1)} + \tfrac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2+2) \cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + n \cdot a_1^{(1)} + \tfrac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_1^{(2)} \\ &= a_1 + \big((n+1)-1\big) \cdot a_1^{(1)} + \tfrac{1}{2} \cdot \big((n+1)-1\big) \cdot \big((n+1)-2\big) \cdot a_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Damit ist der Sachverhalt bewiesen.

2.2 Höhere Differenzen

Analoge Rechnungen für arithmetische Folgen 3. und 4. Ordnung liefern

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!} \cdot a_1^{(1)} + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2!} \cdot a_1^{(2)} + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{3!} \cdot a_1^{(3)} \text{ bzw.}$$

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!} \cdot a_1^{(1)} + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2!} \cdot a_1^{(2)} + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{3!} \cdot a_1^{(3)} + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{4!} \cdot a_1^{(4)}.$$

Es liegt somit die Vermutung nahe, dass für arithmetische Folgen k-ter Ordnung die folgende explizite Bildungsvorschrift gilt:

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{1!} \cdot a_1^{(1)} + \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2!} \cdot a_1^{(2)} + \ldots + \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{k!} \cdot a_1^{(k)}$$

Diese lässt sich ebenfalls durch vollständige Induktion nach n beweisen (vgl. DÜRR / ZIEGENBALG [1]). Auf diesem Beweis soll hier jedoch zu Gunsten eines anderen Themas verzichtet werden:

Dem mathematisch geschulten Leser wird bereits aufgefallen sein, dass es sich allgemein gesprochen bei den expliziten Bildungsvorschriften zu arithmetischen Folgen k-ter Ordnung um Polynome vom Grade k in n handelt. In der Tat lässt sich dieser Zusammenhang ebenso wie seine Umkehrung beweisen, so dass man schließlich zu folgendem Satz gelangt:

Satz 2.1:
Sei (a_n) eine Zahlenfolge. Diese Zahlenfolge (a_n) ist genau dann eine arithmetische Folge k-ter Ordnung, wenn die explizite Bildungsvorschrift für die Folgeglieder a_n als ein Polynom vom Grade k in n mit den Konstanten c_k, c_{k-1}, …, c_1 und c_0 darstellbar ist:

$$a_n = c_k \cdot n^k + c_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 .$$

(vgl. DÜRR / ZIEGENBALG [1]).

Dieser Satz bietet die Möglichkeit, sehr schnell eine arithmetische Folge beliebigen Grades aufzustellen, falls nur das Anfangsglied a_1 der Folge interessiert und die Differenzen nicht von Belang sind. Das Anfangsglied a_1 ist dann die Summe der Konstanten c_0 bis c_k.

Im folgenden Abschnitt werden nun mehrere Aufgaben dargestellt, mit denen eine Einführung der eben dargestellten Inhalte möglich ist.

2.3 Aufgaben

Wie bereits eingangs erwähnt, eignet sich die Folgenbildung bei der Konstruktion von Hohlwürfeln zur Einführung in das Thema der arithmetischen Folgen höherer Ordnung. Nach der Vorstellung der Figuration können zur Erarbeitung der grundlegenden Inhalte die folgenden Aufgaben eingesetzt werden

2.3.1) Ermittele die ersten sechs Glieder dieser Zahlenfolge.
2.3.2) Gib eine explizite Bildungsvorschrift an.
2.3.3) Welche Art Zahlenfolge liegt vor? Entdeckst Du eine Besonderheit?

Ziel der Aufgabe (2.3.2) ist es natürlich nicht, dass die Schüler die Bildungsvorschrift $a_n = a_1 + (n-1)\cdot a_1^{(1)} + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a_1^{(2)}$ herleiten. Vielmehr soll bei dieser Aufgabe die konkret auf die geometrische Situation bezogene Bildungsvorschrift $a_n = (2n+1)^3 - (2n-1)^3$ hergeleitet werden. Konnten die Schüler bei Aufgabe (2.3.1) bereits die ersten sechs Glieder der Zahlenfolge ermitteln, stellt die Aufgabe (2.3.2) lediglich eine Verallgemeinerung des Rechenvorgangs dar und sollte daher leistbar sein.

Zur die Förderung des Verständnisses der Schüler für den Aufbau von arithmetischen Zahlenfolgen zweiter und höherer Ordnung bietet es sich an, die Schüler die Anfangswerte a_1, $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ usw. selber wählen zu lassen und daraus eine arithmetische Zahlenfolge entsprechender Ordnung berechnen zu lassen. Diese eher mühselige Arbeit kann weiterhin dazu dienen, dass Herleiten einer allgemeinen expliziten Bildungsvorschrift zu motivieren.

Bei dieser Herleitung sollte bereits deutlich werden, dass die explizite Bildungsvorschrift einer arithmetischen Folge k-ter Ordnung ein Polynom k-ten Grades ist. Eine anschauliche Herleitung der Umkehrung dieses Zusammenhangs lässt sich durch folgende Aufgaben erzielen:

2.3.4) Denk Dir ein Polynom dritten Grades (für n) aus: z. B. $f(n) = n^3 + ...$
2.3.5) Berechne die ersten sechs Funktionswerte $f(1)$, $f(2)$, …
2.3.6) Was für eine Folge bilden diese Funktionswerte?

3. Differenzengleichungen

3.1 Zum Begriff der Differenzengleichung

Um nun aufbauend auf den bisher erarbeiteten Erkenntnissen zum Themenblock über Differenzengleichungen überzugehen, bietet es sich an, nochmals die rekursive Bildungsvorschrift für arithmetische Folgen (erster Ordnung) zu betrachten, jetzt jedoch mit k als Laufvariable und y statt a: $y_{k+1} = y_k + d$. Umstellen der Gleichung zu $y_{k+1} - y_k = d$ liefert schnell eines der einfachsten Beispiele für eine Differenzengleichung, die z. B. nach DÜRR / ZIEGENBALG [1] wie folgt definiert ist:

Definition 3.1:
Eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen den Werten einer Folge $(y_k)_{k=1,2,3,...}$ an je $(n+1)$ aufeinanderfolgenden Stellen y_k, ..., y_{k+n} herstellt, heißt Differenzengleichung (DG) der Ordnung n.

Entsprechend dieser Definition handelt es sich bei $y_{k+1} - y_k = d$ um eine Differenzengleichung erster Ordnung. Weitere Beispiele für Differenzengleichungen sind

a) $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 2$ mit $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ (Folge der Quadratzahlen)
b) $y_{k+1} - y_k = 24 + 48k$ mit $y_1 = 26$ (Folge der Hohlwürfel aus 2.1)
c) $y_{k+1}^2 + e^{y_k} = \sin k$,

wobei (b) und (c) jeweils wieder Differenzengleichungen erster Ordnung sind und (a) eine Differenzengleichung zweiter Ordnung ist.

Für den Verlauf des Lernangebots bietet es sich an, ebenfalls diese Beispiele zu verwenden, da damit zum einen die Begriffe der Ordnung der Differenzengleichung eingeübt werden und zum anderen ein flüssiger Übergang zu weiteren notwendigen Definitionen geschaffen wird: Bereits beim Beispiel (b) tauchen neben einer Konstanten nicht mehr nur die verschiedenen Folgeglieder y_{k+x} in der Differenzengleichung auf, sondern auch ein von k abhängiger Term. Im Beispiel (c) tritt das Folgeglied y_k sogar als Argument einer Funktion auf. Folgend Definition ist daher sinnvoll:

Definition 3.2:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien f_0, ..., f_n, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $f_n(k) \neq 0$, $f_0(k) \neq 0$ seien. Dann heißt die Differenzengleichung der Form

$$f_n(k)\cdot \mathbf{y_{k+n}} + f_{n-1}(k)\cdot \mathbf{y_{k+n-1}} + ... + f_2(k)\cdot \mathbf{y_{k+2}} + f_1(k)\cdot \mathbf{y_{k+1}} + f_0(k)\cdot \mathbf{y_k} = g(k)$$

***linear** und hat die Ordnung n. Verschwindet $g(k)$, so heißt die Differenzengleichung **homogen**, anderenfalls **inhomogen**. Sind alle Koeffizientenfunktionen $f_j(k)$ konstant, so spricht man von einer Differenzengleichung mit **konstanten Koeffizienten**.*

(vgl. DÜRR / ZIEGENBALG [1]) Nach dieser für den weiteren Gang unabdingbaren Definition sollte auf die Bedeutung von Differenzengleichungen eingegangen werden. Die Schüler werden aufgrund ihres bisherigen Unterrichts vermutlich der Ansicht sein, dass Gleichungen „lediglich" dazu dienen, Variablen zu bestimmen. Daher ist es notwendig, z. B. anhand der arithmetischen Folge deutlich zu machen, dass die Lösung einer Differenzengleichung keine Zahl, sondern stets eine Zahlenfolge ist. Zwar würde es sich hier auch anbieten, die Anzahl der für eine eindeutige Bestimmung der Bildungsvorschrift einer Zahlenfolge notwendigen Randwerte zu thematisieren. Es erscheint mir jedoch sinnvoller, dies im Zusammenhang mit der tatsächlichen Lösung einer Differenzengleichung zu tun, wie sie hier im Kapitel 3.2 und 3.3 zu finden sind.

3.2 Ein Beispiel zur Lösung von Differenzengleichungen

Anknüpfend an die vorausgegangenen theoretischen Betrachtungen zu Differenzengleichungen sollte sich nun die Betrachtung eines Beispiels für die Anwendung einer Differenzengleichung aus dem Alltag anschließen. Gut geeignet ist hierfür die mathematische Untersuchung einer Kredittilgung am Beispiel eines Auto- oder Hauskaufes. Der Autokauf bietet den Vorteil, dass aktuelle Daten zu Zinssätzen und Anzahlungen mit geringem zeitlichen Aufwand über die Internetseiten der bekannten Autohersteller beschafft werden können. Betrachten wir hier die Kreditfinanzierung für den Kauf eines Kompaktwagens zum Preis von 20.500,- € mit 5.150,- € Anzahlung bei einem Jahreszins von 5,90 %. Ausgegangen wird dabei von einer Zahlungsperiode von einem Monat, wobei die gezahlten Beträge erst am Jahresende auf das Darlehn angerechnet werden. Die Zahlungen erfolgen vorschüssig, so dass zum Inkrafttreten des Finanzierungsvertrages zusätzlich zur Anzahlung auch die erste Monatsrate fällig wird. Ein entsprechendes Aufgabenblatt findet der Leser im Anhang.

Bevor mit der eigentlichen Arbeit zur Lösung des Problems durch das Entwerfen der Differenzengleichung und deren Lösung begonnen werden kann, muss zunächst geklärt werden, wie hoch die monatlichen Raten bzw. entsprechend die jährliche Gesamtrate mindestens sein muss und auf welchen Wert diese Raten tatsächlich festgelegt werden sollen.

In unserem Beispiel muss die jährliche Gesamtrate mehr als $15.350\,€ \cdot 0{,}059 = 905{,}65\,€$ betragen, da sonst lediglich die Zinsen bezahlt werden oder gar die Schulden noch wachsen. Sinnvoll erscheint ausgehend von einer monatlichen Raten von $R_M = 350\,€$ eine Jahresrate von $R_J = 4.200\,€$. Nach den erste zwölf Monatsraten sind damit vom ursprünglichen Darlehn $y_0 = 15.350\,€$ noch

$$y_1 = (1+\tfrac{5{,}9}{100})\cdot y_0 - R_J = 1{,}059\cdot 15.350\,€ - 4.200\,€ = 12.055{,}65\,€$$

abzubezahlen. Ausgehend von dieser Beispielrechnung fällt es nicht schwer, eine allgemeine rekursive Formel für die nach der vorschüssigen Zahlung von $(k+1)$ Jahresraten (aufgeteilt in je zwölf Monatsraten) bestehende Restschuld y_{k+1} aufzustellen, wenn die Restschuld y_k, ein effektiver Jahreszins p und die Jahresrate R_J gegeben sind:

$$y_{k+1} = (1+\tfrac{p}{100})\cdot y_k - R_J\,.$$

Da es eine Vielzahl von Prozessen gibt, die durch zu dieser rekursiven Gleichung ähnliche Gleichungen beschrieben werden, ist es sinnvoll, vor der Lösung zunächst ein paar Verallgemeinerungen vorzunehmen: Sei $A := 1+\frac{p}{100}$ und $B := -R_J$. Man erhält dann die zu lösende Gleichung

$$y_{k+1} = A\cdot y_k + B\,,$$

die so genannte *Tilgungsgleichung*.

