Roland Schröder

Ein Vergleich der gymnasialen Schulmathematik zwischen Deutschland und der Türkei

Der Verfasser dieses Aufsatzes war von 2000 bis 2004 Oberstufenkoordinator und Mathematiklehrer an einem staatlichen, türkischen Gymnasium. Seine Schüler bereiteten sich mit seiner Hilfe sowohl auf das deutsche Abitur als auch auf die türkische Hochschulaufnahmeprüfung vor. In der türkischen Hochschulaufnahmeprüfung müssen Schüler Aufgaben der weiter unten genannten Art in durchschnittlich 3 Minuten pro Aufgabe lösen. Eine solche Forderung macht aus Sicht von Didaktik und Methodik keinen Sinn. Sie würde wohl deutsche Schüler, eher zum Raten verführen zumal die Antworten in einem multiple-choice vorgegeben sind. Auch die Tatsache, dass in dieser Testform die Begründungen für den Lösungsweg nicht erwartet werden, entspricht nicht deutschen Vorstellungen von Schülerleistungen. Deshalb war für den Verfasser die Beobachtung wichtig, dass die türkischen Schüler in der Lage waren, die Begründungen zu liefern, wenn sie als Vorbereitung auf das Abitur verlangt wurden. Die schnelle Lösung war also nur die Skizze und der rote Faden, an dem entlang auch ausführliche Lösungen möglich waren. Die Anlage einer solchen Skizze gelang vielen guten Schülern insbesondere deshalb, weil sie sich in der Vorbereitung vor allem folgende Kenntnisse angeeignet hatten:

- Sie verfügten über einen Pool nützlicher, im deutschen Mathematikunterricht meist unbekannter Sätze (z. B. Satz von den Seitenteilungs-Verhältnissen der Winkelhalbierenden im Dreieck, Satz von den Flächenteilen im Dreieck, erweiterte Strahlensätze),

- Nützliche Formeln hatte man auswendig gelernt (z. B. Diagonalenlänge im Quadrat, Höhe im gleichseitigen Dreieck, Abstand Punkt/Gerade, die binomische Formel für $(a \pm b)^3$). In der deutschen Didaktik und Methodik des Mathematikunterrichts gilt ja die Maxime, dass Formeln nicht auswendig gewusst werden müssen, da man sie in der Formelsammlung nachschlagen kann. Damit beginnt für manchen deutschen Schüler eine zeitraubende und von der eigentlichen Problemstellung ablenkende Suche.

- Eine Reihe nützlicher Zahlen und Zahlenkombinationen (z. B. Quadratzahlen bis 20^2, Zweierpotenzen bis 2^{10}, einige pythagoreische Zahlentripel) kannten die Prüflinge. In der deutschen Methodik wird dem Auswendiglernen „des Gedankens Blässe angekränkelt". Tatsächlich aber haben viele Problemlösungen etwas mit Mustererkennung zu tun. Erkennen kann man aber nur, was man kennt.

- Die Schüler verfügten aber auch über einen Vorrat heuristischer Strategien. Eine davon fordert, dass man nicht drauflos rechnet, ohne zuvor nach Vereinfachungen oder strategisch günstigen Wegen (hier vor allem wegen der Notwendigkeit der Zeitersparnis) gesucht zu haben. D. h. Überblick-verschaffen geht vor Einsatz von Standardverfahren, außerdem: Einheiten geschickt und autonom festlegen, Probleme graphisch darstellen, Anzahl eingeführter Variablen beschränken, Hilfslinien geschickt und autonom festlegen, rational machen des Nenners u. v. m.

- Kennen gelernte geometrische Figuren werden sofort – ohne langwierige Überlegungen – mit ihren Eigenschaften und deren rechnerische Erfassung in Zusammenhang gebracht (z. B. gleichseitiges Dreieck und Winkelfunktionswerte zu 60° und 30°, Quadrat und Winkelfunktionswerte zu 45°). Es gab Zeiten, in denen deutsche Schüler die nebenstehende Tabelle auswendig lernen mussten. Diese Tabelle leiten sich türkische Schüler in kürzester Zeit selbst her.

