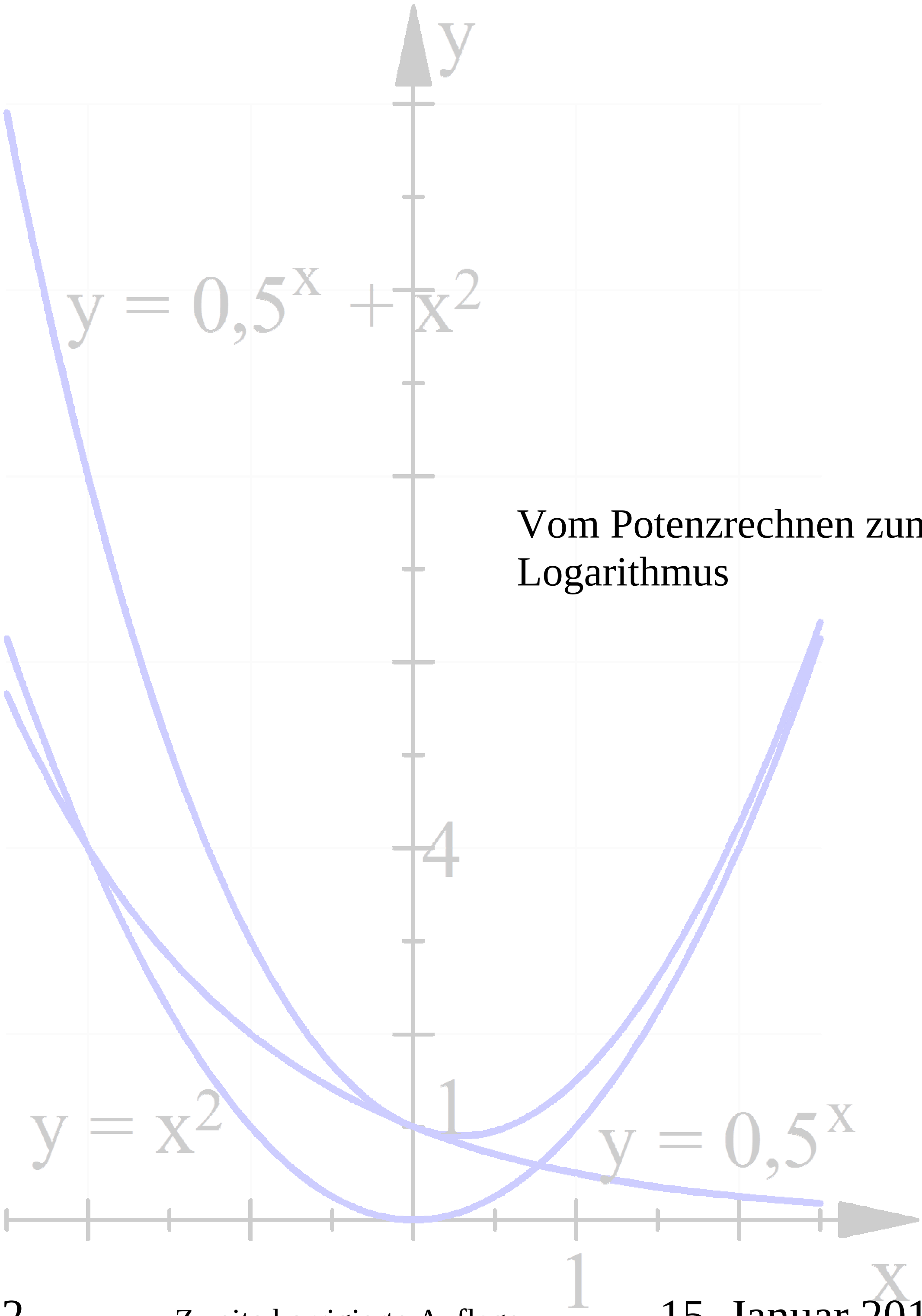
Mathematikinformation



Vom Potenzrechnen zum Logarithmus

Nr. 52 Zweite korrigierte Auflage 15. Januar 2010

ISSN 1612-9156
Mathematikinformation ist eine Zeitschrift von Begabtenförderung Mathematik e.V.

Herausgabe und Redaktion:
Professor Dr. Harald Löwe, Technische Universität Braunschweig
Dr. Karlhorst Meyer, Kyffhäuserstraße 20, 85579 Neubiberg
Professor Dr. Christa Polaczek, Fachhochschule Aachen
Professor Dr. Thomas Sonar, Technische Universität Braunschweig

Mathematikinformation vermittelt Curricula und Hintergrundtheorie zur Förderung von an Mathematik interessierten Schülerinnen und Schülern unter Berücksichtigung des Alltagsunterrichts.

Mathematikinformation erscheint zweimal jährlich.
Der Preis dieses Heftes beträgt 8 € zuzüglich Porto.
Die Mitgliedschaft in Begabtenförderung Mathematik e. V. (Jahresbeitrag 36 € bzw. 310 € für Körperschaften) umfasst den kostenfreien Bezug der Mathematikinformation.
Das Jahresabonnement für die Mathematikinformation einschließlich Versand beträgt 18 €.
Homepage: www.mathematikinformation.info

Zahlungen mögen auf das Konto 3414590 00 der Dresdner Bank in München BLZ 70080000 zugunsten von Begabtenförderung Mathematik e. V. Neubiberg erfolgen.

Autoren und Herausgeber arbeiten ehrenamtlich ohne Aufwandsentschädigung.

Unaufgefordert eingereichte Manuskripte werden nicht zurückgesandt.

Vereinsadresse:
Begabtenförderung Mathematik e. V., Vorsitzender Dr. Karlhorst Meyer, Kyffhäuserstraße 20, 85579 Neubiberg

Inhalt der Nummer 52:

Mathematikinformation ISSN 1612-9156
Nr. 52 wurde an der Universität Gesamthochschule Kassel gedruckt.

Mathematikinformation Nr. 1 erschien am 12. Januar 1981 als Hausinformation des Gymnasiums Starnberg. Alle Hefte können an der Universitätsbibliothek Göttingen ausgeliehen werden. Eine Übersicht über die Inhalte der früheren Hefte findet man unter www.mathematikinformation.info.

Karlhorst Meyer

Vom Potenzrechnen zum Logarithmus

1. Voraussetzungen

Um den Logarithmus und die Exponentialfunktion in Jahrgangsstufe 10 im Unterricht untersuchen zu können, muss der Umgang mit Exponenten sicher sein. Leider muss hierbei insbesondere im Zusammenhang mit der Reduktion von G9 auf G8 eine enorme Kürzung der Unterrichtszeit festgestellt werden. So weist z. B. der bayerische Lehrplan (www.isb-gym8-lehrplan.de) vor Behandlung der Exponentialfunktion in Klasse 10 nur noch ca. 4 Stunden zur Einführung der Potenzschreibweise bei natürlichen Exponenten in Klasse 5 unter M5.3.1 („Begriff der Potenz, Darstellung großer Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen“) und weitere 6 Stunden in Klasse 9 unter M9.3 zur Einführung rationaler Exponenten aus („Die Schüler verallgemeinern ihre Kenntnisse über Quadratwurzeln und übertragen die aus den vorherigen Jahrgangsstufen bekannten Rechenregeln auf Potenzen mit rationalen Exponenten, wobei sie auch Grundlagen für die Beschäftigung mit Exponentialfunktionen erwerben: allgemeine Wurzeln, Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten“).

De facto sind also für die Einführung der Exponentialfunktion in Jahrgangsstufe 10 keine Voraussetzungen mehr gegeben. Es stehen zwar eine ganze Reihe von Stunden für Zusatzunterricht bereit, doch wird es trotz dieser Zeit nicht möglich sein, die so herbeigeführte Lücke in Wissen und Fähigkeiten zu schließen, da auch in anderen Bereichen der Schulmathematik Analoges zu beobachten ist. Als Außenstehender bekommt man den Eindruck, dass die Lobby der Nachhilfelehrer, Pauker u. ä. unendlich groß geworden ist; denn all die Lehrplanreduktionen entlasten intelligente Kinder nicht, sondern erschweren selbst den Hochbegabten den Schulbesuch. D. h. Mitteleuropa braucht dringend Institute, in denen Heranwachsende die Möglichkeiten bekommen, ihren Schulbesuch dahingehend zu ergänzen, dass sie eine Chance bekommen, mit Erfolg Ingenieurwesen, Naturwissenschaften bis hin zu Medizin in einer angemessenen Zeit zu studieren.

Es wird deshalb im Folgenden versucht, einen Vorschlag für eine Binnendifferenzierung des Normalunterrichts dahingehend zu unterbreiten, dass für gute Schülerinnen und Schüler Arbeitsblätter zum Selbststudium vorbereitet werden. *Alles, was im Rahmen einer Binnendifferenzierung im Normalunterricht gelehrt werden kann, wird außerhalb der Arbeitsblätter kursiv geschrieben.* Der übrige Text kann zu einem Ergänzungsunterricht oder auch zum Selbststudium benutzt werden.

1.1 Jahrgangsstufe 5

Schon in Klasse 5 erfahren die Schüler den Umgang mit natürlichen Exponenten und lernen eine abgekürzte Schreibweise für ein Produkt aus gleichen Faktoren:

Definition 1.1.1: $a^n := a \cdot \ldots \cdot a$ mit n Faktoren $a \in N_0 = N \cup \{0\}$.

Satz 1.1.2: *Vielleicht findet man durch „Probieren“ die folgenden Rechenregeln:*

P1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

P1’ $a^n : a^m = a^{n-m}$*, falls dies „lösbar“ ist.*

P2 $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

P2’ $a^n : b^n = (a:b)^n$*, falls dies „lösbar“ ist.*

P3 $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

P4 Monotoniegesetze: a, b, n und m sind natürliche Zahlen; dann gelten:

1. $a < b$ *genau dann, wenn* $a^n < b^n$.
2. $n < m$ *genau dann, wenn* $a^n < a^m$.

Unter Umständen wird bereits hier Definition 1.1.1 wegen P1’ ergänzt:

Definition 1.1.3: $a^0 := 1$ *für alle Zahlen* $a \neq 0$.

Arbeitsblatt 5.1: Potenzschreibweise[1]

1. Begründe mit $a^n := a \cdot ... \cdot a$ die folgenden Formeln:
   P1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
   P1' $a^n : a^m = a^{n-m}$, falls dies „lösbar" ist.
   P2 $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
   P2' $a^n : b^n = (a : b)^n$, falls dies „lösbar" ist.
   P3 $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$
   P4 Monotoniegesetze: *a, b, n* und *m* sind natürliche Zahlen; dann gelten:
   1. $a < b$ genau dann, wenn $a^n < b^n$.
   2. $n < m$ genau dann, wenn $a^n < a^m$.

2. Finde Beispiele, die zeigen, dass $3a \neq a^3$. Für welche a ist $2a = a^2$?

Es folgen Aufgaben aus MEYER U. A. [1] Band 5, Seiten 77 – 79:

3. Zahlen, die a^2 oder a^3 geschrieben werden können, heißen Quadrat- bzw. Kubikzahlen. Lerne die Quadratzahlen für $a = 1$ bis $a = 25$ bzw. die Kubikzahlen für $a = 1$ bis $a = 10$ auswendig.

4. Schreibe als Potenzen möglichst vieler Faktoren: a) 64 b) 128 c) 1024 d) 81 e) 100 f) 1000 g) 1000 000 h) 243 i) 1 j) $(2^3)^2$ k) 7 l) 343 m) 729

5. Schreibe als Produkt aus Potenzen; nenne eine Regel, wie man mehrfache Schreibweisen vermeiden kann: a) 336 b) 128 · 2 c) 484 d) 1323 e) 336 · 49 f) 512 · 777 g) 12 152

6. Beispiel: 2345 = 2T + 3H + 4Z + 5E
   $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
   Schreibe wie im Beispiel: 404, 3003003, 5403005007

7. Man kann jede natürliche Zahl nicht nur im Dezimalsystem, sondern auch im Dualsystem schreiben:

dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	usw.
dual	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	

   Im Dualsystem ist also jede Zahl geschrieben als Summe von Zweier-Potenzen.
   Computer benutzen das Hexadezimalsystem, bei dem alle Zahlen als Summen von 16er-Potenzen geschrieben werden.
   a) Erstelle eine Übersetzungstabelle für das Hexadezimalsystem; wie viele Ziffern braucht man hier?
   b) Übersetze die im Dualsystem geschriebenen Zahlen ins Dezimal- und Hexadezimalsystem.
      101, 11011, 1110111, 10101001, 111111000.
   c) Die Ziffern im Hexadezimalsystem seien 0,1,…,9, A, B, C, D, E, F. Übersetze ins Dezimalsystem:
      F0A, 9A8B7C6, AA0011, BAE, BABA.
   d) Finde eine Regel, wie man eine im Dezimalsystem geschriebene Zahl ins Hexadezimalsystem übersetzen kann, und prüfe die Regel für die Dezimalzahl 5000.

8. Bestimme durch gezieltes Einsetzen die Lösungsmengen:
   a) $y^4 = 625$ b) $x^5 = 243$ c) $z^6 = 64$ d) $u^3 = 343$ e) $x^5 < 243$ f) $32 \leq x^5 \leq 243$

9. Weshalb wird die Multiplikation im Dualsystem wie im Dezimalsystem ausgeführt?

10. Georg legt in der ersten Woche 1 Cent in seine Sparbüchse. In jeder darauf folgenden Woche zahlt er doppelt so viel wie in der vorhergehenden Woche ein.
    a) Wie viele Cent legt er in der 10. Woche in seine Sparbüchse?
    b) Wie viel Geld hat er nach 3 Monaten gespart?
    c) Gib allgemein an, wie sich der Sparbetrag in der n-ten Woche berechnen lässt.

[1] Lösungen siehe Seite 46.

1.2 Jahrgangsstufe 6

In Klasse 6 oder 7 werden die Potenzgesetze auf negative Basen durch den folgenden Satz erweitert:

Satz 1.2.1: $(-1)^n = \begin{cases} -1, & falls\ n\ ungerade\ ist; \\ 1, & falls\ n = 0\ ist; \\ 1, & falls\ n\ gerade\ ist. \end{cases}$

Zum Beweis:

$(-1)^n = (-1)\cdot\ldots\cdot(-1)$ *mit n Faktoren – 1usw.*

*Man kann zeigen, dass damit die in 1.1 angegebenen Potenzgesetze weiterhin alle gelten (**Permanenzprinzip**). Auch guten Schülerinnen und Schülern muss man hier einen Beweis für einen Fall von Satz 1.1.2 vorführen, damit das Wort „Permanenzprinzip“ verstanden wird, z. B.:*

Satz 1.2.2:
P1 gilt für negative a und natürliche n.

Beweis:
a = :– b; dann ist $(-b)^n = (-b)\cdot\ldots\cdot(-b) = (-1)\cdot b^n$ *;damit erhält man:*

$$a^n a^m = (-b)^n(-b)^m = (-1)^{n+m} b^{n+m} = (-b)^{n+m} = a^{n+m}$$

Eine zweite Erweiterung der Definition von Potenzen ist hinsichtlich der Brüche notwendig:

Wegen P2' gilt für jeden Bruch $a = \frac{r}{s}$ *mit natürlichen r und s:*

Satz 1.2.3: $\left(\frac{r}{s}\right)^n = \frac{r^n}{s^n}$ *für natürliche n, r und* $s \neq 0$.

Jeder Bruch ist ein Quotient, dessen Wert man durch Division ermitteln kann. Brüche lassen sich also als Dezimalzahlen darstellen. Die Dezimalzahldarstellung ist stets unendlich, wenn man etwa im Fall einer endlichen Dezimalzahl beliebig viele Nachkommanullen ergänzt. Gerundete Dezimalzahlen sind eigentlich Intervalle, wie z. B. $2{,}31 \in [2{,}305;2{,}315[= \{x: 2{,}305 \leq x < 2{,}315\}$.
Man unterscheidet offene Intervalle (bei ihnen gehören die Grenzen nicht dazu), z. B. $(a;b) = \{x: a < x < b\}$ *oder abgeschlossene Intervalle (bei ihnen gehören die Grenzen dazu), z. B.* $[a;b] = \{x: a \leq x \leq b\}$. *Je nach Bedarf benutzt man auch links oder rechts halboffene Intervalle.*
So befindet sich z. B. die Zahl 2,63 zwischen den Zahlen 2,6 und 2,7 oder man sagt auch 2,63 liegt im Intervall [2,6; 2,7]. Eine Zahl kann in mehreren Intervallen liegen, z. B.: $2{,}6321 \in [2{,}63205;2{,}63215) \subseteq [2{,}632;2{,}633] \subseteq [2{,}63;2{,}64] \subseteq [2{,}6;2{,}7]$; *diese Intervalle sind „geschachtelt“.*
Diesen Vorgang kann man beliebig lang fortsetzen und erhält eine allgemeine Dezimalzahl (mit einer unendlichen Länge). Jede Dezimalzahl hat so genau einen Platz auf der Zahlengeraden und umgekehrt entspricht jeder Punkt der Zahlengerade genau einer Dezimalzahl.
Dezimalzahlen sind also Intervallschachtelungen, d. h. sie liegen in unendlich vielen ineinander geschachtelten Intervallen, deren Längen gegen null streben. Unter diesen gibt es periodische Dezimalzahlen, die genau die Brüche sind. ***Die nicht periodischen Dezimalzahlen heißen irrational.*** *Die Menge aller Dezimalzahlen heißt Menge der reellen Zahlen (siehe KRÄMER-MEYER [8]).*
In der Oberstufe lernt man, dass man in dieser Menge wie gewohnt eine Addition und eine Multiplikation hat.

Arbeitsblatt 6.1: Potenzgesetze[2]

1. Beweise für Brüche die in Satz 1.1.2 aufgeführten Potenzgesetze. Weshalb muss man sich ab jetzt das Gesetz P2' nicht mehr merken?

2. Weshalb ist die Definition 1.1.3: $a^0 = 1$ verträglich mit den Potenzgesetzen?

3. Berechne als Dezimalzahl die im Dualsystem gegebene Zahl 101,1001.
Berechne als Dezimalzahl die im Hexadezimalsystem gegebene Zahl AF,09C.

4. Verwandle die Dezimalzahl 3,359375 in das Hexadezimalsystem. Gib eine Regel für die Nachkommastellen im Hexadezimalsystem an.

1.3 Jahrgangsstufe 7

In den Jahrgangsstufen 7 und 8 werden die Potenzgesetze im „Buchstabenrechnen" benutzt.
Manche Kolleginnen und Kollegen „lehren" in Klasse 7 das PASCALsche Dreieck. Man kann aber in dieser Klasse im Rahmen von Binnendifferenzierung genauso „gut" auch auf die Polynomdivision bzw. den Hauptsatz der Algebra in einfachen Fällen zu sprechen kommen:

Definition 1.3.1: *Für reelle a_i, $a_n \neq 0$ und natürlichem n heißt $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ein Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten a_i.*

Beim Divisionsalgorithmus subtrahiert man den Divisor immer wieder vom Dividenden und fasst zusammen, wie oft dies z. B. hundertfach, zehnfach und einfach geht; z. B.:
2576 : 23 = 112 oder ausführlich
$2576 - 23 \cdot 1 \cdot 100 = 276$
$276 - 23 \cdot 1 \cdot 10 = 46$
$46 - 23 \cdot 2 \cdot 1 = 0$
Selbstverständlich muss das Verfahren nicht „aufgehen". Wenn dies aber der Fall ist, lehrt das Distributivgesetz, dass das „Ergebnis stimmt":
Durch Einsetzen der einzelnen Zeilen findet man:
$2576 - 23 \cdot 1 \cdot 100 - 23 \cdot 1 \cdot 10 - 23 \cdot 2 \cdot 1 = 0$ also
$2576 - 23 \cdot (1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1) = 0$ d. h.
$2576 - 23 \cdot 112 = 0$ also $2576 = 23 \cdot 112$ oder $2576 : 23 = 112$.
Ersetzt man die Stufenzahlen durch Zehnerpotenzen, so erhält man:

$$\begin{array}{l}
(2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0) : (2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \\
\underline{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2} \\
\qquad 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 \\
\qquad \underline{2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1} \\
\qquad\qquad 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \\
\qquad\qquad \underline{4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0} \\
\qquad\qquad\qquad 0 \cdot 10^0
\end{array}$$

In Analogie zum Bisherigen setzt man $10 = x$ *und erhält ein* erstes *Beispiel einer so genannten* **Polynomdivision:**

$$(2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0) : (2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 \qquad (1)$$

Für x = 10 *ist diese Formel sicher richtig. Gilt sie aber auch für andere x? Durch Ausmultiplizieren*

$$(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0) \cdot (2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^0) = 2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x^1 + 6 \cdot x^0 \qquad (2)$$

stellt man fest: Die Formel gilt für alle x.

Analogieschlüsse sind gefährlich, solange sie nicht bewiesen sind (siehe Arbeitsblatt 7.1 1.). Beachte:
Geht eine Polynomdivision auf, so gilt sie für alle x. Kann man die Polynomdivision nur für einige x ausführen, so muss sie nicht für alle x ausführbar sein.

Aus der Gültigkeit von (2) und $2x + 3 = 0$ schließt man, dass für $x = -1,5$ die Gleichung (2) den Wert 0 erhält,

[2] Lösungen siehe Seite 47.

$x = -1{,}5$ also eine Nullstelle des Ausgangspolynoms ist,
also $x = -1{,}5$ Lösung der Gleichung $2x^3 + 5x^2 + 7x + 6 = 0$ ist.
Hat man eine Nullstelle x_1 eines Polynoms $p_n(x)$ gefunden, so gilt für alle x die folgende Faktorzerlegung $P_n(x) = (x - x_1)p_{n-1}(x)$ mit einem Polynom $p_{n-1}(x)$ vom Grad $n - 1$, wobei $p_{n-1}(x)$ durch Polynomdivision gefunden werden kann.

Arbeitsblatt 7.1: Potenzgesetze[3]

1. Finde eine Division für Zahlen, die nicht in der beschriebenen Form zu einer Polynomdivision erweitert werden kann.

2. Berechne: a) $(3x^3 + 5x^2 - 6x - 2) : (x - 1)$ b) $(-4x^3 + 16x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$
   c) $(y^3 + y^4 - 2y) : (2y + 2 + y^2)$ d) $(6z^6 - 18z^5 + 9z^3 - z^4 - z^2) : (2z^2 - 1)$

3. In den folgenden Aufgaben ist entweder eine Lösung einer Gleichung gegeben oder man kann sie raten; finde weitere Lösungen bzw. reduziere den Grad des Problems:
   a) $x_1 = -3$ und $x^2 - 4x - 21 = 0$ b) $x_1 = -3$ und $x^2 + \frac{7}{3}x - 2 = 0$ c) $x^2 - 3x = 0$
   d) $x^3 + x = 0$ e) $y^4 - 12 = y^2$ f) $x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = 0$ g) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Die folgenden Aufgaben sind zum Teil aus MEYER U. A. [3]:

4. Fülle die Lücken aus: a) $a^2 + 5ab + \Box = (a + \Box)^{\Box}$ b) $v^2 - \frac{vw}{3} + \Box = (\Box + \Box)^{\Box}$
5. Multipliziere vollständig aus und fasse soweit wie möglich zusammen:
   a) $(x - 2y - z)^2$ b) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z\right)^2$ c) $(a + b + c + d)^2$
6. Multipliziert man ein Binom $(a + b)^n$ aus und fasst zusammen, so bezeichnet man die Koeffizienten bei $a^{n-k}b^k$ mit $\binom{n}{k}$, gesprochen n über k, und nennt diese Binominalkoeffizienten. Durch die Multiplikation $(a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b)^n$ erhält man einen Zusammenhang zwischen den Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und $\binom{n-1}{k}$. Finde diesen. Schreibe anschließend diese Koeffizienten beginnend mit $n = 1$ untereinander und nutze die gefundene Regel aus. Es entsteht das so genannte PASCALsche Dreieck.

7. Bestimme die Lösungsmenge:
   a) $(4x+3)(4x-3) - (5x-1)^2 - (4-3x)(3x+4) - 10x = 0$
   b) $2(7-4x)^2 - 3(6+5x)(5x-6) + 5x(3x-11) + 7 \cdot (2x+9)^2 = 8$
   c) $z^2 + 13 < 0$ d) $y^2 - 17 \geq -17$ e) $(x+5)^2 - 10x < 0$
   f) $(y+3)^2 - (y-4)^2 - 2(6{,}5y - 5) > 5$ g) $(z-3)^2 < 13$
   h) $(x+5)(x+3) - (x^2 - 1) > 0$ i) $(5x^2 - 30x + 45)(x^2 - 9) = 0$

1.4 Jahrgangsstufe 8

Es werden jetzt negative Exponenten zugelassen:

Definition 1.4.1: $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$ *für alle bekannten Zahlen $x \neq 0$ und einem natürlichen n.*

---

[3] Lösungen siehe Seite 48.

In Satz 1.1.2 findet man P1' „ $a^n : a^m = a^{n-m}$, falls dies lösbar ist", d. h. es muss $a \neq 0$ und $n \geq m$ sein. Gilt letzteres nicht, ist also z. B. $n = 0$ und $m > 0$, so ist die eben getroffene Definition eine sinnvolle Ergänzung des Bisherigen. P1' kann jetzt ganz entfallen (siehe Arbeitsblatt 8.1 Aufgabe 1.).

Arbeitsblatt 8.1: Potenzgesetze[4]

1. Weshalb benötigt man ab jetzt P1' nicht mehr?

2. Beweise für rationale a die Potenzgesetze P1, P2 und P3.

3. Vereinfache möglichst elegant und beschreibe die Vorgehensweise:
   a) $\left(\frac{4a^2c^3}{b^3}\right)^2 : \left(\left(\frac{b^{-2}c^4}{a^4}\right)^{-3} : \left(\frac{a^2c^{-5}}{2b^{-3}}\right)^4\right)$ b) $\left(\left(\frac{3b^{2m-1}}{2x^{y+3}}\right)^2 : \left(\frac{2^2x^{y+1}}{3b^{m-3}}\right)^{-3}\right)\left(\frac{9x^{3-y}}{2^4 \cdot b^{m+7}}\right)$
4. Beimischungen werden nicht nur in Prozent oder Promille gemessen, sondern dank verbesserter Analyse- und Messmethoden auch in kleineren Anteilen dargestellt:
   1 *ppm* (part per million) bedeutet 1 Teil von 1 Million Teile.
   1 *ppb* (part per billion) bedeutet 1 Teil von 1 Billion Teile,
   1 *ppt* (part per trillion) bedeutet 1 Teil von 1 Trillion Teile usw.
   Gibt man einen Zuckerwürfel von 2,5 g in einen viertel Liter Wasser, so hat man eine Konzentration von 1 %. Welche Konzentrationen ergeben sich, wenn man 2 Zuckerwürfel
   a) in einen mit Wasser gefüllten Tankzug von 5 000 l,
   b) in einen 7,5 Millionen Liter fassenden Abschnitt eines Kanals,
   c) in den zur Hälfte gefüllten Wupperstausee, der einen maximalen Stauraum von 26 Millionen m^3 hat,
   d) in den Starnberger See mit einem Volumen von 3,1 km^3 hat?
   e) Weshalb ist ein Teil der Fragen sinnlos?

1.5 Jahrgangsstufe 9

Der folgende Aufbau ist angelehnt an MEYER U. A. [3] bzw. [4]. Die Beispiele und Aufgaben sind zum größten Teil der entsprechenden Literaturstelle entnommen.
Dem Schüler ist bekannt $(-a)^2 = a^2$. Die Umkehroperation des Quadrierens wird Wurzelziehen genannt. Um Verwirrung zu vermeiden, werden i. Allg. in der westlichen Welt Wurzeln nur aus nicht negativen Zahlen gezogen (siehe auch AVERBOUKH, GÜNTHER [1]).

Definition 1.5.1: Hat man für $a \geq 0$ die Gleichung $x^2 = a$, so ist die Quadratwurzel $x = \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ die positve Lösung der Gleichung.

Satz 1.5.2: Die rein quadratische Gleichung $x^2 = a$ hat als Lösungsmenge
$L = \emptyset$, falls $a < 0$,
$L = \{0\}$, falls $a = 0$,
$L = \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$, falls $a > 0$.
Für $a \geq 0$ gilt $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Die Lösungen schreibt man auch als $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ oder $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$.
In aller Regel bringt der Normalunterricht $\sqrt{2}$ als Beispiel einer irrationalen Zahl.

Satz 1.5.3: Für Quadratwurzeln gelten die folgenden Rechenregeln:

[4] Lösungen siehe Seite 49.

W1 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ mit $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

W2 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ mit $a \geq 0$ und $b > 0$.

W3 $\sqrt{a^2}=|a|$ mit beliebigem a.

Beweis zu **W1**:
$x=\sqrt{a}$ und $x=\sqrt{b}$ erfüllen die Gleichungen $x^2=a$ bzw. $x^2=b$. Man multipliziert die beiden Gleichungen und erhält $x^2\cdot y^2=ab$. Nach den Potenzgesetzen ist dies gleichwertig mit $(xy)^2=ab$. Hieraus folgt die nicht negative Lösung $xy=\sqrt{ab}$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $xy=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. Also gilt **W1**.

Die weiteren Wurzelgesetze werden als Aufgabe gestellt; siehe Arbeitsblatt 9.1.

Im Arbeitsblatt 9.1 werden an Techniken das „Unter-die-Wurzel-ziehen“, das „Teilweise-Wurzelziehen“ und das „Rationalmachen-des-Nenners“ vermittelt.

Im Moment sieht es so aus, als wollte man im Lehrplan am Kapitel „Quadratfunktion“ im bisherigen Umfang festhalten. Im Hinblick aber auf das Ziel „Exponentialfunktion und Logarithmus“ ist die Behandlung der Wurzelfunktion ebenfalls unerlässlich, zumindest *aber Thema von einigen Stunden in einem Ergänzungskurs. Im Folgenden handelt es sich um die einschlägige Darstellung aus MEYER U. A. [4]Seite 77:*

$y = x^2$ beschreibt eine Funktion, die jedem reellen x ***genau ein*** *nicht negatives y zugeordnet. Kehren wir diesen Zusammenhang um, so werden jedem nicht negativen y genau zwei x zugeordnet, nämlich $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$. Also ist dies keine Funktion, es sei denn, wir beschränken die Ausgangsmenge dahingehend, dass wir uns anfangs auf nicht negative x beschränken. Jetzt ist die Umkehrung eine Funktion. Leider unterscheidet sich der Graph von $y = x^2$ für nicht negative x nicht vom Graphen von $x = \sqrt{y}$ für nicht negative y. Um hier für die Umkehrung einen eigenen Graphen zu bekommen, vertauscht man die Variablen x und y, d. h. spiegelt an x = y und macht so x auch bei der Umkehrfunktion zur unabhängigen und y zur abhängigen Variablen. Das alles wird im Unterricht anhand von Graphen und Wertetabellen entwickelt (vgl. MEYER U. A.[3], Seite 77).*

Im Hinblick auf den späteren Unterricht sollte man anhand von Skizzen auseinander setzen, inwiefern nicht streng monotone Funktionen nicht umkehrbar sind.
Da in vielen Naturwissenschaften graphische Lösungen üblich sind, sollte man z. B. einige quadratische Gleichungen graphisch lösen (siehe MEYER U. A. [3] Seite 83ff):

Beispiel 1.5.4: *Löse $2x^2 + 2x - 2 = 0$.*

1. Lösung: Man zeichnet für die Funktion $y = 2x^2 + 2x - 2$ einen Graphen und sucht die Nullstellen. Die graphisch gefundenen Nullstellen können durch gezieltes Einsetzen in eine Wertetabelle verbessert werden.

2. Lösung: Man formt das Beispiel um zu $y = x^2 + x - 1$ und führt die Untersuchung hierfür aus, um eine Schablone zum Zeichnen der Parabel zu nutzen. Hierzu benötigt man den Scheitel der Parabel, den man über eine quadratische Ergänzung findet.