Im Fall $A = 1$ fällt die Lösung der Tilgungsgleichung nicht weiter schwer. Hier kann auf die explizite Bildungsvorschrift für arithmetische Folgen zurückgegriffen werden: $y_k = y_0 + (k-1)\cdot B$. Der Fall $A = 1$ entspricht einer Finanzierung des Autokaufs zu einem Jahreszins von 0%, was bei manchen namhaften Autoherstellern inzwischen zur Erhöhung der Verkaufszahlen nicht ungewöhnlich ist.
Ist jedoch $p > 0$, kann die Lösung der Tilgungsgleichung nicht so einfach erfolgen. Vielmehr ist es zum Auffinden der Lösung sinnvoll, sich zunächst die rekursive Entwicklung der Werte y_k vor Augen zu führen:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \text{konst.}\\
y_1 &= A \cdot y_0 + B\\
y_2 &= A \cdot y_1 + B = A \cdot (A \cdot y_0 + B) + B = A^2 \cdot y_0 + AB + B\\
y_3 &= A \cdot y_2 + B = A \cdot (A^2 \cdot y_0 + AB + B) + B = A^3 \cdot y_0 + A^2B + AB + B\\
y_4 &= A \cdot y_3 + B = A \cdot (A^3 \cdot y_0 + A^2B + AB + B) + B = A^4 \cdot y_0 + A^3B + A^2B + AB + B.
\end{aligned}
$$

Eine induktive Verallgemeinerung dieser für y_2 bis y_4 gewonnenen expliziten Bildungsvorschrift zu y_k erscheint nun nicht mehr schwierig:

$$
\begin{aligned}
y_k &= A^k \cdot y_0 + A^{k-1}B + A^{k-2}B + ... + A^2B + AB + B\\
&= A^k \cdot y_0 + (A^{k-1} + A^{k-2} + ... + A^2 + A + 1) \cdot B.
\end{aligned}
$$

Zum exakten Nachweis ist auch hier ein Beweis durch vollständige Induktion nach n notwendig. Dieser kann von den Schülern beispielsweise als Übung durchgeführt werden.

Mit der Summenformel für die endliche geometrische Reihe[5] erhält man schließlich

$$A^{k-1} + A^{k-2} + ... + A^2 + A + 1 = \frac{1-A^k}{1-A}$$

und somit

$$y_k = A^k \cdot y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} \cdot B$$

als Lösung der Tilgungsgleichung für den Fall $A \neq 1$ bzw. $p > 0$. (vgl. DÜRR / ZIEGENBALG [1])

Bezogen auf unser Finanzierungsbeispiel für das Auto bedeutet dies:

$$y_k = 1{,}059^k \cdot 15.350 \text{ €} - \frac{1-1{,}059^k}{1-1{,}059} \cdot 4.200 \text{ €} = 1{,}059^k \cdot 15.350 \text{ €} - \frac{1{,}059^k - 1}{0{,}059} \cdot 4.200 \text{ €}$$

Nach wie vielen Jahren ist das Auto nun vollständig bezahlt? Zur Beantwortung dieser Frage muss zunächst das k berechnet werden, für das y_k noch positiv ist.
Zunächst wird das $x \in \mathbb{R}$ mit $y_x = 0$ berechnet:

$$
\begin{aligned}
0 &= 1{,}059^x \cdot 15.350 \text{ €} - \frac{1{,}059^x - 1}{0{,}059} \cdot 4.200 \text{ €}\\
0 &= 1{,}059^x \cdot 15.350 \text{ €} - 1{,}059^x \cdot \frac{4.200 \text{ €}}{0{,}059} + \frac{4.200 \text{ €}}{0{,}059}\\
0 &\approx 1{,}059^x \cdot 15.350 \text{ €} - 1{,}059^x \cdot 71.186{,}44 \text{ €} + 71.186{,}44 \text{ €}\\
1{,}059^x \cdot 55.836{,}44 \text{ €} &\approx 71.186{,}44 \text{ €}\\
1{,}059^x &\approx 1{,}27\\
x &\approx \tfrac{\lg 1{,}27}{\lg 1{,}059}\\
x &\approx 4{,}24
\end{aligned}
$$

Für $k = 4$ ist somit noch $y_k > 0$: $y_4 = 959{,}85$ € . Das Auto ist also nach 4 Jahresraten bzw. 48 Monatsraten und einer Schlussrate von $959{,}85$ € vollständig bezahlt.

Weitere Aufgaben zur Tilgungsgleichung findet der Leser im Kapitel 3.4. Im Folgenden wollen wir uns nun der Anwendung von Differenzengleichungen zur Beschreibung von Bewegungen zuwenden.

---

[5] Eine endliche Reihe ist definiert als die Summe der Glieder einer endlichen Zahlenfolge (a_n). Eine endliche geometrische Reihe entsteht entsprechend aus den Gliedern einer endlichen geometrischen Folge $(a_1, q \cdot a_1, q^2 a_1, ..., q^n a_1)$. Es gilt dann $a_1 + q \cdot a_1 + q^2 \cdot a_1 + ... + q^n \cdot a_1 = a_1 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ bzw. speziell für $a_1 = 1$: $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. (vgl. KEMNITZ [1])

3.3 Differenzengleichung der gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten Bewegung

Ein weiteres Beispiel zur möglichen Anwendung von Differenzengleichungen bietet die Untersuchung von gleichförmigen und gleichmäßig beschleunigten Bewegungen mit der so genannten Schwefelbahn. Diese im Folgenden beschriebenen, früher von der Dr. H. Kröncke OHG in Hannover hergestellten Fahrbahnen sind vielfach in den Physiksammlungen der Gymnasien einschließlich Zubehör vorhanden. Wie sieht nun der Aufbau einer solchen Schwefelbahn aus?

Es handelt sich dabei um eine Fahrbahn, auf die ein Wagen aus Metall aufgesetzt wird. Der Wagen wird auf der einen Seite durch eine v-förmige Metallschiene in der Spur gehalten. Die anderen beiden Räder fahren auf einer isolierenden Plastikschiene. Unter dem Wagen ist ein Schleifer befestigt, der auf einer schwarz eloxierten Aluminium-Schiene entlang schleift. Diese Aluminium-Schiene wird über ein Anschlussbrett, in das zwei große Widerstände eingebaut sind, mit dem einen Pol einer Steckdose des normalen Stromnetzes verbunden, die v-förmige Schiene mit dem anderen Pol der Steckdose. Durch die großen Widerstände im Anschlussbrett besteht keine Gefahr eines Stromschlages.

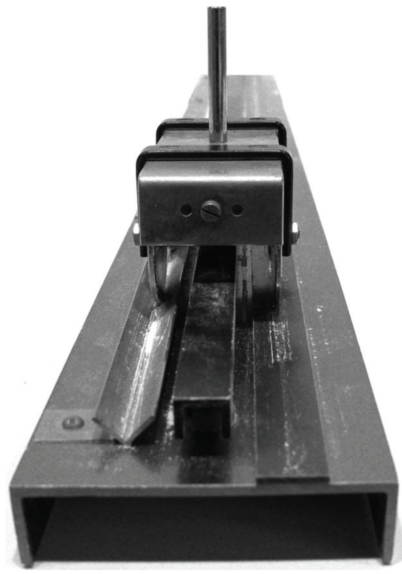


Abb. 4: Die Schwefelbahn

Auf die Aluminiumschiene wird nun Schwefelpulver aufgestreut. Wird abschließend der Wagen auf der Schiene hin- und herbewegt, lädt sich das Schwefelpulver durch die Reibung zwischen Schleifer und Schiene negativ auf. (vgl. Groeneveld [1]) Je nach der Polung der an der Schiene anliegenden Spannung haftet nun das Schwefelpulver auf der Schiene oder nicht. Es entstehen Schwefelstreifen auf der Aluminium-Schiene, die so genannten Zeitmarken. Da die Polung der Spannung 100mal in der Sekunde, also alle 0,01 Sekunden, wechselt, entspricht die Länge der Zeitmarken dem vom Wagen in 0,01 Sekunden zurückgelegten Weg. Die Zeitmarken können mit Hilfe eines Klebestreifens gesichert und von der Schwefelbahn auf ein möglichst farbiges Blatt Papier übertragen werden.

Der Einsatz der Schwefelbahnen bietet die Möglichkeit, die Lernenden ein Experiment selber durchführen zu lassen und somit auch zu einer Auflockerung des Lernangebots beizutragen. Mathematik und Physik können hier gegenseitig voneinander profitieren.

Mit der Schwefelbahn sollen die Schüler eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, eine so genannte „gleichförmige Bewegung“, und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, also eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung, untersuchen. Dazu neigen die Schüler den Versuchsaufbau zunächst nur so stark, dass der Wagen nach einem leichten Anstoßen mit (möglichst) konstanter Geschwindigkeit auf der Fahrbahn entlangrollt. Nach der Sicherung der Zeitmarken wird nun der Versuchsaufbau so stark geneigt, dass der Wagen mit einer deutlichen Beschleunigung auf der Fahrbahn entlangrollt bzw. von selbst anrollt.

Ziel dieser Versuche ist es, auf Grundlage der gewonnen Zeitmarken mit Hilfe von Differenzengleichungen die Bewegungsgleichungen für die beiden genannten Bewegungen herzuleiten.

Entsprechende Aufgabenblätter mit detaillierten Anweisungen zum Gebrauch der Schwefelbahn findet der Leser im Anhang.

3.3.1 Gleichförmige Bewegung

Führt man den ersten Versuch, bei dem die Geschwindigkeit konstant bleiben soll, wie beschrieben durch, erhält man Zeitmarken dieser Form:

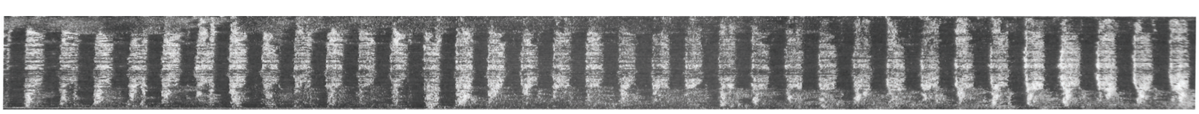


Abb. 5: Zeitmarken auf der Schwefelbahn bei Fahrt konstanter Geschwindigkeit

Bezeichnet k die „Hausnummer“ des Schwefelstreifens bzw. der Lücke, t_k die am Ende des Streifens bzw. der Lücke k seit Aufzeichnungsbeginn vergangene Zeit und s_k den in dieser Zeit zurückgelegten Gesamtweg, so gilt hier offensichtlich $\Delta s := s_{k+1} - s_k = \text{konst.}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die in den Zeiten t_1, t_2, t_3 zurückgelegten Gesamtwege s_1, s_2, s_3, … bilden also eine die Bewegung des Wagens beschreibende Zahlenfolge (s_k), die sich durch eine konstante Differenz zwischen den Folgegliedern auszeichnet. Die Folge (s_k) ist somit eine arithmetische Folge bzw. eine Differenzengleichung erster Ordnung, die gelöst werden muss, um die Bewegungsgleichung des Wagens zu erhalten.