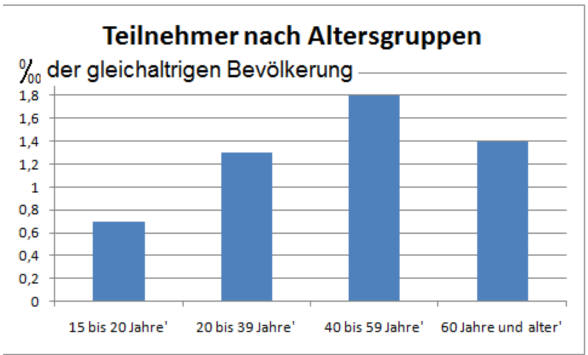
x =	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin x =	0	½	½ √2	½ √3	1
cos x =	1	½ √3	½ √2	½	0
tan x =		⅓ √3	1	√3	--

Zum Schulstoff gehörten in der Türkei außerdem einige in Deutschland nicht mehr behandelte Themen wie Raumgeometrie, Trigonometrie, elementare Zahlentheorie, VENN-Diagramme der Mengenlehre, (insbesondere rekursiv gegebene) Folgen und Reihen, Logarithmen u. a.
Die türkischen Schüler waren überdies an Fragestellungen gewöhnt, die in deutschen Schulen eher unüblich sind wie z. B.:

- Frage nach verknüpften Größen statt nach einzelnen Größen;
- Lösungen über Exponenten- oder Koeffizientenvergleich;
- Erkennen der Unabhängigkeit einer Lösung von Randbedingungen;
- Frage nach der Extremallösung ohne Differentialrechnung und
- Aufgaben zu lösen, die mehrere mathematische Teilgebiete berührten.

Vor allem der Mittelstufenunterricht in Deutschland behandelt im Gegensatz zu Letzterem ein begrenztes Thema, löst Aufgaben mit Focus darauf und wechselt dann das Thema, und das Kennen-gelernte kommt häufig nie mehr vor. Deutsche Lehrer sollten mehr darauf achten, dass einmal Gelehrtes in neuen Zusammenhängen wiederkehrt. Nur so können Kenntnisse und Fähigkeiten vertieft und gefestigt werden.

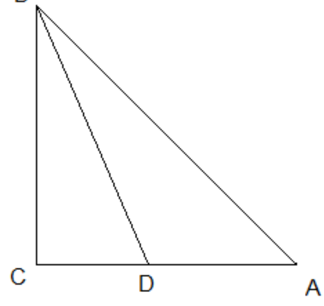
Zurück in Deutschland hat der Autor türkische Vorbereitungsaufgaben für die Hochschulaufnahmeprüfung im Rahmen jährlicher Mathematikwettbewerbe fünf Jahre lang an Interessierte seines Heimatkreises gestellt. Die Aufgaben wurden in der regionalen Presse veröffentlicht. Die Teilnahme war freiwillig und stand jedem Bürger und jeder Bürgerin der Region offen. In der ursprünglichen Intention des Wettbewerbs war die Zielgruppe die der Gymnasialschüler ab Klasse 10. In der Wettbewerbsbeteiligung ließ sich eine erstaunliche Tendenz feststellen:



Zur Erstellung des Diagramms wurde zunächst die zahlenmäßige Verteilung der Wohnbevölkerung auf die Altersgruppen festgestellt. Zum Beispiel leben in der angesprochenen Region 10 000 Fünfzehn- bis Zwanzigjährige. Davon 0,7 Promille sind 7 Jugendliche (Schüler) die sich jährlich an dem Wettbewerb beteiligten. Man kann also sagen, dass die Beteiligung der Schüler vergleichsweise schwach war. Am stärksten beteiligte sich eine Altersgruppe (40 bis 59 Jahre) von der man annehmen sollte, dass sie ihre Schulmathematik schon weitgehend vergessen hatte (Zahlenbeispiel: 1,8 Promille von 40 000 sind 72 Teilnehmer dieser Altersgruppe). Es liegt der Schluss nahe, dass Schüler heutiger Prägung über die oben genannten Kenntnisse und Fähigkeiten nicht mehr in dem Maße verfügen, wie die heute 40 bis 60-jährigen. **Das wiederum lässt darauf schließen, dass sich in unseren Anforderungen an Schüler im Fach Mathematik etwas geändert hat.**

Was deutsche Schüler nur noch im Ausnahmefalle können, soll nun an einigen Beispielaufgaben zur türkischen Hochschulaufnahmeprüfung dargestellt werden:

Aufgabe 1: Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC schneidet die Halbierende des Basiswinkels β die Gegenkathete in D. Vergleiche die Länge des Streckenzuges BCD mit der Länge der Hypotenuse AB.