3. Lösung: Um abermals die Parabelschablone zu nutzen, zerlegt man das Problem $x^2 + x - 1 = 0$ in das Auffinden der Schnittpunkte der Graphen $y = x^2$ und $y = -x + 1$.

Siehe das Aufgabenblatt 9.1

Alle bisherigen Verfahren zum Lösen von Gleichungen führten nur zu Lösungen. Bei Wurzelgleichungen werden Umformungen benutzt, die keine Äquivalenzumformungen sind und Ergebnisse liefern, die sich dann u. U. nicht als Lösungen herausstellen. Dies ist für Schüler eine wichtige Erfahrung:
Die Probe wird Bestandteil des Lösungsverfahrens:

Beispiel 1.5.5: *Löse* $x-\sqrt{2x-1}=2$.

Lösung:
Um Wurzelgleichungen zu lösen, muss zunächst eine Wurzel „frei gestellt" werden und dann die Gleichung quadriert; das ist keine Äquivalenzumformung, denn eine andere Ausgangsgleichung ergibt dieselbe Formel:

$x-\sqrt{2x-1}=2$ *; umgestellt zu*

$\sqrt{2x-1}=x-2$ *; quadriert zu*

$x^2-4x+4=2x-1$. *Man beachte: Auch die Gleichung* $-\sqrt{2x-1}=x-2$ *ergibt diese Zeile. Man erhält*

$x^2-6x+5=0$ *und vermutet die Lösungen* $x_1 = 5$ *und* $x_2 = 1$.

Probe
für $x_1 = 5$*: Linke Seite* $5-\sqrt{2\cdot 5-1}=5-3=2$ *; rechte Seite: 2*
Da die linke Seite mit der rechten Seite übereinstimmt, ist $x_1 = 5$ *Lösung der Ausgangsgleichung. Analog findet man:* $x_2 = 1$ *erfüllt die Probe nicht, d. h.* $x_2 = 1$ *ist keine Lösung.*
Akzeptiert man die Ansicht, in Jahrgangsstufe 9 seien die reellen Zahlen definiert (z. B. als isomorph zu den Punkten der Zahlengeraden), dann kann man das Bisherige zunächst auf rationale Exponenten verallgemeinern. Leider ist dies – wie in AVERBOUKH, GÜNTHER [1] gezeigt – auf 2 verschiedene Arten möglich; deshalb muss Satz 1.5.7 bewiesen werden, was sicher nur in einem Ergänzungsunterricht geschehen kann.

Definition 1.5.6: $x^r := \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$, wobei x eine reelle Zahl mit $x \geq 0$ und r eine rationale Zahl mit der gekürzten Form $r=\frac{n}{m}$ ist; im Fall $x=0$ setzt man darüber hinaus voraus, dass $r > 0$ gilt.

Satz 1.5.7: Unter den Einschränkungen von Definition 1.3.4 gilt $x^r := \left(\sqrt[m]{r}\right)^n = \sqrt[m]{r^n}$.
Für gebrochen rationale Exponenten gelten die Potenzgesetze P1, P2 und P3.

Für den Beweis siehe AVERBOUKH, GÜNTHER [1]. Hierbei hat man auch negative reelle x im Fall m ungerade zugelassen; allerdings haben sich **dort** einige Schreibfehler auf Seite 8 eingeschlichen, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, da man in diesem Bereich sicherer rechnet, wenn man die Probleme im Komplexen löst (siehe MEYER [7]).

Ergänzend sollte man den guten Schülern auseinandersetzen: Da jede reelle Zahl r als Grenzwert einer Zahlenfolge rationaler Zahlen aufgefasst werden kann, also $r=\lim r_n$ *, und sich zeigen lässt* $x^r = x^{\lim r_n} = \lim x^{r_n}$ *, hat man Potenzen für reelle Exponenten, falls die Basis positiv ist.*

Beispiel 1.5.8: *Konstruiere zu* $\sqrt{2}$ *eine Intervallschachtelung und zeige, dass hierdurch eine Intervallschachtelung für* $3^{\sqrt{2}}$ *definiert ist.*

Lösung:

Intervall. für $x=\sqrt{2}$	*Begründung*	*analog für* $y=3^{\sqrt{2}}$	*Begründung*
$x \in [1\ ;2\ ]$	$1^2 \leq 2 \leq 2^2$	$y \in [3^1\ ;3^2]$	$3^1 \leq 3^{\sqrt{2}} \leq 3^2$
$x \in [1{,}4\ ;1{,}5\ ]$	$1{,}4^2 \leq 2 \leq 1{,}5^2$	$y \in [3^{1{,}4}\ ;3^{1{,}5}]$	$3^{1{,}4} \leq 3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1{,}5}$
$x \in [1{,}41\ ;1{,}42\ ]$	$1{,}41^2 \leq 2 \leq 1{,}42^2$	$y \in [3^{1{,}41}\ ;3^{1{,}42}]$	$3^{1{,}41} \leq 3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1{,}42}$
$x \in [1{,}414; 1{,}415]$	$1{,}414^2 \leq 2 \leq 1{,}415^2$	$y \in [3^{1{,}414}; 3^{1{,}415}]$	$3^{1{,}414} \leq 3^{\sqrt{2}} \leq 3^{1{,}415}$
usw.	*usw.*	*usw.*	*usw.*

Ohne Probleme erkennt man: Die jeweils links stehende Folge ist streng monoton wachsend, während die rechts stehende streng monoton fällt. Die Intervalllänge wird laufend kleiner und strebt gegen null. Es handelt sich also in beiden Fällen um Intervallschachtelungen.
Damit sind Potenzen für reelle Exponenten erklärt, falls die Basis positiv ist.

Arbeitsblatt 9.1: Wurzelgesetze[5]

Die folgenden Aufgaben sind zum Teil aus MEYER U. A. [5].

1. Berechne ohne Taschenrechner:
   a) $\left(\sqrt{20}\right)^2$ b) $\sqrt{(-25)^2}$ c) $\left(-\sqrt{36}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{-(-9)}\right)$ e) $\sqrt{0{,}0001}$
   f) $\sqrt{\sqrt{10\,000}}$ g) $\sqrt{\sqrt{0{,}09}-0{,}29}$ h) $\sqrt{\sqrt{25}+\sqrt{16}}$ i) $\sqrt{0{,}000729}$ j) $-\sqrt{125\,440\,000}$
   k) $\sqrt{4\,277\,160\,000}$ l) $\sqrt{\dfrac{12\,500+44}{6\,000-816}}$ m) $\sqrt{0{,}000000000000004489}$
2. Bestimme ohne Taschenrechner die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:
   a) $x^2 = 1234321$ b) $2x^2 + 3 = 0$ c) $36 - 4x^2 = 0$ d) $x^2 + 33 = 32$ e) $\dfrac{1}{4}x^2 - 400 = 0$
   f) $x^3 - 49x = 0$ g) $(x+9)\left(x^2-4\right) = 0$ h) $2x^2 - 4x + 2 = 0$ i) $(6y+7)^2 + (6y-7)^2 = 4\cdot 49$
3. Bestimme die Definitionsmenge von $\sqrt{x^2-4}$.
4. Warum sind die folgenden Gleichungen für keine rationale Zahl lösbar?
   a) $x+\sqrt{2} = 0$ b) $7+2\sqrt{x}+4 = 0$ c) $\sqrt{x}-\sqrt{2}+2 = 0$
5. Beweise die Regeln **W2** und **W3**.
6. Schreibe unter *eine* Wurzel:a) $\sqrt{x}\cdot 5$ b) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$ c) $\sqrt{1+3+5+7}\cdot\sqrt{(13+15+17):5}$
7. Forme in kürzere Terme um: a) $\sqrt{\dfrac{\left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}{(a+b)^3(a-b)^3}}$ b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-3\sqrt{a}+2\sqrt{b}+\sqrt{64b}-\sqrt{25a}$
   c) $\sqrt{169\sqrt{x^4y^4}}-12|xy|+\sqrt{\sqrt{16}(xy)^2}$ d) $\sqrt{441r^4+\dfrac{1}{9}s^4+14r^2s^2}$ e) $\sqrt{\sqrt{624\dfrac{a^4}{b^2}}}$ f) $\sqrt{\sqrt{r^6}\cdot\sqrt{r^4}}$
8. Mache den Nenner rational und verkürze den Term:
   a) $\dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{14}}$ b) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{3}}+1}$
9. Löse durch Einsatz von Graphen $2x^2 + 2x - 2 \leq 0$.
10. Löse graphisch $\sqrt{-x} = x^2$.
11. Bestimme die Lösungsmenge. Welche Bedingungen muss a erfüllen, damit eine Lösung existiert?
    a) $x+\sqrt{a}-\dfrac{x+1}{\sqrt{a}} = 0$ b) $9x+\sqrt{4a+1}-\dfrac{4x-3}{\sqrt{4a+1}} = 0$
12. Bestimme die Lösungsmenge: a) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+10}-\sqrt{11x+9} = 0$ b) $\sqrt{y+4+\sqrt{3y-5}} = 3$
13. Verbinde einen beliebigen Punkt P der Geraden $x+2y-10 = 0$ mit dem Urspung O des Koordinatensystems.
    a) Berechne den Abstand $d(P, \mathrm{O})$ in Abhängigkeit der x-Koordinate von P.
    b) Für welche Belegung von x wird $d(P, \mathrm{O})$ am kleinsten? Wie groß ist dann $d(P, \mathrm{O})$?
    c) Wo wird die Entfernung des Punktes P vom Ursprung genau 5,00 cm?

[5] Lösungen siehe Seite 50.

1.6 Folgen und Reihen

Beispiel 1.6.1: *Auf ein erstes Feld legt man 2 Reiskörner; auf jedes folgende Feld das Doppelte des vorausgegangenen. Jedes Feld mit der Nummer n erhält so a_n Körner, wobei a_n der Wert einer Funktion f: $N \to R$ ist.*

Definition 1.6.2: *Eine Funktion f: $N \to R$ heißt **Zahlenfolge** oder **Folge**. Man nennt die reelle Zahl $f(n) = a_n$ das n-te **Glied** der Folge. O. B. d. Allg. sei stets $d \neq 0$.*

Definition 1.6.3: *Eine Zahlenfolge, bei der jeweils die Differenz d zweier aufeinander folgender Glieder $a_{n+1} - a_n = d$ für alle natürlichen n konstant ist, heißt **arithmetische Zahlenfolge $\{a_n\}$**.*

Beispiel 1.6.4: *Die Menge N der natürlichen Zahlen stellt eine arithmetische Zahlenfolge mit d = 1 dar.*

Satz 1.6.5: *$\{a_n\}$ sei eine arithmetische Zahlenfolge; dann ist $a_n = a_1 + (n-1)d$.*

Beispiel 1.6.1 ist offensichtlich dadurch charakterisiert, dass $a_{n+1}:a_n = q$ konstant ist für alle n.

Definition 1.6.6: *Eine Zahlenfolge, bei der der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder konstant q ist, heißt **geometrische Folge.** O. B. d. A. sei stets $q \neq 1$.*

Satz 1.6.7: *$\{a_n\}$ sei eine geometrische Zahlenfolge mit dem Quotienten q, dann ist $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.*

Definition 1.6.8: *Man schreibt: $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ und liest: Summe der a_i von 1 bis n. Σ heißt Summationszeichen, i der Summationsindex.*

Definition 1.6.9: *Zu jeder Folge $\{a_n\}$ gibt es eine zweite Folge $\{S_n\}$ genannt **Reihe** der a_n, wenn gilt:*
$S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Ist $\{a_n\}$ unendlich, dann schreibt man $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definition 1.6.10: *Die Reihe einer arithmetischen Folge heißt **arithmetische Reihe,** die einer geometrischen Folge **geometrische Reihe**.*

Satz 1.6.11 *Das n-te Glied der arithmetischen Reihe lautet $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(a_1 + (i-1)d\right) = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = 2a + (n-1)d$.*

Das n-te Glied der geometrischen Reihe lautet $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $q \neq 1$.

Beweis:

a) *Man schreibt S_n der arithmetischen Reihe mit den aufsteigenden Summanden a_i über die gleiche Reihe mit absteigenden Summanden und zählt zunächst jeweils die übereinander stehenden Summanden zusammen. Insgesamt erhält man $2S_n = n \cdot \left(a + a + (n-1)d\right)$ und damit $S_n = \frac{n}{2} \cdot \left(a_1 + a_n\right)$.*
b) *Man subtrahiert von S_n das q-fache hiervon und erhält:*
   $S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$
   Für $q \neq 1$ folgt hieraus die Behauptung.

Arbeitsblatt 9.2: Folgen und Reihen[6]

1. Bestimme das n-te Glied der Folge der geraden bzw. ungeraden Zahlen.

2. Begründe, weshalb bei einer arithmetischen Zahlenfolge jedes Glied jeweils das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder ist. Stimmt der Satz für alle n?

3. Addiere alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

4. Wie groß ist die Summe aller dreistelligen Zahlen?

5. Bestimme die Summe aller zwei- und dreistelligen ungeraden Zahlen.

6. In einer arithmetischen Zahlenfolge mit dem Anfangsglied 34 und $d = -6$ ist das n-te Glied – 80. Das wie vielte Glied der Folge ist das?

7. Ab welchem n überschreitet a_n bei Beispiel 1.6.1. den Wert 2000?

8. Bei je drei aufeinander folgenden Gliedern einer geometrischen Folge ist jeweils das mittlere Glied das geometrische Mittel der beiden äußeren, d. h. $a_n = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1}}$.

9. Im Folgenden werden kongruente Röhren verwendet. In der untersten Schicht liegen 25 Röhren dicht nebeneinander. In der darauf liegenden Schicht wird jeweils eine Röhre genau in der Mitte zweier Röhren gelegt.
   a) Wie viele derartige Röhren können in 8 Schichten gelagert werden?
   b) Wie viele Schichten kann man legen und wie viele Röhren sind es dann?

10. Zeige, wie aus der Summenformel der geometrischen Reihe eine binomische Formel folgt.

11. Eine geometrische Folge hat das Anfangsglied 5/16 und den Quotienten q = 4. Berechne das sechste Glied.

12. In einem regulären Achteck der Seitenlänge $s_8 = a$ wird über die Mitte jeder Seite jeweils ein Quadrat mit der halben Achteckseitenlänge nach innen gezeichnet; an alle diese Quadrate wird jeweils ein Quadrat der halben Länge des vorhergehenden Quadrats jeweils in dieselbe Richtung wie vorher angehängt usw. Wie groß ist der Flächeninhalt aller Quadrate nach 5 Schritten? Kann man den Prozess beliebig fortsetzen oder stößt man an eine Grenze?

13. **Zinseszins:** Das Kapital K_1 bringt bei einer einjährigen Anlage bei einem jährlichen Zinssatz von p einen Zins pK_1.
    Lässt man diesen Zins auf der Bank, dann wird im kommenden Jahr das Kapital $K_1(1 + p) = K_1q$ verzinst, wenn man setzt $q = 1 + p$.
    In den folgenden Jahren hat man dann als Kapital $K_2 = K_1q$, $K_3 = K_2q = K_1q^2$ usw.
    a) Wie hoch ist das Kapital mitsamt dem Zinseszins nach n Jahren, wenn es mit p jährlich verzinst wird?
    b) Es wird bei einem auf Zinseszins angelegten Kapital zu Beginn eines jeden Jahres ein fester Betrag a eingezahlt. Welchen Wert hat das Guthaben am Ende des n-ten Jahres, wenn die Einlagen jährlich um p verzinst werden?
    c) Für ein Darlehen fordert eine Bank jährlich einen Zinssatz p. Mit der Bank wird eine Rückzahlungsregelung vereinbart: Die jährlich gleich bleibenden Raten r umfassen Zins und Tilgung. Bestimme den Darlehensrest am Ende des n-ten Jahres.

14. Bei der arithmetisch-degressiven Abschreibung werden die Abschreibungsbeträge a_i von Jahr zu Jahr um einen bestimmten Betrag d kleiner.
    a) Gib einen Term für die n-te Abschreibung an.
    b) Die Summe der Abschreibungsbeträge ergibt die Differenz zwischen Neuwert K_0 und Restwert K_n.
    Zeige, dass für die Verminderungsgröße d gilt: $d = \dfrac{2(na_1 - (K_0 - K_n))}{n(n-1)}$

[6] Lösungen siehe Seite 53.

c) Welche Ungleichung muss zwischen der 1. Abschreibung a_1 und dem abzuschreibenden Betrag $K_0 - K_n$ gelten, damit die Verminderungsgröße d positiv wird?

d) Ein Neuwert von 105 000 € soll in sieben Jahren auf 10% seines Wertes abgeschrieben werden. Der erste Abschreibungsbetrag soll 21 000 € betragen. Erstelle den Abschreibungsplan: Jahr, Wert zu Anfang, Abschreibung, Restwert.

15. Die geometrisch-degressive Abschreibung wird nach einem unveränderlichen Prozentsatz vom Restwert vorgenommen.
    a) Gib den Restwert K_i allgemein an, wenn der Anschaffungswert K_0 im Laufe von n Jahren bei p% jährlich degressiv abgeschrieben wird.
    b) Eine Maschine mit Anschaffungswert von 1,2 Millionen Euro soll jährlich mit 8% vom Restwert abgeschrieben werden. Wie groß ist der Restwert nach 9 Jahren?
    c) Wie lange müsste mindestens abgeschrieben werden, wenn bei b) mit 250 000 € Schrottwert gerechnet wird?

16. Eine Hypothek von 120 000 € ist mit 8% verzinst und soll innerhalb von 8 Jahren durch gleich große Raten getilgt werden. Erstelle den Tilgungsplan: Jahr, Schulden am Anfang, Zinsen, Tilgung und Annuität.

17. An einem Quadrat der Kantenlänge a wird über der Mitte jeder Seite jeweils ein Quadrat der halben Kantenlänge nach außen gezeichnet. Im Weiteren wird jeweils an jeder „freien“ Seite dieser Quadrate ein weiteres Quadrat einer Seitenlänge, die die Hälfte der Seitenlänge des vorhergehenden Quadrats ist, nach außen gezeichnet usw.
    a) Wie groß ist der Flächeninhalt aller Quadrate nach 5 Schritten?
    b) Um wie viel Prozent hat der Flächeninhalt bei a) bezüglich des Ausgangsquadrats zugenommen?
    c) Wie oft muss man Quadrate anfügen, damit der Zuwachs mehr als 125% beträgt?
    d) Finde durch Probieren, welchen maximalen Zuwachs die angefügten Quadrate erreichen können.

2. Potenz- und Wurzelfunktionen

2.1 Parabeln

Wiederholung

Eine Funktion f bildet jedes x aus der Definitionsmenge D(f) *eindeutig* in die Wertemenge W(f) ab. Es ist also keinem x aus D(f) mehr als ein y aus W(f) zugeordnet.

Nehmen mit wachsenden x die Funktionswerte *streng zu*, nennt man die Funktion **streng monoton wachsend** und den Graphen hier **streng monoton steigend**. Analog erklärt man **streng monoton abnehmend** bzw. **streng monoton fallend.**

Man nennt eine Funktion f **symmetrisch zur y-Achse**, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle x der Definitionsmenge gilt.
Der Graph zu f heißt **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle x der Definitionsmenge gilt.

Eine Funktion f: $x \mapsto x^p$ für alle $x \in \mathrm{D}(f)$ und einem festen $p \in \mathbb{R}$ heißt **Potenzfunktion**.

Zunächst werden die Graphen von Potenzfunktionen $y = ax^p$ für $p \in \mathbb{N}_0$ und reelle $a \neq 0$ untersucht. Diese Graphen heißen **Parabeln p-ter Ordnung**.

Für $p = 0$ und $p = 1$ sind das Geraden durch den Ursprung oder Parallele zur x-Achse.
Für $p = 2$ ergeben sich die bereits bekannten Parabeln der Ordnung 2; sie haben die folgenden Eigenschaften:
- Die y-Achse ist Symmetrieachse.
- $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ und $\mathrm{W} = \mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathrm{W} = \mathbb{R}_0^-$, weil gilt:
- Für $a > 0$ fällt der Graph in $]\infty;0]$ streng monoton, in $[0;\infty[$ steigt er streng monoton.
- Für $a > 0$ ist die Parabel zu $y = ax^2$ nach oben geöffnet, für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

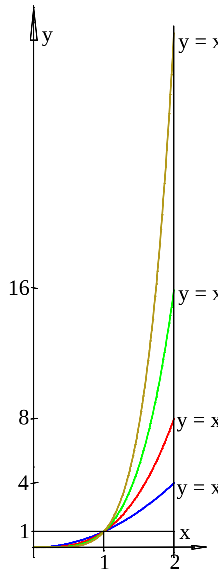
Zunächst werden auf hundertstel gerundete Wertetabellen zu $y = x^n$ für $x \geq 0$ und $n \in \{1;2;3;4;5\}$ erstellt:

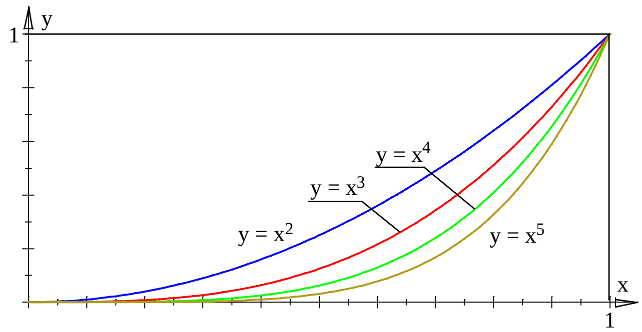
x	0	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50
x^2	0	0.06	0,25	1,00	2.25	4,00	6,25
x^3	0	0,02	0,13	1,00	3.38	8,00	15,63
x^4	0	0,00	0,06	1,00	5,06	16,00	39,01
x^5	0	0,00	0,03	1,00	7,59	32,00	97,70

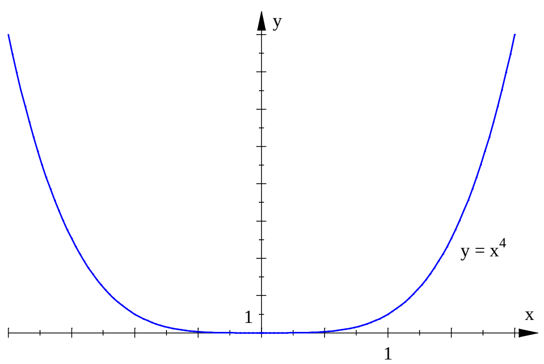
Hieraus werden die dazugehörigen Graphen gezeichnet und die Graphen zu $x \in [0;1]$ vergrößert, wie man dies unten findet. Aus den Abbildungen erkennt man:

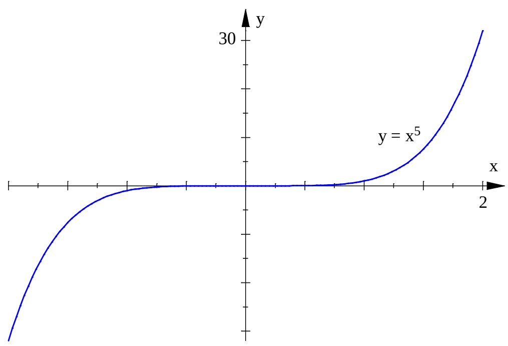
- $W(f) = \mathbb{R}_0^+$
- In $]0;1[$ verlaufen die Graphen um so näher an der x-Achse, je größer der Exponent ist.
- In $]1;\infty[$ verlaufen die Graphen um so weiter weg von der x-Achse, je größer der Exponent ist.

Für $x < 0$ erhält man wegen $(-x)^n = (-1)^n x^n = \begin{cases} x^n & \text{für } n \text{ gerade.} \\ -x^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$:









Für gerade n gilt $f(-x) = f(x)$; d. h. der Graph ist symmetrisch zur y-Achse, die Funktion heißt **gerade**.

Für ungerade n gilt $f(-x) = -f(x)$; d. h. der Graph ist symmetrisch zum Ursprung, die Funktion heißt **ungerade**.

Zusammenfassung:

Parabeln $y = x^n$ gerader Ordnung n	**Parabeln $y = x^n$ ungerader Ordnung n**
(1) D(f) = $\mathbb{R}$ und W(f) = $\mathbb{R}_o^+$ (2) Gemeinsame Punkte sind (–1| 1), (0 | 0), (1 | 1). (3) Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse. (4) In $\left]-\infty;0\right]$ ist der Graph streng monoton fallend, in $\left[0;\infty\right[$ ist er streng monoton steigend.	(1) D(f) = $\mathbb{R}$ und W(f) = $\mathbb{R}$ (2) Gemeinsame Punkte sind (–1| –1), (0 | 0), (1 | 1). (3) Der Graph ist symmetrisch zum Ursprung. (4) Der Graph ist in D(f) streng monoton steigend.
(5) In $\left[-1;1\right]$ verlaufen die Graphen umso näher an der x-Achse, je größer der Exponent ist. In $\mathbb{R}\backslash\left[-1;1\right]$ verlaufen die Graphen umso weiter weg von der x-Achse, je größer der Exponent ist.	
(6) Eine weitere Eigenschaft für den **Graphen von $y = ax^n$** mit $a \neq 0$: Für $a > 0$ bleiben die Eigenschaften (1) bis (5) erhalten. Für $a = -\lvert a\rvert < 0$ kommt noch eine Spiegelung an der x-Achse dazu.	

Arbeitsblatt 10.1: Parabeln n-ter Ordnung[7]

1. Welche Punkte sind allen Graphen zu $y = ax^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gemeinsam, wenn gilt:
   a) $a > 0$ und n gerade b) $a < 0$ und n ungerade c) $a \neq 0$

2. a) Welches Monotonieverhalten haben alle Graphen zu $y = ax^n$ mit $a < 0$ für ungerade n?
   b) In welchen Intervallen sind die Graphen zu $y = ax^n$ mit $a < 0$ und ungeradem n streng monoton fallend, in welchen streng monoton steigend?
   c) Welchen besonderen Graphen hat die Potenzfunktion $y = x^0$? Welcher Punkt ist nicht erfasst (Begründung!)?

3. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph zu $y = -0{,}25x^4 + 5$ achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$.
   a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die x-Werte –3, –2,5,….., 1 und zeichnen Sie den Graphen mit den Einheiten 2 cm.
   b) Wie geht der Graph zu f aus dem Graphen zu $y = z^3$ hervor?
   c) Weiter ist nun die Funktion $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ mit D = $\mathbb{R}$ gegeben. Formen Sie die Funktionsgleichung wie in b) um.
   d) Durch welche geometrischen Abbildungen kann man den Graphen von f in den von g überführen?

5. Alle Punkte eines Kreises um M(0 | 0) mit Radius 5 cm genügen der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 5$ mit dem Kreis.
   b) Zeichnen Sie einen Kreis um den Ursprung mit Radius 2 cm und skizzieren Sie für einige $a \in \mathbb{R}$ die Parabeln zu $y = x^2 + a$. Stellen Sie die Anzahl der Schnittpunkte der Parabel mit dem Kreis in Abhängigkeit von a fest.

6. Gegeben ist die Funktion zu $y = x^3 - x$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen.
   b) Zeichnen Sie den Graphen durch Superposition der Graphen zu $y = x^3$ und $y = -x$ für $\lvert x\rvert \leq 2$ mit Längeneinheit 2 cm auf beiden Achsen.
   c) Beweisen Sie, dass die Funktion zu $y = x^3 - x$ ungerade ist.
   d) Geben Sie auf Grund der Zeichnung das Monotonieverhalten in den entsprechenden Intervallen an.

[7] Lösungen Seite 55

7. Gegeben ist die Funktion zu $y = x^4 - x^2$ mit der Definitionsmenge ℝ.
   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.
   b) Zeichnen Sie den Graphen durch Superposition (Einheit 4 cm auf beiden Achsen).
   c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeichnung die Intervalle, in denen die Funktion streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend ist.
   d) Beweisen Sie, dass die Funktion gerade ist.
   e) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit der Geraden zu $y = 2$.

8. Die folgende Wertetabelle gehört zu der Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	6,25	8	6,75	4	1,25	0	1,75	8

Die Gerade zu $y = mx + t$ ist durch 2 Punkte, die Parabel zu $y = ax^2 + bx + c$ ist durch 3 Punkte festgelegt, wobei man die Parameter *m*, *t* bzw. *a*, *b*, *c* jeweils durch ein Gleichungssystem bestimmt.
   a) Wie heißen diejenigen Parabeln, durch die man den Graphen zu f in $[0;4]$ bzw. in $[4;8]$ approximieren kann?
   b) Ersetzen Sie f durch eine lineare Funktion in $[7;8]$.

9. Gegeben ist eine Funktion durch die folgenden Werte:

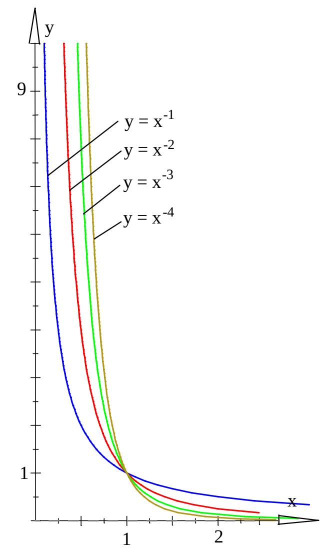
x	–2	–1	0	1	2	3	5
y	–3	0	2	0	–3	–4	0

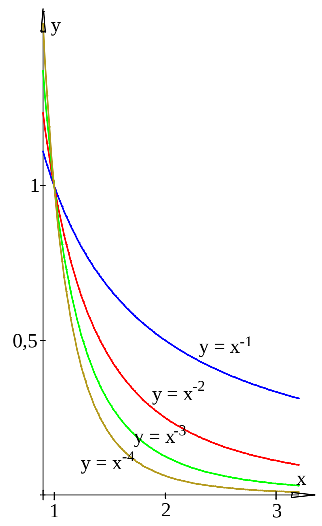
   a) Fertigen Sie eine Skizze.
   b) Bestimmen Sie die Parameter von $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ so, dass diese Funktion obige Wertetabelle erfüllt.

2.2 Hyperbeln

Die Graphen zu $y = x^{-n}$ mit D = ℝ\{0} und $n \in$ ℕ bezeichnet man als **Hyperbel der Ordnung n**:

x	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
x^{-1}	4,00	2,00	1,00	0,67	0,50	0,40	0,33
x^{-2}	16,00	4,00	1,00	0,44	0,25	0,16	0,11
x^{-3}	64,00	8,00	1,00	0,30	0,13	0,06	0,04
x^{-4}	256,00	16,00	1,00	0,20	0,06	0,03	0,01

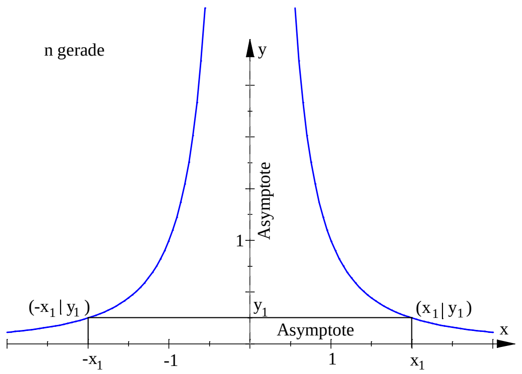


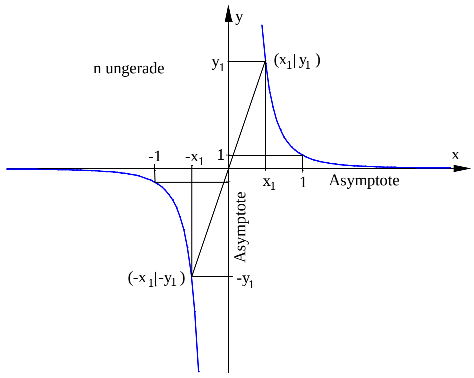


Damit erkennt man für $x > 0$:

- $W(f) = \mathbb{R}^{+}\setminus\{0\}$
- In $]0;\infty[$ fallen die Graphen streng monoton.
- In $]0;1[$ verlaufen die Graphen umso näher an der x-Achse, je größer der Exponent ist.
- In $]1;\infty[$ verlaufen die Graphen umso näher an der x-Achse, je kleiner der Exponent ist.