Da den Schülern bereits die explizite Bildungsvorschrift einer arithmetischen Folge (erster Ordnung) bekannt ist, fällt dies nicht weiter schwer. Mit dem in den ersten 0,02 s zurückgelegten Weg s_1 erhält man die Lösung zu

$$s_k = s_1 + (k-1) \cdot \Delta s \,.$$

Da wir jedoch auf der Suche nach einer von der Geschwindigkeit und der Zeit abhängigen Bewegungsgleichung sind, befriedigt diese Lösung noch nicht. Erweitert man jedoch die Gleichung mit $\Delta t := t_{k+1} - t_k$ ($\forall \; k \in \mathbb{N}$), erhält man $s_k = s_1 + (k-1) \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t$. Bei dem Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ handelt es sich um die hier konstante Geschwindigkeit („velocity“) des Wagens: $\frac{\Delta s}{\Delta t} =: v$. Die die Bewegung des Wagens auf der Schwefelbahn beschreibende Gleichung lautet somit

$$s_k = s_1 + v \cdot (k-1) \cdot \Delta t \,.$$

3.3.2 Gleichförmige beschleunigte Bewegung

Beim zweiten Versuch, bei dem die Schwefelbahn so stark geneigt wird, dass der Wagen von selbst anfährt, entstehen Zeitmarken der folgenden Form:

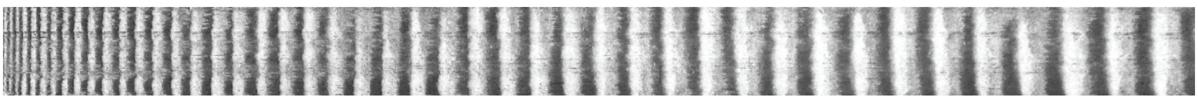


Abb. 6: Zeitmarken auf der Schwefelbahn bei gleichmäßig beschleunigter Fahrt

Wie man deutlich sieht, nimmt die Breite der Zeitmarken bzw. der Lücken mit der Zeit bzw. von links nach rechts zu. Die Differenzen $s_k^{(1)} := s_{k+1} - s_k$ sind also sicherlich nicht mehr konstant. Führt man den beschriebenen Versuch nochmals mit einer häufig in den Physiksammlungen der Schulen ebenfalls vorhandenen längeren Demonstrationsfahrbahn oder mehreren aneinandergestellten normalen Fahrbahnen mit einer starken Neigung durch, erhält man nach meinen Erfahrungen Zeitmarken, die hinreichend genau sind, um eine numerische Auswertung der Versuchsergebnisse zuzulassen. Dabei zeigt sich, dass die zweiten Differenzen $s_k^{(2)} = s_{k+1}^{(1)} - s_k^{(1)}$ im Rahmen der Messgenauigkeit konstant sind. Die Messwerte bilden also eine arithmetische Folge zweiter Ordnung.

Nach den Erkenntnissen, die wir in Kapitel 2.1 über arithmetische Folgen zweiter Ordnung gewonnen haben, lautet die explizite Bildungsvorschrift dieser arithmetischen Folge

$$s_k = s_1 + (k-1) \cdot s_1^{(1)} + \frac{(k-1)\cdot(k-2)}{2} \cdot s_1^{(2)} \,.$$

Was steht nun physikalisch dahinter? Wie schon beim ersten Versuch sind wir bestrebt, statt den Differenzen $s_1^{(1)}$ und $s_1^{(2)}$ eine Geschwindigkeit, oder hier auch eine Beschleunigung, in s_k einfließen zu lassen. Wenden wir uns zunächst der ersten Differenz $s_1^{(1)}$ zu:

$$s_1^{(1)} = s_2 - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} \cdot \Delta t = v_1 \cdot \Delta t$$

Dabei ist v_1 die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen dem Beginn und dem Ende des ersten Schwefelstreifens. Aufbauend auf dieser Rechnung erhält man

$$s_1^{(2)} = s_2^{(1)} - s_1^{(1)} = v_2 \cdot \Delta t - v_1 \cdot \Delta t = (v_2 - v_1) \cdot \Delta t = \frac{(v_2 - v_1)}{\Delta t} \cdot (\Delta t)^2$$

bzw.

$$s_k^{(2)} = s_{k+1}^{(1)} - s_k^{(1)} = \frac{(v_{k+1} - v_k)}{\Delta t} \cdot (\Delta t)^2 .$$

Der Term $\frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ bzw. $\frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t}$ beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit und wird in der Physik „Beschleunigung“ genannt. Man bezeichnet sie mit „a“ für „acceleration“. Da $s_k^{(2)}$ ($\forall \; k \in \mathbb{N}$) und Δt konstant sind, ist auch $a := \frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} = \text{konst.}$, so dass man

$$s_1^{(2)} = a \cdot (\Delta t)^2$$

erhält. Die Bewegung des Wagens auf der Fahrbahn wird also in unserer diskreten Welt durch

$$s_k = s_1 + v_1 \cdot (k-1) \cdot \Delta t + a \cdot \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{2} \cdot (\Delta t)^2$$

beschrieben.

Welche Differenzengleichung wurde nun hier gelöst, um zu diesem Ergebnis zu gelangen? Bekanntlich gilt

$$a \cdot (\Delta t)^2 = s_k^{(2)} = s_{k+1}^{(1)} - s_k^{(1)} = s_{k+2} - s_{k+1} - (s_{k+1} - s_k) = s_{k+2} - s_{k+1} - s_{k+1} + s_k = s_{k+2} - 2s_{k+1} + s_k .$$

Somit lautet die gelöste Differenzengleichung

$$s_{k+2} - 2s_{k+1} + s_k = a \cdot (\Delta t)^2 .$$

3.4 Aufgaben

Zur Festigung der eingangs definierten Begriffe über Differenzengleichungen kann folgende Aufgabe dienen:

3.4.1) Um was für Differenzengleichungen handelt es sich hier? Fülle die Tabelle aus!

Differenzengleichung	**Ordnung**	**linear?**	**konstante Koeffizienten?**	**inhomogen?**	**ggf. Inhomogenität**
$y_{k+3} - 2y_{k+2} + 10y_{k+1} - y_k = 0$					
$\frac{1}{k} \cdot y_{k+2} + \frac{1}{k^2} \cdot y_{k+1} + \frac{1}{k^3} \cdot y_k = k^2$					
$3k^2 \cdot y_{k+5} + k \cdot y_{k+1}^2 + 5k^3 \cdot y_k = 5k$					

Bei der Verwendung dieser oder ähnlicher Aufgaben ist evtl. ein Hinweis angebracht, dass die Begriffe der Homogenität der Differenzengleichung und der Linearität der Koeffizienten ebendieser nach der Definition 3.2 nur für lineare Differenzengleichungen definiert sind und daher bei nichtlinearen Differenzengleichungen über die Eigenschaften keine Aussagen getroffen werden können.

Nachdem mit der Tilgungsgleichung eine Differenzengleichung erster Ordnung betrachtet wurde, erscheint es interessant, folgende Frage zu untersuchen:

3.4.2) Wie viele Hasen werden jedes Jahr geboren, wenn jedes Paar jeden Monat ein weiteres Paar zeugt, das zwei Monate später selbst Nachwuchs bekommt?
(vgl. SONAR [1])

Darüber hinaus kann auch im Bereich der Tilgungsgleichung weitergearbeitet werden: Aufbauend auf deren Lösung ist es möglich, einen Angebot-Nachfrage-Zyklus zu betrachten, etwa zur mathematischen Beschreibung der Preise für Schlachtschweine. Dieses Beispiel eignet sich insbesondere zur Untersuchung des Einflusses von Parametern wie Anfangswerten und Vorfaktoren auf die Lösung der Differenzengleichung (vgl. DÜRR / ZIEGENBALG [1]). Da eine geeignete Darstellung dieser Aufgabe den Rahmen dieses Artikels sprengen würde, sei auf das im Anhang stehende Arbeitsblatt mit Lösungshinweisen verwiesen.

Lösungshinweise:

zu 3.4.1)

Differenzengleichung	Ordnung	linear?	konstante Koeffizienten?	inhomogen?	ggf. Inhomogenität
$y_{k+3} - 2\,y_{k+2} + 10\,y_{k+1} - y_k = 0$	3	ja	ja	nein	$---$
$\frac{1}{k}\cdot y_{k+2} + \frac{1}{k^2}\cdot y_{k+1} + \frac{1}{k^3}\cdot y_k = k^2$	2	ja	nein	ja	k^2
$3k^2\cdot y_{k+5} + k\cdot y_{k+1}^2 + 5k^3\cdot y_k = 5k$	5	nein	*nicht definiert*	*nicht definiert*	*nicht definiert*

zu 3.4.2) Bei dieser Aufgabe ist es hilfreich, sich zunächst klar zu machen, aus welchen Summanden die Anzahl der Paare in einem Monat k zusammengesetzt ist:

$$\begin{pmatrix}\text{Anzahl der Paare}\\ \text{im Monat } k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Anzahl der Paare}\\ \text{im Monat } k-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Anzahl der Neugeborenen}\\ \text{im Monat } k\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\text{Anzahl der Paare}\\ \text{im Monat } k-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Anzahl der Paare}\\ \text{im Monat } k-2\end{pmatrix}$$

Wird die Anzahl der Paare im Monat k mit y_k bezeichnet, erhält man die rekursive Bildungsvorschrift der Folge zu $y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$ mit den Randwerten $y_1 = 1$ und $y_2 = 2$. Unter Verwendung des Ansatzes $y_k = m^k$ erhält man schließlich über die charakteristische Gleichung $m^2 - m - 1 = 0$ zunächst $m_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ und daraus das so genannte „Fundamentalsystem" der Lösungen der Differenzengleichung (vgl. SONAR [1]) zu $y_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ und $y_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit $y_k = c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + c_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$, wobei die Konstanten c_1 und c_2 nun noch durch die Randwerte y_1 und y_2 spezifiziert werden müssen. Die Lösung eines entsprechenden Gleichungssystems liefert die Folge der Fibonacci-Zahlen zu

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

als Antwort auf die gestellte Frage.

4. Einführung von Differentialgleichung am Beispiel harmonischer Schwingungen

Nachdem sich das Lernangebot bis jetzt intensiv mit arithmetischen Folgen höherer Ordnung und Differenzengleichungen beschäftigt hat, ist es nun an der Zeit, sich wie angekündigt mit Differentialgleichungen zu befassen. Ziel dieses Abschnittes ist es, insbesondere homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu lösen und einen Ausblick auf inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu geben.

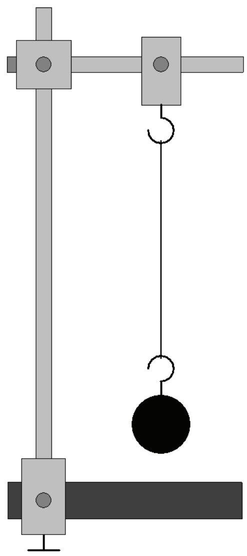


Abb. 7: Fadenpendel

Um die Thematisierung zu motivieren, kann die Untersuchung der physikalisch eng miteinander verwandten freien ungedämpften, gedämpften sowie der erzwungenen Schwingungen eines Fadenpendels dienen. Bei einem Fadenpendel handelt es sich um einen sehr einfachen Versuchsaufbau: An einem Faden wird ein Kugel befestigt und der Faden z. B. an einem Haken so eingehängt, dass die Kugel nach einem Anstoßen ungehindert schwingen kann.

Vor dem Anstoßen bewegt sich die Kugel (fast) nicht; sie befindet sich in einer so genannten *Ruhelage*.

Wird die Kugel aus dieser Lage herausgestoßen, so treibt die Erdanziehungskraft F_G („Gravitationskraft", daher das G) sie wieder in die Ausgangslage zurück. Infolge ihrer Trägheit bewegt sich die Kugel über diesen Punkt hinaus. Die Erdanziehungskraft bremst sie nun ab und beschleunigt sie wieder in Richtung der Ruhelage.

Bei fehlender Reibung würde sich diese Hinundherbewegung beliebig lange wiederholen. Obwohl die Kugelform äußerst strömungsgünstig ist, tritt doch eine geringe Luftreibung auf, die die Schwingung schließlich zum Erliegen bringt. Da diese Dämpfung der Schwingung jedoch sehr gering ist, hat es sich in der Physik durchgesetzt, das Fadenpendel als ein Beispiel für eine *freie, ungedämpfte Schwingung* anzusehen.