Türkische Schüler benennen fast ohne Zögern und fast ohne Nachdenken die Strecken wie folgt: BC = 1, CD = x, DA = 1 – x, A = $\sqrt{2}$.
Hier spiegeln sich bereits mehrere Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten aus der obigen Liste wider: Kenntnis der Diagonalenlänge im Quadrat, Einheiten geschickt und autonom festlegen (dem türkischen Schüler ist klar, dass es hier um einen Vergleich, genauer: um ein Längenverhältnis geht, und damit die Festlegung der

Kathetenlänge mit der frei gewählten Größe 1 o. B. d. A geschieht), Anzahl eingeführter Variablen beschränken. Sodann kennen die Schüler folgenden Satz:

„Die Halbierende eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite des Winkels im Verhältnis der anliegenden Seiten."
Dann steht sofort da: $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1-x}$. Diese Gleichung nach x aufzulösen gelingt in Deutschland vielen angehenden Studenten mathematiknaher Fächer nicht. Das beweisen die Ergebnisse vieler durchgeführter Eingangstests.

Nun kommt ein Schritt, der in deutschen Aufgaben so gut wie nie verlangt wird. Es ist nämlich wichtig zu berücksichtigen, dass nicht nach x sondern nach 1 + x (Länge des Streckenzuges BCD) gefragt ist. Vor allem deshalb ist es zweckmäßig in der Lösung $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ den Nenner rational zu machen, sodass $x = \sqrt{2} - 1$ gewonnen wird. Dann ist natürlich $1 + x = \sqrt{2}$ und der Streckenzug BCD hat die gleiche Länge, wie die Strecke AB.

Das alles schafft ein guter türkischer Schüler in 3 Minuten, allerdings ohne begründenden Text, der – wie gesagt – geleistet werden könnte.

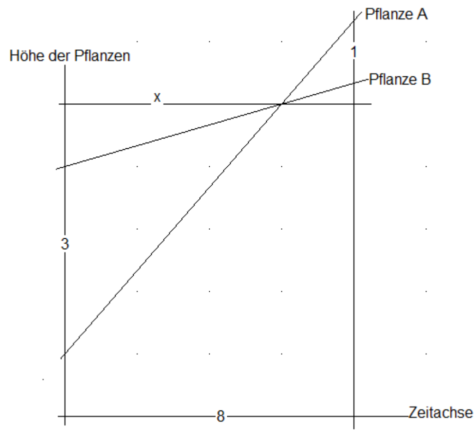
Für viele deutsche Schüler bauen sich hier nach meinen Erfahrungen an mehreren Stellen schwer zu überwindende Hindernisse auf: Sie scheuen sich, die Längeneinheit autonom vorzugeben, (da sie nicht erkennen, dass die Lösung von dieser Festlegung unabhängig ist,) sie kennen die Länge der Hypotenuse nicht auswendig, sie kennen den genannten Satz nicht, sie können die Gleichung nicht nach x auflösen und auch nicht den Nenner der Lösung rational machen, sie stellen aus Gewohnheit die Frage nach einer Unbekannten, statt – wie hier – nach einer Verknüpfung einer Unbekannten mit einer Zahl.

> **Aufgabe 2:** Zu Beginn eines Beobachtungszeitraumes von 8 Monaten war Pflanze B 3 cm größer als Pflanze A. Nach 8 Monaten war Pflanze A 1 cm größer als Pflanze B. Nach wie viel Monaten (lineares Wachstum vorausgesetzt) waren beide Pflanzen gleichlang?

Der gute türkische Schüler legt die nebenstehende Skizze an:
Die Länge der Pflanze A zu Beginn der Beobachtung wird frei gewählt. Jetzt sieht der Schüler eine Variante des Strahlensatzes: $\frac{3}{x} = \frac{1}{8-x}$. Das ist eine Gleichung mit der Lösung x = 6.

Nach 6 Monaten waren die Pflanzen gleich lang.

Die erste Schwierigkeit, auf die der deutsche Schüler trifft, ist eine Frage der heuristischen Strategie. Er muss auf die Idee der graphischen Darstellung kommen.



Sofort baut sich die nächste Schwierigkeit auf:
Wie lang ist Pflanze A (oder B) zu Beginn des Wachstums? Der deutsche Schüler scheut sich auch hier vor einer autonomen Festlegung, weil ihm die Erfahrung fehlt, dass diese Festlegung ohne Einfluss auf die Lösung ist. Selbst wenn die Zeichnung dann trotz aller Schwierigkeiten gelingt, kann ein deutscher Schüler häufig den Strahlensatz in dieser besonderen Form nicht sehen. Die daraufhin im günstigsten Falle gefundene Gleichung können allerdings die meisten deutschen Gymnasiasten lösen.