Für $x < 0$ erhält man wegen $(-x)^{-n} = (-1)^{-n}x^{-n} = \begin{cases} x^{-n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ -x^{-n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$.





Für gerade n gilt $f(-x) = f(x)$; d. h. der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

Für ungerade n gilt $f(-x) = -f(x)$; d. h. der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.

Der Graph kommt der x-Achse und der y-Achse beliebig nahe, ohne sie aber zu schneiden; man nennt deshalb die Achsen **Asymptoten** des Graphen.

Zusammenfassung:

Hyperbeln gerader Ordnung	Hyperbeln ungerader Ordnung
(1) $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $W(f) = \mathbb{R}^{+}\setminus\{0\}$	(1) $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $W(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
(2) Gemeinsame Punkte sind $(-1 \mid 1)$, $(1 \mid 1)$	(2) Gemeinsame Punkte sind $(-1 \mid -1)$, $(1 \mid 1)$
(3) Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.	(3) Der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.
(4) In $]-\infty;0]$ ist der Graph streng monoton steigend, in $[0;\infty[$ ist er streng monoton fallend.	(4) Der Graph ist in $D(f)$ streng monoton fallend.
(5) Die x-Achse und die y-Achse sind Asymptoten.	

Aufgabenblatt 10.2: Hyperbeln[8]

1. Welche Punkte sind allen Graphen zu $y = ax^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gemeinsam, wenn gilt:
   a) $a > 0$ und n gerade b) $a > 0$ und n ungerade c) $a < 0$ und n gerade d) $a < 0$ und n ungerade
   e) $a \neq 0$

2. Gegeben ist die Hyperbelfunktion zu $f(x) = -4x^{-1}$.
   a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $x \in \left\{-8;-6;-4;-2;-1;-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right\}$.
   b) Zeichnen Sie unter Ausnutzung der Symmetrie den Graphen für $|x| \leq 8$.
   c) Entnehmen Sie der Zeichnung diejenigen x-Werte, für die $|f(x)| = 2{,}5$ gilt.
   d) Berechnen Sie denjenigen x-Wert, für den $f(x) = 0{,}25$ gilt.

---

[8] Lösungen Seite 57.

3. Gegeben ist die Funktion zu $y = -2x^{-3} + 4$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   a) Skizzieren Sie den Graphen für $|x| \le 2$.
   b) Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten?
   c) Welcher x-Wert wird von der Funktion auf 132 abgebildet?
4. Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $y = 1 + (x+1)^{-1}$.
   a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.
   b) Zeigen Sie durch algebraische Umformungen, dass sich die gegebene Funktionsgleichung auch in der Form $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ schreiben lässt.
   c) Skizzieren Sie den Graphen.
   d) Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten?
   e) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen.

5. Die folgende Funktion ist gegeben durch $y = 0{,}5(x-3)^{-2} - 2$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
   a) Erstellen Sie für [0;6] eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen mit der Einheit 2 cm auf beiden Achsen.
   b) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.
   c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen rechnerisch.
   d) Durch welche geometrischen Abbildungen erhält man den Graphen aus dem, der zu $y = x^{-2}$ gehört?

6. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden durch ihre Funktionsgleichungen gegebenen Graphen:
   a) $y = 0{,}5x^3$ und $y = x^{-1}$ b) $y = -x^3$ und $y = c \cdot x^{-1}$ c) $y = a \cdot x^3$ mit $a \ne 0$ und $y = 2x^{-2}$

7. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte zwischen den Graphen zu $x^2 + y^2 = 2$ und $y = x^{-1}$.

8. Gegeben ist ein Kreis durch $x^2 + y^2 = r^2$ und eine Hyperbel durch $y = c \cdot x^{-1}$. Für $r = 1$ und $c = -1$ haben Kreis und Hyperbel keinen Punkt gemeinsam. Man kann nun Schnittpunkte dadurch erzwingen, dass man den Radius r oder den Parameter c verändert.
   a) Wie muss man bei $c = -1$ den Radius r wählen, damit man genau zwei Schnittpunkte erhält? Für welche r erhält man keinen Schnittpunkt, für welche r vier Schnittpunkte?
   b) Wie muss c gewählt werden, damit sich der Kreis mit Radius 1 und die Hyperbel genau zweimal treffen?

9. Gegeben ist eine Hyperbel mit $y = 2x^{-1}$ und die Punkte A(–3| –1), B(3 | –1) und D(–3| 2).
   a) Zeichnen Sie die Hyperbel und die Punkte A, B und D in ein Koordinatensystem mit Einheit 2 cm auf beiden Achsen ein.
   b) Die Punkte $C_1(0{,}5 \mid y_1)$, $C_2(1{,}5 \mid y_2)$ und $C_3(x_3 \mid 1)$ liegen auf einem Hyperbelast. Brechnen Sie die fehlenden Koordinaten.
   c) Zeichnen Sie das Viereck ABC_1D ein und berechnen Sie den Flächeninhalt A. Zerlegen Sie hier das Viereck durch eine Parallele zur x-Achse durch C_1 in ein Dreieck und in ein Trapez.
   d) Für welche Punkte $C(x \mid y)$ mit $x > 0$ auf der Hyperbel erhält der Flächeninhalt A von c) den Wert $A(x) = (1{,}5x + 7{,}5 + 6x^{-1})$ cm²? Zeichnen Sie die beiden Dreiecke in das Koordinatensystem ein.

2.3 Monotoniegesetze für Potenzen

Die Gesetze P4 leiten sich aus den folgenden Gesetzen einer Anordnung ab:

A1: Für je zwei Elemente a, b steht fest, ob $a \le b$ oder $b \le a$. Für $b \le a$ schreibt man auch $a \ge b$.
A2: Es gilt stets $a \le a$; man sagt: ≤ ist reflexiv.
A3: Aus $a \le b$ und $b \le c$ folgt stets $a \le c$; man sagt: ≤ ist transitiv.
A4: Aus $a \le b$ und $b \le a$ folgt $a = b$; man sagt: ≤ ist antisymmetrisch.
A5: Für alle a, b, c mit $a \le b$ gilt $a + c \le b + c$.
A6: Für alle a, b mit $a \le b$ und $c > 0$ gilt $ac \le bc$.

Nun kann man jede Multiplikation mit $c < 0$ zusammensetzen aus einer Multiplikation mit $|c|$ und einer mit (-1). Erstere wird durch A6 erfasst. Bei letzterer „weiß man“, dass sich auf beiden Seiten der Ungleichung die Gegenzahlen ergeben; damit hat man die erste Behauptung des folgenden Satzes:

Satz 2.3.1: a) *Für alle a, b mit* $a \leq b$ und $c < 0$ gilt $ac \geq bc$.

b) *Für alle a, b gilt* $0 < a < b$ *genau dann, wenn* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

c) *Für alle positiven a, b und natürlichen n gilt* $a < b$ *genau dann, wenn* $a^n < b^n$ *erfüllt ist.*

Beweis zu b) mit A6: Aus $0 < a < b$ *folgt* $\frac{ab}{a^2b^2} > 0$ *und damit* $a \cdot \frac{ab}{a^2b^2} < b \cdot \frac{ab}{a^2b^2}$, *also* $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. *Die Umkehrung geht genauso.*

Beweis zu c): Aus $0 < a < b$ *folgt mit A6* $a^2 < ab < b^2$. *Durch wiederholte Anwendung dieser Multiplikation folgt* $a^n < b^n$. *Geht man von* $a^n < b^n$ *aus und nimmt an* $a < b$ *sei falsch, dann muss entweder* $a = b$ *oder* $a > b$ *sein. Aus ersteren folgt* $a^n = b^n$, *also ein Widerspruch; aus dem zweiten würde folgen* $a^n > b^n$ *und damit abermals der Widerspruch* $a^n = b^n$ *mit der Voraussetzung nach A4.*

Wegen Satz 2.3.1c und der Wurzeldefinition sind die folgenden Aussagen für positive Zahlen a und b bzw. natürliche n äquivalent: $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n < \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

Satz 2.3.1c) gilt dann aber auch für positive rationale Exponenten $r = \frac{m}{n}$, *weil die folgenden Aussagen ebenfalls äquivalent sind:* $a^r < b^r \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad a^m < b^m \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

Für negative rationale Exponenten $r = -s$ *sind dann wegen Satz 2.3.1b) die folgenden Aussagen äquivalent*

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^s < b^s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^s} > \frac{1}{b^s} \quad \Leftrightarrow \quad a^{-s} > b^{-s} \quad \Leftrightarrow \quad a^r > b^r .$$

Insgesamt hat man also unter Einbeziehung der Überlegung mit den Intervallschachtelungen gefunden :

Satz 2.3.2: *Für reelle Zahlen a, b und p gilt das* ***1. Monotoniegesetz für Potenzen:***
Für $p > 0$ *gilt* $0 < a < b$ *genau dann, wenn* $a^p < b^p$ *erfüllt ist.*
Für $p < 0$ *gilt* $0 < a < b$ *genau dann, wenn* $a^p > b^p$ *erfüllt ist.*

In Kapitel 2.2 hat man erfahren, dass für positive x beim Kurvenverlauf zwischen $x > 1$ *und* $x < 1$ *unterschieden werden muss. Hierbei spielt keine Rolle, ob der Exponent der Potenzfunktion positiv oder negativ ist.*
Der Anschauung entnehmen wir:

Satz 2.3.3 (2. Monotoniegesetz für Potenzen): *Für reelle Zahlen a, p und q mit* $0 < a$ *gilt* $p < q$ *genau dann, wenn*

a) $a^p > a^q$, *falls* $0 < a < 1$ *bzw.*
b) $a^p < a^q$, *falls* $1 < a$ *bzw.*
c) $a^p = a^q$, *falls* $1 = a$.

Das Kapitel 2.3 wird man seinen guten Schülern in aller Regel nicht so nebenher im Unterricht auseinandersetzen können. Man wird sich wohl entschließen müssen, dies in einer Zusatzstunde für Interessierte zu lehren.

Arbeitsblatt 10.3: Potenzfunktionen, Monotoniegesetze für Potenzen[9]

Die Aufgaben sind zum großen Teil dem Entwurf von MEYER U. A. [6], Seiten 57 – 59 entnommen.

1. Zeigen Sie, dass der Graph von $f(x) = 2x^{-5}$ für $x > 1$ näher an der x-Achse verläuft als der Graph von $g(x) = 2x^{-3}$.

2. Was wird aus der Ungleichung 2,5 < 4, wenn man
   a) auf beiden Seiten der Ungleichung 10 subtrahiert,
   b) beide Seiten der Ungleichung mit 8 bzw. – 2 multipliziert,
   c) auf beiden Seiten der Ungleichung durch – 5 dividiert,
   d) auf beiden Seiten der Ungleichung jeweils den Kehrwert bildet,
   e) beide Seiten mit 3 bzw. – 5 potenziert?

3. Finden Sie ohne Taschenrechner Ungleichungen zwischen den folgenden Termen; begründen Sie:
   a) $2{,}1^4$ und $2{,}2^4$ b) $2{,}3^{-2}$ und $2{,}3^{-3}$ c) $2{,}2^{-2}$ und $2{,}2^3$
   d) $2{,}1^4$ und $2{,}2^5$ e) $2{,}3^{-2}$ und $2{,}8^{-5}$ f) $2{,}2^{-2}$ und $2{,}8^5$
   g) $\left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}625}$ und $\left(\sqrt{3}\right)^{-0{,}750}$ h) $\left(\sqrt{0{,}25}\right)^{2{,}5}$ und $\left(\sqrt{0{,}8}\right)^{-0{,}75}$

4. Ordnen Sie die folgenden Potenzen ohne Taschenrechner zu einer steigenden Ungleichungskette:
   a) $2{,}3^{-2};\ 2{,}3^4;\ 2{,}9^{-2}$ b) $0{,}25^{-1{,}5};\ 0{,}24^{-1{,}9};\ 0{,}25^{-1{,}9}$ c) $2\sqrt{5};\ 5\sqrt{2};\ \sqrt{21};\ \sqrt{52}$

5. Bestimmen Sie bei a), b) und c) mit dem Taschenrechner, bei e) ohne Taschenrechner, diejenigen natürlichen Zahlen, die jeweils der folgenden Doppelungleichung genügen:
   a) $2^5 \le x^2 \le 3^4$ b) $\sqrt{64} < (x+1)^2 \le 5^4$ c) $10^2 < x^3 < 2^{17}$ d) $3^5 \le x^4 < 2^{20}$
   e) $(2^3)^4;\ 2^{\left(3^4\right)};\ \left(2^4\right)^3$; geben Sie an, wie oft die kleinere Zahl in der größeren Zahl enthalten ist.

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Doppelungleichung:
   $(2x+3)^3 \le 8x^3 < (2x-3)^3$

2.4 Wurzelfunktionen

Wiederholung zur Jahrgangsstufe 9:

Bei den Quadratwurzeln wurde das Folgende schon einmal auseinandergesetzt:
Mit der Schreibweise f: D(*f*) → W(*f*) bezeichnet man eine **Funktion**; sie bildet *jedes x* aus D(*f*) *eindeutig in* W(*f*) ab, d. h. jedem *x* aus D(*f*) wird durch *f genau ein y* aus W(*f*) zugeordnet: $f : x \mapsto y = f(x)$

Ist $f : x \mapsto y = f(x)$ eine Funktion, so nennt man die Zuordnung $f^* : y \mapsto x$ eine **Umkehrung *f** von *f***.

Ist *f** wieder eine Funktion, so nennt man diese die **Umkehrfunktion von *f***.

Das Nacheinanderausführen zweier Funktionen *f* und *g* nennt man eine Verkettung; in Zeichen:

$$\mathrm{D}(f) \xrightarrow{f} \mathrm{W}(f) \subseteq \mathrm{D}(g) \xrightarrow{g} \mathrm{W}(g) \quad \text{oder}$$

$$\mathrm{D}(f) \xrightarrow{g \circ f} \mathrm{W}(g)$$

Man beachte die Schreibweise $g \circ f$, die man „*g* nach *f* liest“; man beachte auch, dass i. Allg. $g \circ f$ nicht die volle ursprüngliche Wertemenge W(*g*) ergibt. Man schreibt auch

$$x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) = g(f(x)) \quad \text{oder}$$

$$x \mapsto z = g \circ f(x) = g(f(x)).$$

[9] Lösungen siehe Seite 60.

Hat die Funktion *f* eine Umkehrfunktion *f**, so gilt $f \circ f^* = f^* \circ f = id$, wobei *id* die identische Abbildung ist, also diejenige Abbildung, die ganz D unverändert lässt, also *y* = *x* für alle *x* aus D gilt. Sie haben diese Abbildung schon bei den linearen Funktionen bzw. bei den Achsenspiegelungen *S* kennen gelernt; für letztere gilt $S \circ S = S^2 = id$.

Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ hat keine Umnkehrfunktion, weil zu jedem *y* des Wertebereichs zwei *x* der Definitionsmenge gehören. Man kann aber die Definitionsmenge etwa auf D = $\mathbb{R}_0^+$ einschränken und dann hat die Funktion $y = x^2$ mit *x* aus D = $\mathbb{R}_0^+$ eine Umkehrfunktion $x = \sqrt{y}$ mit *y* aus W = $\mathbb{R}_0^+$. Existiert also eine Umkehrfunktion *f** zu *f*, so hat sie die ursprüngliche Wertemenge als Definitionsmenge und umgekehrt. Man sagt: „Die umkehrbaren Funktionen sind **eineindeutig** oder **umkehrbar eindeutig**“.

Gibt es zu $y = x^2$ eine zweite Umkehrfunktion? Begründen Sie!

Will man analog dem Bisherigen eine Funktion samt ihrer Umkehrung graphisch dokumentieren, so haben beide denselben Graphen $\{(x \mid y)$: $y = x^2$ für alle *x* aus $\mathbb{R}_0^+\}$= $\{(x \mid y)$: $x = \sqrt{y}$ für alle *y* aus $\mathbb{R}_0^+\}$. Um hier einen **eigenen Graphen für die Umkehrfunktion** zu bekommen, vertauscht man *x* mit *y*, was im Koordinatensystem einer Spiegelung an der Geraden *y* = *x* entspricht. Man stellt also die Funktion $y = \sqrt{x}$ dar. Man möge beachten:
$y = \sqrt{x}$ mit *x* aus D = $\mathbb{R}_0^+$ ist dann nicht mehr die Umkehrung von $y = x^2$ mit *x* aus D = $\mathbb{R}_0^+$.

Schließlich sei noch bemerkt:
Jede Funktion zweiten Grades kann auf die **Scheitelform** $y = a(x-s)^2 + t$ mit dem Scheitel $(s \mid t)$ gebracht werden. Der Scheitel trennt die (beiden) Bereiche, in denen die Funktion ein unterschiedliches Monotonieverhalten hat. In jedem der Teile kann die quadratische Funktion umgekehrt werden.

Satz 2.4.1: Jede Potenzfunktion $x \mapsto x^p$ mit D = $\mathbb{R}$ hat dort eine Umkehrfunktion, wo sie streng monoton ist.

Beweis:
Die Potenzfunktion $x \mapsto y = x^p$ sei für alle *x* aus D streng monoton und nehme hier genau alle Werte *y* aus W an.
Annahme: Für $x_1 < x_2$ aus D gelte $x_1^p = x_2^p$.
Das ist ein *Widerspruch* zum 1. Monotoniegesetz für Potenzen (siehe 2.3.2): Aus $x_1 < x_2$ folgt $x_1^p < x_2^p$ oder $x_1^p > x_2^p$. Deshalb gibt es zu jedem *y* aus W genau ein *x* aus D mit $y = x^p$; d. h. $y = x^p$ hat eine Umkehrfunktion.

Beachten Sie:
Existiert eine Umkehrfunktion, deren Term man durch algebraische Umformungen nicht bestimmen kann, so gibt man der Umkehrfunktion ein eigenes Symbol; z. B.:
$y = x^2$ mit *x* aus $\mathbb{R}_0^+$ hat die Umkehrfunktion $x = \sqrt{y}$ mit *y* aus $\mathbb{R}_0^+$.
Allgemein:
$y = x^p$ mit *x* aus $\mathbb{R}_0^+$ und *p* aus $\mathbb{N}$ hat die Umkehrfunktion $x = \sqrt[p]{y}$ mit *y* aus $\mathbb{R}_0^+$.

Beispiel 2.4.2: Bestimmen Sie zu $y = 0{,}25x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}_0^-$ den Funktionsterm der Umkehrfunktion.

Lösung:	*Verfahren:*
1. $y = 0{,}25x^2 - 1$, D(*f*) = $\mathbb{R}_0^-$, W = $[-1;\infty[$ $y+1 = 0{,}25x^2$ $4(y+1) = x^2$ $x = \pm\sqrt{4(y+1)}$	1. Lösen Sie die Funktionsgleichung mit algebraischen Umformungen nach x auf.
2. f^*: $y = -\sqrt{4(x+1)}$ wegen D(*f*) = $\mathbb{R}_0^-$.	2. Vertauschen Sie die Variablen *x* und *y*.

Beachten Sie: Die Verfahrensschritte 1. und 2. können vertauscht werden.

Beispiel 2.4.2: Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = (x+4)^5 + 3$ in D = $[-4;\infty[$.

a) Bestimmen Sie die Monotonie (Begründung). b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

Lösung:

a) Mit $x_1 < x_2$ aus D folgt: $x_1 + 4 < x_2 + 4$ — Monotoniegesetz der Addition

$\Rightarrow \quad (x_1+4)^5 < (x_2+4)^5$ — 1. Monotoniegesetz für Potenzen ($x_1 + 4 > 0$)

$\Rightarrow \quad (x_1+4)^5 + 3 < (x_2+4)^5 + 3$ — Monotoniegesetz der Addition

D. h. *f* ist streng monoton zunehmend.

b) D(*f**) = W(*f*) und W(*f**) = D(*f*) = $[-4;\infty[$.

1. $y = (x+4)^5 + 3$

   $y - 3 = (x+4)^5$

   $\sqrt[5]{y-3} - 4 = x$

2. $f^*(x) = y = \sqrt[5]{x-3} - 4$ mit D(*f**) = $[3;\infty[$

Arbeitsblatt 10.4: Umkehrfunktionen – Wurzelfunktionen[10]

1. a) Bestimmen Sie zu $y = -\frac{1}{3}(2x-1)$ mit $x \in \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion.
   b) Wie heißt die Umkehrung zu *y* = 4? Welche besondere Lage nehmen Funktion und Umkehrfunktion im Koordinatensystem zueinander ein?
   c) Warum gibt es zur Geraden *x* = 1 keine Umkehrfunktion?

2. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = |x+1| - 2$ mit einem maximalen Definitionsbereich.
   a) Schreiben Sie die Funktion betragsfrei.
   b) Zeichnen Sie den Graphen.
   c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
   d) Welche Umkehrfunktionen kann man hierzu definieren?

3. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 0{,}5x^2 - 2x + 5$ mit D(*f*) = ℝ.
   a) Zerlegen Sie D(*f*) in zwei Intervalle so, dass *f* jeweils im Teilintervall als f_1 bzw. f_2 umkehrbar wird. Bestimmen Sie die dazugehörigen Umkehrfunktionen.
   b) Berechnen Sie die Schnittpunte von *f* mit der Winkelhalbierenden im 1. und 3. Quadranten des Koordinatensystems.
   c) Was folgt aus b) für die Schnittpunkte von f_1^* mit der Winkelhalbierenden?
   d) Skizzieren Sie alle Graphen in ein Koordinatensystem.

4. Gegeben sind in ℝ die Funktionen $y = f_1(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ und $y = f_2(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.
   a) Geben Sie jeweils die Defintionsmenge als Intervall an.
   b) Bestimmen Sie die dazugehörigen Umkehrfunktionen.
   c) Skizzieren Sie alle Graphen.

5. Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion f: $x \mapsto \begin{cases} 1 + 2x - 0{,}5x^2 & \text{für }]-\infty;1] \\ 0{,}5x + 2 & \text{für } [1;\infty[\end{cases}$.
   a) Zeigen Sie, dass *f* eine Umkehrfunktion besitzt.
   b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion *f**.
   c) Zeichnen Sie die Graphen von *f* und *f** für $x \in [-1;5]$.
   d) Zwischen den Graphen von *f* und *f** wird eine Fläche eingeschlossen. In welchem Verhältnis teilt die Gerade zu $y = x$ diese Fläche (Begründung).

[10] Lösungen siehe Seite 60.

6. Gegeben ist die Funktion $y = \frac{1}{12}x^2 + x - 1{,}5$ mit D = $\mathbb{R}$.
   a) Bestimmen Sie *a* so, dass *f* in einem möglichst großen Intervall [*a*;6] umkehrbar ist.
   b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

7. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{2+x^2}{x^2}$ mit D = $\mathbb{R}^-$.
   a) Formen Sie den Funktionsterm so um, dass man den Graphen als Superposition aus einer Geraden und aus einer Hyperbel erhält.
   b) Bestimmen Sie, wo *f* streng monoton ist und bestimmen Sie dann *f**.
   c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen zu *f* mit der Geraden zu $y = -3x$. Zeigen Sie durch Polynomdivision, dass es keine weiteren Schnittpunkte außer dem im zweiten Quadranten gibt.
   d) Zeichnen Sie beide Graphen in einem Koordinatensystem.

8. Bestimmen Sie in den angegebenen Intervallen jeweils die Umkehrfunktionen. Der Nachweis der strengen Monotonie braucht nicht ausgeführt zu werden.
   a) $y = 2x^{-3} + 4$ in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. b) $y = -0{,}25x^4 + 5$ in $\mathbb{R}^-$. c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ in $[-1;\infty[$.

9. Bestimmen Sie diejenigen natürlichen Zahlen, die folgende Doppelungleichungen erfüllen:
   a) $500 < x^3 < 10^6$ b) $99 < (x+1)^3 \leq 9^9$ c) $2^8 \leq (z-1)^3 < 11^5$ d) $2 \leq \sqrt[3]{z+2} \leq 5$
   e) Welche Eigenschaften der Potenzfunktion $y = x^3$ verwendet man beim Lösen dieser Ungleichungen?

10. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ mit D = $\mathbb{R}$.
    a) Skizzieren Sie den Graphen. Wie entsteht er aus dem Graphen zu $y = x^3$ mit x aus $\mathbb{R}_0^-$?
    b) Bestimmen Sie jeweils nach Einschränkung von D(*f*) die Umkehrfunktion.

11. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x)$ mit D(*f*) = $\mathbb{R}$. Bestimmen und begründen Sie die Monotonie und berechnen Sie *f** bei eventueller Einschränkung der Definitionsmenge:
    a) $y = -(x-2)^3$ b) $y = (x-1)^5 - 2$ c) $y = -(x+3)^6 - 1$ d) $y = -x^3 - 6x^2 - 12x - 9$
    e) $y = (x-a)^n + b$ für reelle *a* und *b* (Fallunterscheidung)

12. Man kann die Gleichung $x^3 = 150$ durch **Iteration** lösen:
    Da $5^3 = 125 < 150 < 216 = 6^3$ ist, liegt die Lösung in [5;6].
    Mit der ersten Lösung $x_1 = 5$ wählt man einen besseren Wert $x_2 = 5 + h$ mit *h* aus]0;1[:
    $(5+h)^5 = 5^3 + 3\cdot 5^2 \cdot h + 3\cdot 5\cdot h^2 + h^3 \approx 125 + 75h$, weil man die höheren Potenzen von *h* vernachlässigen kann, weil *h* < 1 ist.
    Aus 125 + 75*h* = 150 berechnet man $h = \frac{1}{3}$. Also ist $x_2 = 5 + \frac{1}{3}$ eine bessere Näherungslösung. Wiederholt man das Verfahren mit x_2, so erhält man $x_3 = x_2 + h$ und daraus $x_2^3 + 3x_2^2 \cdot h' \approx 150$.
    Berechnen Sie x_3 und x_4 und überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Taschenrechner.

3. Exponentialfunktion[11]

3.1 Vergleich zwischen linearem und exponentiellem Wachstum

Beispiel 3.1.1: In einem von Hungerkatastrophen heimgesuchten Entwicklungsland mit 60,0 Millionen Einwohnern im Jahr 0 wurden in fünf aufeinander folgenden Jahren durch Entwicklungsmaßnahmen in der Landwirtschaft beachtliche Leistungssteigerungen erzielt.

Jahr	1	2	3	4	5
Weizenerträge in 1000 Tonnen	3 095	3 205	3 309	3 398	3 503

[11] Aufbau und Aufgaben nach MEYER U. A. [6].

Landwirtschaftsexperten glaubten, dass auf Grund der vorhandenen Ressourcen in den nächsten Jahren ähnliche Steigerungen erreicht werden können, und hofften deshalb auf eine dauerhafte Lösung der Ernährungsprobleme des Landes. Namhafte Demographen wiesen jedoch darauf hin, dass durch bessere Ernährung u. a. mit einer durchschnittlichen jährlichen Wachstumsrate der Bevölkerung von 2,8% zu rechnen sei, dadurch würde die Versorgung mit Weizen bald schlechter sein als zu Anfang.
Wer hatte Recht? Beantworten Sie die Frage ohne Berücksichtigung weiterer Faktoren.

Beachten Sie: Rechnungen, wie im Beispiel gefordert, nennt man *Hochrechnungen*. Diese berücksichtigen i. Allg. nicht alle für ein Problem wichtigen Faktoren und sind deshalb nur in einem beschränkten Umfang anwendbar. Je weiter in die Zukunft Vorhersagen gemacht werden, um so unzuverlässiger werden die meisten.

Lösung:
1. Die Messwerte, die zu den Erträgen der Jahre 1 bis 5 gehören, liegen annähernd auf einer Geraden durch $A(1|3100)$ und $B(5|3500)$. Dementsprechend erhält man als Zwei-Punkte-Form der Geraden:
$\frac{w-3100}{t-1} = \frac{3500-3100}{5-1}$, wobei w der Weizenertrag in 1000 Tonnen und t die Zeit in Jahren sind.
Hieraus findet man:
$w = 100\,t + 3000$
2. Für die Bevölkerungszahlen E pro Jahr erhält man den folgenden Zusammenhang:

Jahr	Einwohnerzahl E nach t Jahren in Millionen
1	$60{,}0 + 60{,}0 \cdot 0{,}028 = 60{,}0 \cdot 1{,}028$
2	$60{,}0 \cdot 1{,}028 + (60{,}0 \cdot 1{,}028) \cdot 1{,}028 =$ $= 60{,}0 \cdot 1{,}028^2$
	usw.
t	$60{,}0 \cdot 1{,}028^t$

Jahr	w in 1000 Tonnen	E in Millionen	Weizen pro Mill. Einwohner in 1000 t
1	3 095	61,7	50,2
2	3 205	63,4	50,5
3	3 309	65,2	50,6
4	3 398	67,0	50,7
5	3 503	68,9	50,8
6	3 600	70,8	50,8
7	3 700	72,8	50,8
8	3 800	74,8	50,8
9	3 900	76,9	50,7
10	4 000	79,1	50,6
11	4 100	81,3	50,4
12	4 200	83,6	50,2
13	4 300	85,9	50,1
14	4 400	88,3	49,8
15	4 500	90,8	49,6
16	4 600	93,3	49,3
17	4 700	95,9	49,0
18	4 800	98,6	49,7
19	4 900	101,4	48,3

3. Durch Einsetzen erhalten wir schließlich nebenstehende Werte, wobei Prognosen unterlegt sind.
4. Zeichnen Sie die dazugehörigen Graphen.

Antwort: Aus der letzten Spalte kann man ersehen, dass bei unveränderten Wachstumsbedingungen der Weizenertrag bezogen auf 1 Million Einwohner bereits nach 6 Jahren stagniert, nach 9 Jahren deutlich abnimmt und nach 13 Jahren sehr schnell unter den Stand des 1. Jahres absinkt. Die Demographen hatten also Recht.

Hinweise:

1. Ist das Wachstum z. B. des Weizenertrags linear, so spricht man von einem **linearen Wachstum**. *Kennzeichen:* Zu gleichen Zeitabständen gehört immer eine Zunahme um den gleichen Betrag.
2. Hängt das Wachstum wie bei der Bevölkerungsentwicklung von einer Variablen im Exponenten ab, so spricht man von einem **exponentiellen Wachstum**. *Kennzeichen:* In gleichen Zeitabständen erfolgt eine Vervielfachung um jeweils denselben Faktor.
3. Wachstumsvorgänge können auch anhand anderer Funktionen verlaufen. Viele Anwendungen aber zeigen, dass lineares und exponentielles Wachstum die wichtigsten Anwendungsbereiche abdecken.
4. Da die Folgen eines exponentiellen Wachstums häufig nicht leicht sichtbar sind (beim Beispiel macht sich die Bevölkerungsentwicklung erst nach 9 Jahren bemerkbar), ist es sinnvoll, Funktionen mit variablen Exponenten mathematisch genauer zu untersuchen (siehe 3.1.2).
5. Bei exponentiellen Zusammenhängen muss man oft mehrfach mit demselben Faktor multiplizieren. Bei fast allen *Taschenrechern* muss man dabei nicht jedes Mal den Faktor neu eingeben. Durch mehrmaliges Tippen der Istgleichtaste wird immer mit derselben Zahl multipliziert. Ob der konstante Faktor als erste oder zweite Zahl eingegeben werden muss, ist bei den verschiedenen Modellen unterschiedlich. Manche Rechner haben für die mehrfache Multiplikation mit einer Konstanten eine „Konstantentaste“.

Arbeitsblatt 10.5: Exponentialfunktion[12]

1. Liegt bei den folgenden Tabellen lineares oder exponentielles Wachstum vor? Weshalb kann man nur u. U. entscheiden?

a)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2		8			64		256

b)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
12	23		45	56			89	

c)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,5	7	13,5			33		46	

d)

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5		125	625				

2. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen x, für die gilt $1{,}2^x > 1000x + 1$.