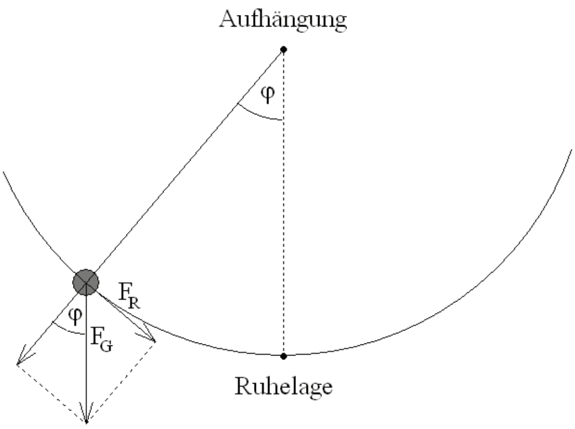


Abb. 8: Kräfte am Fadenpendel

Betrachten wir nun die Kräfte, die auf die aus der Ruhelage ausgelenkte Kugel wirken: Die Komponente von F_G, die tangential zu der Bahn gerichtet ist, auf der sich die Kugel bewegt, wird rücktreibende Kraft F_R genannt. Diese rücktreibende Kraft ist direkt für die Beschleunigung bzw. für das Abbremsen der Kugel während der Schwingung verantwortlich.

Ziel der folgenden Rechnung ist es nun, eine Beziehung zwischen den in Abbildung 8 angegebenen Kräften und den in Abbildung 9 eingezeichneten Streckenlänge herzustellen. Dafür bietet es sich an, zunächst das Verhältnis der rücktreibenden Kraft und der Gravitationskraft zu berechnen:

$$\sin\varphi = \frac{-F_R}{F_G}$$

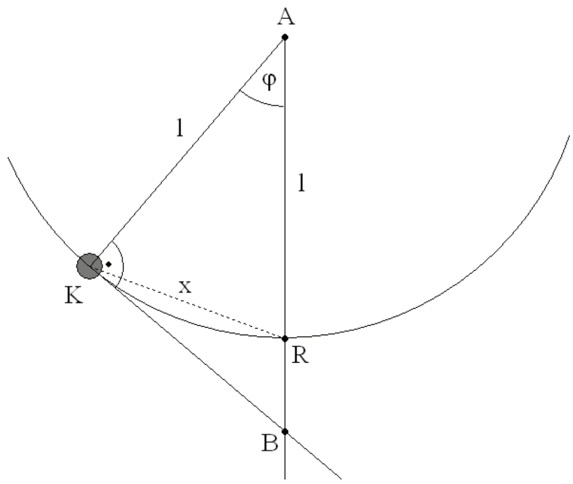


Abb. 9: Streckenbezeichnungen zum Fadenpendel

(Da es sich bei F_R um eine rücktreibende Kraft handelt, wird sie hier negativ angesetzt.)
Daraus folgt mit der im heutigen gymnasialen Physikunterricht bereits früh gelehrten Identität $F_G = m \cdot g$ (m: Masse, g: Erdbeschleunigung) $F_R = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$. Wie kann nun $\sin\varphi$ aus dieser Gleichung entfernt werden?

Betrachtet man Abb. 10, so fällt auf, dass $\sin\varphi = \frac{|\overline{KB}|}{|\overline{AB}|}$ gilt. Für kleine Winkel φ, die hier nur betrachtet werden sollen, kann $\sin\varphi \approx \frac{x}{l}$ genähert werden. Somit gilt für kleine Auslenkungen x aus der Ruhelage

$$F_R = -m \cdot g \cdot \tfrac{x}{l}.$$

Da die rücktreibende Kraft F_R im Rahmen dieser Näherung proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage ist, spricht man von einer „harmonischen Schwingung".

Der letzte und entscheidende Schritt auf dem Weg zu der die Schwingung beschreibenden Differentialgleichung ist nun, auszunutzen, dass jede Kraft als Produkt von Masse und Beschleunigung dargestellt werden kann:

$$F_R = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = m \cdot a.$$

Wie bereits im letzten Kapitel ausgenutzt, ist die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit: $a = \frac{dv}{dt}$. Die Geschwindigkeit v der Pendelkugel ist die Änderung der Auslenkung x mit der Zeit: $v = \frac{dx}{dt}$. Daraus folgt, dass die Beschleunigung die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit ist, die in der Physik zumeist mit $\ddot{x}(t)$ bezeichnet wird. Somit ist

$$F_R = m \cdot \ddot{x}(t).$$

Das Gleichsetzen der beiden für F_R gewonnenen Gleichungen liefert

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -m \cdot g \cdot \tfrac{x}{l}$$

bzw.

$$\ddot{x}(t) + \tfrac{g}{l} \cdot x(t) = 0 \; .$$

Dies ist die Differentialgleichung der freien, ungedämpften Schwingung eines Fadenpendels. Ein solches Fadenpendel schwingt mit einer Schwingungsdauer von $T = 2\pi\sqrt{\tfrac{l}{g}}$.

4.1 Weitere Betrachtungen von Differentialgleichungen

Um sich im Rahmen des beschriebenen Lernangebots angemessen über die behandelten mathematischen Inhalte verständigen zu können, sind wie bei den Differenzengleichungen auch im Bereich der Differentialgleichungen eine paar grundlegende Definitionen unabdingbar. Eine prägnante Definition von Differentialgleichungen ist die folgende (vgl. KALLENRODE [1]):

Definition 4.1:
Eine Gleichung, in der (gewöhnliche) Ableitungen einer unbekannten Funktion $x(t)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten, heißt eine (gewöhnliche) Differentialgleichung (DGL) n-ter Ordnung.
Bei der Gestaltung des Lernangebots sollte meiner Meinung nach der Zusatz „gewöhnliche“ weggelassen werden, da den Lernenden zu diesem Zeitpunkt die Existenz von partiellen Ableitungen noch nicht bekannt ist und somit der wissenschaftlich sinnvolle Zusatz „gewöhnliche“ eher zu Verwirrung führen wird.

Des Weiteren sollte sich der Lehrende bei der Gestaltung mit den Lernenden darauf einigen, wie die Ableitungen der gesuchten Funktion bezeichnet werden. In der Physik ist es üblich, zumindest die ersten beiden Ableitungen des Weges x nach der Zeit durch eine ansteigende Anzahl von Punkten über dem x zu kennzeichnen. Höhere Ableitungen werden häufig in der Form $x^{(k)}$ (*hier:* die k-te Ableitung von x nach der Zeit) geschrieben.

Ebenso wie bei den Differenzengleichungen ist es bei den Differentialgleichungen unverzichtbar, den Schülern deutlich zu machen, dass die Lösung einer Differentialgleichung keine Zahl, sondern hier stets eine Funktion ist. Dies kann ebenso wie ein Thematisierung der Anzahl der für eine eindeutige Bestimmung einer Lösungsfunktion notwendigen Randwerte im Zusammenhang mit der im nächsten Unterkapitel dargestellten Lösung der oben hergeleiteten Differentialgleichung des freien, ungedämpften Fadenpendels geschehen.

Bevor dies erfolgt, sind jedoch noch ein paar zu der Klassifikation der Differenzengleichungen analoge Definitionen notwendig:

Definition 4.2:
Sei $t \in \mathbb{R}$ und seien f_0, ..., f_n: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei $f_n(t) \neq 0$ sei. Dann heißt die Differentialgleichung der Form

$$f_n(t) \cdot \mathbf{x^{(n)}(t)} + f_{n-1}(t) \cdot \mathbf{x^{(n-1)}(t)} + \ldots + f_2(t) \cdot \mathbf{\ddot{x}(t)} + f_1(t) \cdot \mathbf{\dot{x}(t)} + f_0(t) \cdot \mathbf{x(t)} = g(t)$$

linear *und hat die Ordnung n. Verschwindet $g(t)$, so heißt die Differentialgleichung* ***homogen****, anderenfalls* ***inhomogen****. Sind alle Koeffizientenfunktionen $f_j(t)$ konstant, so spricht man von einer Differentialgleichung mit* ***konstanten Koeffizienten****.*

(vgl. KALLENRODE [1]) Zur Festigung dieser Definitionen eignen sich wiederum Aufgaben zur Klassifikation von Differentialgleichungen, wie sie unter (4.5) zu finden sind. Abgesichert durch die obigen Definitionen kann es nun an die Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + \tfrac{g}{l} \cdot x(t) = 0$ gehen.

4.2 Lösung der DGL der freien, ungedämpften Schwingungen

Der aufmerksame Leser wird bereits bemerkt haben, dass es sich bei der DGL $\ddot{x}(t) + \tfrac{g}{l} \cdot x(t) = 0$ um eine homogene, lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten handelt. Die Lösung einer solchen DGL gestaltet sich strukturell recht einfach und scheint daher trotz des Auftretens von komplexen Zahlen für die Behandlung im Rahmen des Lernangebots geeignet zu sein: Der Lösungsansatz für die gesuchte Funktion lautet

$x(t)=e^{\lambda\cdot t}$ und wird wegen seiner Form „Exponentialansatz“ genannt. Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL und Ausklammern von $e^{\lambda\cdot t}$ liefert die so genannte „charakteristische Gleichung“ $\lambda^2+\frac{g}{l}=0$, aus der sich zwei Werte für λ berechnen lassen: $\lambda_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{g}{l}}$. (vgl. KALLENRODE [1]) Problematisch wird den Schülern hier erscheinen, dass die Diskriminante negativ ist. Entsprechende Meinungsäußerungen, die Gleichung sei daher nicht lösbar, kann man jedoch erwidern, einfach einmal die (-1) auszuklammern und $i:=\sqrt{-1}$ zu setzen:

$$\lambda_{1/2}=\pm\sqrt{-\tfrac{g}{l}}=\pm\sqrt{(-1)\cdot\tfrac{g}{l}}=\pm\sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{\tfrac{g}{l}}=\pm i\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,.$$

Somit erhält man als mögliche Lösung der DGL $x_1(t)=e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}$ und $x_2(t)=e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}$. Diese beiden Lösungen bilden das so genannte „Fundamentalsystem“ (vgl. SONAR [1]) der Lösungen der DGL. Die allgemeine Lösung der DGL lautet nun

$$x(t)=c_1\cdot e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}+c_2\cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\,.$$

Um zu sehen, was physikalisch und mathematisch hinter dieser Lösung steht, ist es sinnvoll, das Randwertproblem $x(0)=x_0$, $x(\frac{1}{4}T)=0$ (Das Pendel wird aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen.) zu lösen, wobei x_0 die Startauslenkung und T die Dauer einer vollen Schwingung angeben. Zur Lösung dieses Randwertproblems ist jedoch die Information $e^{\pm i\cdot\frac{1}{2}\pi}=\pm i$ zwingend erforderlich. Diese Aussage beruht auf der *Eulerschen Formel*, die als Bindeglied zwischen den trigonometrischen Funktionen und den komplexen Zahlen angesehen werden kann: Erinnert man sich der Taylorentwicklung der Funktion e^x in der Form $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$, so erhält man

$$e^{ix}=1+ix+\tfrac{(ix)^2}{2!}+\tfrac{(ix)^3}{3!}+\tfrac{(ix)^4}{4!}+\tfrac{(ix)^5}{5!}+\ldots=\left(1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}\pm\ldots\right)+\left(ix-\tfrac{ix^3}{3!}+\tfrac{ix^5}{5!}\pm\ldots\right)=\left(1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}\pm\ldots\right)+i\cdot\left(x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}\pm\ldots\right)$$

und durch Ausnutzung der Taylorentwicklungen von Sinus und Cosinus die Eulersche Formel zu

$$e^{ix}=\cos(x)+i\cdot\sin(x)\,.$$

Einsetzen von $\pm\frac{1}{2}\pi$ liefert die oben genannte Identität. Damit erhält man aus den beiden Anfangsbedingungen

$$x(0)=x_0:\qquad c_1+c_2=x_0$$
$$x(\tfrac{1}{4}T)=0:\qquad ic_1-ic_2=0$$

Aus der unteren Gleichung folgt sofort $c_1=c_2$, so dass man mit der oberen Gleichung $c_1=c_2=\frac{1}{2}x_0$ erhält. Die Lösung des Randwertproblems lautet somit

$$x(t)=x_0\cdot\left(\frac{e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}+e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{2}\right)$$

Obwohl diese Lösung immer noch nicht aufschlussreicher als die allgemeine Lösung aussieht, liegt hier doch die Schluss zur Einfachheit sehr nahe: Wegen $\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})=\cos(t)$ ist

$$x(t)=x_0\cdot\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right).$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graph dieser Lösungsfunktion, der den zeitlichen Verlauf der Schwingung wiedergibt.