> **Aufgabe 3:** Wie groß ist das Produkt $x \cdot y$, wenn gilt $3^x = 8$ (1)
> und $2^y = 9$? (2)

Ein guter deutscher Schüler weiß, dass $8 = 2^3$ und $9 = 3^2$ ist und würde folglich zuerst an einen Druckfehler glauben. Immerhin wäre damit aber ein erster Zugang zur Lösung gefunden. Was aber macht ein Schüler jetzt, wenn der Logarithmus aus dem Lehrplan gestrichen wurde? Seine Standardvorstellungen lassen ihn nach Lösungen für x und y suchen, die aber ohne Logarithmus nicht zu finden sind.

Ein guter türkischer Schüler „spielt" mit den gegebenen Gleichungen. Dieses Spiel ist nicht ohne Regeln, da er weiß, dass es auf Vergleichbarkeit der Exponenten ankommt. Schließlich geht er folgendermaßen vor:
(1) $3^x = 2^3$ potenzieren mit y ergibt $3^{xy} = 2^{3y}$
(2) $2^y = 3^2$ potenzieren mit 3 ergibt $2^{3y} = 3^6$

Daraus folgt zunächst $3^{xy} = 3^6$ und mittels Exponentenvergleich $xy = 6$.

Aufgabe 4: Bestimme die Einerziffer der Summe $3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{23}$.

Bei dieser Aufgabe versagen die meisten an Schulen eingeführten graphikfähigen Taschenrechner wegen ihres zehnstelligen Displays. Selbst bei zwölfstelligem Display stellt sich immer noch die Frage der besonderen Geschicklichkeit bei der Eingabe, welche erfahrungsgemäß nicht von allen Schülern angemessen gelöst wird. Elementare Zahlentheorie ist schon lange kein Thema mehr im deutschen Mathematikunterricht. Der mit Taschenrechner ausgerüstete deutsche Schüler kann immerhin einiges lernen, wenn er sich die Mühe macht, die Summanden – soweit wie möglich – einzeln zu bestimmen. Er wird die konstante Endziffernfolge 3, 9, 7, 1 „entdecken“ und die Grenzen der Taschenrechnerzahlen aufspüren. Aber sowohl Folgen und Reihen (auch eine Basis für einen Ansatz) als auch Zahlentheorie sind aus dem Lehrplan gestrichen. Eine Aufgabe, aus der man so viel Nutzen ziehen kann, kommt also im deutschen Mathematikunterricht nicht vor. Schade!

Der türkische Schüler weiß, dass Fragen nach Endziffern eben die Betrachtung von Endziffern erfordern. Also wird er sich zunächst auf die Endziffern der Summanden konzentrieren. Er sieht dann die periodische Wiederkehr der Folge 3, 9, 7, 1. Vertrautheit mit Wegen zum geschickten Rechnen führt ihn dann zu
$5 \cdot (3 + 9 + 7 + 1) + 3 + 9 + 7 = 119$
und er findet die Endziffer 9. Solche, für die elementare Zahlentheorie typischen Gedankengänge, können deutsche Schüler aus eigenem Antrieb nicht beschreiten, da ihnen elementarste Zahlentheorie fremd ist.

Bleibt noch nachzutragen, dass die Türkei in der Nationenwertung der Mathematikolympiade vor Deutschland liegt. Wenn der deutsche Mathematikunterricht den begonnenen Trend des ständigen Abbaus von Anforderungen so fortsetzt, wie in den letzten Jahrzehnten, muss unsere Wirtschaft und Industrie ihre Mathematiker bald bei anderen Nationen anwerben.

Die deutsche Didaktik will sich Jahr für Jahr weniger auf das festlegen, was der Einzelne nun lernen muss. Während man vor 20 Jahren in ministeriellen Papieren noch lesen konnte: „Am Ende von Klasse 6 soll der Schüler die Bruchrechnung beherrschen.“, liest man heute: „Am Ende von Klasse 6 soll der Schüler Fragen stellen können.“ Feste Pflöcke werden nicht mehr eingeschlagen, weder hinsichtlich der Ziele noch hinsichtlich der Wege dorthin. Aber eins ist sicher: „Auswendiglernen ist methodisch ganz abwegig.“ Der Schüler und der Lehrer brauchen aber feste Pflöcke, weil sie die Orientierung erleichtern und das Ziel so besser erreicht werden kann.

Die wechselseitige Blockade zwischen Bildungspolitikern und Kultusministerien sollte beseitigt werden: Spricht man mit Politikern über die genannten Missstände, so nennen sie Ministeriale als die Schuldigen; umgekehrt beteuern Ministerialbeamte ihre Unschuld, da sie verpflichtet sind, die Zielsetzungen der Politiker zu realisieren.

Anschrift des Autors:
Roland Schröder
Dehningstraße 26
29223 Celle