3. Bestimmen Sie diejenige natürliche Zahl n so, dass entweder $0{,}2 \cdot 2^x > 1{,}5^x$ oder $\frac{1}{4} \cdot 3^x > 3 \cdot 2^x$ für alle $x > n$.

4. 1867 verkaufte Russland Alaska für 7,2 Millionen Dollar an die USA. Wie viel könnte man heute abheben, wenn man diesen Betrag mit Zinseszins zu 2% auf einem Konto angelegt hätte?

5. Ein Unternehmen will die Preise für ein Produkt nicht verändern. Eine Marktanalyse vermutet, dass so jährlich 2% Umsatzsteigerung erzielt werden kann, wobei die jährliche Kostensteigerung auf durchschnittlich 7,5% geschätzt wird. Derzeit beträgt der Betriebsumsatz 2 Millionen Euro und die Kosten belaufen sich auf 0,5 Millionen Euro. Berechnen Sie den Umsatz, die anfallenden Kosten und den Gewinn für die nächsten fünf Jahre. Wie verändert sich der Gewinn im Laufe der Jahre?

6. Derzeit leben etwa 7,0 Milliarden Menschen auf der Erde und man rechnet mit einer jährlichen Wachstumsrate von 1,8%. Mit wie vielen Menschen müsste man bei gleichem Wachstum in 5, 10, 20, 50 Jahren rechnen? In welchem Zeitraum würde sich die Menschheit nochmals verdoppeln?

7. Schätze mit Hilfe der Geburten- und Sterberaten pro 1000 Einwohner aus dem Jahr 1988 die Bevölkerungsentwicklung der angegeben Länder bis 2010:

	Großbritannien	Japan	Pakistan	Togo
Geburtenrate	14	11	46	50
Sterberate	11	7	13	14
Einwohner 1988	$57 \cdot 10^6$	$123 \cdot 10^6$	$105 \cdot 10^6$	$3{,}2 \cdot 10^6$

	USA	Brasilien	Süd-Korea	Mexiko
Geburtenrate	16	28	16	28
Sterberate	9	8	6	6
Einwohner 1988	$225 \cdot 10^6$	$144 \cdot 10^6$	$42 \cdot 10^6$	$85 \cdot 10^6$

3.2 Exponentialfunktion

Das Wachstum aus 3.1 war durch die Funktion $y = a \cdot b^t$ mit $t \in \mathbb{N}$ definiert, falls $b > 0$. Über die Wurzelgesetze ist aber diese Funktion auch für rationale $t = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ erklärt: $y = a \cdot \sqrt[n]{b^z}$

So kann man sich zwar den Wert von 2^3, $2^{3,1}$, $2^{3,14}$, $2^{3,141}$ usw. erklären nicht aber von 2^π. In der Analysis hat man Grenzwerte von Folgen, z. B. für die Folge $\{a_n\} = \{3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; \ldots\}$. Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$ und erklärt dann 2^π als $2^\pi = 2^{\lim a_n} := \lim 2^{a_n}$. Hierbei ist noch zu klären, wann der Grenzwert solchen Veränderungen wie hier Vertauschen von Grenzwertprozessen ausgesetzt werden kann und weshalb dies hier möglich ist.

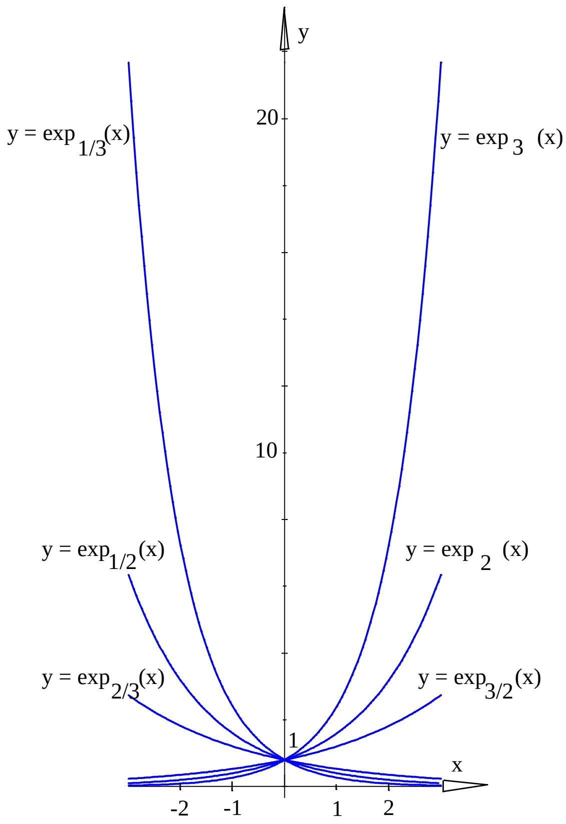
Untersucht man hier diese logische Lücke nicht genauer, so kann man hiermit die Exponentialfunktion für beliebige reelle Exponenten definieren:

---

[12] Lösungen siehe Seite 63.

Definition 3.2.1: Ist $b \neq 1$ eine positive reelle Zahl, so heißt eine Funktion $\exp_b$ mit $x \to \exp_b(x) = b^x$ mit der Definitionsmenge $D(\exp_b) = \mathbb{R}$ **Exponentialfunktion** zur Basis b.

Hinweis: Auf dem Taschenrechner macht dies die Taste y^x oder x^y. Man möge hierzu klären, ob man x oder y zuerst eingeben muss. Hat der Rechner die Funktionstaste exp, so muss man untersuchen, auf welche Basis sich diese bezieht.



Beispiel 3.2.2: Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Werte der Exponentialfunktionen für die Basen $b \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 2; 3\right\}$ zu $x \in \{-3; -2; ....; 2; 3\}$ und zeichnen Sie die dazugehörigen Graphen.

Lösung:

$x =$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\exp_{\frac{1}{3}} x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$\exp_{\frac{1}{2}} x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\exp_{\frac{2}{3}} x$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$
$\exp_{\frac{3}{2}} x$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$
$\exp_2 x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\exp_3 x$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Aus der Wertetabelle erhält man Vermutungen, die dann in Analysis bewiesen werden:

Merke: Die Exponentialfunktion $\exp_b(x) = b^x$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$, die Wertemenge $W = \mathbb{R}^+$ (also ohne 0), sie hat keine Nullstelle.
Ist $b > 1$, so gilt: Für beliebig große (also positive) x wächst sie über alle Grenzen, für beliebig kleine (also negative) x strebt sie gegen null.
Ist $1 > b > 0$, so gilt: Für beliebig große (also positive) x strebt sie gegen null, für beliebig kleine (also negative) x wächst sie über alle Grenzen.

Eigenschaften der Graphen:
$P(0 \mid 1)$ ist gemeinsamer Punkt aller Graphen der Exponentialfunktionen.
Die Graphen von $\exp_b$ und $\exp_{\frac{1}{b}}$ sind symmetrisch zur y-Achse.
Ist $b > 1$, so ist der Graph der Funktion streng monoton steigend.
Ist $1 > b > 0$, so ist der Graph streng monoton fallend.

Arbeitsblatt 10.6: Exponentialfunktion[13]

1. Berechnen Sie für $x \in \{-3;-2;....;2;3\}$ die Werte der Funktionen $y = \exp_2(x)$, $y = x^2$ und $y = 2x$; zeichnen Sie damit die Graphen der Funktionen.
   a) Begründen Sie: $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)$ und $\exp_a(x_1 - x_2) = \exp_a(x_1) : \exp_a(x_2)$ (genannt **Funktionalgleichungen**; sie gelten für alle Exponentialfunktionen).
   b) Kennt man ein Paar $(x|y)$ mit $y = \exp_a x$, so kann man alle solche Paare ohne Kenntnis von a angeben. Hierzu: Man weiß, eine unbekannte Exponentialfunktion geht durch $(2|9)$. Berechnen Sie die Funktionswerte dieser Exponentialfunktion für die x-Werte 4, 6, 10, 1.
   c) Weshalb gehen die Graphen von $\exp_a$ und $\exp_{(a)^{-1}}$ durch Spiegelung auseinander hervor? An welcher Geraden wird gespiegelt?
   d) Begründen Sie das Monotonieverhalten der Exponentialfunktion.

2. Wann gilt a) $x^2 = 2^x$ und b) $2x = 2^x$ auf 2 Nachkommastellen genau?

3. Lösen Sie: a) $2^x = 64$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ d) $5^x = 0{,}04$ e) $4^x = 0{,}5$ f) $1^x = 10$
   g) $13^{4x} = 169$ h) $0{,}2^{-x} = 625$ i) $81^x = 3$ j) $81^{2x} = 3$ k) $\left(0{,}\bar{1}\right)^{4x} = 3$ l) $81^{3x-2} = 9$

4. Beschreiben Sie eine Intervallschachtelung für 2^π. Führen Sie mit einem Taschenrechner dieses Verfahren bis auf Hundertstel genaue Intervallgrenzen durch.

5. Man sagt: *Jede Exponentialfunktion* $\exp_a$ *mit* $a > 1$ *wächst schneller als jede Potenzfunktion.* Bestimmen Sie durch gezieltes Einsetzen für folgende Funktionspaare die kleinste natürliche Zahl n_0 für die $\exp_a(x) > f(x)$ für alle $x > n_0$:
   a) $y = 1{,}5^x$, $y = x^2$ b) $y = 2^x$, $y = x^{10}$

6. Man kennt:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
10^x	1,00	1,26	1,58	2.00	2,51	3,16	3,98	5,01	6,31	7,94	10,00

   a) Berechnen Sie damit $10^{3,3}$; $10^{-2,6}$; $10^{-n+0,4}$ mit natürlichen n.
   b) Erstellen Sie durch eine analoge Berechnung eine Wertetabelle für das Intervall [–5; –4].

7. Zeichnen Sie die Graphen von $y = exp_2(x)$ und $y = \exp_4(x)$ und vergleichen Sie. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Graphen und damit zwischen den beiden Funktionen? Wie kann man diese Erkenntnis nutzen, um daraus die Graphen der Exponentialfunktionen zur Basis 8 bzw. $\sqrt{2}$ herzuleiten? Wie lautet Ihr Ergebnis für beliebige Basen a?

3.3 Anwendungen

Beispiel 3.3.1: Nach dem Reaktorunfall von Tschernobyl am 26. 4. 1986 fiel auf Europa radioaktives Caesium 137. Ein Gramm der Substanz besitzt anfangs die Aktivität von $3{,}2 \cdot 10^{12}$ Bequerel[14], d. h. pro Sekunde werden $3{,}2 \cdot 10^{12}$ schnelle Elektronen abgestrahlt. Man weiß, dass nach jeweils 30 Jahren diese Aktivität um die Hälfte abnimmt (so genannte Halbwertszeit).

a) Stellen Sie die Aktivität A von einem Gramm Caesium 137 in Abhängigkeit der Zeit t auf.
b) Welche Aktivität wies 2000 ein Quadratmeter durchschnittlich auf, wenn unmittelbar nach dem Unfall etwa $6{,}0 \cdot 10^{-9}$ Gramm darauf fielen und angenommen wird, das ausgefallene Material versank nicht in den Boden.

Lösung:

[13] Lösungen siehe Seite 64.

[14] ANTOINE HENRI BECQUEREL, französischer Physiker (geb. 15. 12. 1852 in Paris, gest. 25. 8. 1908 in Le Croisic). Er entdeckte 1896 durch Zufall Korpuskularstrahlen und wurde 1903 mit dem NOBEL-Preis für Physik ausgezeichnet. Korpuskularstrahlen sind energiereiche Teilchen wie Elektronen oder auch Kernteile, die mit nahezu Lichtgeschwindigkeit fliegen.

a) $A(t)$ sei die Aktivität in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aktivität unmittelbar nach dem Unfall in Bq: $A(0) = 3{,}2\cdot 10^{12}$

$$A(30\text{a}) = A(0)\cdot\frac{1}{2}$$

$$A(60\text{a}) = A(0)\cdot\frac{1}{4}$$

$$A(90\text{a}) = A(0)\cdot\frac{1}{8},$$

also $A(n\cdot 30\text{a}) = A(0)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen n.

Man setzt $t := n\cdot 30\text{a}$; also ist $n = \frac{t}{30\text{a}}$. Somit erhält man für die Zeit t: $A(t) = A(0)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30\text{a}}}$

Eigentlich wurde dieser Term hier nur für Vielfache von 30a ermittelt. Die Physik lehrt aber, dass diese Funktion keine Lücken hat, also für alle reelle t gilt.

b) Bis zum Jahr 2000 vergingen seit dem Reaktorunfall $t = 14$ a. Damit ergibt sich für die Radioaktivität in Becquerel:

$$6{,}0\cdot 10^{-9}\cdot 3{,}2\cdot 10^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14\text{a}}{30\text{a}}} \approx 14\cdot 10^3$$

Antwort:
Ein Quadratmeter wies im Jahr 2000 auf Grund des Reaktorunfalls von Tschernobyl zusätzlich zur natürlichen Strahlung (verursacht durch Höhenstrahlen aus dem Weltall, auch von der Sonne, Bodenstrahlung u. a.) von 230 000 Bq etwa 14 000 Bq Radioaktivität mehr auf.

Hinweise:

a) Funktionen wie im Beispiel kann man nur dann so einfach aufstellen, wenn man bereits weiß, dass es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handelt.

b) Auch die im Kapitel 1.6 behandelten geometrischen Folgen sind Exponentialfunktionen, deren Definitionsbereich auf die natürlichen Zahlen eingeschränkt ist.

c) Populationen zeigen häufig eine Zeit lang ein Wachstum gemäß einer Exponentialfunktion. Im späteren Verlauf ändert sich dies in aller Regel durch so genannte Über- bzw. Unterpopulationen, die durch Stress, Ernährungsschwierigkeiten, Minderung des Wohlstandes u. v. m. verursacht werden.

Beispiel 3.3.2: In einem Land wurden zwei Jahre nach einer Volkszählung unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums 70 Millionen Einwohner geschätzt. 20 Jahre nach der Volkszählung vermutete man 84 Millionen. Wie viele Einwohner wurden bei der Volkszählung ermittelt und von welcher Wachstumsrate ging man aus?

Lösung:

$B(x) = B(0)\cdot b^x$ sei das Wachstum der Bevölkerung in Millionen, wobei x die Maßzahl der in Jahren gemessenen Zeit und $B(0)$ die Bevölkerungszahl im Jahr der Volkszählung bedeuten. Wir kennen also:

I $\quad B(2) = B(0)\cdot b^2 = 70$

II $\quad B(20) = B(0)\cdot b^{20} = 84$ Durch Quotientenbildung eliminiert man die Unbekannte $B(0)$:

II:I $\quad b^{18} = \frac{84:7}{70:7} = 1{,}2$, also $b = \sqrt[18]{1{,}2}$.

Aus der Aufgabe 13 des Arbeitsblattes 9.2 weiß man, dass $b = 1 + p$ mit der jährlichen Wachstumsrate p ist. Also folgt: $p = \sqrt[18]{1{,}2} - 1 \approx 0{,}01$

Dies wird in I eingesetzt und $B(0)$ kann berechnet werden: $B(0) \approx \frac{70}{1{,}01^2} \approx 68{,}6$

Antwort: Bei der Volkszählung wurden etwa 68,6 Millionen Einwohner ermittelt; die Wachstumsrate betrug etwa 1%.

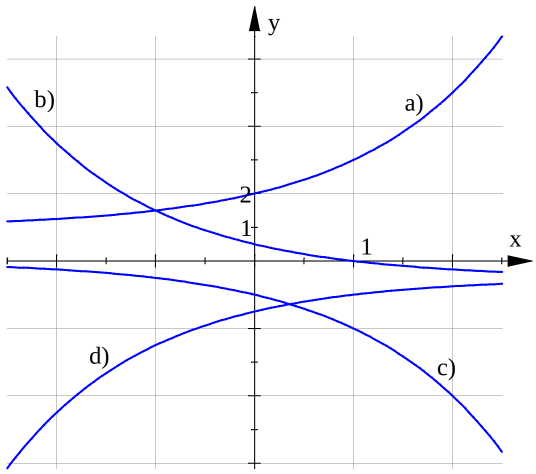
Zusammenfassung:
Probleme bei exponentiellem Wachstum (Zerfall) werden wie folgt gelöst:

	$f(x) = a \cdot b^x$	
	1. Problem	2. Problem
Gegeben	Anfangswert a Wachstumsrate p, also $b = 1 + p$ oder Halbwertszeit $t_{0,5}$ und Laufzeit t	Wert $f(x_1)$ zur Zeit mit der Maßzahl x_1 Wert $f(x_2)$ zur Zeit mit der Maßzahl x_2 Beide Maßzahlen beziehen sich auf dieselbe Zeiteinheit.
Gesucht	Funktionsgleichung	Wachstumsrate p und Anfangswert $f(0)$
Lösung:	$f(x) = a \cdot (1 + p)^x$ bzw. $f(x) = a \cdot 0{,}5^{\frac{t}{t_{0,5}}}$	Aufstellen eines Gleichungssystems: I $f(x_1) = a \cdot b^{x_1}$ II $f(x_2) = a \cdot b^{x_2}$ II:I $\Rightarrow b \Rightarrow p = b - 1$ eingesetzt in I oder II $\Rightarrow a = f(0)$

Arbeitsblatt 10.7: Anwendungen zur Exponentialfunktion[15]

1. Durch welche geometrische Abbildungen geht der Graph zu $y = a \cdot 1{,}5^{bx+c} + d$ aus dem der Funktion $y = 1{,}5^x$ hervor?

2. In der nebenstehenden Abbildung sind Exponentialfunktionen dargestellt. Durch welche geometrischen Abbildungen gehen die Graphen aus dem Graphen der Exponentialfunktion $\exp_a(x) = a^x$ hervor? Geben Sie jeweils die Basis a an.



3. Die Wertetabellen gehören zu Exponentialfunktionen. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an:

a)

x	1	2	3	4
y	4	16	64	256

b)

x	1	2	3	4
y	5	15	45	135

c)

x	1	2	3	4
y	20	5	5/4	5/16

4. Bei Uhren mit nachleuchtenden Zifferblättern wurde ein Gemisch radioaktiver Leuchtmasse benutzt, bei dem pro Kilogramm Zinksulfid höchstens 150 mg radioaktives Radiumbromid zugesetzt werden durfte. Dieses Radium besitzt eine Anfangsaktivität $A(0) = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq pro Gramm und die Halbwertszeit $t_{0,5} = 1\,622$ a.
   a) Finden Sie einen Funktionsterm für die Aktivität $A(t)$ von 1 g Radium in Abhängigkeit von der Zeit t.
   b) Wie viele Zerfälle pro Sekunde finden nach 20 a noch statt?
   c) Ermitteln Sie mit einer Tabelle, nach wie vielen Jahren die Aktivität von 150 mg Radium um 20% abgenommen hat.
5. Aus einem statistischen Jahrbuch kann man die Bevölkerungsentwicklung Thailands je 1000 Einwohner entnehmen:

[15] Lösungen siehe Seite 65.

Jahr	gesamt	ländliche Bevölkerung	städtische Bevölkerung	davon Bangkok
1960	26 258	22984	3 274	1 407
1970	34 397	29 844	4 553	2 495
1980	44 825	37 192	7 633	4 697
1990	51 683	42 483	9 200	5 363

a) Um welche Art Wachstum handelt es sich bei der Gesamtbevölkerung?

b) Berechnen Sie mit dem Wachstum zwischen 1970 und 1980 die zu erwartende Gesamtbevölkerungszahl für 1990 und bestimmen Sie, um wie viel Prozent der berechnete Wert vom Istwert abweicht.

6. Eine Untersuchung von Hefepilzen erbrachte:

Zeit t in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl N der Pilzzellen	15	22	30	50	68	114	176	249	340	445	503	530	571

a) Ermitteln Sie einen Funktionsterm für die Anzahl der Zellen in Abhängigkeit von der Zeit t unter der Voraussetzung, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt. Nehmen Sie hierzu z. B. die Messungen nach null bzw. fünf Stunden.

b) Vergleichen Sie die aus der theoretischen Funktionsgleichung zu berechnenden Messwerte mit den tatsächlichen. Nach wie vielen Stunden beträgt der Fehler mehr als 20%? Geben Sie mögliche Gründe dafür an.

7. Zeichne in *ein* Koordinatensystem jeweils die Graphen der folgenden Funktionspaare f und g für den Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Skizziere anschließend *graphisch* die Funktionsgraphen von $f + g$, d. h. durch geometrische Addition der Funktionswerte (so genannte **Superposition**).

a) $f(x) = x, \quad g(x) = 2^x$ b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 0{,}5^x$ c) $f(x) = x, \quad g(x) = 2 \cdot 2^x$

4. Logarithmus

4.1 Logarithmusfunktion

In Kapitel 2.5 wurde gezeigt, dass es zu einer Funktion $y = f(x)$ eine Umkehrfunktion $y = f^*(x)$ gibt, wo f streng monoton ist. Hierbei gilt D(f*) = W(f) und W(f*) = D(f).
Da jede Exponentialfunktion in ℝ streng monoton ist, gibt es zu jeder solchen Funktion eine Umkehrfunktion, genannt **Logarithmusfunktion**.

Zur Physik: Jede Atomart hat bestimmte chemische Eigenschaften. Es kann aber sein, dass dieselbe Atomart mit verschiedenen Atomgewichten vorkommt; man spricht dann von Isotopen derselben Atomart. In der Lufthülle der Erde befindet sich Kohlenstoff C in Form des Gases CO_2. Der Großteil des Kohlenstoffs ist das Isotop C_{12}, das nicht radioaktiv ist; ein sehr kleiner Anteil des Kohlenstoffs in der Atmosphäre ist das radioaktive Isotop C_{14}. Durch Atmen nimmt dementsprechend jede lebende Pflanze oder Tier, also auch der Mensch, genau diesen Anteil auf, so dass jedes Gramm Kohlenstoff aus lebendem Material alle vier Sekunden im Durchschnitt ein schnelles Elektron (β-Teilchen) strahlt. Nachdem die biologische Substanz gestorben ist, also nicht mehr atmet und damit auch kein C14 mehr aufnimmt, zerfällt der radioaktive Kohlenstoff C14 im Lebewesen und wird damit weniger, d. h. die Anzahl der beim Zerfall entstehenden β-Teilchen nimmt mit einer Halbwertszeit $t_{0,5}$ = 5730 a ab, weil die Zerfallsprodukte nicht mehr strahlen.
Will man nun bei einem biologischen Material sein Alter bestimmen, so muss man nur eine gewisse Zeit t die Anzahl $A(t)$ der abgestrahlten β-Teilchen zählen. Man nennt diese Methode zur Altersbestimmung **Radiocarbon- oder C14-Methode.**

Beispiel 4.1.1: Zur Altersbestimmung eines im Mittelmeer gefundenen Schiffswracks untersuchte man ein Gramm des in der Holzverkleidung enthaltenen Kohlenstoffs, das 12 000 β-Teilchen in 54 000 Sekunden abstrahlte. Wann wurde das Schiff ungefähr gebaut?

Lösung analog 3.1.3:
Als das Holz gefällt wurde, strahlte 1 g Kohlenstoff in 1 s etwa 0,25 β-Teilchen, also ist der Anfangswert

$A(0) = 0{,}25$; die Halbwertszeit beträgt $t_{0,5} = 5730$ a. Also strahlt 1 g Kohlenstoff nach der Zeit t pro Sekunde $A(t) = 0{,}25 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730\text{a}}}$ β-Teilchen ab. Man hat 12 000 β-Teilchen in 54 000 Sekunden gemessen, also ist $A(t) = \frac{12000}{54000} = \frac{2}{9}$. Damit hat man eine **Exponentialgleichung** (also eine Gleichung mit der Unbekannten t im Exponenten):

$\frac{2}{9} = 0{,}25 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{5730\text{a}}}$; diese wird vereinfacht zu $0{,}\overline{8} = 0{,}5^{\frac{t}{5730\text{a}}}$. (1)

Mit einer Tabellelkalkulation kann man näherungsweise eine Lösung finden:

t	$0{,}5^{\frac{t}{5730\text{a}}}$	Vergleich von $0{,}5^{\frac{t}{5730\text{a}}}$ mit $0{,}\overline{8}$
2 000a	0,7851062	zu klein
1 000a	0,8860622	zu klein
900a	0,8968458	zu groß
950a	0,8914377	zu groß
980a	0,8882085	zu klein

Es ist sinnvoll, an dieser Stelle abzubrechen, da die Genauigkeit der C14-Methode hier sicher zu größeren Ungenauigkeiten als nur zu 30a führt.

Antwort:
Das Holz für das Schiff wurde vor 965 a ± 15 a gefällt.

Kritik:
Die Anwendung der C14-Methode ist in Wirklichkeit viel schwieriger als hier dargestellt. Sie ist sogar umstritten, da die β-Strahlung des C14 nach PEARSON (27. 3. 1857 bis 27. 4. 1936) großen Schwankungen unterliegt, die zum Teil durch den Vulkanismus der Erde verursacht werden.

Beachten Sie:

1. Die Lösung der Exponentialgleichung (1) verlangt die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, die oben Logarithmusfunktion genannt worden ist:
   $t = 5730\text{ a} \cdot \log_{0,5} 0{,}\overline{8} = 973\text{ a}$

2. **Die Logarithmusfunktion von x zur Basis a** i. Z. $\log_a x$ ordnet jeder Zahl x aus $\mathbb{R}^+$ (also ohne 0) diejenige Zahl y zu, mit der a potenziert werden muss, damit man x erhält, also $a^y = x$ oder $a^{\log_a x} = x$.
3. Hierbei gilt: $D(\log_a) = \mathbb{R}^+$ und $W(\log_a) = \mathbb{R}$

4. Das Zeichen log musste eingeführt werden, weil man durch keine algebaische Umformung aus der Exponentialfunktion ihre Umkehrung bekommen kann (also analog zum Wurzelzeichen).

5. Wenn die Exponentialfunktion überall streng monoton steigend, also die Basis a größer als 1 ist, ist die dazugehörige Logarithmusfunktion ebenfalls überall streng monoton steigend. Ist die Exponentialfunktion überall streng monoton fallend, also $0 < a < 1$, so ist die dazugehörige Logarithmusfunktion ebenfalls überall fallend. Begründung: Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung an der Geraden mit $y = x$.

6. Die Exponentialfunktion mit der Basis $a > 1$ wächst mit steigendem Argument x über alle Grenzen schneller als jede Potenzfunktion, für immer kleiner werdende x hat sie die Asymptote $y = 0$. Die dazugehörige Umkehrfunktion wächst ebenfalls über alle Grenzen, aber langsamer als jede Potenzfunktion. Die Exponentialfunktion mit der Basis $0 < a < 1$ wächst mit fallendem Argument x über alle Grenzen schneller als jede Potenzfunktion, für immer größer werdende x hat sie die Asymptote $y = 0$. Die dazugehörige Umkehrfunktion wächst ebenfalls für fallende x über alle Grenzen, aber langsamer als jede Potenzfunktion. In beiden Fällen hat die Logarithmusfunktion die Asymptote $x = 0$.

7. Alle Exponentialfunktionen gehen durch $(0 \mid 1)$, alle Logarithmusfunktionen gehen durch $(1 \mid 0)$.

Arbeitsblatt 10.8: Logarithmusfunktion[16]

1. Zeichnen Sie die Exponentialfunktionen samt zugehörigen Logarithmusfunktionen für die Basen $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ und 2.

2. a) Welche zwei Umkehrungen des Potenzierens gibt es?
   b) Warum gibt es bei Addition und Multiplikation jeweils nur genau eine Umkehrung?
   c) Bei welchen Einsetzungen für x sind die Werte von $\log_a x$ positiv, bei welchen negativ? Fertigen Sie Skizzen..
   d) Wie kann man aus dem Graphen von $y = \log_a x$ die unbekannte Basis a näherungsweise bestimmen?

3. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
   a) $\log_4 0{,}25$ b) $\log_7 1$ c) $\log_3 9$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ e) $\log_{0{,}5} 8$ f) $\log_3 81$ g) $\log_{10} 0{,}01$
   h) $\log_{0{,}2} 0{,}04$ i) $\log_5 \frac{1}{625}$ j) $\log_2 \sqrt{2}$ k) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$ l) $\log_3 \sqrt{9}$ m) $\log_{27} 9$ n) $\log_{\sqrt{81}} 27$

4. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:
   a) $3^{\log_3 9}$ b) $10^{3\cdot\log_{10} 7}$ c) $8^{\log_2 3}$ d) $\sqrt{2}^{\log_2 3}$ e) $10^{2+\log_{10} 100}$ f) $2^{\log_2 5-\log_2 2}$

5. Geben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen als Logarithmen an:
   a) $3^x = 10$ b) $a^x = b$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c$ d) $\left(\frac{u}{v}\right)^{2x} = ab$ e) $(3\cdot 4)^{3x} = 2\cdot 72$

6. Formen Sie in die Exponentialschreibweise um:
   a) $x = \log_3 19$ b) $x = \log_b 5$ c) $x = \log_5 b$ d) $x = \log_a b$ e) $x = \log_y \frac{1}{z}$

7. Geben Sie die Zahlenmengen an, für die die folgenden Terme definiert sind:
   a) $\log_a x$ b) $\log_a |x|$ c) $\log_a(-x)$ d) $\log_a(6-2x)$ e) $\log_a \frac{1}{x}$ f) $|\log_a x|$
   g) $\log_a \frac{x^4}{x^3}$ h) $\log_a \frac{x^5}{x^3}$ i) $\log_a \frac{1}{x-1}$ j) $\log_a\left(-x^2\right)$ k) $\log_{-3} x^2$ l) $\log_4(-x)^2$

8. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion an:
   a) $f(x) = 10^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ c) $f(x) = 3^{2x}$ d) $f(x) = \log_2(-x)$ e) $f(x) = \log_5 \sqrt{x}$

9. Es wurde behauptet, eine auf Pergamentpapier geschriebene Weinrechnung des griechischen Philosophen SOKRATES (470 bis 399 v. Chr.) gefunden zu haben. Bei einer Untersuchung von einem Gramm C14 dieses Pergaments wurden innerhalb von 30h ungefähr 21 000 ± 200 radioaktive Teilchen gezählt. Berechne den Zeitraum, in dem das Pergamentpapier frühestens hergestellt worden war. Kann das eine Weinrechnung von SORKATES sein? Die Halbwertszeit von C14 beträgt 5730a. Frisch geschlagenens Holz hat ca. 0,25 Zerfälle pro Sekunde.

10. Beweisen Sie, dass folgende Logarithmenwerte irrational sind. *Hinweis:* Nehmen Sie an, die Werte seien rational und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.
    a) $\log_{10} 3$ b) $\log_9 3$ c) $\log_a b$, wobei für die natürlichen Zahlen a und b gilt ggT(a,b) = 1.

11. a) Zeichnen Sie den Graphen zu $f(x) = \log_2 x$ und gewinnen Sie daraus den Graphen zu $g(x) = \log_{0{,}5} x$ durch eine geeignete Spiegelung.