Ebenso ist es möglich, diese Lösung der Differentialgleichung der freien, ungedämpften Schwingung durch das physikalisch identische Randwertproblem $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$ zu lösen. Dabei erhält man mit

$$\dot{x}(t)=i\sqrt{\tfrac{g}{l}}\cdot c_1\cdot e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}-i\sqrt{\tfrac{g}{l}}\cdot c_2\cdot e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

die beiden Gleichungen $c_1+c_2=x_0$ und

$$-\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,c_1+\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,c_2=0\,,$$

woraus sich ebenfalls $x(t)=x_0\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$ ergibt.

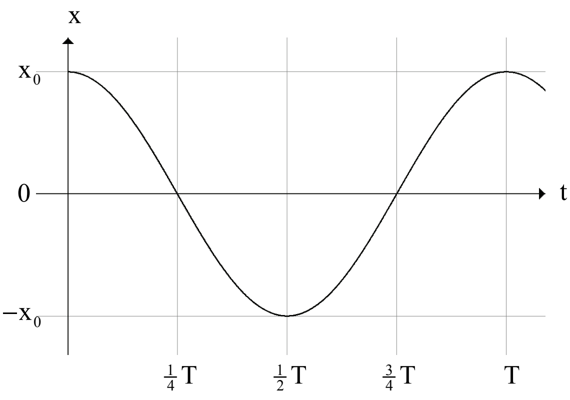


Abb. 10: Graph der Lösungsfunktion

4.3 Gedämpfte Schwingung

Aufbauend auf diesem Lösungsweg zur mathematischen Beschreibung der Bewegung des freien, ungedämpften Fadenpendels ist es in dem Lernangebot nun möglich, gedämpfte Schwingungen des Fadenpendels zu untersuchen. Dies bietet sich insbesondere an, da die entsprechende DGL ebenfalls mit dem Exponentialansatz gelöst werden kann, jedoch auch ihre ganz individuellen mathematischen Eigenschaften hat.

Einen Versuchsaufbau, mit dem man eine gedämpfte Schwingung eines Fadenpendels vorführen kann, zeigt die nebenstehende Abbildung. Es handelt sich dabei um einen, im Vergleich zum letzten Versuch, leicht veränderten Aufbau. Insbesondere wird zur Dämpfung der Schwingung vor die Pendelkugel, z. B. mit einem Klebe-Pad, ein Stück Pappe geklebt und die Aufhängung um ein zweites Seil ergänzt. Letztere Maßnahme stabilisiert die Pendelbewegung und verhindert insbesondere Drehungen der Kugel um den sonst nur vorhandenen einen Faden.

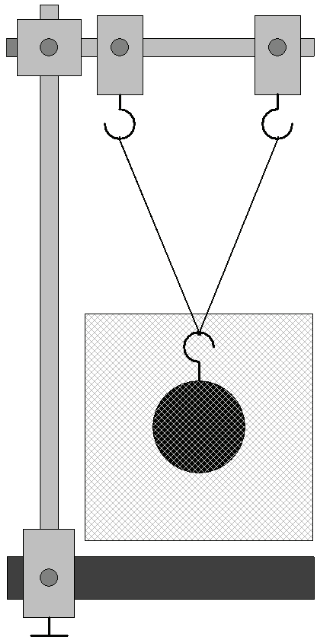


Abb. 11: Versuchsaufbau zur Betrachtung von gedämpften Schwingungen

Wird das so konstruierte Pendel angestoßen, kommt es schon nach kurzer Zeit wieder zu Ruhe. Verantwortlich dafür ist die Luftwiderstandskraft, die in dem hier relevanten Geschwindigkeitsbereich mit der so genannten Dämpfungskonstanten δ proportional zur momentanen Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ des Pendels ist.

Da die Luftwiderstandskraft die Bewegung hemmt, wird sie negativ angesetzt: $F_L = -2\delta \cdot m \cdot \dot{x}$. Die Verwendung des Faktors 2 hat dabei, wie wir gleich sehen werden, lediglich rechnerische Gründe. (vgl. KALLENRODE [1]) Zusammen mit der aus der Erdanziehungskraft resultierenden rücktreibenden Kraft $F_R = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$ wirkt also die Gesamtkraft $F_{ges} = F_R + F_L = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l} - 2\delta \cdot m \cdot \dot{x}$ auf das Pendel. Mit $F_{ges} = m \cdot \ddot{x}$ erhält man nach Kürzen und Umordnen die Differentialgleichung der gedämpften Schwingung eines Fadenpendels:

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \frac{g}{l} \cdot x = 0$$

.

Da der Term $\frac{g}{l}$ in den folgenden Rechnungen sehr häufig auftritt, erscheint es sinnvoll, ihn durch $\omega_0^2 := \frac{g}{l}$ abzukürzen, so dass nun die DGL $\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ zu lösen ist. Dabei ist ω_0 die so genannte Eigenfrequenz des Fadenpendels, also die Frequenz, mit der es bei einer freien, ungedämpften Schwingung schwingt.

Verwendet man zur Lösung dieser Differentialgleichung den aus dem letzten Kapitel bekannten Exponentialansatz, gelangt man über die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$ zu der allgemeinen Lösung

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t}\right).$$

Offensichtlich bedarf es hier wegen der bekannten Problematik einer negativen Diskriminante einer Fallunterscheidung bzgl. des Größenverhältnisses von δ^2 und $\frac{g}{l}$.

Der erste Fall $\delta^2 < \omega_0^2$ führt, wie schon die Behandlung der freien, ungedämpften Schwingung, auf komplexe Zahlen: $x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t}\right)$. Die Lösung des ebenfalls schon bekannten Randwertproblems $x(0) = x_0$, $x(\frac{1}{4}T) = 0$ führt schließlich auf die Lösung

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot x_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t\right).$$

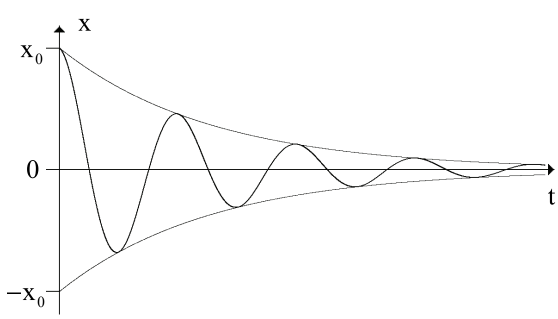


Abb. 12: Schwingfall

Zeichnet man, wie in Abb. 12, den Graphen dieser Lösungsfunktion, so sieht man, dass die maximalen Auslenkung, die so genannte Amplitude, des Pendels mit zunehmender Zeit kleiner werden, das Pendel jedoch noch schwingt. Aus diesem Grund wird der Fall $\delta^2 < \omega_0^2$ „Schwingfall“ genannt. Neben dem beschriebenen Versuch lässt sich mit einer einfachen Fahrradklingel ebenfalls eine gedämpfte Schwingung demonstrieren: Die Glocke der Fahrradklingel schwingt nach dem „Anstoßen“ hörbar weiter, der Ton wird jedoch im Laufe der Zeit immer leiser, bis er nicht mehr wahrnehmbar ist.

Betrachten wir nun **den zweiten Fall** $\delta^2 = \omega_0^2$. Da hier $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = 0$ ist, erhält man aus der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$ lediglich $\lambda = -\delta$. Es kann hier also nicht mit der oben angegebenen allgemeinen Lösung gearbeitet werden. Da jedoch das Fundamentalsystem einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, ebenso wie das einer entsprechenden Differenzengleichung, aus zwei Lösungen bestehen muss (vgl. WALTER [1]), muss neben der aus $\lambda = -\delta$ folgenden Lösung $x(t) = e^{-\delta \cdot t}$ noch eine zweite gefunden werden. Hierfür eignet sich $x(t) = t \cdot e^{-\delta \cdot t}$, so dass man als allgemeine Lösung dieses Falls $x(t) = (c_1 + c_2\, t) \cdot e^{-\delta \cdot t}$ erhält. Löst man nun noch das Anfangswertproblem $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, erhält man

$$x(t) = x_0 \cdot (1 - \delta\, t) \cdot e^{-\delta \cdot t}.$$

Trägt man x gegen die Zeit t auf, so wird deutlich, dass das schwingungsfähige System nach dem Anstoßen keine Schwingung mehr wie im Fall 1 ausführt, sondern lediglich einmal die Ruhelage passiert und danach die Auslenkung sanft in die Ruhelage zurückgeht (vgl. Abb. 13). Natürlich tritt eine solche Bewegung nicht bei einem Fadenpendel auf. Doch eine Anwendung dieses so genannten „aperiodischen Grenzfalls“ begegnet uns täglich: In intakten Stoßdämpfern von Autos ist der aperiodische Grenzfall realisiert.

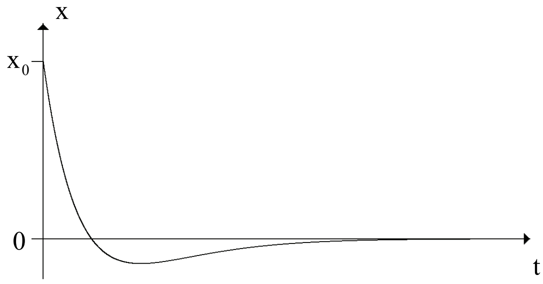


Abb. 13: aperiodischer Grenzfall

Wesentlicher einfacher als der zweite Fall lässt sich **der dritte Fall** $\delta^2 > \omega_0^2$ lösen, denn hier ist $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$, so dass wieder die oben angegebene allgemeine Lösung genutzt werden kann. Bei der Lösung des aufgrund der physikalischen Betrachtung sinnvollen Randwertproblems $x(0) = x_0$, $x(\infty) = 0$ gelangt man wegen $e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ und $e^{\delta \cdot t}, e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\cdot t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ zu der Lösung

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)\cdot t}.$$

Im Vergleich der drei hier behandelten Fälle herrscht im Fall $\delta^2 > \omega_0^2$ die stärkste Dämpfung. Sie ist derart stark, dass das schwingungsfähige System sehr langsam in die Ruhelage zurückgeht, ja gerade zu zurückkriecht (vgl. Abb. 14). Daher wird dieser Fall auch als „Kriechfall“ bezeichnet. Beispielsweise sind Tankanzeigen in Kraftfahrzeugen und andere Messinstrumente mit einer solch starken Dämpfung versehen, um diese gegen kurzfristige äußere Einflüsse zu stabilisieren.

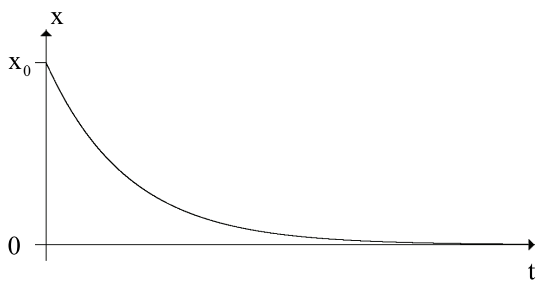


Abb. 14: Kriechfall

Zum Abschluss dieses Abschnittes sind noch zwei Bemerkungen angebracht: Während die Fälle $\delta^2 < \omega_0^2$ und $\delta^2 > \omega_0^2$ von den Lernenden mit entsprechenden Denkanregungen des Lehrenden gut selber bearbeitet werden können, stellt der Fall $\delta^2 = \omega_0^2$ wegen des abweichenden Fundamentalsystems eine besondere Schwierigkeit da und sollte daher meiner Meinung nach eher im Gespräch zwischen Lehrendem und Lernenden behandelt werden.

