Ergänzung zu

Trigonometrie und Studierfähigkeit, MI Nr. 49 (15. September 2008)

Die folgende Aufgabe stammt von Herrn Professor Dr. Hemme, FH Aachen:

Aufgabe: In einem Labor wird ein laufender Viertaktmotor untersucht. Mit einer Sonde können gleichzeitig der Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens gemessen werden. Beim Einschalten der Sonde (Zeit $t = 0$) stellt man fest, dass zu diesem Zeitpunkt der Kolben gerade **5 cm unterhalb** seiner Mittelstellung im Zylinder ist, dass er sich mit einer Geschwindigkeit von **20 m/s nach unten** bewegt und dass er mit **2000 m/s²** **nach oben** beschleunigt wird. Die Bewegung des Kolbens kann durch eine harmonische Schwingung beschrieben werden. Die Koordinatenachse zeigt nach oben.

a) Welche Kreisfrequenz ω hat der Motor?
b) Welche Phasenkonstante c hat der Motor?

Lösung: $A > 0$ I Ortsbeschreibung $x = A\sin(\omega t + c)$
II Geschwindigkeit $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + c)$
III Beschleunigung $\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + c)$

Nach den Angaben der Aufgabe folgt hieraus für $t = 0$:

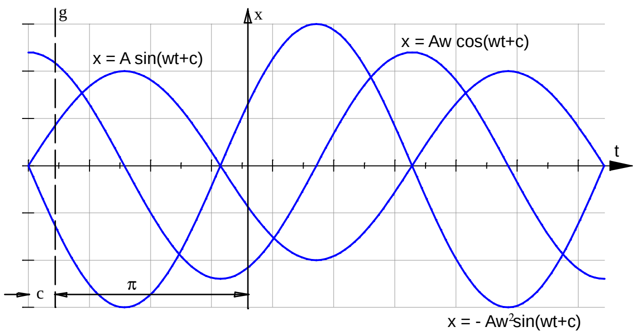
I $-0{,}05\text{ m} = A\sin c$
II $-20\text{ m/s} = A\omega\cos c$
III $2000\text{ m/s}^2 = -A\omega^2\sin c$

Hieraus folgt: III:I $-40\,000\text{ s}^{-2} = -\omega^2$, also $\omega = 200\text{ s}^{-1}$, also 200 Umdrehungen pro s.

I:II $\frac{-0{,}05\text{ m}}{-20\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{1}{200\,s^{-1}}\tan c$, also $\tan c = 0{,}5$ oder $c = \tan^{-1} 0{,}5 = 0{,}4636.. \approx 0{,}46$

Nimmt man diesen berechneten Wert c, so ergibt sich die Gerade g als x-Achse. Das kann nicht sein, da die Vorzeichen von $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ nicht passen. Die Funktion arc tan als Umkehrung der Funktion tan hat aber nicht nur den 1. Hauptwert, sondern noch andere. Der Graphik entnimmt man, dass $c + \pi$ passt.

Die Amplituden in der nebenstehenden Zeichnung sind willkürlich.



Kritik:

1. Das Beispiel zeigt: Im Unterricht ist es nicht ausreichend, wenn man für die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen nur den 1. Hauptwert lehrt. Taschenrechnerergebnisse können also falsch sein.
2. Berechnet man einen Vorgang mit der Periode 2π und die Lösung findet man über den Tangens mit der Periode π, so benötigt man unter Umständen den 2. Hauptwert des Arcustangens. Die Lösung bei (1) müsste eigentlich als $c \approx 0{,}46 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ angegeben sein.
3. Man kann aber auch nur kurz feststellen: Bei Aufgaben dieser Art ist die „Probe“ Bestandteil des Lösungsverfahrens.