[16] Lösungen siehe Seite 67.

b) Bestimmen Sie mit a) in den folgenden Aufgaben x möglichst genau und vergleichen Sie dann mit dem Taschenrechner: $\log_2 x = 2{,}5$; $\log_2 x = -0{,}8$; $\log_{0,5} x = 2{,}5$; $\log_{0,5} x = -0{,}8$

12. Geben Sie jeweils die größtmögliche Definitionsmenge an:
a) $f(x) = \log_3\left(2x^2+3\right)$ b) $f(x) = \log_5\left(4x^2-8x+4\right)$ c) $f(x) = \log_2\left(x^2+3x\right)$
d) $f(x) = \log_9\left(x^2-6x+3\right)$ e) $f(x) = \log_2(\log_3 x)$ f) $f(x) = \log_4(\log_{0,5} x)$

13. Geben Sie jeweils die Gleichung $y = \log_a x$ an, die zu den folgenden Zahlenpaaren gehört:
a) $(9 \mid 2)$ b) $(2 \mid -5)$ c) $(-9 \mid 2)$ d) $(4 \mid 0{,}5)$ e) $(0{,}125 \mid -0{,}75)$

4.2 Rechnen mit Logarithmen

Durch die Aufgabe 10.7.1 a) konnte man die Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen kennen lernen: $\exp_a(x_1 \pm x_2) = \exp_a(x_1) + \exp_a(x_2)$. Hieraus folgt:

Satz 4.2.1 (Funktionalgleichungen der Logarithmusfunktion):
Für *positive* reelle Zahlen x_1 und x_2, $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ gilt:
(1) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
(2) $\log_a(x^s) = s \cdot \log_a x$

Beweis:
zu (1): Setzen Sie $y_1 := \log_a x_1$, also $x_1 = a^{x_1}$ bzw.
setzen Sie $y_2 := \log_a x_2$, also $x_2 = a^{x_2}$.
Man multipliziert und wendet ein Potenzgesetz an: $x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1+y_2}$. Also folgt nach der Logarithmusdefinition und dem Ansatz:
$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(a^{y_1+y_2}) = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$
zu (2) Setzen Sie $y := \log_a x$, also $x = a^x$. Hieraus folgt nach einem Potenzgesetz:
$x^s = \left(a^y\right)^s = a^{ys} = a^{sy}$
Mit der Logarithmusdefinition und dem Ansatz folgt:
$\log_a(x^s) = \log_a(a^{sy}) = sy = s \cdot \log_a y$

Corollar 4.2.2: Mit den Voraussetzungen von 4.2.1 gilt: $\log_a(x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Beweis:
Unter Verwendung von (1) und (2) aus 4.2.1 findet man:
$\log_a(x_1 : x_2) = \log_a\left(x_1 \cdot x_2^{-1}\right) = \log_a x_1 + \log_a x_2^{-1} = \log_a x_1 + (-1)\log_a x_2 = \log_a x_1 - \log_a x_2$

Schreibweisen:

Dekadische- oder Zehnerlogarithmen:	$\log_{10} x = \log x = \lg x$
Logarithmus naturalis:	$\log_e x = \ln x$ mit der EULERschen Zahl $e = 2{,}7182818\ldots$.
Binärer oder dualer Logarithmus:	$\log_2 x = lb\ x = ld\ x$

Beispiel 4.2.3: Berechnen Sie mit dem Taschenrechner: a) lg 1 234 500 000 000 b) $\lg(1{,}23 \cdot 10^{-17})$

Lösung:
a) Weil 1 234 500 000 000 = $1{,}2345 \cdot 10^{12}$ ist, gilt:
$\lg 1234500000000 = \lg\left(1{,}2345 \cdot 10^{12}\right) = \lg 1{,}2345 + \lg 10^{12} \approx 0{,}091491 + 12 = 12{,}091491$;
d. h.: In den Taschenrechner gibt man das Folgende ein: 1.2345 -- log -- + -- 12 --=

b) $\lg\left(1{,}23\cdot 10^{-17}\right) = \lg 1{,}23 + \lg\left(10^{-17}\right) \approx 0{,}0899051 - 17 = -16{,}910095$;
d. h.: In den Taschenrechner gibt man das Folgende ein: 1.23 -- log -- – -- 17 -- =

Früher hatte man die Logarithmen aus [1;10] (genannt Mantissen) in so genannten Logarithmentafeln, heute geht dies einfacher mit den Taschenrechnern. Allerdings stehen hierbei nur die Basen 10 und e zur Verfügung. Was muss man dann rechnen, um die Logarithmen anderer Basen zu bekommen?

Satz 4.2.4 (Basiswechsel bei Logarithmen): Für *positive* reelle *x* und *a* und *b* aus $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ gilt: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

Beweis:
Da $\exp_b$ die Umkehrfunktion zu $\log_b$ ist, gilt: $x = \exp_b(\log_b x) = b^{\log_b x}$
Hieraus folgt: $\log_a x = \log_a\left(b^{\log_b x}\right) = \log_b x \cdot \log_a b$
So hat man die Behauptung.

Beispiel 4.2.5 (Basiswechsel): Berechnen Sie mit dem Taschenrechner: a) lb 17 b) $\log_{17} 2$

Lösung:
a) lb 17 = $\log_2 17 = \dfrac{\lg 17}{\lg 2} \approx 4{,}0874628$, was man z. B. durch die folgenden Tasten erreicht:
17 -- lg -- : -- 2 -- lg -- =
b) $\log_{17} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 17} = 0{,}2446505$

Satz 4.2.6: Für a und b aus $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ gilt: $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$

Beweis:
Nach 4.2.4 gilt: $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a}$

Arbeitsblatt 10.9: Rechnen mit Logarithmen[17]

1. Für welche *x* sind die folgenden Terme definiert? a) $\log_a|x|$ b) $\log_a(-x)$ c) $\log_a \dfrac{x^3}{x}$
d) $\log_a \dfrac{1}{x-1}$ e) $\log_a\left(-x^2\right)$ f) $\log_9\left(x^2 - 6x + 3\right)$ g) $\log_4(\log_{0,5} x)$

2. Zerlegen Sie mit Hilfe der Funktionalgleichungen möglichst viel. Die Basis wird jeweils nicht angegeben, weil sie auf die Rechnung keinen Einfluss hat:
a) $\log(2ab)$ b) $\log\left(\dfrac{s^r}{5uv}\right)$ c) $\log\left(q^{-3}\right)$ d) $\log\sqrt{a}$ e) $\log x^{2,5}$ f) $\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$
g) $\log\left(\sqrt{y}^{-2}\right)$ h) $\log\dfrac{3x^3y}{4a^5}$ i) $\log\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{5}}\right)$ j) $\log\sqrt[5]{5pq^2}$ k) $\log\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^3\right)$ l) $\log\sqrt{y^{-2}}$
m) $\log\left(\left(\dfrac{9x^{2y}}{17rs^{-4}}\right)^{-2}\right)$ n) $\log\sqrt[3]{\dfrac{3a^2b^3}{7ab^4}}$ o) $\log\dfrac{75x^3y^2z^{0,5}}{24x^{-4}x^6y^{-3}z}$ p) $\log\dfrac{\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt[3]{b^6a^3}}{\sqrt[3]{ab^6}}$

[17] Lösungen siehe Seite 69.

3. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen und vereinfachen Sie; es soll sich jeweils um Logarithmen der gleichen Basis handeln:

   a) log x + log y + log 2 b) log 3 + log 5 – log 15 c) $\frac{1}{2}\log 4 - \log 2$ d) $3 \cdot \log 25 - 2 \cdot \log 125$

   e) $\frac{1}{2}\left(2\log a - 4\log\sqrt{a}\right)$ f) $3\left(\log\sqrt[3]{x}\right) + \frac{1}{6}\log x^2$ g) $2\log\sqrt{x} - \log(x-y)$ h) $4\log|x|$

   i) $\log 2 - 2\log 5 + 0{,}5\log 16$ j) $\log(a-b) - 2\log a$ k) $k\log ab - m(\log a + \log b)$

4. Geben Sie folgende Logarithmen zur Basis 10 an:

   a) $\log_2 5$ b) $\log_{100} 1000$ c) $\log_{0,1} 10$ d) $\log_2 10$ e) $\log_{-0,2} 7$ f) $\log_3 |x|^{10}$

5. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
   a) lg 7 531 900 000 000 000 b) lg 0,000 000 000 099 881 c) lg $7{,}3 \cdot 10^{-23}$ d) ln $0{,}7 \cdot 10^2$

6. Berechnen Sie ohne Taschenrechner: a) $5^{3\log_5 7}$ b) $\sqrt{2}^{\log_2 3}$ c) $2^{\log_2 5 - \log_2 25}$

7. Begründen Sie $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$.

8. Beweisen Sie: Es gibt ein festes reelles k, so dass für beliebige reelle positive Basen *a* und *b* und alle reellen *x* gilt: $\log_a x = k \cdot \log_b x$. Weshalb müssen Einschränkungen getroffen werden?

9. Ist *x* eine große natürliche Zahl, so kann man die Anzahl *N*(*x*) derjenigen Primzahlen, die kleiner oder gleich *x* sind, durch die folgende Formel abschätzen:

   $$N(x) \approx \frac{x}{2{,}3 \cdot \lg x}$$

   Schätzen Sie *N*(*x*) für $x \in$ {100; 500; 5 000, 50 000; 500 000}.Überprüfen Sie die gefundenen Ergebnisse mit dem Sieb des ERATOSTHENES. Schreiben Sie hierfür ein Programm.

10. Wie viele Stellen besitzen die folgenden Zahlen: a) 5^{100} b) 5^{5^5} c) $\left(8^4 + 9^9\right)^{10}$

11. a) Wie viele Ziffern besitzt die Zahl 20^{200}?
    b) Wie viele Nullen finden sich am Ende der dezimal geschriebenen Zahl 200^{200}?

12. Sind durch die gegebenen Zuordnungsvorschriften jeweils gleiche Funktionen erklärt? *Hinweis:* Betrachten Sie die größtmöglichen Definitionsmengen der jeweiligen Terme:

    a) $x \mapsto 4\lg x$ und $x \mapsto \lg x^4$ b) $x \mapsto lb\sqrt{x}$ und $x \mapsto 0{,}5 \cdot lb\,x$ c) $x \mapsto \sqrt{x}$ und $x \mapsto \lg 10^{\sqrt{x}}$

    d) $x \mapsto 4 \cdot \lg\sqrt{2x+3}$ und $x \mapsto \lg(2x+3)^2$ e) $x \mapsto x$ und $x \mapsto \log_5 5^x$

13. 1834 erkannte der Biologe ERNST HEINRICH WEBER (1795 – 1878) einen interessanten Zusammenhang zwischen physikalischen Reizen (wie Licht, Druck, Wärme, Kraft) und den dadurch bedingten Sinnesempfindungen. Der Physiker GUSTAV THEODOR FECHNER (1801 – 1887) formulierte 1880 diesen Zusammenhang als „psychophysisches Grundgesetz“ (heute WEBER-FECHNERsches Gesetz genannt): „Die Differenz zweier Sinnesempfindungen ist proportional dem Logarithmus des Quotienten der sie auslösenden Reize“. Hier soll der Zusammenhang an einem astronomischen Beispiel näher erläutert werden: Bezeichnet man mit m_i die scheinbare Helligkeit eines Sterns i und mit E_i die einfallende Energie pro Zeit- und Flächeneinheit (so genannte Lichtintensität) desselben Sterns, so kann man die folgende Funktionsgleichung aufstellen:

    $$m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot \lg\frac{E_1}{E_2}$$

    a) Weshalb ist der Quotient unter dem Logarithmus notwendig?
    b) Zeigen Sie: Die doppelte Lichtintensität verdoppelt nicht die scheinbare Helligkeit.
    c) Die scheinbare Helligkeit des Polarsterns wird mit $m_{\text{Polaris}} = 2{,}12$ angegeben. Um welchen Faktor unterscheiden sich jeweils die Lichtintensitäten der Sonne, des Vollmondes, des Sirius-Sterns vom Polarstern, wenn gilt: $m_{\text{Sonne}} = -26{,}7$; $m_{\text{Vollmond}} = -12{,}7$; $m_{\text{Sirius}} = -1{,}5$
    d) Mit dem Hale-Teleskop auf dem Mount Palomar (Kalifornien) kann man gerade noch Sterne wahrnehmen, deren Lichtintensität ungefähr das $4{,}4 \cdot 10^{-9}$-fache des Polarsterns ist. Welche scheinbare Helligkeit ergibt sich für solche Sterne?

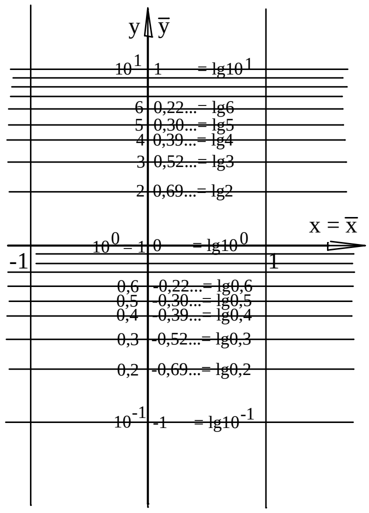
e) Die einzelnen scheinbaren Helligkeiten des Doppelsternsystems ε-Hyd betragen m_1 = 3,7 und m_2 = 4,8. Welche Gesamthelligkeit weist das System auf?
Hinweis: Berechnen Sie über einen Vergleichsstern mit m_0 = 0 und E_0 die Summe $E_1 + E_2$ und daraus die Gesamthelligkeit des Doppelsternsystems.

4.3 Laborhilfsmittel

Rechenstab und Logarithmentafel haben geholfen, die modernen Naturwissenschaften vor allem die Astronomie zu schaffen. Diese Hilfsmittel spielen heute im Computerzeitalter kaum mehr eine Rolle. Anders ist dies mit dem Folgenden. In diesem Zusammenhang wird auf den in der Mathematikinformation veröffentlichten Artikel von SONAR [1] verwiesen, in dem man auch Interessantes über die Geschichte des Logarithmus findet.

4.3.1 Einfach-logarithmisches oder halb-logarithmisches Papier:

In Kapitel 3.1.1 wurden exponentielle Funktionsgleichungen ermittelt; die dortigen Überlegungen sind jedoch nur dann anwendbar, wenn man bereits weiß, dass es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handelt. Jetzt kann man eine Methode angeben, wie man bei vorgegebenem Datenmaterial feststellen kann, ob ein exponentieller Zusammenhang vorliegt:



Beispiel 4.3.1.1: In dem nebenstehenden Koordinatensystem werden auf der *x*-Achse die Einheiten wie gewohnt abgetragen, während auf der senkrechten *y*-Achse die Zehnerlogarithmen der abzutragenden Größen eingetragen sind.

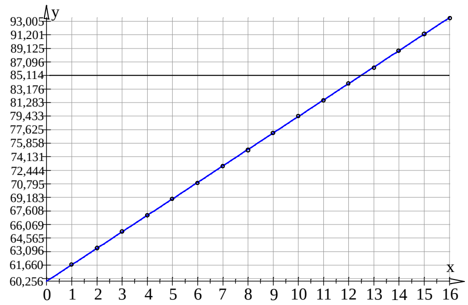
Bezeichnet man die „neuen“ Koordinaten mit $(\overline{x}|\overline{y})$, so gilt

$\overline{x} = x$ und $\overline{y} = 10^y \Leftrightarrow y = \lg \overline{y}$.

Papier mit einer derartigen Koordinateneinteilung heißt **einfach-logarithmisches** oder **halb-logarithmisches Papier**.

$\overline{x}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\overline{y}$	61,7	63,4	65,2	67,0	68,9	70,8	72,8	74,8	76,9	79,1	81,3	83,6	85,9	88,3	90,8	93,3

In nebenstehender Graphik sind die Einwohnerzahlen des Beispiels 3.1.1.1 nochmals eingetragen; diese Daten wurden durch die Exponentialfunktion $\overline{y} = 60{,}0 \cdot 1{,}028^{\overline{x}}$ gefunden. Man findet diese Zahlen in obiger Wertetabelle.



Man erkennt: Die eingetragenen Punkte liegen alle ungefähr auf einer Geraden.

Das lässt die folgende Vermutung zu:

Satz 4.3.1.2: Geraden in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem, die nicht parallel zur $\overline{y}$-Achse sind, gehören zu Exponentialfunktionen mit der Zuordnung
$\overline{x} \mapsto \overline{y} = c \cdot a^{\overline{x}}$ mit $c > 0$ und $a > 0$ und umgekehrt.

Beweis:
Im *x*-*y*-Koordinatensystem besitzt jede nicht zur *y*-Achse parallele Gerade die Funktionsgleichung $y = mx + t$ mit *m* und *t* aus ℝ. Ersetzt man *x* durch $\overline{x}$ und y durch $\lg \overline{y}$, so erhält man $\lg \overline{y} = m\overline{x} + t$.

Daraus folgt:

$\bar{y} \quad = 10^{m\bar{x}+t}$

$\bar{y} \quad = 10^{t} \cdot \left(10^{m}\right)^{\bar{x}}$

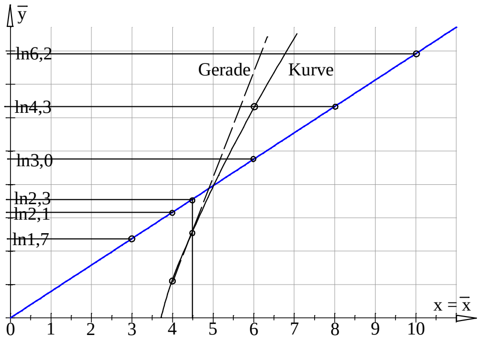
Setzt man $c := 10^{t}$ und $a = 10^{m}$, so erhält man die behauptete Zuordnung.
Da die Folgerungen auch in der umgekehrten Reihenfolge gelten, gilt auch die Umkehrung des Satzes, wenn man die betreffenden Definitonsmengen richtig einschränkt.

Beispiel 4.3.1.3: Tragen Sie in ein halb-logarithmisches Papier die Punkte der folgenden Wertetabellen ein und prüfen Sie, ob es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handelt:

a)	$\bar{x}$	3	4	4,5	6	8	10
	$\bar{y}$	1,7	2,1	2,3	3,0	4,3	6,2

b)	$\bar{x}$	4	4,5	6	8	10
	$\bar{y}$	1,3	1,8	4,3	10,7	20,0

Lösung:
a) Nebenstehender Abbildung entnimmt man, dass die Punkte nahezu auf einer Geraden liegen. Nach 5.3.1 handelt es sich also um eine Funktion mit $\bar{y} = c \cdot a^{\bar{x}}$. Durch Einsetzen der ersten beiden Zahlenpaare erhält man:



I $\quad 1{,}7 = c \cdot a^{3}$ oder **I’** $\quad c = \dfrac{1{,}7}{a^{3}}$

II $\quad 2{,}1 = c \cdot a^{4}$

Setzt man **I’** ein in **II**, so erhält man

$2{,}1 = \dfrac{1{,}7}{a^{3}} \cdot a^{4}$ und damit $a = \dfrac{2{,}1}{1{,}7} \approx 1{,}2$; mit **I’** erhält man hieraus: $c = \dfrac{1{,}7}{2{,}3} \approx 1{,}0$

Antwort:

a) Die zugehörige Funktion lautet $\bar{y} = 1{,}2^{\bar{x}}$.
b) Im halb-logarithmischen Papier ist leicht zu erkennen, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen; es handelt sich also um keinen exponentiellen Zusammenhang.

4.3.2 Doppelt-logarithmisches Papier:

Im rechtwinkligen Koordinatensystem sind beide Achsen in einem logarithmischen Maßstab gegeben.

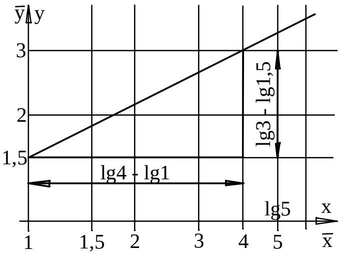
Satz 5.4.2.1: Geraden in einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem, die nicht parallel zur $\bar{y}$-Achse sind, gehören genau zur Potenzfunktion mit der Zuordnung $\bar{x} \mapsto \bar{y} = c \cdot \bar{x}^{a}$ mit $c > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es besteht der folgende Koordinatenzusammenhang: $x = \lg \bar{x}$ und $y = \lg \bar{y}$ (1)
Eine Gerade im x-y-System besitzt die Gleichung $y = mx + t$ mit reellem m und t. (2)

(1) eingesetzt in (2) ergibt $\lg \bar{y} = m \cdot \lg \bar{x} + t$. Mit den Funktionalgleichungen folgt $\lg \bar{y} = \lg\left(\bar{x}^{m} \cdot 10^{t}\right)$;

also $\bar{y} = 10^{t} \cdot \bar{x}^{m}$. Hieraus folgt die postulierte Zuordnung, wenn man $c := 10^{t}$ und $a := m$ setzt.
Da die Folgerungen auch in der umgekehrten Reihenfolge gelten, gilt auch die Umkehrung des Satzes, wenn man die betreffenden Definitonsmengen richtig einschränkt.

Beispiel 4.3.2.2: Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = f(x)$ der im $\bar{x} - \bar{y}$ – Koordinatensystem eingezeichneten Geraden.



Lösung:
Nach dem Satz 5.3.2.1 handelt es sich um die Zuordnung $\bar{x} \mapsto \bar{y} = c \cdot \bar{x}^{a}$.

Man entnimmt der Zeichnung den *y-Abschnitt* $t = \lg 1{,}5$ und die Steigung $m = \dfrac{\lg 3 - \lg 1{,}5}{\lg 4 - \lg 1} = \dfrac{\lg 2}{\lg 4} = 0{,}5$.

Die Funktionsgleichung lautet also: $\bar{y} = 1{,}5 \cdot \bar{x}^{\,0{,}5}$

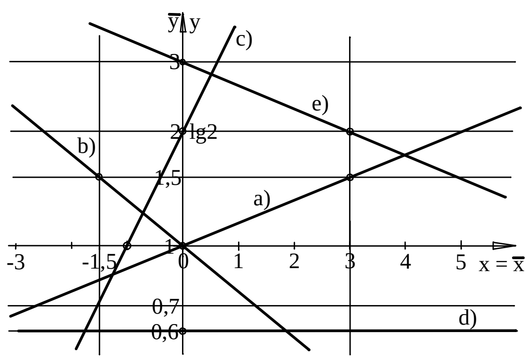
Arbeitsblatt 10.10: Hilfsmittel[18]

1. Erklären bzw. begründen Sie:
   a) In welchen Abständen wiederholt sich die Rasterung bei einem logarithmischen Maßstab?
   b) Weshalb kann bei logarithmischen Maßstäben die Null nicht angetragen werden?
   c) Ist bei der Herleitung der Eigenschaften des einfach- bzw. doppelt-logarithmischen Papiers die Basis 10 wesentlich?
   d) Der Graph jeder exponentiellen Zuordnung $\bar{x} \mapsto \bar{y} = c \cdot a^{\bar{x}}$ mit $c > 0$ und $a > 0$ ist in einem einfach-logarithmischen Koordinatensystem eine Gerade mit der Gleichung $y = x \cdot \lg a + \lg c$.
   e) Der Graph jeder Potenzfunktion $\bar{x} \mapsto \bar{y} = c \cdot \bar{x}^{a}$ mit $c > 0$ und reellem a ist in einem doppelt-logarithmischen Koordinatensystem eine Gerade mit $y = ax + \lg c$.
   f) Wie unterscheiden sich Exponentialfunktionen, die auf einfach-logarithmischen Papier als parallele Geraden erscheinen?
   g) Wie unterscheiden sich die Funktionen, wenn sie im doppelt-logarithmischen Papier als parallele Geraden dargestellt sind?

2. Zu welchen Funktionen gehören Geraden auf einfach-logarithmischem Papier, wenn man die Achsen vertauscht? Begründen Sie.

3. Zeichnen Sie die Graphen zu den folgenden Zuordnungen in ein einfach-logarithmisches Koordinatensystem ein:
   a) $y = 2^x$ b) $y = 1{,}5 \cdot 2^x$ c) $y = 3^{x-2}$
   d) $y = \dfrac{1}{4} \cdot x^2$

4. Ermitteln Sie die Gleichungen zu den nebenstehend auf einfach-logarithmischen Papier gezeichneten Graphen.



5. Zeichnen Sie in ein einfach-logarithmisches Papier die Kurven, die zu den folgenden Wertetabellen gehören und entscheiden Sie, ob es sich um exponentielle Zusammenhänge handelt:

a)

$\bar{x}$	1	2	3	4
$\bar{y}$	1,9	3,4	14,0	46,0

b)

$\bar{x}$	1	2	2,5	3
$\bar{y}$	50	10	4,5	2

[18] Lösungen siehe Seite 71.

6. Die Planeten umlaufen die Sonne fast auf Kreisen mit Radien *a*.
   a) Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Umlaufzeiten *T* und den Radien *a*.
   1 AE (astronomische Einheit) ist der Radius der Bahn der Erde um die Sonne.

Planet	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
a in AE	0,387	0,723	1,52	5,20	9,55	19,1	30,1	39,7
T in a	0,241	0,615	1,88	11,86	29,5	84,0	164,8	247,7

   b) Weshalb kann ein Gestirn mit a = 7,28 AE und T = 10,4 a kein Planet der Sonne sein, wenn man annimmt, dass der unter a) erkannte Zusammenhang bei den Planeten der Sonne erfüllt sein muss (so genanntes 3. KEPLERsches Gesetz).

5. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Im Folgenden werden *einige* Beispielklassen vorgeführt, die zeigen, wie Gleichungen mit Exponential- oder Logarithmusfunktionen gelöst werden können:

5.1 Exponentialgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Unbekannte nur im Exponenten vorkommt, nennt man **Exponentialgleichung**. Die einfachste Form ist $a^x = b$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Wegen der strengen Monotonie von exp hat diese Gleichung genau eine Lösung $x = \log_a b$. Die folgenden Lösungen sind mit einem Taschenrechner gewonnen.

Beispiel 5.1.1: Lösen Sie $3^x = 15$.

Lösung:

$$3^x = 15$$
$$\lg 3^x = \lg 15$$
$$x \lg 3 = \lg 15$$
$$x = \frac{\lg 15}{\lg 3}$$
$$x \approx 2{,}4649735$$

Beispiel 5.1.2: Lösen Sie $2^{x-1} = 5^{-x+2}$

Lösung:

$$\lg 2^{x-1} = \lg 5^{-x+2}$$
$$(x-1)\lg 2 = (-x+2)\lg 5$$
$$x\lg 2 - \lg 2 = -x\lg 5 + 2\lg 5$$
$$x\lg 2 + x\lg 5 = \lg 2 + 2\lg 5$$
$$x(\lg 2 + \lg 5) = \lg 2 + 2\lg 5$$
$$x = \frac{\lg\left(2\cdot 5^2\right)}{\lg(2\cdot 5)}$$
$$x \approx 1{,}69897$$

Beispiel 5.1.3 (Substitutionsmethode): Lösen Sie $5\cdot 100^x - 12\cdot 10^{x+2} - 4 = 0$.

Lösung:

$$5\cdot 100^x - 12\cdot 10^{x+2} - 4 = 0$$

Verfahren:
Herstellen gleicher Potenzen

$$5\cdot\left(10^x\right)^2 - 12\cdot 10^2\cdot 10^x - 4 = 0$$

Substitution $y := 10^x$

$$5\cdot y^2 - 1200\cdot y - 4 = 0$$

Lösen der quadratischen Gleichung

$$y_{1/2} = \frac{1200 \pm \sqrt{1200^2 - 4\cdot 5\cdot(-4)}}{2\cdot 5}$$
$$y_1 \approx 240{,}00333 \qquad y_2 \approx -0{,}0033332$$

Resubstitution $x_{1/2} = \lg y_{1/2}$

$$x_1 \approx 2{,}3802173$$

x_2 existiert nicht, da lg für negative Zahlen nicht definiert ist.

Die ***Probe*** gehört zum Lösungsverfahren.

5.2 Logarithmusgleichungen

Eine Gleichung, bei der die Unbekannte als Argument eines Logarithmus auftaucht, nennt man **Logarithmusgleichung**. Die einfachste Logarithmusgleichung hat die Form $\log_a x = b$ mit positiven reellen Zahlen *a* und *b*.

Wegen der strengen Monotonie von log hat die Gleichung nur die eine Lösung $x = a^b$.

Die folgenden Lösungen sind mit einem Taschenrechner gewonnen.

Beispiel 5.2.1: Lösen Sie lb $x = 8$.

Die Lösung findet man durch Einsetzen beider Seiten in die Funktion $\exp_2$:

$$\log_2 x = 8$$
$$2^{\log_2 x} = 2^8$$
$$x = 256$$

Schon bei den Wurzelgleichungen hat man kennen gelernt, dass algebraische Umformungen, die keine Äquivalenzumformungen sind, d. h. z. B. die Definitionsmenge ändern, die Probe als Bestandteil einer Lösung erforderlich machen.

Umformungen von Exponential- oder Logarithmusgleichungen mit Hilfe der Funktionalgleichungen sind im Allgemeinen nicht äquivalent, weil die Definitionsmengen nicht dieselben sind.

Beispiel 5.2.2:

Die Gleichungen **I** $\log_5(x-2) - \log_5(1-x) = 1$

und **II** $\log_5 \dfrac{x-2}{1-x} = 1$ sind nicht äquivalent, weil

I hat die leere Menge als Definitionsmenge und damit nur die leere Lösungsmenge: Da in $\log_5$ nur positive Zahlen eingesetzt werden können, muss beim Minuenden $x > 2$ und gleichzeitig beim Subtrahenden $x < 1$ gelten, was kein *x* erfüllt.

Der Quotient von **II** ist positiv für alle $x \in\ ]1;2[$ und man erhält hieraus folgendermaßen eine Lösung:

$$5^{\log_5 \frac{x-2}{1-x}} = 5^1$$
$$\frac{x-2}{1-x} = 5$$
$$x-2 = 5(1-x)$$
$$x + 5x = 5 + 2$$
$$6x = 7$$
$$x = \frac{7}{6} \in\ ]1;2[;$$

Die Probe ist also Bestandteil des Lösungsverfahrens.

also ist L = $\left\{\frac{7}{6}\right\}$.

Beispiel 5.2.3: Lösen Sie $\log_3(x+5) + \log_3(2-x) - \log_3(9-3x) = 0$

Lösung:

$$\log_3(x+5) + \log_3(2-x) - \log_3(9-3x) = 0$$

Funktionalgleichungen!!
Also Probe erforderlich!

$$\log_3 \frac{(x+5)(2-x)}{9-3x} = 0$$
$$\frac{(x+5)(2-x)}{9-3x} = 3^0$$

Einsetzen in $\exp_3$

$$(x+5)(2-x) = 9-3x$$

Multiplizieren beider Gleichungsseiten mit dem Nenner $9 - 3x \neq 0$, also $x \neq 3$.

$$2x - x^2 + 10 - 5x = 9 - 3x$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{1/2} = \pm 1 \neq 3$$

Probe:

(1) $x_1 = 1$:

Linke Seite der Gleichung = $\log_3 6 + \log_3 1 - \log_3 6 = 0$.
Da die linke Seite wertgleich mit der rechten Seite ist, gehört x_1 zur Lösungsmenge.

(2) $x_2 = -1$:

Linke Seite der Gleichung = $\log_3 4 + \log_3 3 - \log_3 12 = \log_3 \frac{4 \cdot 3}{12} = 0$.

Da die linke Seite wertgleich mit der rechten Seite ist, gehört x_2 zur Lösungsmenge. Das muss aber nicht so sein!
Hier ergibt sich die Lösungsmenge L = {–1; 1}.

Beispiel (Substitutionsmethode) 5.2.4: Lösen Sie $(\lg(2x-1))^2 - 3\lg(2x-1) + 2 = 0$.

Lösung:

$$(\lg(2x-1))^2 - 3\lg(2x-1) + 2 = 0$$

Substitution $y := \lg(2x-1)$

$$y^2 \quad -3y \quad +2 = 0$$

Lösung einer quadratischen Gleichung

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 1$$

$$x_1 = 50{,}5 \qquad x_2 = 5{,}5$$

Resubstitution $2x_{1/2} - 1 = 10^{y_{1/2}}$, also $x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(10^{y_{1/2}} + 1\right)$.

Beispiel (Vereinheitlichen der Basen) 5.2.5: Lösen Sie $\log_4\left(7x^2+2\right) = lb(4x-1)$

Lösung:

Verfahren:
Herstellen gleicher Basen

$$\log_4\left(7x^2+2\right) = lb(4x-1)$$

$$\frac{lb\left(7x^2+2\right)}{lb4} = lb(4x-1)$$

Funktionalgleichungen!! Probe wird Bestandteil!

$$lb\left(7x^2+2\right) = lb4 \cdot lb(4x-1)$$

$$lb\left(7x^2+2\right) = lb\left((4x-1)^2\right)$$

Einsetzen in $\exp_2$

$$7x^2+2 = (4x-1)^2$$

$$7x^2+2 = 16x^2 - 8x + 1$$

$$9x^2 - 8x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{1}{9}$$

Probe:
(1) $x_1 = 1$:

Linke Seite = $\log_4\left(7 \cdot 1^2 + 2\right) = \log_4 9 = \frac{lb9}{lb4} = \frac{1}{2} lb9 = lb\sqrt{9} = lb3$.   Rechte Seite = $lb(4 \cdot 1 - 1) = lb3$.