Eine gute Zusammenfassung der physikalischen Inhalte zu Schwingungen bietet die von Herrn Finckh, Herrn Fritsch und Herrn Leitner betreute Internetseite LEIFI-Physik (vgl. FINCKH / FRITSCH / LEITNER [1]) von der auch die Ideen zu den Alltagsanwendungen der verschiedenen Dämpfungsfälle stammen.

4.4 Erzwungene Schwingung

Wie man anhand des letzten Abschnittes sieht, bieten schon gedämpfte Schwingungen viel mathematischen Betätigungsraum. Ebenso mathematisch und physikalisch interessant sind auch so genannte erzwungene Schwingungen. Darunter versteht man eine Schwingung, bei der ein schwingungsfähiges System, wie z. B. ein Fadenpendel, durch eine periodisch wirkende äußere Kraft zum Schwingen angeregt wird. (vgl. KALLENRODE [1])

Nimmt man bei dem Versuchsaufbau, wie er in Abb. 7 gezeigt wird, den Faden vom oberen, an der kurzen Stange befestigten Haken ab und bewegt nun mit der Hand den Faden horizontal periodisch einige Zentimeter hin und her, so handelt es sich hierbei um eine erzwungene Schwingung des Fadenpendels.

Man sollte dabei mit sehr kleinen Frequenzen beginnen und diese so genannte Erregerfreuenz nach und nach steigern. Das Augenmerk der Beobachtung sollte dabei auf der Auswirkung der Bewegung der Hand auf die des Pendels bzw. der Kugel liegen. Dabei stellt man fest, dass das Pendel den Bewegungen der Hand zunächst eher widerwillig folgt, dann bei mittleren Frequenzen heftig zu schwingen beginnt, bevor es bei hohen und höchsten Erregerfrequenzen wieder fast zur Ruhe kommt. Wiederholt man den Versuch mit einer zur Dämpfung vor die Pendelkugel geklebten Pappscheibe (wie in Abb. 11), verhält sich das Pendel ähnlich, jedoch wachsen die Amplituden bei mittleren Erregerfrequenzen weniger stark an.

Durch welche Differentialgleichung wird nun dieses Verhalten des Pendels beschrieben? Auf das Pendel wirkt neben der schon bekannten rücktreibenden Kraft und der Luftwiderstandkraft die erregende Kraft, die von der Hand ausgeht. Diese kann durch $F_H = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$ beschrieben werden, wobei F_0 eine Konstante sei. Auf das Pendel wirkt also insgesamt die Kraft $F_{ges} = F_R + F_L + F_H = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l} - 2\delta \cdot m \cdot \dot{x} + F_0 \cdot \cos(\Omega t)$. Mit $F_{ges} = m \cdot \ddot{x}$ erhält man die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = \tfrac{F_0}{m} \cdot \cos(\Omega t) .$$

Erste Versuche, diese Differentialgleichung mit Hilfe des Exponentialansatzes zu lösen, scheitern, da $e^{\lambda t}$ wegen der Inhomogenität nicht ausgeklammert werden kann. Eine Lösung dieser Differentialgleichung erhält man vielmehr in Form der Summe aus der allgemeinen Lösung $x_H(t)$ der zugehörigen homogenen DGL $\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ und einer so genannten partikulären Lösung $x_P(t)$ der obigen inhomogenen DGL:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) .$$

Eine genaue Darstellung des gesamten folgenden Lösungsweges würde den Rahmen dieses Artikels und der des geplanten Anspruchsniveaus sprengen. Daher sei hier nur so viel gesagt: Für die partikuläre Lösung wird ein Ansatz gewählt, der der Inhomogenität ähnlich ist. Dieser Bedingung genügt der Ansatz $x_p(t) = A \cdot \cos(\Omega t + \varphi)$, wobei A eine noch zu bestimmende Amplitude ist und φ eine ebenfalls zu bestimmende Phasenverschiebung zwischen dem Fadenpendel und der durch ihre periodische Bewegung diese Schwingung erzwingenden Hand. Man gelangt durch Einsetzen dieses Ansatzes in die inhomogene Differentialgleichung zu der Erkenntnis, dass sich

$$x_P(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + (2\delta\Omega)^2}} \cdot \cos(\Omega t + \varphi) \text{ mit } \varphi = -\arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

als partikuläre Lösung eignet.

Aufgrund der, selbst mit der vorgeklebten Pappscheibe, hier nur verhältnismäßig geringen Dämpfung des Pendels liegt stets der Schwingfall vor. Damit ist $x_H(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 \cdot e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t}\right)$. Da jedoch $e^{-\delta t}$ mit zunehmender Zeit gegen Null strebt, hat x_H schon nach kurzer Zeit keine Bedeutung mehr für das Verhalten des Pendels. Ab einem bestimmten Zeitpunkt gilt somit

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + (2\delta\Omega)^2}} \cdot \cos(\Omega t + \varphi) .$$

Dabei ist $A := \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2) + (2\delta\Omega)^2}}$ die Amplitude der Schwingung. Sie hängt ebenso wie die Phasenverschiebung von der Erregerfrequenz Ω ab! Stimmen nun die Eigenfrequenz ω_0 und die Erregerfrequenz Ω überein, erhält man für die Amplitude $A = \frac{F_0}{m} \cdot (2\delta\omega_0)^{-1}$. Diesen Fall bezeichnet man als „Resonanz". (vgl. KALLENRODE [1])

Ist das schwingungsfähige System nur schwach gedämpft, also die Dämpfungskonstante δ klein, hat dies ein starkes Anwachsen der Amplitude zu Folge. Dieses Phänomen kann mit einfachen Mitteln bei dem eingangs beschriebenen Versuch beobachtet werden. Neben diesem, bei Schülern häufig Erstaunen hervorrufenden Versuch, gibt es viele Situationen im Alltag, die sich mit Resonanzeffekten erklären lassen. Das beeindruckendste Beispiel einer Resonanz mit katastrophalen Folgen wird aber sicherlich der Einsturz der TACOMA NARROWS BRIDGE 1940 aufgrund einer durch Luftströmungen hervorgerufenen erzwungenen Schwingung sein. (vgl. FINCKH / FRITSCH / LEITNER [1]) Zwei Videos dazu findet der interessierte Leser unter *www.ltb.lu/downloads/physics/tacoma.avi* und *www.computational-acoustics.de/html/bauakustik.html*.

Aus Gründen der Vereinfachung blieb bei den vorangegangenen Rechnungen unberücksichtigt, dass die Eigenfrequenz eines schwingungsfähigen Systems durch die Dämpfung abnimmt. Da es jedoch das ausschließlich Ziel dieses Abschnittes war, prinzipiell zu zeigen, wie eine inhomogene lineare Differentialgleichung gelöst werden kann, sehe ich diese physikalische Ungenauigkeit nicht als wesentlich an. Vielmehr sollte dieser Ausblick auf inhomogene Differentialgleichung am Ende des beschriebenen Lernangebotes dazu dienen, die Schüler noch einmal zum Staunen über diesen eindrucksvollen Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik zu bringen und dabei auch das beobachtete Phänomen zu erklären.

Im Folgenden findet der Leser nun noch eine Zusammenstellung von Übungsaufgaben zur Differentialgleichungen sowie eine Idee zur möglichen thematischen Weiterführung des Lernangebots.

4.5 Aufgaben

Zur Festigung der eingangs definierten Begriffe über Differentialgleichungen kann, wie bei den Differenzengleichungen, eine Aufgabe zur Klassifizierung von Differentialgleichungen dienen:

4.5.1) Um was für Differentialgleichungen handelt es sich hier? Fülle die Tabelle aus!

Differentialgleichung	**Ordnung**	**linear?**	**konst. Koeff.?**	**inhomogen?**	**ggf. Inhomogenität**
$\dot{x} = x \cdot t$					
$x^{(4)} + 5\ddot{x}^2 + 6\dot{x}^3 = t^4$					
$\ddot{x} + \dot{x} + t^2 x = \cos(\omega t)$					

Auch bei dieser Art von Aufgaben ist analog zu der Klassifizierung von Differenzengleichungen zu beachten, dass die Begriffe „lineare Koeffizienten" und „Inhomogenität" nur für lineare Differentialgleichungen definiert sind. Weitere Möglichkeiten zum Einüben der Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung bieten folgende Aufgaben:

4.5.2) Unter welcher Bedingung löst die Funktion $x(t) = c_1 + c_2 \cdot t + c_3 \cdot t^2$ mit den Konstanten c_1, c_2 und c_3 die Differentialgleichung $\ddot{x} - \frac{1}{t}\dot{x} + \frac{2}{t} = 0$?

4.5.3) Ermittele die allgemeine Lösungsfunktion der Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\dot{x} - 10x = 0$.

4.5.4) Löse das Randwertproblem

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$$
$$x(0) = 2$$
$$x(1) = e^5 + e^{-1}$$

Eine Steigerung im Schwierigkeitsgrad stellt die folgende Aufgabe dar:

4.5.5) Ermittele die allgemeine Lösungsfunktion der Differentialgleichung $x^{(4)} + 4\ddot{x} - 21x = 0$.

Löse außerdem das Randwertproblem $x(0) = 0$, $x(1) = e^{-\sqrt{3}} - e^{\sqrt{3}}$ und unter der Bedingung, dass $x(t)$ stets reell sein soll.

Zur Lösung dieser Aufgabe erscheint es sinnvoll, den Schülern zunächst einen Hinweis zu geben: Wie bereits von der Lösung der Schwingungs-DGL bekannt ist, können Terme der Form e^{ait} mit $a, t \in \mathbb{R}$ je nach Größe von a und t sowohl reelle als auch komplexe Werte annehmen. Unter der Bedingung, dass $x(t)$ stets reell sein soll, kann man daher über zwei Konstanten der allgemeinen Lösungsfunktion der DGL bereits eine konkrete Aussage treffen. Die Berechnung der beiden anderen Konstanten sollte anschließend keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

Lösungshinweise:

zu 4.5.1)

Differentialgleichung	Ordnung	linear?	konst. Koeff.?	inhomogen?	ggf. Inhomogenität
$\dot{x} = x \cdot t$	1	ja	nein	nein	– – –
$x^{(4)} + 5\ddot{x}^2 + 6\dot{x}^3 = t^4$	4	nein	*nicht definiert*	*nicht definiert*	*nicht definiert*
$\ddot{x} + \dot{x} + t^2 x = \cos(\omega t)$	2	ja	nein	ja	$\cos(\omega t)$

zu 4.5.2) Einsetzen der Lösung in die DGL liefert die Bedingung $c_2 = 2$.

Zu 4.5.3) Durch die Verwendung des Exponentialansatzes erhält man aus der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 1 = 0$ die allgemeine Lösung $x(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^t$.

Zu 4.5.4) Die allgemeine Lösungsfunktion, die man wiederum über den Exponentialansatz erhält, lautet $x(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{5t}$. Die Lösung des Randwertproblems führt auf das Gleichungssystem

$$c_1 + c_2 = 2$$
$$c_1 \cdot e^{-1} + c_2 \cdot e^5 = e^5 + e^{-1}.$$

Offensichtlich löst $c_1 = c_2 = 1$ das Gleichungssystem, so dass $x(t) = e^{-t} + e^{5t}$ die Lösung ist.

Zu 4.5.5) Wie bei den vorangegangenen Aufgaben, kann auch diese DGL mit Hilfe des Exponentialansatzes gelöst werden, der auf die charakteristische Gleichung $\lambda^4 + 4\lambda^3 - 21 = 0$ führt. Zur Berechnung der Parameter λ_i bedarf es nun einer Substitution der Form $\lambda^2 = a$, um zunächst die quadratische Gleichung $a^2 + 4a - 21 = 0$ zu lösen und dann per Rücksubstitution auf die allgemeine Lösung $x(t) = c_1 \cdot e^{-\sqrt{7}it} + c_2 \cdot e^{\sqrt{7}it} + c_3 \cdot e^{-\sqrt{3}t} + c_4 \cdot e^{\sqrt{3}t}$ schließen zu können. Gemäß des obigen Hinweises muss $c_1 = c_2 = 0$ gelten. Analog zu Aufgabe (4.5.4) wird nun noch das Randwertproblem $x(0) = 0$, $x(1) = e^{-\sqrt{3}} - e^{\sqrt{3}}$ gelöst, welches zu $c_3 = 1$ und $c_4 = -1$ bzw. $x(t) = e^{-\sqrt{3}t} - e^{\sqrt{3}t}$ führt.