Da die linke und rechte Seite gleich sind, gehört $x_1 = 1$ zur Lösungsmenge.

(2) $x_2 = -\frac{1}{9}$:

Die rechte Seite = $lb\left(4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) - 1\right)$ ist nicht definiert, deshalb gehört $x_2 = -\frac{1}{9}$ nicht zur Lösungsmenge.

Die Lösungsmenge ist L = {1}.

Beispiel (Logarithmieren) 5.2.6: Lösen Sie $x^{2\lg x} = 100$.

Lösung:

Verfahren:
Logarithmieren beider Seiten

$$x^{2\lg x} = 100$$

$$\lg x^{2\lg x} = \lg 100$$

Funktionalgleichungen!! Probe!

$$2 \cdot (\lg x)^2 = 2$$

$$\lg x = \pm 1$$

Einsetzen beider Gleichungsseiten in $\exp_{10}$

$$x_1 = 10 \qquad x_2 = 0{,}1$$

Probe:
(1) $x_1 = 10$:
Linke Seite = $10^{2\lg 10} = 100$ = rechte Seite; d. h. $x_1 = 10 \in$ L.
(2) $x_2 = 0{,}1$:
Linke Seite = $0{,}1^{2\lg 0{,}1} = 0{,}1^{-2} = 100$ = rechte Seite; d. h. L = {10; 0,1}.

Nicht immer sind Gleichungen – durch Tricks – lösbar. Versagen die Lösungsverfahren, so kann man immer noch näherungsweise Lösungen ermitteln, z. B. durch **gezieltes Einsetzen**, wie dies in Klasse 5 unterrichtet werden kann:

Beispiel (gezieltes Einsetzen) 5.2.7: Ermitteln Sie eine Lösung auf Zehntel gerundet für $\log_3 x + 1 - \frac{1}{2}x = 0$.

Lösung:

$$\log_3 x + 1 - \frac{1}{2}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \log_3 x = \frac{1}{2}x - 1$$

x sei die Lösung, $x_1 = 5$ eine erste Näherung.

x_i	$\log_3 x_i = \frac{\lg x_i}{\lg 3}$		$\frac{1}{2}x_i - 1$	Folgerung für x
5	1,4649735	<	1,5	x_i zu groß
4,9	1,4465842	<	1,45	x_i zu groß
4,8	1,4278157	>	1,4	x_i zu klein
4,85	1,4372484	>	1,425	x_i zu klein

Es gilt also $4{,}85 < x < 4{,}9$. Hieraus folgt auf Zehntel genau die Lösung $x \approx 4{,}9$.

Verfahren:
Isolieren von $\log_3 x$.

Man fertige eine möglichst genaue Zeichnung zum Finden einer ersten Näherung $x_1 = 5$. Genauere Werte für eine Lösung erhält man durch eine Tabellenkalkulation. Das dargestellte Verfahren nennt man **gezieltes Einsetzen**.

x sei die gesuchte Lösung, x_i seien Näherungen.
Dem Graphen entnimmt man: Falls

$\log_3 x_i > \frac{1}{2}x_i - 1$ ist, dann gilt $x_i < x$,

$\log_3 x_i < \frac{1}{2}x_i - 1$ ist, dann gilt $x_i > x$.

Wie man der Zeichnung entnehmen kann, gibt es eine zweite Lösung, die man mit diesem Verfahren auch genauer bestimmen kann.

Beispiel (Ungleichungen) 5.2.8: Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$.

Lösung:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$$

$$0{,}1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\lg 0{,}1 > \lg\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$-1 > n \cdot \lg\frac{5}{6}$$

$$\frac{-1}{\lg\frac{5}{6}} < n$$

$$12{,}629253 < n$$

Probe: $n = 13$ erfüllt die gegebene Ungleichung.
Antwort:
Die gesuchte kleinste natürliche Zahl ist 13.

Verfahren:
Trennen der Terme mit Variablen von denen ohne Variable.

Logarithmieren beider Ungleichungsseiten.

Funktionalgleichung!! Probe!

Division durch $\lg\frac{5}{6} < 0$ ist möglich, ändert aber das Ungleichheitszeichen.

Bemerkung:
Solche Ungleichungen sind in der Stochastik von Bedeutung. Das Beispiel liefert die Antwort auf die folgende Frage: Wie oft muss man würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal eine „6“ zu bekommen?

Arbeitsblatt 10.11: Exponential- und Logarithmusgleichungen[19]

1. Weshalb darf man beide Seiten einer Gleichung logarithmieren oder exponentialisieren?

2. Lösen Sie: a) $2^x = 16$ b) $4^x = 0,25$ c) $3^x = \frac{1}{81}$ d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$ e) $12^x - 4 = 140$

   f) $6^{x-1} = 36$ g) $0,25^{\sqrt{x}} = 4$ h) $3^{2x} = 9^x$ i) $14^x + 2 = 1$

   j) $9^{x-2} = 12$ k) $13^{2x-5} - 14 = 22$ l) $5^{x+2} - 2^{2+x} = 2^{x+1} - 5^{x+1}$ m) $200^{\left(x^2\right)} = 1000$

   n) $7 \cdot 25^x + 20 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$ o) $9^x + 1 = 2 \cdot 3^x$ p) $9 \cdot 6^{x+1} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 6^{x+1} = -4$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

   a) $\lg x = 3\lg 2 + 0,5\lg 4$ b) $2lb\, x = 4(lb17 - 0,5lb13)$ c) $3\lg x = 0,5\lg a^2 + \lg x^2 - 7\lg a$

   d) $(\lg x)^2 - \lg a^2 \cdot \lg x + \lg a^2 = 1$ e) $\log_5 x = \log_{125} x$ f) $\log_3(x-3) = 4$

   g) $\log_6\left(x^2 - 20\right) = 3$ h) $\lg\left(x^2 - 3x\right) = 2 \cdot \log_{100}(4+x)$ i) $(2x)^{\lg(2x)} = 10^9$

4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen; weshalb gehören diese Aufgaben nur bedingt zu diesem Kapitel?

   a) $\log_x 9 = 2$ b) $\log_x 0,125 = -3$ c) $\log_{x^2} 7 = \frac{1}{2}$ d) $\log_{\sqrt{x}} 4 = 5$ e) $\log_x 7 = 0$

5. Zu welcher Exponentialgleichung gehört die folgende Lösung: $x = \log_y \frac{1}{z}$

6. Lösen Sie die folgende Gleichung ohne Taschenrechner: $\log x = 3 \cdot \log 2 + 0,5 \cdot \log 4$

7. Finden Sie die reelle Lösung x: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c$

8. Lösen Sie mit Logarithmen zur Basis 10:

   a) $2^{x-1} = 5^{-x+2}$ b) $5 \cdot 100^x - 12 \cdot 10^{x+2} - 12500 = 0$ c) $\log_2 x = 8$

9. Lösen Sie ohne Taschenrechner:

   a) $\log_4\left(7x^2 + 2\right) = \log_2(5x - 1)$ b) $x^{2\log_{10} x} = 100$

   c) $5^{x+2} - 2^{1+2x} = 4^{x+1} - 5^{x+1}$ d) $200^{x^2} = 1000$

   e) $7 \cdot 25^x + 20 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$ f) $9 \cdot 6^{x+1} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 6^{x+1} = 4$

   g) $\log_{10}\left(x^2 - 3x\right) = 2 \cdot \log_{100}(4+x)$ h) $\log_3 5 + \log_3 x = -\log_3(x+6) + 1$

   i) $\log_{x^2} 7 = \frac{1}{2}$ j) $(\log_{10}(2-x))^2 - 5 \cdot \log_{10}(2-x) + 4 = 0$

10. Fertigen Sie eine Skizze und berechnen Sie durch gezieltes Einsetzen alle Lösungen auf zwei gültige Nachkommastellen genau:

    a) $\log_3 x + 1 - \frac{1}{2}x = 0$ b) $\lg x - x^3 = 0$

11. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt:

    a) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$ b) $1,7^n > 6 \cdot 10^7$ c) $2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d) $1350 - 4^n < 7 \cdot 4^n + 4^{n+2}$

12. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

---

[19] Lösungen siehe Seite 72.

a) $\log_8|x| \leq 3$ b) $|\log_{10}(2x)| < 3$ c) $\log_{10}|2x-3| \geq -0{,}2$ d) $\log_3\left((2x)^2\right) \leq 2$

13. Ein rechteckiges Blatt Papier vom Format DIN-A0 besitzt eine Fläche von 1 m^2. Durch Halbieren parallel zur kürzeren Seite erhält man zwei Blätter vom Format DIN-A1 usw.
    a) Zu welchem DIN-Format gehört ein Blatt mit dem Flächeninhalt 312,5 cm^2?
    b) Rechtecke, die nach obigem Verfahren erzeugt werden, sind zueinander ähnlich. Um welchen Faktor werden demnach die Längen und Breiten von einem zum nächsten Format jeweils verkleinert?
    c) Wie lang und wie breit sind Blätter vom Format DIN-A0 und DIN-A4?

14. Mit Hilfe eines genormten Seismographen (Gerät zur Aufzeichnung von Erdbebenwellen) kann man den maximalen Amplitudenausschlag der Erdbebenwellen bestimmen. Als Maß für die Bebenstärke wurde 1935 von dem amerikanischen Forscher CHARLES FRANCIS RICHTER (26. 4. 1900 bis 30. 9. 1985) in der nach ihm benannten RICHTER-Skala der Zehnerlogarithmus der Maximalamplitude festgelegt.
    a) Um wie viel stärker war der Maximalausschlag beim Erdbeben von San Francisco 1906, bei dem eine Stärke von 8,25 gemessen wurde, gegenüber dem im oberitalienischen Friaul 1976 mit einer Stärke von 6,40, das in Bayern noch bis zur Donau hin spürbar war?
    b) Warum sagt man: „Die RICHTER-Skala ist nach oben offen.“

15. Zeigen Sie:
    a) $\sum_{n=2}^{k} (\log_n x)^{-1} = (\log_{k!} x)^{-1}$ gilt für alle k ≥ 2 und alle positiven x ≠ 1.
    b) $|\log_a b| + |\log_b a| \geq 2$ gilt für alle $a > 0$, $b > 0$ mit $a \neq 1$ und $b \neq 1$.

16. Ermitteln Sie alle Lösungen x der folgenden Gleichungen:
    a) $x^{\log_a x} = a^2 x$ für eine positive reelle Zahl $a \neq 1$.
    b) $4\log_4 x + 3 = 2\log_x 2$.
    c) $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ mit $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ und $b \neq 1$.

17. Für welche Tripel a, b, c reeller Zahlen mit $a > 1$ gibt es eine Funktion $y = \log_a(bx + c)$, deren Graph durch die Punkte $(2|\,2)$, $(-1|\,0)$ und $(0|\,1)$ verläuft?

6. Lösungen

Arbeitsblatt 5.1: Potenzschreibweise

Aufgabentexte Seite 4

1. Man setzt die Definition ein, ordnet mit dem Kommutativ- und Assoziativgesetz um und erhält das Ergebnis nach erneutem Einsatz der Definition.

2. Der Schüler kennt nur die natürlichen Zahlen und null: $2 \cdot 0 = 0 = 0^2$; deshalb ist anzunehmen $a \neq 0$. Hiermit folgt nach Division mit a aus der Angabe $2 = a$. D. h. die 2. Gleichung gilt nur für $a = 0$ und $a = 2$; sonst ist stets $2a \neq a^2$. $3 \cdot 0 = 0^3$, wohingegen $3 \cdot a \neq a^3$ für alle natürlichen Zahlen a:
   $3 \cdot 1 \neq 1^3$, $3 \cdot 2 \neq 2^3$, $3 \cdot 3 \neq 3^3$, $3 \cdot 4 \neq 4^3$ usw.

3. –

4. a) $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; b) $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; c) $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
   d) $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; e) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$; f) $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
   g) $1000000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; h) $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; i) $1 = 1$
   j) $\left(2^3\right)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; k) $7 = 7$; l) $343 = 7 \cdot 7 \cdot 7$; k) $729 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

5. a) $336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; b) $128 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; c) $484 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 11$;
   d) $1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$; e) $336 \cdot 49 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;
   f) $512 \cdot 777 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 37$; g) $12152 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 31$
   Man ordnet die Primfaktoren nach ihrer Größe.

6. $404 = 4H + 0Z + 4E = 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$;
   $3003003 = 3 \cdot M + 0 \cdot HT + 0 \cdot ZT + 3 \cdot T + 0H + 0Z + 3E = 3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
   $5403005007 = 5 \cdot Md + 4 \cdot HM + 0 \cdot ZM + 3 \cdot M + 0 \cdot HT + 0 \cdot ZT + 5 \cdot T + 0H + 0Z + 7E =$
   $= 5 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

7. a)

dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dual	0	1	10	11	100	101	110	111	1001	1001	10120
hexadezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A

11	12	13	14	15	16	17	18	19
1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010	10011
B	C	D	E	F	10	11	12	13

b) $101 \equiv 5 \equiv 5$ $11011 \equiv 2^4 + 2^3 + 2 + 1 = 27 = 16 + 11 \equiv 1B$
$1110111 \equiv 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2 + 1 = 119 = 7 \cdot 16 + 7 \equiv 77$
$10101001 \equiv 2^7 + 2^5 + 2^3 + 1 = 169 = 10 \cdot 16 + 9 \equiv A9$
$111111000 \equiv 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 = 504 = 16^2 + 15 \cdot 16 + 8 \equiv 1F8$

c) $F0A \equiv 15 \cdot 16^2 + 10 = 3850$
$9A8B7C6 \equiv 9 \cdot 16^6 + 10 \cdot 16^5 + 8 \cdot 16^4 + 11 \cdot 16^3 + 7 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16 + 6 = 162052038$
$AA0011 \equiv 10 \cdot 16^5 + 10 \cdot 16^4 + 16 + 1 = 11141137$
$BAE \equiv 11 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16 + 14 = 2990$
$BABA \equiv 11 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 10 = 47802$

d) Man dividiert die Zahl z durch 16^n mit maximalem n und rundet den Quotienten auf die nächst kleinere natürliche Zahl m ab. Mit der Zahl $r = z - m \cdot 16^n$ fährt man dann so fort. Man erhält

$z = m \cdot 16^n + r \equiv m.....$; z. B.:

$5000 = 1 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 8 \equiv 1388$

8. a) $y^4 = 625 = 5^4$ L = {–4; 4} b) $x^5 = 243 = 3^5$ L = {3} c) $z^6 = 64 = 2^6$ L = {–2; 2}
   d) $u^3 = 343 = 7^3$ L = {7} e) $x^5 < 243 = 3^5$ L =]–∞; 3[
   f) $2^5 = 32 \le x^5 \le 243 = 3^5$ L = [2;3]

9. Weil das Multiplikationsverfahren auf dem Distributivgesetz beruht und dieses Gesetz für alle Zahlen unabhängig von ihrer Schreibweise gilt.

10. a) In der 10ten Woche legt er $2^9 = 512$ Cent in die Sparbüche.

    b) Es ist nicht ganz klar, wie viele Wochen 3 Monate haben; das können 31 + 28 + 31 = 90 oder aber im Schaltjahr auch 91 Tage sein. Es können aber auch 30 + 31 + 28 = 89 oder 90 Tage sein. Es können auch 31 + 30 + 31 = 92 Tage oder 30 + 31 + 30 = 91 Tage sein. Entsprechend ergeben sich für 89:7 oder 90:7 oder 91:7 oder 92:7 12 oder 13 Wochen.
    Nach c) hat er dann entweder $2^{13} - 1 = 8191$ oder $2^{14} - 1 = 16\,383$ Cent gespart.

    c) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$ Trick für solche, die Bruchrechnen können:
    $(1 - 2)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9) = 1 - 2^{10}$, also
    $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = \frac{1-2^{10}}{1-2} = -\left(1-2^{10}\right) = 2^{10} - 1 = 1023$
    Er hat in der n-ten Woche $2^{n+1} - 1$ Cent gespart.

Arbeitsblatt 6.1: Potenzgesetze

Aufgabentexte Seite 6

1. P1 $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{a^m}{b^m} = \frac{a^n a^m}{b^n b^m} = \frac{a^{n+m}}{b^{n+m}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$, d. h. zuerst wird Satz 1.2.3 angewandt, dann werden zwei Brüche multipliziert und schließlich führt Satz 1.2.3 zum Ergebnis.

   P1' Man setzt voraus $n - m \ge 0$. Der Bruch *a/b* kommt dann im Dividenden n-mal und im Divisor m-mal vor, kann also m-mal gekürzt werden.

   P2 $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{c^n}{d^n} = \frac{a^n c^n}{b^n d^n} = \frac{(ac)^n}{(bd)^n} = \left(\frac{ac}{bd}\right)^n = \left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right)^n$, d. h. zuerst wird Satz 1.2.3 eingesetzt, dann werden zwei Brüche miteinander multipliziert und im Zähler und Nenner für natürliche Zahlen P2 eingesetzt, schließlich führt der Satz 1.2.3 zum Ziel.

   P2' $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} : \frac{c^n}{d^n} = \frac{a^n d^n}{b^n c^n} = \frac{(ad)^n}{(bc)^n} = \left(\frac{ad}{bc}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$, d. h. zuerst wird Satz 1.2.3 benutzt, dann werden Brüche dividiert und im Zähler und Nenner P2 für natürliche Basen benutzt; schließlich wird abermals Satz 1.2.3 eingesetzt und in der Klammer die Division zweier Brüche benutzt.
   P2' muss man sich nicht mehr merken, da beim Bruchrechnen jede Division auf eine Multiplikation zurückgeführt werden kann.

   P3 Nach dem bisherigen Schema findet man: $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)^m = \frac{(a^n)^m}{(b^n)^m} = \frac{a^{nm}}{b^{nm}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{nm}$

   P4 Kennt man das Monotoniegesetz der Multiplikation, so kann man zeigen: Multipliziert man die Ungleichungen von P4 mit dem (positiven) Nenner von a bzw. b, so wird P4 für rationale a und b auf P4 für natürliche a und b zurückgeführt.

2. P1 $a^0 a^m = 1 \cdot a^m = a^{0+m}$ analog bei $a^n a^0 = a^{n+0}$

   P1' $a^0 : a^m$ ist noch unlösbar. $a^n : a^0 = a^n : 1 = a^{n-0}$

P2 Aus $a^0 = 1$ folgt $n = 0$ und somit $a^0 b^0 = 1 = (ab)^0$

P2’ Aus $a^0 = 1$ folgt $n = 0$ und somit $a^0 : b^0 = 1 = (a:b)^0$

P3 $\left(a^0\right)^m = 1^m = 1 = a^{0\cdot m}$

P4 gilt nicht, weil aus $a < b$ folgt $a^0 = b^0$. Auch das zweite Gesetz ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt: Aus $a = \frac{1}{2}$ und $0 < 3$ folgt $a^0 = 1 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

3. $101{,}1001 \equiv 2^2 + 1 + 2^{-1} + 2^{-4} = 5{,}5625$
$AF{,}09C \equiv 10\cdot 16 + 15 + 9\cdot 16^{-2} + 12\cdot 16^{-3} = 175{,}0380859$

4. $3{,}359375 = 3 + 5\cdot 16^{-1} + 12\cdot 16^{-2} \equiv 3{,}5C$
Nachkommastellen abc… im Hexadezimalsystem beinhalten den folgenden Wert im Dezimalsystem:
$$a\cdot\frac{1}{16} + b\cdot\frac{1}{16^2} + c\cdot\frac{1}{16^3} + \ldots. = a:16 + b:16^2 + c:16^3 + \ldots = (a + b:16 + c:16^2 + \ldots):16 =$$
$$= (a + (b + (c + \ldots..):16):16):16$$
Man bekommt die Ziffern abc.. dadurch, dass man im Dezimalsystem den Nachkommawert mit 16 mulitpliziert zu x; man erhält die Vorkommastelle a und berechnet $x - a$. Diesen Wert multipliziert man mit 16 zum Ergebnis y. Man erhält die Vorkommastelle b und berechnet $y - b$ usw.

Arbeitsblatt 7.1: Potenzgesetze

Aufgabentexte Seite 7

1. 45:5 = (4· 10 + 5):5 = 9; aber $(4\cdot x + 5):5 \neq 9$ für $x \neq 10$

2. a) $(3x^3 + 5x^2 - 6x - 2):(x - 1) = 3x^2 + 8x + 2$
b) $(-4x^3 + 16x^2 - 29x + 21):(2x - 3) = -2x^2 + 5x - 7$
c) Man ordnet erst Dividend und Divisor nach Potenzen von y: $\left(y^4 + y^3 - 2y\right):\left(y^2 + 2y + 2\right) = y^2 - y$
d) $\left(6z^6 - 18z^5 - z^4 + 9z^3 - z^2\right):\left(2z^2 - 1\right) = 3z^4 - 9z^3 + z^2$

3. a) $\left(x^2 - 4x - 21\right):(x + 3) = x - 7$, also $x_2 = 7$.
b) $\left(x^2 + \frac{7}{3}x - 2\right):(x + 3) = x - \frac{2}{3}$, also $x_2 = \frac{2}{3}$.
c) $x^2 - 3x = x(x - 3)$, also $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.
d) $x\left(x^2 + 1\right) = 0$, also $x = 0$, weil $x^2 + 1 \geq 1$.
e) $y^4 - y^2 - 12 = 0$; substituiere $y^2 = z$; man erhält für $z^2 - z - 12 = 0$ die Lösungen $z = y^2 = -3$, was nicht nach y aufgelöst werden kann, und $z = y^2 = 4$ mit $y_1 = 2$ und $y_2 = -2$.
f) Man rät die Lösung $x_1 = 1$ und rechnet: $\left(x^3 + 3x^2 - 25x + 21\right):(x - 1) = x^2 + 4x - 21 = 0$; man rät $x_2 = 3$ und findet mit Polynomdivision $x_3 = -7$.
g) Man rät die Lösung $x_1 = 1$ und rechnet: $\left(x^3 - 7x + 6\right):(x - 1) = x^2 + x - 6 = 0$; man rät $x_2 = 2$ und findet durch Polynomdivision $x_3 = -3$.

4. a) $a^2 + 5ab + 6{,}25b^2 = (a + 2{,}5b)^2$
b) $v^2 - \frac{vw}{3} + \frac{w^2}{36} = \left(v - \frac{w}{6}\right)^2$

5. a) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} + \frac{xy}{3} - \frac{xz}{4} - \frac{yz}{6}$
c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

6. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Hieraus findet man das so genannte PASCALsche Dreieck:

n	$\binom{n}{k}$										
1						1					
2					1		1				
3				1		2		1			
4			1		3		3		1		
5		1		4		6		4		1	
6	1		5		10		10		5		1
usw.											

7. a) $16x^2 - 9 - 25x^2 + 10x - 1 + 9x^2 - 16 - 10x = -26 \neq 0$, d. h. L = {}.
   b) $98 - 112x + 32x^2 + 108 - 75x^2 + 15x^2 - 55x + 28x^2 + 252x + 567 = 85x + 773 = 8$, also $x = -9$.
   c) $z^2 < -13$, also unlösbar. d) $y^2 \geq 0$, also L = ℝ. e) $x^2 < -25$, also unlösbar.
   f) $y^2 + 6y + 9 - y^2 + 8y - 16 - 13y + 10 = y + 3 > 5$, also $y > 2$; L =]2; ∝[
   g) $-\sqrt{13} < z - 3 < \sqrt{13}$ oder $3 - \sqrt{13} < z < 3 + \sqrt{13}$; L = $\left]3-\sqrt{13};\ 3+\sqrt{13}\right[$.
   h) $x^2 + 8x + 15 - x^2 + 1 = 8x + 16 > 0$, also $x > -2$; L =]– 2; ∝[.
   i) Ist ein Produkt null, so ist mindestens ein Faktor null, d. h.: Berechne
      $5x^2 - 30x + 45 = 0$, d. h. $x^2 - 6x + 9 = 0$, also $x_1 = 3$ und
      $x^2 - 9 = 0$, also $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$, also L = {–3. 3}.

Arbeitsblatt 8.1: Potenzgesetze

Aufgabentexte Seite 8

1. Für natürliche Exponenten gilt: $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$

2. Siehe die Lösung zu Arbeitsblatt 6.1 Aufgabe 1.

3. a) $= \frac{16a^4c^6a^{-12}a^8c^{-20}}{b^6b^6c^{-12}16b^{-12}} = a^{4-12+8}b^0c^{-2} = c^{-2}$ Hierzu: Den *ersten* Term erhält man, wenn man berücksichtigt: Dividieren durch einen Bruch bedeutet Stürzen des Divisors. Zweimaliges Stürzen bedeutet, dass man wieder den alten Term hat. Beim *zweiten* Term berechnet man zunächst den Zahlenfaktor; dann berechnet man die Exponenten der beteiligten Buchstaben nach dem Alphabet.
   b) $\frac{9b^{4m-2}64x^{3y+3}9x^{3-y}}{4x^{2y+6}27b^{3m-9}16b^{m+7}} = 3b^{4m-2-3m+9-m-7}x^{3y+3+3-y-2y-6} = 3b^0x^0 = 3$
   Zu der unter a) genannten Methode kommt jetzt noch hinzu, dass die Division durch u^{-n} eine Multiplikation mit u^n bedeutet.

4. a) $\frac{5g}{5\cdot 10^6 g} = 1\,ppm$ b) $\frac{5g}{7{,}5\cdot 10^9 g} = \frac{5000}{7{,}5\cdot 10^{12}} = 666{,}..ppb$ c) $\frac{5g}{26\cdot 10^{12} g} = \frac{5}{26}\,ppb$
   d) $\frac{5g}{3{,}1\cdot 10^{15} g} = \frac{5000}{3{,}1\cdot 10^{18}} = 1612{,}9...ppt$
   e) Die angegebenen „Verdünnungen“ sind zum Teil so hoch, dass sich in weiten Teilen des Wassers gar keine Zuckermoleküle befinden können.

Arbeitsblatt 9.1: Wurzelgesetze

Aufgabentexte Seite 11

1. a) 20 b) 25 c) 36 d) 3 e) 0,01 f) 10 g) 0,1 h) 3 i) 0,027 Die folgenden Probleme lassen sich jeweils in eine Zehnerpotenz und eine Quadratzahl zerlegen, wobei man letztere raten muss: j) – 11200 k) 65400 l) $\frac{112}{72} = \frac{14}{9}$; hier ist es sinnvoller, den Radikanden zuerst zu kürzen. m) 0,000000067

2. a) Lösen durch „gezieltes Raten“:

$\sqrt{1234321}$ könnte sein $x =$	$x^2 =$
1000	1000 000 < 1234321
1100	1210 000 < 1234321
1110	1232 100 < 1234321
1111	1234 321, x ist die Lösung.

Man kann aber die Lösung auch direkt finden: Die erste und letzte Ziffer muss eine 1 sein. Denkt man an das Mulitplikationsverfahren, so kommt man zum Ergebnis 1111, weil

$$\begin{array}{l} \underline{1111 \cdot 1111} \\ \;1111 \\ \;\;1111 \\ \;\;\;1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

b) ist unlösbar, weil $2x^2 + 3 \geq 0$ für alle reellen *x*.

c) L = {– 3; 3} d) unlösbar e) L = {– 40; 40} f) L = {0; – 7; 7} g) L = {– 9; – 2; 2}

h) Aus $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ folgt L = {1}.

i) Die folgende Rechnung ergibt L = {– 7/6; 7/6}

$$\begin{aligned} 2 \cdot 36y^2 + 2 \cdot 49 &= 4 \cdot 49 \\ 36y^2 &= 49 \\ 6y &= \pm 7 \end{aligned}$$

3. Für den Radikanden gilt $x^2 - 4 \geq 0$, also $x^2 \geq 4$ und damit $x \in \mathbb{R}\backslash]-2; 2[$.

4. a) $\sqrt{2}$ wäre sonst rational, was nicht sein kann.

b) $\sqrt{x} = -\frac{11}{2}$ kann nicht sein, weil $\sqrt{x}$ stets positiv oder null definiert ist.

c) $\sqrt{x} = \sqrt{2} - 2 < 0$: Es gibt kein *x*, das diese Gleichung erfüllt, weil $\sqrt{x}$ stets positiv oder null ist.

5. W2: Es sei $x := \sqrt{a} \geq 0$ $a = x^2$ und $y := \sqrt{b} \geq 0$ $b = y^2$. Hieraus folgt:

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|\sqrt{a}|}{|\sqrt{b}|} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, wegen W3 und weil die Wurzeln positiv oder null sind.

W3: *a* ist entweder positiv oder null oder negativ. $\sqrt{a^2}$ ist die nicht negative Lösung von $x^2 = a^2$. Diese Gleichung hat die Lösungen $x = a$ und $x = -a$. Ist *a* positiv oder null, gilt demnach für die nicht negative Lösung $x = \sqrt{a^2} = a$. Ist *a* negativ, ist die nicht negative Lösung der Gleichung $x = \sqrt{a^2} = |a|$.

6. a) $\sqrt{25x}$ b) $\sqrt{81} = 9$ c) $\sqrt{16 \cdot 9} = 12$

7. a) $\sqrt{\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}} = \dfrac{1}{|a-b|}$ b) $-7\sqrt{a}+11\sqrt{b}$ c) $3|xy|$

d) $\sqrt{\left(21r^2+\dfrac{s^2}{3}\right)^2} = 21r^2+\dfrac{s^2}{3}$, weil letztere sicher nicht negativ ist.

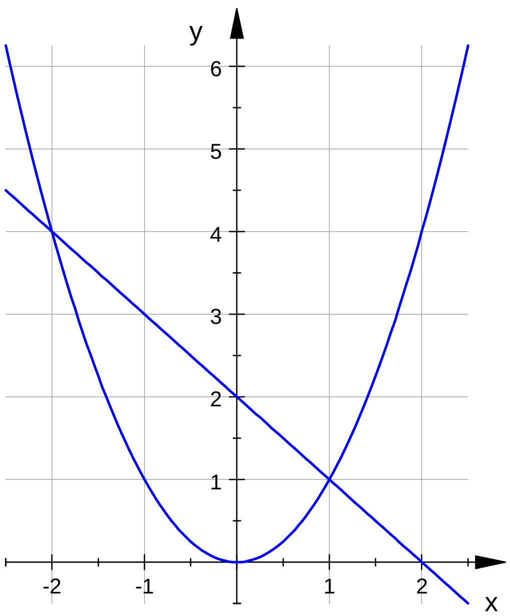
e) $|a|\sqrt{\dfrac{\sqrt{624}}{|b|}}$, ob man diesen Term kürzer nennen kann, ist fraglich.   f) $\sqrt{\sqrt{r^{10}}} = \sqrt{|r|^5} = r^2\sqrt{|r|}$

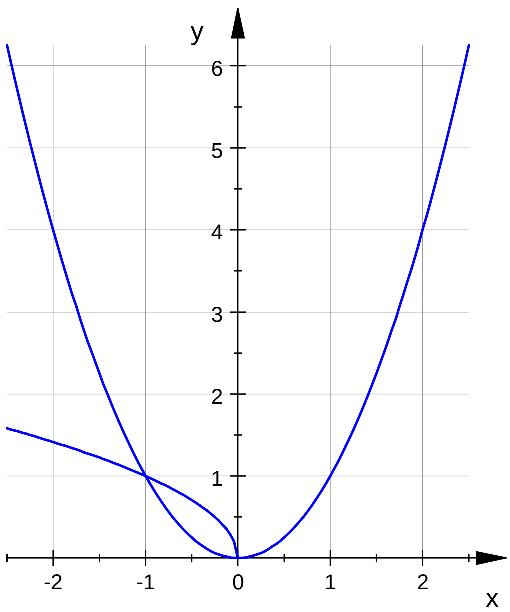
8. a) $\dfrac{2\sqrt{14}+2\sqrt{21}}{14} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{7}}{7} = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$ b) $\dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2}{6} = \dfrac{18+12\sqrt{6}+12}{6} = 5+2\sqrt{6}$

c) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}} = \dfrac{\sqrt{9+3\sqrt{3}}}{3}$

9. $x^2 \leq 2-x$. In der linken Abbildungerkennt man, dass L = [– 2; 1] ist.

10. Die Definitionsmenge besteht aus den nicht positiven rellen Zahlen. Der rechten Zeichnung entnimmt man L = {0; – 1}.





11. a) Wegen der Wurzel muss gelten $a > 0$; hierfür findet man: $x\sqrt{a}+a-x-1 = 0$ und

$x\left(\sqrt{a}-1\right) = 1-a$.

1. Für $a = 1$ ist $0\cdot x = 0$, also $L_1 = \mathbb{R}$.
2. Für $a \neq 1$ ist $x = -\dfrac{1-a}{1-\sqrt{a}} = -1-\sqrt{a}$, also $L_2 = \left\{-1-\sqrt{a}\right\}$.

b) Wegen der Wurzel und des Nenners muss gelten: $4a+1 > 0$, also $a > -\dfrac{1}{4}$. Man findet:

$9x\sqrt{4a+1}+4a+1-4x+3 = 0$ und hieraus

$x\left(9\sqrt{4a+1}-4\right) = -4a-4$

1. Für $9\sqrt{4a+1}-4 = 0$, also $4a+1 = \dfrac{16}{81}$, also $a = -\dfrac{65}{324} > -\dfrac{1}{4}$ soll gelten

$0 \cdot x = \frac{65}{81} - 4$, d. h. $L_1 = \emptyset$.

2. Für $a \neq -\frac{65}{324}$ erhält man $x = \frac{-4a-4}{9\sqrt{4a+1}-4}$ und damit $L = \left\{\frac{-4a-4}{9\sqrt{4a+1}-4}\right\}$.

12. a) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+10} = \sqrt{11x+9}$ Quadrieren!

$2x-1+3x+10+2\sqrt{6x^2+17x-10} = 11x+9$

$2\sqrt{6x^2+17x-10} = 6x$ Quadrieren!

$6x^2+17x-10 = 9x^2$

$3x^2-17x+10 = 0$; es kann also $x_1 = 5$ oder $x_2 = \frac{2}{3}$ sein.

Probe für $x_1 = 5$:

Linke Seite: $\sqrt{9}+\sqrt{25} = 8$; rechte Seite: $\sqrt{64} = 8$. $x_1 = 5$ gehört also zur Lösungsmenge.

Probe für $x_2 = \frac{2}{3}$:

Linke Seite: $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{12} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$; rechte Seite: $\sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$. $x_2 = \frac{2}{3}$ gehört also auch zur Lösungsmenge.

$L = \left\{5; \frac{2}{3}\right\}$.

b) $y+4+\sqrt{3y-5} = 9$ Quadrieren!

$3y-5 = 25+y^2-10y$

$y^2-13y+30 = 0$; es kann also $x_1 = 6$ oder $x_2 = 3$ sein.

Probe für $x_1 = 6$:

Linke Seite: $\sqrt{10+\sqrt{13}}$ ist irrational; rechte Seite: 3. $x_1 = 6$ gehört also nicht zur Lösungsmenge.

Probe für $x_2 = 3$:

Linke Seite: $\sqrt{7+\sqrt{4}} = \sqrt{9} = 3$; rechte Seite: 3. $x_2 = 3$ gehört also zur Lösungsmenge.

$L = \{3\}$.

13. a) d(OP) = $= \sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}+25-5x} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2-5x+25}$

b) OR: y = 2x geschnitten mit der hierzu senkrechten Ausgangsgeraden ergibt:

$2x = -\frac{1}{2}x+5$ und

damit $y = 4$.

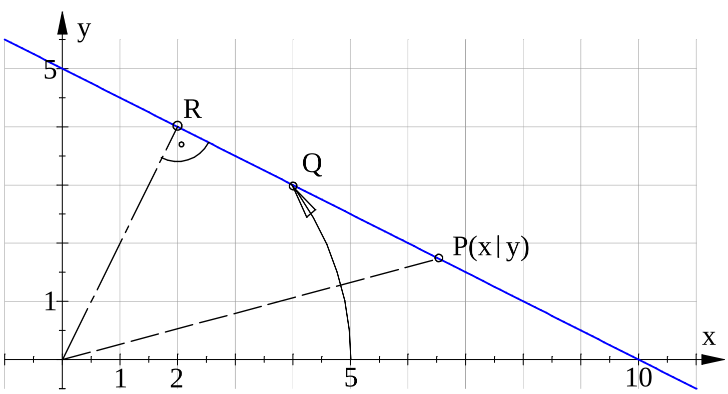
d(OR) =

$\sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

c) d(OQ) =

$5 = \sqrt{\frac{5}{4}x^2-5x+25}$

Hieraus folgt:



$\left(\frac{5}{4}x-5\right)x = 0$. $x_1 = 0$ ist keine Lösung. $x_2 = 4$ und damit $y = 4$ liefert Q.

Arbeitsblatt 9.2: Folgen und Reihen

Aufgabentexte Seite 13

1. $a_n = 2n$ sind die geraden Zahlen, $a_n = 2n - 1$ die ungeraden Zahlen.

2. $a_n \;=\; a_1 + d(n-1)$ und $a_{n+2} \;=\; a_1 + d(n+2-1) \;=\; a_1 + d(n+1)$; hieraus folgt
$a_{n+1} \;=\; a_1 + dn \;=\; \dfrac{2a_1 + 2dn}{2} \;=\; \dfrac{a_{n+2} + a_n}{2}$.
Der Satz gilt nicht für das erste Glied, weil es keine natürliche Zahl n mit 1 = n + 1 gibt.

3. $\sum\limits_{n=1}^{1000} n \;=\; \dfrac{1000(1+1000)}{2} \;=\; 500 \cdot 1001 \;=\; 500500$

4. Die kleinste dreistellige Zahl ist 100, die größte 999:
$\sum\limits_{n=100}^{999} n \;=\; \dfrac{900(100+999)}{2} \;=\; 450 \cdot 1099 \;=\; 494550$

5. Die kleinste zweistellige ungerade Zahl ist 11, die größte dreistellige ungerade Zahl 999.
Als Summe bekommt man: $\sum\limits_{n=6}^{500} (2n-1) \;=\; \dfrac{495(11+999)}{2} \;=\; 495 \cdot 505 \;=\; 249975$

6. $-80 \;=\; 34 - 6(n-1) \;=\; 40 - 6n$, also $n \;=\; 20$

7. Es handelt sich um eine geometrische Folge mit $a_n \;=\; 2 \cdot 2^{n-1} \;=\; 2^n \;>\; 2000$. Der Schüler hat gelernt $2^{10} = 1024$; also tritt die Ungleichung erstmals für $n = 11$ ein.

8. Da $\sqrt{a_1 q^{n-1} a_1 q^{n+1}} \;=\; |a_1| \sqrt{q^{2n}} \;=\; |a_1 q^n|$ gilt, ist die Aussage der Aufgabe nur hinsichtlich der Beträge richtig.

9. In jeder Schicht liegt eine Röhre weniger, also $a_1 = 25$ und $d = -1$:
a) $\sum\limits_{1}^{8} (a_1 + d(n-1)) \;=\; \sum\limits_{1}^{8} 25 - (n-1) \;=\; \dfrac{8(25+18)}{2} \;=\; 172$
b) $1 \;=\; 25 - (n-1) \;=\; 26 - n$, also $n = 25$. Man erhält einen Stapel mit
$\sum\limits_{1}^{25} 25 - (n-1) \;=\; \dfrac{25(25+1)}{2} \;=\; 325$ Röhren.

10. $\sum\limits_{1}^{n} a_1 q^{k-1} \;=\; a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ ergibt $(1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{n-1})(1-q) \;=\; 1 - q^n$.

11. $a_6 \;=\; \dfrac{5}{16} \cdot 4^5 \;=\; 5 \cdot 2^6 \;=\; 320$

12. $F_5 \;=\; 8a^2 \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)^2 \right) \;=\; 8a^2 \cdot \left(\left(\dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\dfrac{1}{4}\right)^5 \right) \;=\; 8a^2 \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^6}{1 - \dfrac{1}{4}}$

$F_5 \;=\; 10{,}6640625..a^2$

Lässt man n über alle Grenzen wachsen, so geht der Zähler des „letzten“ Bruchs gegen 1 bei einem konstanten Nenner $\dfrac{3}{4}$. D. h. $F_\infty \;=\; 8a^2 \cdot \dfrac{4}{3}$. Die Frage aber ist, ob sich nicht nach einem bestimmten Schritt die aufgetürmten Quadrate überschneiden? D. h. man muss untersuchen, ob die Summe aller Quadratseiten kleiner als der Inkreisradius $\rho_8 \;=\; \dfrac{a}{2 \cdot \tan 22{,}5^o}$ im regulären Achteck ist:

$$\frac{a}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+.....\right) = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = a < \frac{a}{2\cdot\tan 22{,}5^o} = a\cdot 1{,}207\ldots$$ Das Problem ist lösbar.

13. a) $K_n = K_1\cdot(1+p)^{n-1}$

b) $K_1 = a$

$K_2 = a+aq$

$K_3 = a+aq+aq^2$

$K_n = a\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right) = a\frac{1-q^n}{1-q}$

c) Die Ausgangsschuld sei K_1 und $q = 1 + p$. Analog zu b) findet man

$K_n = K_1\cdot q^{n-1} - r\cdot\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$

14. a) $a_n = a_1 - (n-1)d$

b) $K_0 - K_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(a_1 - d(n-1)\right) = \frac{n}{2}\cdot\left(2a_1 - d(n-1)\right)$. Hieraus folgt:

$d = \frac{2\left(na_1 - (K_0 - K_n)\right)}{n(n-1)}$

c) Weil $n(n-1) > 0$ ist, folgt aus $d > 0$: $na_1 - (K_0 - K_n) > 0$, d. h. $a_1 > \frac{K_0 - K_n}{n}$.

d) Berechnung der jährlichen Minderung d der Abschreibung: $d = \frac{2(7\cdot 21000 - 94500)}{7\cdot 6} = 2500$

Jahr	K_n	Abschreibung	Restbetrag
1	105 000	21 000	84 000
2	84 000	18 500	65 500
3	65 500	16 000	49 500
4	49 500	13 500	36 000
5	36 000	11 000	25 000
6	25 000	8 500	16 500
7	16 500	6 000	10 500

15. a) Wie oben findet man (ohne Beweis) $K_i = K_0(1-p)^{i-1}$.

b) $K_9 = 1{,}2\cdot 10^6\left(1-\frac{8}{100}\right)^8 = 615\,862{,}65$

c) $K_n = 1{,}2\cdot 10^6\left(1-\frac{8}{100}\right)^n \leq 250000$

16. Da noch kein Logarithmus zur Verfügung steht, muss man bis $n = 19$ einzeln überprüfen.

Jahr	Restschuld $K_{i+1} = K_i - a$	Zins $Z_i = K_i p$	Tilgung a	Annuität $Z_i + a$
0	120 000	9 600	15 000	24 600
1	105 000	8 400	15 000	23 400
2	90 000	7 200	15 000	9 700
3	75 000	6 000	15 000	7 500
4	60 000	4 800	15 000	6 300
5	45 000	3 600	15 000	5 100
6	30 000	2 400	15 000	3 900
7	15 000	1 200	15 000	2 700
8	0	0	0	0

17. a) $F_1 = a^2$

$$F_2 = a^2 + 4\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2$$

$$F_3 = 2a^2 + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2 = 2a^2 + \frac{3}{4}a^2$$

$$F_4 = 2a^2 + \frac{3}{4}a^2 + 4\cdot 3^2\left(\frac{a}{8}\right)^2 = 2a^2 + \frac{3}{4}a^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a^2$$

$$F_5 = 2a^2 + \frac{3}{4}a^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 a^2 + 4\cdot 3^3\cdot\left(\frac{a}{2^4}\right)^2 = a^2 + a^2\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3\right) = a^2\left(1 + \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

b) $\dfrac{F_5}{F_1} = \dfrac{1 + \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1}{-\frac{1}{4}}}{1} = 1 + 4\cdot\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4\right) = 3{,}734375$; die Zunahme beträgt also 273%.

c) Bei F_2 hat man bereits 100% Zunahme. Bei F_3 erhält man eine Zunahme von 175%. Die Antwort lautet also: Man muss die Quadrate zweimal anfügen.

Fügt man die Quadrate beliebig oft an, so wird n unendlich groß und $\dfrac{F_\infty}{F_1} = 5$; die Zunahme beträgt also maximal 400%.

Arbeitsblatt 10.1: Parabeln n-ter Ordnung

Aufgabentexte Setie 16

1. a) $(0|0)$, $(1|1)$, $(-1|1)$ b) $(0|0)$, $(1|-1)$, $(-1|1)$ c) $(0|0)$

2. a) Sie fallen alle streng monoton.
   b) In $]-\infty;\infty[$ sind sie streng monoton fallend. An keiner Stelle sind sie steigend.
   c) Der Graph ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand 1. Der Punkt $(0|1)$ ist nicht erfasst, weil 0^0 nicht definiert ist.

3. $-0{,}25x^4 + 5 = -0{,}25(-x)^4 + 5$

4. a) Die Zeichnung ist nicht ausgeführt.

x	– 3	– 2,5	– 2	– 1,5	– 1	– 0,5	0	0,5	1
y	– 5	– 0,375	2	2,875	3	3,125	4	6,375	11

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 4 = (x+1)^3 + 3$; der Graph zu $y = z^3$ wird um den Vektor $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ verschoben.

c) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = (x-2)^3 + 1$

d) Man verschiebt den Graphen von f um den Vektor $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ und erhält den Graphen von g.

5. a) Bei den Schnittpunkten gilt: $5 - y + y^2 = 25$, also $y^2 - y - 20 = 0$; diese Gleichung hat die Lösungen $y_1 = 5$ und $y_2 = -4$. Durch Einsetzen in $x^2 = 5 - y$ erhält man $x_1 = 0$ und $x_2 = \pm 3$. Man findet also drei Schnittpunkte: $(0|5)$, $(3|-4)$, $(-3|-4)$

b) $y^2 + y - (a+4) = 0$ hat die Lösungen $y_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(4+a)}}{2}$. Wir erhalten die folgende Fallunterscheidung:

A) 17 + 4a > 0, also $a > \frac{-17}{4}$: Die Parabel schneidet den Kreis in mehreren Punkten mit

$$x = \pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{1+4(4+a)}}{2}-a}$$. Das können 2 oder 3 oder 4 Schnittpunkte sein.

B) 17 + 4a = 0, also $a = \frac{-17}{4}$, also $y = -\frac{1}{2}$ mit $x = \pm\sqrt{\frac{-1}{2}+\frac{17}{4}} = \pm\sqrt{\frac{15}{4}}$; das sind 2 Schnittpunkte oder

C) 17 + 4a < 0, also $a < \frac{-17}{4}$: Es gibt hierzu keine reellen y-Werte, also keinen Schnittpunkt.

6. a) $y = x(x^2-1) = 0$ gibt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
   b) nicht ausgeführt;
   c) $(-x)^3-(-x) = -x^3+x = -(x^3-x)$
   d) In $]-\infty;-0{,}58..]$ ist die Funktion streng monoton steigend, in $[-0{,}58..;0{,}58..]$ streng monoton fallend und in $[0{,}58..;\infty[$ streng monoton steigend.

7. a) $(0\,|\,0)$ mit beiden Achsen und mit der x-Achse für $x^2(x^2-1) = 0$, also zusätzliche Schnittpunkte mit der x-Achse bei $(1\,|\,0)$ und $(-1\,|\,0)$.
   b) nicht ausgeführt;
   c) In $]-\infty;-0{,}71..]$ ist die Funktion streng monoton fallend, in $[-0{,}71..;0]$ streng monoton steigend, in $[0;0{,}71..]$ streng monoton fallend und in $[0{,}71..;\infty[$ streng monoton steigend.
   d) $(-x)^4-(-x)^2 = x^4-x^2$
   e) $x^4-x^2 = 2$ hat die Lösungen $x_{1/2} = 1\pm\sqrt{3}$. Damit hat man die Schnittpunkte $(\pm\sqrt{2}\,|\,2)$.

8. a) Dem hier nicht gezeichneten Graphen entnimmt man, dass es günstig ist, die linke Parabel durch die Punkte $(0|\,0)$, $(2|\,8)$ und $(4|\,4)$ festzulegen; für die rechte Parabel wählt man die Punkte $(4|\,4)$, $(6|\,0)$ und $(8|\,8)$. Man sucht die Gleichung für die linke Parabel:
   $0a+0b+c = 0$, also $c = 0$.
   $4a+2b+0 = 8$
   $16a+4b+0 = 4$, also $4a + b = 1$; so findet man $b = 7$ und $a = -\frac{3}{2}$. Die Gleichung der linken Parabel lautet also: $y = -\frac{3}{2}x^2+7x$. Analog für die rechte Parabel:
   $16a+4b+c = 4$ (1)
   $36a+6b+c = 0$ (2)
   $64a+8b+c = 8$ (3)
   Aus (2) – (1) bzw. (3) – (2) findet man
   $20a+2b = -4$ (4)
   $28a+2b = 8$ (5)
   Aus (5) – (4) findet man: $8a = 12$, also $a = \frac{3}{2}$; eingesetzt in die oberen Gleichungen findet man: $b = -17$ und $c = 48$; damit hat man die Gleichung der rechten Parabel gefunden:
   $y = \frac{3}{2}x^2-17x+48$
   b) $1{,}75 = 7m+t$ (1)
   $8 = 8m+t$ (2) Aus (2) – (1) findet man $m = 6{,}25$ und damit $t = -42$. Die Gleichung der Geraden lautet: $y = 6{,}25x-42$

9. a) Nicht ausgeführt.
   b) Um möglichst wenig rechnen zu müssen, wird man diejenigen Punkte mit einer Koordinate 0 zunächst auswählen:

$(0\|2)$; hieraus folgt:	$e = 2$	und damit	
$(-1\|0)$	$a - b + c - d + 2 = 0$		(1)
$(1\|0)$	$a + b + c + d + 2 = 0$		(2)
$(5\|0)$	$625a + 125b + 25c + 5d + 2 = 0$		(3)
$(2\|-3)$	$16a + 8b + 4c + 2d + 2 = -3$		(4)
(2) – (1) ergibt	$2b + 2d = 0$	und damit	
	$d = -b$		(5)
(5) eingesetzt in (3)	$625a + 120b + 25c = -2$		(6)
(5) eingesetzt in (4)	$16a + 6b + 4c = -5$		(7)
(1) und (2) vereinfachen sich zu	$a + c = -2$	und damit	
	$c = -2 - a$		(8)
(8) eingesetzt in (6) ergibt	$600a + 120b = 48$		(9)
(8) eingesetzt in (7) ergibt	$12a + 6b = 3$		(10)
(9) – 20(10):	$360a = -12$, also $a = -\frac{1}{30}$		(11)

Mit (11) in (10) findet man $b = \frac{17}{30}$ und mit (5) $d = -\frac{17}{30}$.

(11) eingesetzt in (8): $c = -\frac{59}{30}$

Der Graph hat also die Gleichung $y = -\frac{1}{30}x^4 + \frac{17}{30}x^3 - \frac{59}{30}x^2 - \frac{17}{30}x + 2$.

Es ist noch zu prüfen ob die bisher nicht berücksichtigten Punkte auf diesem Graphen liegen:

$(-2|-3)$: $-\frac{16}{30} - \frac{17 \cdot 8}{30} - \frac{59 \cdot 4}{30} + \frac{17 \cdot 2}{30} + 2 = -9{,}8 \neq -3$; dieser Punkt liegt also nicht auf dem Graphen.

$(3|-4)$: $-\frac{81}{30} + \frac{17 \cdot 27}{30} - \frac{59 \cdot 9}{30} - \frac{17 \cdot 3}{30} + 2 = -4{,}8$; dieser Punkt liegt ebenfalls nicht auf dem Graphen.

D. h.: Hätte man andere Punkte zum Aufstellen der Gleichung des Graphen gewählt, hätte man ein anderes Ergebnis bekommen; aber auch hier wären nicht alle Punkte auf dem Graphen gelegen.

Aufgabenblatt 10.2: Hyperbeln

Aufgabentexte Seite 18

1. a) $(-1|a)$ und $(1|a)$ b) $(-1|-a)$ und $(1|a)$ c) $(-1|a)$ und $(1|a)$ d) $(-1|-a)$ und $(1|a)$ e) $(1|a)$

2. a) $f(x) = -4x^{-1}$

x	– 8	– 6	– 4	– 2	– 1	– 2/3	– 1/2
$f(x)$	0,5	0,67	1	2	4	6	8

b) nicht ausgeführt

c) und d) $|f(x)| = \frac{4}{|x|} = 2{,}5$, also $|x| = \frac{4}{2{,}5} = 1{,}6$ und damit für $x = 1{,}6$ und $x = -1{,}6$, wie man es der Zeichnung entnehmen kann.

3. a) Die gegebene Funktion geht aus der Funktion $y = -2x^{-3}$ durch eine Verschiebung um 4 längs der y-Achse hervor. Man skizziert letztere Funktion unter Berücksichtigung der Aufgabe 1.

b) Wächst x über alle Grenzen, so nähert sich der Graph der Geraden $y = 4$.

Man löst die Gleichung des Graphen nach x auf und erhält $x = -\frac{2}{y-4}$. Wächst nun y über alle

Grenzen, so strebt der Graph gegen $x = 0$.

c) $132 = -\frac{2}{x^3} + 4$ wird nach x aufgelöst zu $x = -\frac{1}{4}$.

4. a) Die Funktion ist nicht für $x = -1$ erklärt, also gilt D(y) = $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$

c) Man erhält den Graphen zur gegebenen Funktion aus dem Graphen zu $y = \frac{1}{x}$, indem man letzteren um den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschiebt.

d) Wächst x über alle Grenzen, so nähert sich der Graph der Geraden mit der Gleichung $y = 1$.

Löst man die Gleichung des gegebenen Graphen auf nach x, so erhält man $x = \frac{1}{y-1} - 1$. Wächst also y über alle Grenzen, so nähert sich der Graph der Geraden $x = -1$.

e) $(0|2)$ und $(-2|0)$

5. a)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	– 1,94	– 1,88	– 1,5	∞	– 1,5	– 1,88	– 1,94

Die Zeichnung wird nicht ausgeführt.

b) $x = 3$ und $y = -2$.

c) $(0|-1{,}94)$ und $(3{,}5|0)$ bzw. $(2{,}5|0)$.

d) Zunächst ist eine Zerrung um 0,5 längs der y-Achse durchzuführen; dann wird der Graph um den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ verschoben.

6. a) Aus $\frac{x^3}{2} = \frac{1}{x}$ erhält man $x^4 = 2$ und damit die Schnittpunkte $\left(\sqrt[4]{2} \middle| \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ und $\left(-\sqrt[4]{2} \middle| \frac{1}{-\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Aus $-x^3 = \frac{c}{x}$ erhält man $x^4 = -c$. Diese Gleichung ist nur lösbar, wenn $c \leq 0$ ist.

Im Fall $c = 0$ gibt es nur den Ursprung als Schnittpunkt.

Im Fall $c < 0$ gibt es zwei Schnittpunkte $\left(\sqrt[4]{-c} \middle| \frac{-c}{\sqrt[4]{-c}}\right)$ und $\left(-\sqrt[4]{-c} \middle| \frac{c}{-\sqrt[4]{-c}}\right)$.

c) Aus $ax^3 = \frac{2}{x^2}$ erhält man $x^5 = \frac{2}{a}$. Diese Gleichung hat nur eine reelle Lösung $x = \sqrt[5]{\frac{2}{a}}$ und damit haben die beiden Funktionen nur einen Schnittpunkt $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{a}} \middle| a \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{2}{a}\right)^3}\right)$.

7. Aus $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ erhält man für $x \neq 0$ $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = 0$ mit $x_{1/2} = \pm 1$. Man erhält die Schnittpunkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$. Das sind Berührpunkte, weil es nur 2 Schnittpunkte gibt.

8. a) Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Hyperbel $y = -x^{-1}$. Gefragt wird nach den Schnittpunkten: $x^2 + \frac{1}{x^2} = r^2$ führt wegen $x \neq 0$ zu $x^4 - r^2x^2 + 1 = 0$ mit

$x^2 = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - 4}}{2}$. Es ist $x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{\frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - 4}}{2}}$. Die dazugehörigen y-Werte findet man über die Hyperbelgleichung.

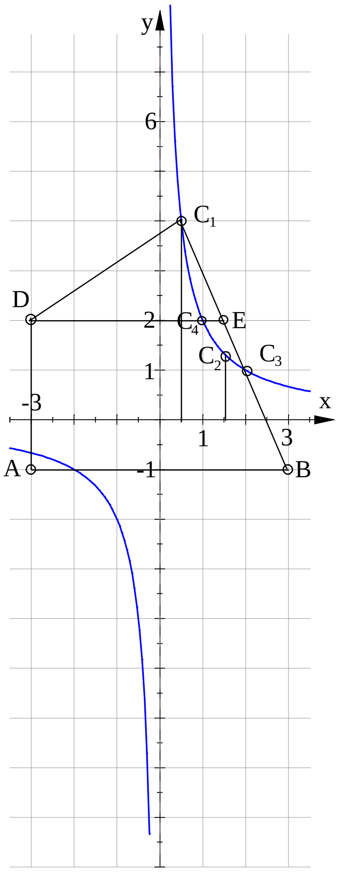
1. Falls $r^4 < 4$ gibt es keine Lösung.
2. Falls $r^4 = 4$ gibt es genau 2 Lösungen.
3. Falls $r^4 > 4$ gibt es genau 4 Lösungen, weil dann $r^2 > \sqrt{r^4 - 4}$ ist.

b) Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ und die Hyperbel $y = cx^{-1}$. Die Schnittpunkte erhält man aus $x^2 + \frac{c^2}{x^2} = 1$. Wegen $x \neq 0$ findet man hieraus $x^4 - x^2 + c^2 = 0$ und damit

$$x_{1/2/3/4} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2}}{2}}.$$

3. Falls $1 < 4c^2$ gibt es keine Lösung.
4. Falls $1 = 4c^2$ gibt es genau 2 Lösungen.
5. Falls $1 > 4c^2$ gibt es genau 4 Lösungen.

Die dazugehörigen y-Werte findet man über die Hyperbelgleichung.



9\.

a) Siehe die nebenstehende Zeichnung.

b) $C_1(0{,}5|4)$, $C_2\left(1{,}5\middle|\frac{4}{3}\right)$, $C_3(2|1)$.

c) Siehe die nebenstehende Zeichnung:
Nach dem Strahlensatz ist $E(1{,}5|2)$. Demnach beträgt die

Dreiecksfläche $F_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4{,}5 = 4{,}5$ und die

Trapezfläche $F_2 = \frac{1}{2} \cdot 10{,}5 \cdot 3 = 15{,}75$ und damit das

Viereck $F_1 + F_2 = 20{,}25$.

d) Liegt der Punkt $C(x\,|\,y)$ oberhalb C_4 (siehe die Zeichnung), dann zerlegt man wie bei c) und erhält

$$A(x) = F_1 + F_2 = \frac{1}{2}(y-2) \cdot 6 \cdot \frac{y-2}{y+1} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(6 + 6 \cdot \frac{y-2}{y+1}\right) =$$

$$= 3 \cdot \left((y+1) \cdot \frac{y-2}{y+1} + 3\right) =$$

$$= 3 \cdot (y - 2 + 3) = 3 \cdot (y+1) = 3 \cdot \left(\frac{2}{x} + 1\right) = \frac{6}{x} + 3 = 1{,}5x + 7{,}5 + \frac{6}{x}$$, also $x = -3$. Der dazu gehörige Punkt C liegt aber unterhalb von C_4 und kommt deshalb nicht infrage.

Liegt C unterhalb von C_4, dann kann das Viereck zerlegt werden in ein Trapez und ein Dreieck:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (2-y) \cdot (3+x) + \frac{1}{2} \cdot (y+1) \cdot (9+x) = \frac{1}{2} \cdot (6 - 3y + 2x - xy + 9y + 9 + xy + x) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (15 + 3x + 6y) = \frac{1}{2} \cdot \left(15 + 3x + \frac{12}{x}\right) = 7{,}5 + 1{,}5x + 6x^{-1} = 7{,}5 + 1{,}5x + 6x^{-1}$$

Jeder Punkt C unterhalb von C_4 und oberhalb der x-Achse erfüllt also die gegebene Bedingung.

Arbeitsblatt 10.3: Potenzfunktionen, Monotoniegesetze für Potenzen
Aufgabentexte Seite 21

1. Es sind die beiden Terme miteinander zu vergleichen; hierbei kann man den jeweiligen Faktor außer Acht lassen. Es wird also behauptet: $x^{-5} < x^{-3}$. Für $x > 1$ kann man diese Ungleichung mit x^3 multiplizieren und erhält $x^{-2} < 1$. Geht man zu den Kehrwerten über, erhält man für diese x-Werte $x^2 > 1$. Letzteres folgt aus der Voraussetzung $x > 1$. Da alle anderen Schlüsse umkehrbar sind, ist damit die Behauptung gezeigt.

2. a) Das Ungleichheitszeichen bleibt.
   b) Das Ungleichheitszeichen bleibt bei Multiplikation mit 8, wird aber bei Multiplikation mit – 2 umgekehrt.
   c) Die Division mit – 5 ist eine Multiplikation mit – 0,2 und damit ändert sich das Ungleichheitszeichen.
   d) Das Ungleichheitszeichen verändert sich.
   e) Bei Potenzieren mit 3 ändert sich nichts, mit – 5 kehrt das Ungleichheitszeichen um.
   Siehe Kapitel 1.1. P4 bzw. Kapitel 2.3.

3. a) $2{,}1^4 < 2{,}2^4$, weil $2{,}1 < 2{,}4$
   b) $2{,}3^2 < 2{,}3^3$ und deshalb $2{,}3^{-2} > 2{,}3^{-3}$
   c) $2{,}2^{-2} < 2{,}2^3$, weil $-2 < 3$ und $2{,}2 > 1$
   d) $2{,}1^4 < 2{,}1^5 < 2{,}2^5$
   e) $2{,}3^2 < 2{,}8^2 < 2{,}8^5$ und deshalb $2{,}3^{-2} > 2{,}8^{-5}$
   f) $2{,}2^{-2} < 2{,}8^5$
   g) $\left(\sqrt{2}\right)^{0{,}625} < \left(\sqrt{2}\right)^{0{,}750}$ nach 2.3.3.2 und $\left(\sqrt{2}\right)^{0{,}750} = <\left(\sqrt{3}\right)^{0{,}750}$ nach 2.3.2.1 und deshalb gilt $\left(\sqrt{2}\right)^{-0{,}625} > \left(\sqrt{3}\right)^{-0{,}750}$
   h) $\left(\sqrt{0{,}25}\right)^{2{,}5} < \left(\sqrt{0{,}25}\right)^{0{,}75}$ nach 2.3.3.1
   $\left(\sqrt{0{,}25}\right)^{0{,}75} < \left(\sqrt{0{,}8}\right)^{0{,}75}$ nach 2.3.2.1
   $\left(\sqrt{0{,}8}\right)^{0{,}75} < \left(\sqrt{0{,}8}\right)^{-0{,}75}$ nach 2.3.3.1; also gilt die Behauptung.

   Merke: Die Monotoniegesetze merkt man sich anhand von Beispielen mit kleinen Zahlen.