5. Mögliche thematische Weiterführung des Lernangebots

Nachdem in dem vorangegangenen Abschnitt lediglich Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt wurden, bietet es sich für eine weitere Fortführung des Lernangebots an, auch einmal Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Ein Anknüpfungspunkt kann hier folgende, aus dem Buch „Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik“ (SONAR [2]) stammende, Aufgabe sein:

Um Mitternacht wird die Polizei zum Schauplatz eines grausigen Verbrechens gerufen. Der einschlägig polizeibekannte Schurke Eddi, genannt das Wiesel, liegt erschlagen vor einem Nachtclub! Der hinzugezogenen Gerichtsmediziner stellt bei Eddis Leiche eine Körpertemperatur von 30°C bei einer Umgebungstemperatur von lauen 20°C fest. Die Spurensicherung benötigt zwei Stunden, um den Tatort genauestens zu untersuchen, so dass die Leiche erst um 2 Uhr morgens in die Gerichtsmedizin geschafft werden kann. Vor dem Transport misst der Mediziner eine Leichentemperatur von 24°C.

Nach Zeugenvernehmungen, die die ganze Nacht hindurch gedauert haben, schlägt die Polizei am nächsten Morgen zu: Verhaftet unter Mordverdacht wird Eddis Ex-Geliebte Lola. Lola war am Abend vor dem Mord Gast in einer Bar, in der sie unter Alkoholeinfluss wüste Morddrohungen gegen Eddi ausstieß. Um 23.15 Uhr hat sie die Bar unter wildesten Flüchen verlassen.
Bei der weiteren Untersuchung spielt der genaue Todeszeitpunkt eine wesentliche Rolle. Der Gerichtsmediziner verwendet bei seiner Berechnung die Newtonsche Abkühlungsregel:

Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung.

Ist Lola schuldig? Wann starb Eddi?

Der Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe kann sowohl über eine Differenzengleichung als auch über eine Differentialgleichung erfolgen. Wählt man den Weg über die Differenzengleichung, so kann die in der Aufgabestellung genannte Newtonsche Abkühlungsregel durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\frac{T_{k+1} - T_k}{t_{k+1} - t_k} = \alpha \cdot (T_k - T_0)\,,$$

wobei α eine noch zu bestimmende Konstante, T_k die Temperatur der Leiche zum Zeitpunkt t_k und $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$ die Umgebungstemperatur seien. Zwar bietet es hier für den geübten Nutzer von GTR oder CAS hier an, diese Differenzengleichung erster Ordnung mit Hilfe eines solchen elektronischen Werkzeuges zu lösen, man sollte aber auch den analytischen Lösungsweg nicht unbeachtet lassen: Führt man den Grenzübergang $(t_{k+1} - t_k) \to 0$ durch, wird die Differenzengleichung in eine Differentialgleichung umgewandelt, die den Abkühlungsprozess beschreibt:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \cdot (T - T_0) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dT}{dt} = \alpha \cdot (T - 20)\,,$$

Neben diesem Weg über die Differenzengleichung ist es auch möglich, diese Differentialgleichung direkt aufzustellen, wenn man sich zunächst überlegt, wie die „Geschwindigkeit der Abkühlung" mathematisch ausgedrückt werden kann.

Nach der Substitution $\tau := T - 20$ und einer entsprechenden Veränderung des Differentialquotienten lässt sich nun die obige Differentialgleichung mit der Methode der „Trennung der Veränderlichen" lösen. Eine Extrapolation der durch die anschließende Lösung des Randwertproblems $T(0) = 30\,°\mathrm{C}$ und $T(120) = 24\,°\mathrm{C}$ erhaltenen Lösung

$$T(t) = (10 \cdot e^{-7{,}64 \cdot 10^{-3} \cdot t} + 20)\,°\mathrm{C}$$

auf $T(t_{Mord}) = 37\,°\mathrm{C}$ ergibt den Todeszeitpunkt $22^{\underline{51}}$ Uhr. Lola kann somit nicht Eddis Mörderin sein.

Verwendet man die beschriebene Aufgabe in einem solchen Lernangebot insbesondere für Schüler der Sekundarstufe I, muss man beachten, dass die bei der Methode der Trennung der Veränderlich benötigte Integration zumeist in der Sekundarstufe I noch nicht behandelt wird. Da jedoch das Lernangebot von mathematisch interessierten Schülern besucht wird, sollte gerade diese hier notwendige Erweiterung des Kenntnisstandes statt auf Ablehnung auf offene Ohren stoßen.

Literatur

Dürr, R. / Ziegenbalg, J. [1]:	Mathematik für Computeranwendungen, Ferdinand Schöningh, Paderborn (1989)
Finckh, U. / Fritsch, F. / Leitner, E. [1]:	LEIFI-Physik: *http://leifi.physik.uni-muenchen.de* (letzter Zugriff am 13.07.09)
Groeneveld, J. [1]:	Messungen mit Staubfiguren, Westermann, Braunschweig (1959)
Heinrich, F. [1]:	Beziehungen zwischen Parketten und Zahlenfolgen. In: Der Mathematikunterricht (2003), Heft 6
Hessisches Kultusministerium [1]:	Lehrplan Mathematik – Gymnasialer Bildungsgang,

	Hessisches Kultusministerium, Wiesbaden (2008)
Kallenrode, M.-B. [1]	Rechenmethoden der Physik, Springer, Berlin (2003)
Kemnitz, A. [1]:	Mathematik zum Studienbeginn, Vieweg, Wiesbaden (2004)
Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg [1]:	Bildungsplan 2004 – Allgemein bildendes Gymnasium, Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart, Stuttgart (2003)
Müller-Fonfara, R. / Scholl, W. [1]:	Mathematik verständlich, Bassermann Verlag, München (2004)
Niedersächsisches Kultusministerium [1]:	Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5 – 10, Niedersächsisches Kultusministerium (Hrsg.), Hannover (2006)
Sächsisches Staatsministerium für Kultus [1]:	Lehrplan Gymnasium Mathematik, Saxoprint GmbH, Dresden (2004)
Schmid, A. / Schweizer, W. [1]:	LS – Analysis Eins, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart (2000)
Sonar, Th. [1]:	unveröffentlichtes Skript zur Vorlesung „Schulbezogene angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik“ im Sommersemester 2004, Braunschweig (2004)
Sonar, Th. [2]	Angewandte Mathematik, Modellbildung und Informatik, Vieweg, Braunschweig (2001)
Walter, W. [1]	Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, Berlin (2000)

Bildquellen

Abb. 1 – 3:	Diese Graphiken wurden mit freundlicher Genehmigung von Herrn Prof. Dr. Heinrich dem Heft „Der Mathematikunterricht 6/2003“ des Erhard Friedrich Verlages GmbH entnommen (Seite 34, Abb. 16a – 16c).
Abb. 4 – 14:	Bei diesen Abbildungen handelt es sich um eigene Fotographien bzw. Zeichnungen des Autors.

Anschrift des Autors

M.Ed. Steffen Juskowiak
TU Braunschweig
Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik
Bienroder Weg 97
38106 Braunschweig
s.juskowiak@tu-bs.de

Eingereicht am 16.07.2009.

Arbeitsblatt 1

Tilgung eines Kredites

Angenommen, Sie möchten sich ein neues Auto kaufen. Wählen wir als Beispiel einen Opel Astra 5-Türer mit 1,7 l –Dieselmotor. Die Eckdaten dazu sind:

Kaufpreis:	20500,00 €
Anzahlung:	5150,00 €
Jahreszins:	5,90 %

Als Zahlungsperiode nehmen wir in unserem Beispiel einen Monat an, wobei der gezahlte Betrag erst zum Ablauf des jeweiligen Jahres auf das Darlehn und die angefallenen Zinsen angerechnet wird. Die Zahlungen erfolgen vorschüssig.
Die Ratenzahlungen müssen dabei so angesetzt werden, dass sie erstens die anfallenden Zinsen decken und zweitens einen im Laufe der Zeit größer werdenden Teil des Darlehns bzw. der Restschuld tilgen („Tilgungsraten“). Dieser Prozess wird so lange fortgesetzt, bis das gesamte Darlehn an die Bank des Autobauers zurückgezahlt, also der gesamte Kaufpreis des Autos gezahlt ist. Die Zahlungen an die Bank werden durch eine Schlussrate abgeschlossen.

Versuchen Sie, die folgenden Fragen zu klären:

1. Wie hoch muss die jährliche Rate mindestens sein?
2. Auf welchen Wert soll die jährliche Rate festgelegt werden?
3. Nach wie vielen Jahren bzw. Monaten ist das Auto vollständig bezahlt?
4. Wie hoch ist die Schlussrate?

Arbeitsblatt 2

Versuche mit der Schwefelbahn

Kurzer Abriss des Verfahrens

Bei den beiden Versuche (s. u.) sollen Sie sichtbar machen, welche Wegstrecken bei zwei verschiedenen Bewegungen in einem festen Zeitintervall (hier: 0,01 s) zurücklegt werden.
Dafür wird ein Wagen aus Metall auf eine Fahrbahn gesetzt. Der Wagen wird auf der einen Seite durch eine v-förmige Metallschiene in der Spur gehalten. Unter dem Wagen ist ein Schleifer befestigt, der auf einer schwarz eloxierten Aluminium-Schiene entlang schleift.
Diese Aluminium-Schiene wird über ein Anschlussbrett mit dem einen Pol einer Steckdose des normalen Stromnetzes verbunden, die v-förmige Schiene mit dem anderen Pol der Steckdose.
Auf die Aluminiumschiene wird Schwefelpulver aufgestreut. Das Pulver wird durch Reibung aufgeladen und haftet je nach Polung der an der Schiene anliegenden Spannung auf der Schiene oder nicht.
Die Polung der Spannung wechselt 50mal in der Sekunde, also alle 0,01 s. Fährt man mit einem Wagen über die Schiene, hinterlässt er Schwefelstreifen (so genannte Zeitmarken), deren Länge der vom Wagen in 0,01 s zurückgelegte Weg ist.

Versuch 1

Neigen Sie den gesamten Versuchsaufbau leicht, so dass der Wagen nach dem Anstoßen seine Geschwindigkeit beibehält.
Erzeugen Sie nun wie unten abgedruckt („Durchführung der Versuche“) Zeitmarken.
Sichern Sie anschließend die Zeitmarken, indem Sie einen langen Streifen Klebefilm auf die Aluminiumschiene kleben, fest andrücken, vorsichtig abziehen und danach auf ein farbiges Blatt Papier aufkleben.

Versuch 2

Neigen Sie den gesamten Versuchsaufbau nun so stark, dass der Wagen nach dem Loslassen von selber losrollt. Erzeugen Sie wieder wie oben Zeitmarken und sicheren diese. Variieren Sie die Neigung der Fahrbahn und führen Sie den Versuch erneut durch.

Durchführung der Versuche (nach J. Groeneveld)

Man streut Schwefelpulver auf die Schiene und schließt sie an das Stromnetz an. Dann setzt man einen Wagen auf und führt ihn von Hand wiederholt auf der Fahrbahn hin und her. Nach kurzer Zeit beobachtet man das Entstehen der Zeitmarken. Wenn sich diese gleichmäßig kräftig auf der ganzen Schiene ausbilden, schließt man die Zuführung zur Fahrbahn kurz, und löscht die Marken durch Hin- und Herführen des Wagens, so dass sich eine dünne, ziemlich gleichmäßige Schicht Schwefelpulver auf der Fahrbahn befindet. Dann hebt man den Kurzschluss auf, die Fahrbahn ist für den Versuch bereit.

Unter dem Kurzschließen der Zuführung versteht man, dass die Kabel aus der Versorgungsplatte herausgezogen und zusammengesteckt werden.

Das überschüssige Pulver sollte nach den Versuchen nicht von der Bahn entfernt werden.

Arbeitsblatt 3

<u>Der Schweinezyklus</u>

Nachdem wir bereits den Kauf eines Autos auf Kredit und die entsprechende Finanzierung mit Hilfe von Differenzengleichungen untersucht haben, wollen wir uns nun einem zweiten volkswirtschaftlichen Problem zuwenden. Wir wollen versuchen, den Zusammenhang zwischen Preis, Angebot und Nachfrage am Beispiel von Schlachtschweinen mathematisch zu beschreiben. Dabei bietet es sich an, zunächst lineare Differenzengleichungen zu verwenden, denn diese sind rechnerisch am einfachsten zu bewältigen.

Für unsere Betrachtung benötigen wir folgende Variablen:

t :	Zeit
P_t :	Preis für Schlachtschweine zum Zeitpunkt t
N_t :	Nachfrage zum Zeitpunkt t
A_t :	Angebot zum Zeitpunkt t

Dabei ist es sinnvoll, die Zeit in Aufzuchtzyklen der Schweine anzugeben, denn die zu einem bestimmten Zeitpunkt geborenen Ferkel stehen dem Markt erst nach einem Aufzuchtzyklus, nach ca. 14 Monaten, als Schlachtschwein zur Verfügung.

Wegen dieser notwendigen Aufzuchtzeiten können die Mastbetriebe ihr Angebot A_t nicht auf den augenblicklichen Preis abstimmen. Sie orientieren sich an dem Preis P_{t-1} der Vorperiode, so dass mit Konstanten α und a folgende Gleichung für die Abhängigkeit von Angebot und Preis sinnvoll erscheint:

$$A_t = \alpha + a \cdot P_{t-1} .$$

Im Gegensatz zu den Anbietern reagieren die Kunden sofort auf wechselnde Preise. Die Nachfrage N_t ist somit vom Preis zum Zeitpunkt t abhängig (n, η konst.):

$$N_t = \eta + n \cdot P_t .$$

Obwohl Nachfrage und Angebot von den Preisen zu unterschiedlichen Zeitpunkten abhängen, beeinflussen sie sich gerade über den Preis gegenseitig: Liegt beispielsweise das Angebot sehr stark über der augenblicklichen Nachfrage, werden die Händler den Preis senken müssen, um die Nachfrage anzuheben. Liegt hingegen das Angebot sehr stark unter der Nachfrage, so kaufen die Kunden die Schlachtschweine auch noch zu einem höheren Preis, allerdings in geringeren Mengen.

Unser Ziel ist es nun, den Preis und das Angebot durch Differenzengleichungen zu beschreiben und Lösungen dafür zu finden.

Versuchen Sie nun, die folgenden Fragen zu klären:

1) Überlegen Sie zunächst, ob und positiv oder negativ sein sollten. Denken Sie dabei daran, welche Auswirkungen der Preis auf das Angebot und die Nachfrage hat.

2) Wie bereits oben beschrieben, wird das Verhältnis von Angebot und Nachfrage im Wesentlichen durch den Preis gesteuert. Was wird nach einer gewissen Zeit für das Verhältnis von Angebot und Nachfrage gelten?

3) Leiten Sie aus diesem Verhältnis von Angebot und Nachfrage eine Differenzengleichung für den Preis der Schlachtschweine her und lösen Sie diese.

4) Erstellen Sie aus der Differenzengleichung für den Preis der Schlachtschweine eine Differenzengleichung für das Angebot an Schlachtschweinen und lösen Sie diese.

5) Wählen Sie nun Werte für und mit , und und tragen Sie den Preis und das Angebot über der Zeit auf. Legen Sie dazu auch Werte für , , und fest. Beschreiben Sie den Einfluss des Quotienten auf den Preis von Schlachtschweinen und die entsprechende Nachfrage.

6) Sammeln Sie Daten über den tatsächlichen zeitlichen Verlauf des Preises für Schlachtschweine und vergleichen Sie diese mit Ihren Ergebnissen.

Arbeitsblatt 4

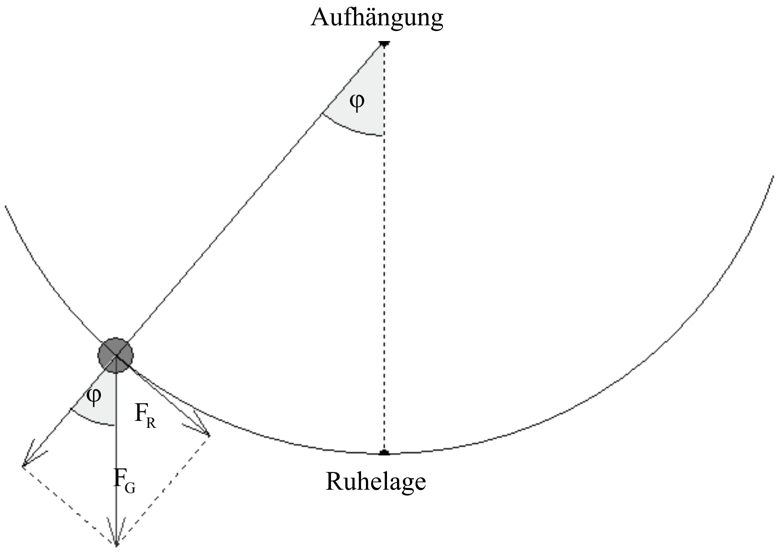
Untersuchung der Schwingung des Fadenpendels

Im Folgenden soll die Schwingung eines Fadenpendels untersucht werden. Hängt man eine (Stahl-)Kugel vorsichtig an einem Faden auf, so bewegt sich die Kugel (fast) nicht. Die Kugel befindet sich in einer so genannten *Ruhelage*.

Wird die Kugel aus dieser Lage herausgestoßen, so treibt die Erdanziehungskraft F_G („Gravitationskraft", daher das G) sie wieder in die Ausgangslage zurück. Infolge ihrer Trägheit bewegt sich der Körper über diesen Punkt hinaus. Die Erdanziehungskraft bremst sie nun ab und beschleunigt sie wieder in Richtung der Ruhelage.

Bei fehlender Reibung würde sich diese Hinundherbewegung beliebig lange wiederholen. Obwohl die Kugelform äußerst strömungsgünstig ist, tritt dennoch eine geringe Luftreibung auf, die die Schwingung schließlich zum Erliegen bringt. Da diese Dämpfung der Schwingung jedoch sehr gering ist, hat es sich in der Physik durchgesetzt, das Fadenpendel als ein Beispiel für eine freie, ungedämpfte Schwingung anzusehen.

Betrachten wir nun die Kräfte, die auf die aus der Ruhelage ausgelenkte Kugel wirken: Die Komponente von F_G, die tangential zu der Bahn gerichtet ist, auf der sich die Kugel bewegt, wird rücktreibende Kraft F_R genannt. Diese rücktreibende Kraft ist direkt für die Beschleunigung bzw. für das Abbremsen der Kugel während der Schwingung verantwortlich.



Lösungshinweise zu Arbeitsblatt 3

Der Schweinezyklus

zu 1) Es ist sinnvoll, $a > 0$ und $n < 0$ anzunehmen, denn ein höherer Preis wird im Allgemeinen die Aufzucht von Ferkeln zu Schlachtschweinen fördern, also das Angebot erhöhen, gleichzeitig aber auch die Nachfrage verringern.

zu 2) Nach einer gewissen Zeit werden sich Angebot und Nachfrage so einpendeln, dass zwischen Ihnen ein Gleichgewicht entsteht:

$$A_t = N_t .$$

zu 3) Aus dieser Identität von Angebot und Nachfrage ergibt sich die folgende Differenzengleichung für den Preis der Schlachtschweine:

$$\alpha + a \cdot P_{t-1} = \eta + n \cdot P_t \quad \text{bzw.} \quad P_t = \frac{a}{n} \cdot P_{t-1} + \frac{\alpha - \eta}{n} .$$

Bei der gesuchten Differenzengleichung handelt es sich also um eine Form der Tilgungsgleichung. Entsprechend einfach erhält man deren Lösung zu

$$P_t = \left(\frac{a}{n}\right)^t \cdot P_0 + \frac{1 - \left(\frac{a}{n}\right)^t}{1 - \frac{a}{n}} \cdot \frac{\alpha - \eta}{n} .$$

zu 4) Zwischen Angebot und Preis besteht der Zusammenhang $A_t = \alpha + a \cdot P_{t-1}$. Daher gilt

$$P_{t-1} = \frac{A_t - \alpha}{a} \quad \text{bzw.} \quad P_t = \frac{A_{t+1} - \alpha}{a} .$$

Aus $P_t = \frac{a}{n} \cdot P_{t-1} + \frac{\alpha - \eta}{n}$ erhält man damit die Differenzengleichung

$$\frac{A_{t+1} - \alpha}{a} = \frac{a}{n} \cdot \frac{A_t - \alpha}{a} + \frac{\alpha - \eta}{n} \quad \text{bzw.} \quad A_t = \frac{a}{n} \cdot A_{t-1} + \left(\alpha - \frac{a}{n} \cdot \eta\right) .$$

Hierbei handelt es sich wiederum um eine Tilgungsgleichung, so dass sich die Lösung zu

$$A_t = \left(\tfrac{a}{n}\right)^t \cdot A_0 + \frac{1 - \left(\frac{a}{n}\right)^t}{1 - \frac{a}{n}} \cdot \left(\alpha - \frac{a}{n} \cdot \eta\right)$$

ergibt.

zu 5) Bei dieser Aufgabe ist es zunächst sinnvoll, geeignete Startwerte P_0 und A_0 festzulegen und diese für alle drei betrachteten Fälle konstant zu lassen. Hier seien $P_0 = 5$ und $A_0 = 1$. Diese Werte sind völlig beliebig gewählt und sollen die Vielfachen eines Grundpreises bzw. einer Angebotseinheit darstellen.
Auch für η und α können einfach Werte festgelegt werden: Nehmen wir hier z. B. $\eta = 7$ und $\alpha = 2$.

Wählt man nun für den Fall $\left|\frac{n}{a}\right| < 1$ z. B. $n = -1$ und $a = 0{,}75$, so pendelt sich Angebot und Preis im Laufe von wenigen Aufzuchtzyklen auf nahezu konstante Werte ein.

Wählt man hingegen z. B. n = – 0,75 und a = 0,75, also $\left|\frac{n}{a}\right| = 1$, so schwanken Angebot und Preis jeweils von Aufzuchtzyklus zu Aufzuchtzyklus zwischen zwei konstanten Extremwerten.

Wählt man nun für den Fall $\left|\frac{n}{a}\right| > 1$ z. B. n = – 0,75 und a = 1 oder n = – 0,90 und a = 0,95, so schwanken Angebot und Preis von Aufzuchtzyklus zu Aufzuchtzyklus zwischen sich stetig vergrößernden Extremwerten bis sogar unrealistische, da negative, Werte für Preis und Angebot erreicht werden. Hier werden die Grenzen des mathematischen Modells sichtbar!

zu 6) Der Fall $\left|\frac{n}{a}\right| = 1$ zeigt am ehesten den Verlauf der Preis- und Angebotskurven, den man landläufig unter dem „Schweinezyklus" versteht: Aufgrund der Orientierung der Mastbetriebe bei der Aufzucht an den aktuellen Schweinepreisen und nicht an den voraussichtlichen Preisen nach dem nächsten Aufzuchtzyklus kommt es regelmäßig zu starken Schwankungen von Angebot und Preis bei Schlachtschweinen. Ein Stabilisierung von Angebot und Preis oder eine starkes Anwachsen wie in den Fällen $\left|\frac{n}{a}\right| < 1$ und $\left|\frac{n}{a}\right| > 1$ kommen nach aller Erfahrung nicht vor.

Macht man sich z. B. unter *www.agrar.de* auf die Suche nach entsprechenden Daten auf die Suche, stellt man erwartungsgemäß fest, dass der tatsächliche Preisverlauf nicht exakt einem der drei besprochenen Fälle folgt. Jedoch stimmt der Verlauf der Preiskurve noch am ehesten mit dem Fall 2 überein, denn die Preise für Schlachtschweine schwanken zwischen Extremwerten, stabilisieren sich jedoch nicht auf einen Wert oder reißen etwa grenzenlos aus.