4. a) $2{,}3^4 > 2{,}3^{-2} > 2{,}9^{-2}$
   b) $0{,}25^{-1{,}5} < 0{,}25^{-1{,}9} < 0{,}24^{-1{,}9}$
   c) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} < \sqrt{21} < \sqrt{50} = 5\sqrt{2} < \sqrt{52}$

5. a) $2^5 = 32 \le x^2 \le 3^4 = 81$, also L = {6; 7; 8; 9}
   b) $\sqrt{64} = 8 < (x+1)^2 \le 5^4 = 625$, also L = {2; 3; 4; 5; … 24}
   c) $10^2 = 100 < x^3 < 2^{17} = 2^{10} \cdot 2^7 = 1024 \cdot 128 = 131072$, also L = {5; 6; …50}
   d) $3^5 = 243 \le x^4 < 2^{20} = 1024 \cdot 1024 = 1048576$, also L = {4;…32}
   e) $a := \left(2^3\right)^4 = 2^{12} = \left(2^4\right)^3$, $b := 2^{\left(3^4\right)} = 2^{81}$, also $\left(2^3\right)^4 = \left(2^4\right)^3 < 2^{\left(3^4\right)}$, wobei $b = a \cdot 2^{69}$ ist.

6. Da $2x + 3 > 2x – 3$ ist, gilt die gegebene Doppelungleichung nicht, d. h. L ist leer.

Arbeitsblatt 10.4: Umkehrfunktionen – Wurzelfunktionen
Aufgabentexte Seite 23

1. a) $-3y = 2x - 1$ mit D = ℝ und hieraus: $x = \frac{1}{2}(1-3y)$

   Umkehrfunktion: $y = \frac{1}{2}(1-3x)$ mit D = ℝ

b) An sich geht die Umkehrfunktion durch Spiegelung an $y = x$ aus der gegebenen Funktion hervor. D. h. das wäre die senkrechte Gerade $x = 4$. Diese Gerade entspricht aber keiner Funktion, weil es zu einem x-Wert unendlich viele y-Werte gibt.

c) Weil die Gerade $x = 1$ zu keiner Funktion gehört; siehe b).

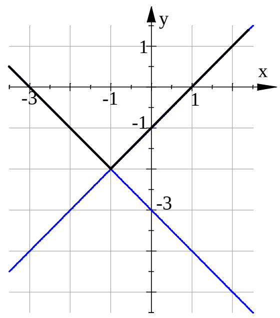
2. | ist Definitionsbereich und damit maximal.

a) $y = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \geq -1 \\ -x-3 & \text{für } x < -1 \end{cases}$

c) Der Zeichnung entnimmt man:
In $]-\infty;-1]$ steng monoton fallend,
in $[-1;\infty[$ streng monoton steigend.

d) Man kann zwei Umkehrfunktionen definieren:
$y = x+1$ mit D = $[-2;\infty[$ und
$y = -x-3$ mit D = $[-2;\infty[$.

b)



3. $y = (x-2)^2 + 6$ für D = ℝ hat den Scheitel $(2|6)$ und Symmetrieachse $x = 2$.

a) Man zerlegt in $f_1(x) = (x-2)^2 + 6$ mit D = $[2;\infty[$ und $f_2(x) = (x-2)^2 + 6$ mit D = $]-\infty;2]$.
Entsprechend erhält man $f_1^*(x) = 2+\sqrt{x-6}$ und $f_2^*(x) = 2-\sqrt{x-6}$ jeweils mit D* = $[6;\infty[$.

b), c) $x = 0{,}5x^2 - 2x + 5$ hat keine reellen Lösungen, d. h.: f, f_1, f_2, f_1*, f_2* haben mit $y = x$ keinen Schnittpunkt.

d) Nicht ausgeführt.

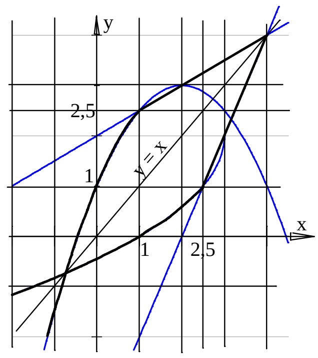
4. a) Beide Funktionen haben D = $[-1;\infty[$.

b) Beide Funktionen haben die Umkehrfunktion $y = (x-1)^2 - 1$ mit $D_1 = [1;\infty[$ bzw. $D_2 =]-\infty;1]$.

c) Nicht ausgeführt.

5. a), c) Nebenstehender Graph zeigt, dass zu jedem y aus | genau ein x gehört, d. h. die Funktion ist in | umkehrbar oder: Die Funktion ist streng monoton steigend.

b) Umkehrung des Parabelanteils:
$f_1^*(x) = 2-\sqrt{6-2x}$ für $x \in]-\infty;2{,}5]$
Umkehrung des Geradenanteils:
$f_2^*(x) = 2x-4$ für $x \in [2{,}5;\infty[$, also
$f^*(x) = \begin{cases} 2-\sqrt{6-2x} & \text{für } x \in]-\infty;2{,}5] \\ 2x-4 & \text{für } x \in [2{,}5;\infty[\end{cases}$.



c) f und f* liegen zu $y = x$ symmetrisch; deshalb halbiert diese Gerade die genannte Fläche.

6. a) $y = \frac{1}{12}(x+6)^2 - \frac{9}{2}$ hat den Scheitel $\left(-6\middle|-\frac{9}{2}\right)$, bei dem sich das Monotonieverhalten ändert.
Deshalb ist die Funktion höchstens in $[-6|6]$ umkehrbar.

b) f*: $y = -6 \pm \sqrt{12y+54}$. Es gibt also zwei verschiedene Lösungen. Wenn man allerdings voraussetzt, dass der Wertebereich $[-6|6]$ sein muss, gibt es nur die Lösung $y = -6+\sqrt{12y+54}$.

7. a), d) $y = \frac{2}{x^2} + 1$. Man superponiert die Gerade zu $y = 1$ mit der Hyperbel zu $y = \frac{2}{x^2}$.
Die Superposition hat die Asymptoten $x = 0$ und $y = 1$. Der Graph ist symmetrisch zu $x = 0$.

b) Da der Graph von f symmetrisch zu $x = 0$ ist, hat die Funktion keine strenge Monotonie. Beschränkt man die Definitionsmenge von f und damit f zu f_1 mit $D_1 =]0;\infty[$, so erhält man f_1* zu

$y = \sqrt{\dfrac{2}{x-1}}$ mit $D_1 = \left]1;\infty\right[$.

c) Aus $-3x = \dfrac{2+x^2}{x^2}$ findet man $2+x^2+3x^3 = 0$. Man kann nun versuchen, durch Raten eine Lösung $x = -1$ zu finden, man kann aber auch über die für d) erforderliche Wertetabelle diese Lösung finden. Die Polynomdivision $(3x^3+x^2+2):(x+1) = 3x^2-2x+1 = 0$ zeigt, dass es keine weiteren reellen Lösungen gibt.

d) Nicht ausgeführt.

8. a) Die gegebene Funktion entspricht der Funktion $y = \dfrac{-2}{x^3}+4$ in $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$. Die hierzu gehörige Umkehrfunktion ist $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{4-y}}$ für $y \le 4$.

b) Umkehrfunktion $y = -\sqrt[4]{20-4x}$ in $\left]-\infty;5\right]$.

c) Umkehrfunktion $y = \sqrt[3]{y}-1$ in $\left[0;\infty\right[$.

9. a) $7{,}93 \approx \sqrt[3]{500} < x < 10^2 = 100$, also L={8, 9, …, 99}.

b) $4{,}6..\ -1 < \sqrt[3]{99}-1 < x \le 9^3-1 = 728$, also L = {4, 5, …, 728}.

c) $6{,}3..+1 \approx 2^{8/3}+1 \le z < 11^{5/3}+1 \approx 55{,}406..$, also L = {8, 9,…., 55}

d) $1{,}2.-2 \approx -0{,}74... \le z \le \sqrt[3]{5}-2 \approx -0{,}29..$, also ist L leer.

10. a) Der Graph zu $y = x^3$ mit x aus $\mathbb{R}_0^-$ wird an $y = x$ gespiegelt zum Graphen zu $y = \sqrt[3]{x}$ mit x aus $\mathbb{R}_0^-$. Dieser Graph wird gespiegelt an $y = 0$ zu $y = \sqrt[3]{|x|}$ für x aus $\mathbb{R}_0^-$. Schließlich wird hierzu das Spiegelbild an $x = 0$ hinzugenommen; man erhält insgesamt die gewünschte Funktion. Der Graph ist nicht gezeichnet.

b) Für x aus $\mathbb{R}_0^+$ ist $f_1{*} = x^3$, für x aus $\mathbb{R}_0^-$ ist $f_2{*} = -|x|^3$.

11. Es sei stets $x_1 < x_2$; hieraus folgt:

a) streng monoton fallend, weil $-(x_1-2)^3 > -(x_2-2)^3$. Aus der gegebenen Funktionsgleichung folgt nach Vertauschen der Variablen: $y = 2-\sqrt[3]{x}$ für alle x aus $\mathbb{R}$.

b) streng monoton steigend, weil $(x_1-5)^5 < (x_2-5)^5$; hieraus folgt die Behauptung. Aus der gegebenen Funktionsgleichung folgt nach Vertauschung der Variablen: $y = \sqrt[5]{x+2}+1$ für x aus $\mathbb{R}$.

c) Bei – 3 wechselt die Monotonie; deshalb beschränkt man z. B. auf $\left[-3;\infty\right[$. Hier ist die Funktion streng monoton fallend: $(x_1+3)^6 < (x_2+3)^6$ und deshalb $-(x_1+3)^6-1 > -(x_2+3)^6-1$. Beschränkt man sich auf diesen Bereich, so erhält man nach Vertauschen der Variablen hieraus: $y = \sqrt[6]{-x-1}-3$ für x aus $\left]-\infty;-1\right]$.

d) Die gegebene Funktion $y\ -(x+2)^3-1$ ist streng monoton fallend und damit überall umkehrbar; denn aus $(x_1+2)^3 < (x_2+2)^3$ folgt $-(x_1+2)^3-1 > -(x_2+2)^3-1$. Die Umkehrfunktion ist $y = \sqrt[3]{-y-1}-2$ für alle y aus $\mathbb{R}$, wenn man bedenkt, dass $\sqrt[3]{u} = -\sqrt[3]{|u|}$ für negative u gilt.

e) Für gerade n ist die Funktion z. B. innerhalb von $\left[a;\infty\right[$ streng monoton steigend und kann umgekehrt werden zu $y = \sqrt[n]{y-b}+a$ für x aus $\left[b;\infty\right[$. Beweis der strengen Monotonie: Leicht berechnet man $(x_1-a)^n+b < (x_2-a)^n+b$ für alle x_i aus $\left[a;\infty\right[$.

Für ungerade n ist die Funktion in $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, weil $(x_1 - a)^n + b < (x_2 - a)^n + b$ für alle x_i aus $\mathbb{R}$ gilt. Die Umkehrfunktion hat die Gleichung $y = \sqrt[n]{y - b} + a$ für alle x.

12. $h' = -\dfrac{1{,}704}{85{,}333} \approx -0{,}01996$ und damit $x_3 \approx 5{,}31337$. Es folgt $x_4 = x_3 + \bar{h}$ und damit $\left(5{,}31337 + \bar{h}\right)^3 \approx 5{,}31337^3 + 3 \cdot 5{,}31337^2 \cdot \bar{h} \approx 150$; hieraus folgt $\bar{h} \approx \dfrac{-0{,}0065345}{84{,}69570227} \approx -0{,}000077..$ und damit $x_4 \approx 5{,}313292847...$. Der Taschenrechner ergibt $x = 5{,}313292846..$

Arbeitsblatt 10.5: Exponentialfunktion

Aufgabentexte Seite 26

1. Man kann nur u. U. entscheiden, weil nicht bekannt ist, welche Werte in den Lücken stehen.

a) Vermutung: Exponentielles Wachstum mit Basis 2:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

b) Vermutung: Arithmetisches Wachstum mit Differenz 11:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
12	23	34	45	56	67	78	89	100

c) Vermutung: Arithmetisches Wachstum mit Differenz 6,5:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,5	7	13,5	20	26,5	33	39,5	46	52,5

d) Vermutung: Exponentielles Wachstum mit Basis 5:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	25	125	625	3125	15 625	78 125	390 625

2. Lösung durch gezieltes Raten mit dem Taschenrechner:

x	70	60	65	61
$1{,}2^x$	348 888,..	56 347,..	140 210,..	67 617,..
1000x+1	70 001	60 001	65 001	61 001
Urteil	zu groß	zu klein	zu groß	zu groß

Die kleinste natürliche Zahl, die die Bedingung erfüllt, ist x = 61. Jede größere natürliche Zahl ist dann auch Lösung.

3. a)

n	10	5	7	6
$0{,}2 \cdot 2^n$	204,8	6,4	25,6	12,8
$1{,}5^n$	57,66..	7,59	17,..	11,3..
Urteil	zu groß	zu klein	zu groß	zu groß

L = $\{x : x \geq 6\}$

b)

n	10	5	7	6
$\frac{1}{4} \cdot 3^n$	14 762,..	60,75	546,75	182,25
$3 \cdot 2^n$	3 072	96	384	192
Urteil	zu groß	zu klein	zu groß	zu klein

$L = \{x : x \geq 7\}$

4. Die Verzinsungszeit beträgt bis 2009 142 Jahre: $7{,}2 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}02^{142} - 1}{0{,}02} = 5{,}631... \cdot 10^{12}$, das wären 5,631 Billionen Dollar.

5.

Jahr	Umsatz	Kosten	Gewinn
1	$2 \cdot 10^6$	$0{,}5 \cdot 10^6$	$1{,}5 \cdot 10^6$
2	$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}02$	$0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}075$	$1{,}5025 \cdot 10^6$
3	$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}02^2$	$0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}075^2$	$1{,}5030 \cdot 10^6$
4	$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}02^3$	$0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}075^3$	$1{,}5013 \cdot 10^6$
5	$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}02^4$	$0{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}075^4$	$1{,}4971 \cdot 10^6$

Der Gewinn fällt ab dem 4. Jahr.

6. $M_n = 7{,}0 \cdot 10^9 \cdot 1{,}018^{n-1}$: $M_5 = 8{,}1 \cdot 10^9$, $M_{10} = 8{,}2 \cdot 10^9$, $M_{20} = 9{,}8 \cdot 10^9$, $M_{50} = 16{,}8 \cdot 10^9$;

$n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}018} + 1 \approx 40$ Jahre.

7. G sei die Geburtenrate und S die Sterberate jeweils in Promill; dann gilt $E_{22} = E_1 \cdot (1 + G - S)^{21}$:
Man erhält in Millionen Einwohnern:

Großbrit.	60,7	Togo	105	Süd-Korea	51,8
Japan	134	USA	260	Mexiko	134
Pakistan	208	Brasilien	218		

Arbeitsblatt 10.6: Exponentialfunktion

Aufgabentexte Seite 28

1.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$\exp_2(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x$	– 6	– 4	– 2	0	2	4	6

Die Graphen wurden nicht gezeichnet.

a) $\exp_a(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)$ und
$\exp_a(x_1 - x_2) = a^{x_1 - x_2} = a^{x_1} : a^{x_2} = \exp_a(x_1) : \exp_a(x_2)$

b) Nicht verlangt: Aus der Angabe $(x_1|y_1)$ folgt für x_2: $a^{x_2} = a^{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}} = y_1^{x_2 : x_1}$

x_i	2	4	10	1
$y_i = y_1^{x_2 : x_1}$	9	$9^{4:2} = 81$	$9^{10:2} = 59049$	$9^{1:2} = 3$

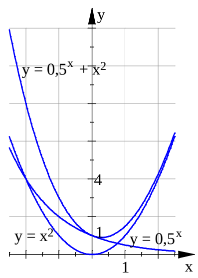
c) Da $a^{-x_1} = \left(a^{-1}\right)^{x_1}$ ist, gehen die Graphen durch Spiegelung an der y-Achse auseinander hervor.

d) Wegen $x_1 < x_2$ gibt es ein s mit $x_2 = x_1 + s$ und $s \geq 0$; deshalb gilt: $a^{x_2} = a^{x_1} \cdot a^s \geq a^{x_1}$, weil $a^s \geq 1$ ist.

2. Man erkennt in beiden Fällen $x_1 = 2$. b) Die zweite Lösung wird geraten zu $x_2 = 1$.
a) Da die Parabel die Exponentialfunktion genau zweimal schneidet, muss man durch gezieltes Raten die zweite Lösung suchen, wobei eine ungefähre Zeichnung der Graphen einen ersten Hinweis gibt:

	x^2	2^x	Urteil
– 0,7	0,49	0,7	zu groß
– 0,8	0,64	0,6	zu klein
– 0,75	0,56	0,57	zu groß
– 0,77	0,593	0,59	zu klein
– 0,76	0,5776	0,586	zu groß

$x_2 = -0{,}76\ldots$



5. a) 6 b) $x = 7$ c) $x = -2$ d) $x = -2$ e) $x = -2$ f) unlösbar g) $x = \frac{1}{2}$

   h) $x = 4$ i) $x = \frac{1}{4}$ j) $x = \frac{1}{8}$ k) $x = -\frac{1}{8}$ l) $\frac{1}{2} = 3x - 2$, also $x = \frac{5}{6}$.

4.

a < π < b		$2^a < 2^\pi = 2^b$	
3	4	8	16
3,1	3,2	8,57	9,19
3,14	3,15	8,82	8,88
3,141	3,142	8,821	8,827

Der gesuchte Wert ist 8,82…

5. a)

x	$1{,}5^x > x^2$		Urteil
10	57,6	100	zu klein
20	3,325,..	400	zu groß
15	437,..	225	zu groß
13	194,..	169	zu groß
12	129,..	144	zu klein

$x > 12$

b)

x	$2^x > x^{20}$		Urteil
50	$1{,}1 \cdot 10^{15}$	$9 \cdot 10^{16}$	zu klein
60	$1{,}2 \cdot 10^{18}$	$6{,}0 \cdot 10^{17}$	zu groß
55	$3{,}6 \cdot 10^{16}$	$2{,}5 \cdot 10^{17}$	zu klein
58	$2{,}9 \cdot 10^{17}$	$4{,}3 \cdot 10^{17}$	zu klein
59	$5{,}8 \cdot 10^{17}$	$5{,}1 \cdot 10^{17}$	zu klein

$x > 50$

6. a) $10^{3,3} = 2000$; $10^{-2,6} = 10^{-3+0,4} = 0{,}00251$; $10^{-n+0,4} = 2{,}51 \cdot 10^{-n}$
   b) Wenn $y \in [-5;-4]$ ist, dann ist $y = -5 + x$ mit einem $x \in [0;1]$ und deshalb gilt:
   $10^y = 10^x \cdot 0{,}00001$

7. Die Zeichnung fehlt hier.
   a) Die y-Werte von $\exp_4(x)$ sind die Quadrate der y-Werte von $\exp_2(x)$.
   b) Analog sind die y-Werte von $\exp_8(x)$ und $\exp_{\sqrt{2}}(x)$ die Kuben bzw. Wurzeln der y-Werte von $\exp_2(x)$.
   c) Wenn $a = 2^y$ ist, dann ist $\exp_a(x) = (\exp_2(x))^y$.

Arbeitsblatt 10.7: Anwendungen zur Exponentialfunktion

Aufgabentexte Seite 30

1. Der Graph zu $y = 1{,}5^x$ wird in x-Richtung mit b vom Ursprung aus zentrisch gestreckt, in x-Richtung um c verschoben und schließlich um a in y-Richtung gestreckt. Der neue Graph wird um d in y-Richtung verschoben.

2. Für $x = 0$ erkennt man, ob der Graph zu $y = a^x$ in y-Richtung um b verschoben ist. Für $x = 1$ erkennt man $a + c$, wobei c angibt, wie weit der Graph in y-Richtung verschoben ist. Im Einzelnen findet man über die folgende Wertetabelle:

Fall	x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞	Asymptote
a)	2^x+1	1	5/4	3/2	2	3	5	∞	$y = 1$
b)	$\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}$	∞	7/2	3/2	1/2	0	$-1/4$	$-1/2$	$y = -\frac{1}{2}$
c)	-2^x	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-4	$-\infty$	$y = 0$
d)	$-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$	$-\infty$	-3	-1	0	1/2	3/4	1	$y = 1$

a) $y = 2^x$ wird um $c = 1$ in y-Richtung verschoben zum Graphen zu $y = 2^x+1$.

b) $y = 2^x$ wird an der y-Achse gespiegelt und dann um $c = -½$ in y-Richtung verschoben zu $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{2}$.

c) $y = 2^x$ wird an der x-Achse gespiegelt.

d) $y = 2^x$ wird an der x- und an der y-Achse gespiegelt und dann um 0,5 in der y-Richtung verschoben zu $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x - 0{,}5$. Man kann diese Kurve aber auch aus der Kurve aus a) durch Punktspiegelung an $(0|0{,}5)$ erhalten.

3. a) $y = 4^x$ b) $y = 5\cdot 3^{x-1}$ c) $y = 5\cdot 4^{-x+2}$

4. a) $t = n\cdot 1622a$ und damit $A(t) = A(0)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3{,}7\cdot 10^{10}\,Bq\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) $n = \frac{20}{1622}$; hieraus folgt $A(t) = 3{,}6685115...\cdot 10^{10}\,Bq \approx A(0)$.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}8$ und damit $2^n = 1{,}25$, also $0 < n < 1$:

n	0,5	0,2	0,3	0,35	0,32
2^n	1,4	1,1	1, 23	1,27	1,25

$t = n\cdot 1622a = 522a \approx 500a$

5. a)

Jahr	gesamt	Δ	%/a
1960	26 258	--	--
1970	34 397	8 139	3
1980	44 825	10 428	2
1990	51 683	6 858	1

Die Spalte Δ zeigt, dass es sich um kein lineares Wachstum handelt. Die vorliegenden Zahlen gehören zu einem exponentiellen Wachstum mit einem leicht abnehmenden Prozentsatz.

b) $44825\cdot 1{,}02^{10} = 54641$; das sind 2958 mehr als in der obigen Tabelle angegeben wird; also ist der Sollwert weniger als 6 Prozent vom Istwert entfernt.

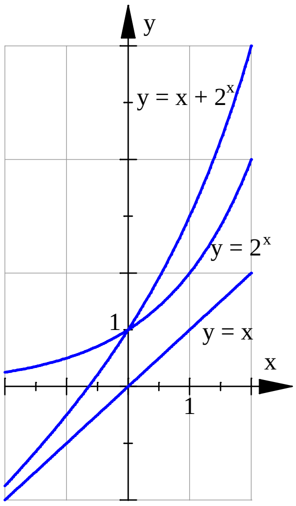
6. a) Aus $15\cdot q^5 = 114$ folgt $q = \sqrt[5]{\frac{114}{15}} = 1{,}500$. Das stündliche Wachstum beträgt also ca. 50%.

Mit $A(t) = A(0)\cdot 1{,}5^{t/h}$ findet man:

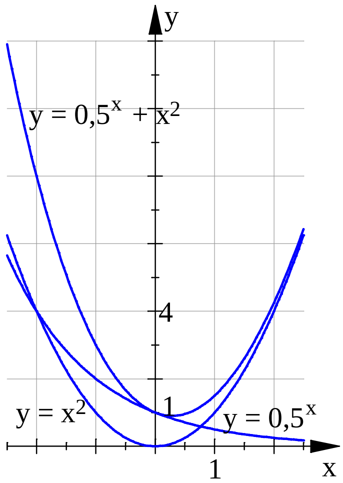
t in h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ist	15	22	30	50	68	114	176	249	340	445	503	530	571
Soll	15	22	33	50	75	113	170	256	384	576	864	1297	1946

Nach t = 9 h weicht der Sollwert mehr als 20% vom Istwert ab. Als Ursache kann die geometrische Anordnung der Zellen angesehen werden: Die sich im Inneren befindlichen Zellen können sich nicht mehr so gut vermehren, weil sie nicht genug Platz haben.

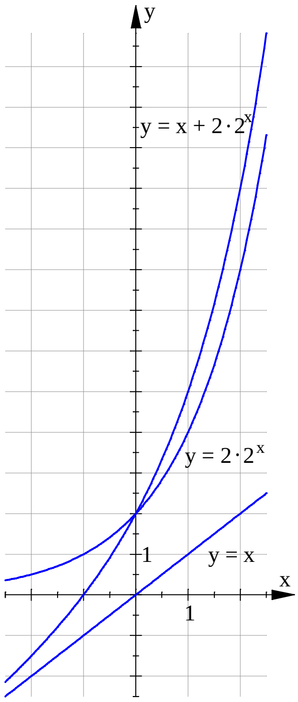
7. a)



b)



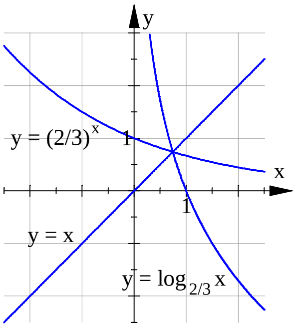
c)



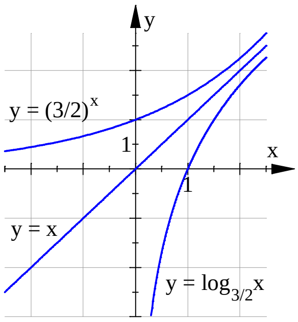
Arbeitsblatt 10.8: Logarithmusfunktion

Aufgabentexte Seite 33

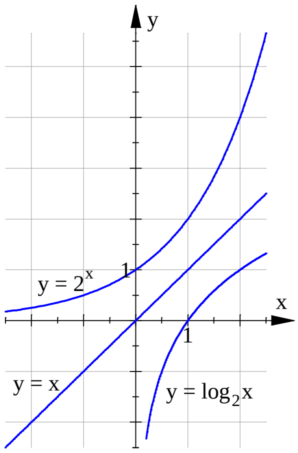
1. a)



b)



c)



2. a) Löst man auf nach der Basis, so hat man das Radizieren, löst man auf nach den Exponenten, so hat man das Logarithmieren.
   b) Wegen des Kommutativgesetzes.

c) Für $]-\infty; 1]$ ist der Logarithmus negativ, für $[1; \infty[$ positiv falls die Basis größer als 1 ist. Für Basen aus $]0;1[$ ist dies umgekehrt. Die Skizzen sind hier weggelassen.
d) Man schneidet den Graphen mit dem von $y = 1$.

3. a) $\log_4 \frac{1}{4} = -1$ b) $\log_7 1 = 0$ c) $\log_3 3^2 = 2$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

f) $\log_3 3^4 = 4$ g) $\log_{10} 10^{-2} = -2$ h) $\log_{0,2} 0{,}2^2 = 2$ i) $\log_5 5^{-4} = -4$ j) $\log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

k) $\log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ l) $\log_3 3 = 1$ m) $\log_{27} 27^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ n) $\log_9 9^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

4. a) 9; b) $7^3 = 343$; c) $2^{3\log_2 3} = 27$; d) $2^{\frac{1}{2}\log_2 3} = \sqrt{3}$; e) $10^{\log_{10}100\cdot 100} = 10000$ f) $2^{\log_2 5:2} = 2{,}5$

5. a) $x = \log_{10} 3$ b) $x = \log_a b$ c) $x = \log_{\frac{a}{b}} c$ d) $x = \frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{u}{v}} ab$

e) $x = \frac{1}{3}\cdot\log_{12} 144 = \frac{2}{3}$

6. a) $3^x = 19$ b) $b^x = 5$ c) $5^x = b$ d) $a^x = b$ e) $y^x = \frac{1}{z}$

7. a) $]0;\infty[$ b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ c) $]-\infty;0[$ d) $6-2x > 0$, also $]-\infty;3[$. e) $]0;\infty[$
f) $]0;\infty[$ g) $]0;\infty[$ h) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i) $]1;\infty[$ j) $\varnothing$ k) $\varnothing$ l) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

8. a) $f^*(x) = \log_{10} x$ b) $f^*(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $f^*(x) = \frac{1}{2}\log_3 x$

d) $f^*(x) = -2^x$ e) $f^*(x) = 5^{2x}$

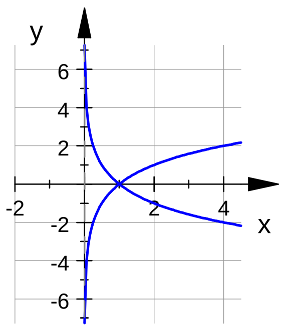
9. Die gegebene Toleranz ist hinsichtlich der Größe von 21 000 unwesentlich. Die Änderung der Radioaktivität während 30h ist hinsichtlich der Größe der Halbwertszeit zu vernachlässigen. So ergeben die gegebenen Daten $\frac{21000}{30\cdot 3600} \approx 0{,}20$ Zerfälle pro Sekunde. Der Ansatz $0{,}20 = 0{,}25\cdot 0{,}5^{\frac{t}{5370a}}$ ergibt ein

Alter $t = 5370a\cdot\dfrac{\log\frac{0{,}2}{0{,}25}}{\log 0{,}5} = 1728{,}75a$. Das kann nicht sein.

10. a) Aus der Annahme $10^{\frac{n}{m}} = 3$ mit natürlichen n und m folgt $10^n = 3^m$. 10^n hat stets die letzte Ziffer 0, während 3^m nur die Ziffern 1, 3, 7 und 9 hat. Das kann nicht sein.

b) $\log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ist also rational.

c) Aus der Annahme $\log_a b = \frac{n}{m}$ mit natürlichen Zahlen n und m folgt $a^n = b^m$. Das kann wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung teilerfremder natürliche Zahlen a und b nicht sein.



11. a) Siehe die nebenstehende Zeichnung.
b) 5,656854249
0,574349177
0,176776695
1,741101127

12. Die Argumente des Logarithmus müssen positiv sein:
    a) x aus $\mathbb{R}$ b) Das Argument ist das vollständige Quadrat $4(x-1)^2$; deshalb ist x aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
    c) Aus $x(x+3) > 0$ folgt $x > 0$ oder $x > -3$, also $x > 0$ also $\mathbb{R}^+$.
    d) Die Gleichung $x^2-6x+3 = 0$ liefert über ihre Lösungen $x = 3\pm\sqrt{6}$ D = $\mathbb{R}\setminus\left[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right]$.
    e) Die Argumente des Logarithmus müssen positiv sein, also ist $\log_3 x > 0$ und damit $x > 1$.
    f) Analog zu e) findet man $0 < x < 1$.

13. a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\sqrt[5]{0,5}} x$ c) Die Bedingung kann nicht erfüllt werden.
    d) und e) $y = \log_{16} x$

Arbeitsblatt 10.9 Rechnen mit Logarithmen
Aufgabentexte Seite 35

1. a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ b) $\left]-\infty;0\right[$ c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ d) $\left]1;\infty\right[$ e) $\varnothing$ f) $\mathbb{R}\setminus\left[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right]$
   g) Die Argumente des Logarithmus müssen positiv sein, also ist $\log_{0,5} x > 0$ und damit $0 < x < 1$.

2. a) $\log 1+\log a+\log b$ b) $r\log s-\log 5-\log u-\log v$ c) $-3\log q$ d) $\frac{1}{2}\log a$ e) $2{,}5\log x$
   f) $-\frac{1}{2}\log 5$ g) $-\log y$ h) $\log 3+3\log x+\log y-\log 4-5\log a$ i) $\frac{1}{2}\log a-\frac{1}{2}\log 5$
   j) $\frac{1}{5}(\log 5+\log p+2\log q)$ k) $6\log x-9\log y$ l) $-\log y$
   m) $-2(\log 9+2y\log x-\log 17-\log r+4\log s)$
   n) $\frac{1}{3}(\log 3+2\log a+3\log b-\log 7-\log a-4\log b) = \frac{1}{3}(\log 3-\log 7+\log a-\log b)$
   o) $\log 25-\log 8+\log x+5\log y-0{,}5\log z$ p) $\frac{5}{3}\log a+\frac{1}{2}\log b$

3. a) $\log 2xy$ b) 0 c) 0 d) 0 e) 0 f) $\log\left(x\cdot\sqrt[3]{x}\right) = \log x^{\frac{4}{3}}$ g) $\log\frac{x}{x-y}$
   h) $\log x^4$ i) $\log\frac{8}{25}$ j) $\log\frac{a-b}{a^2}$ k) $\log a^{k-m}b^{k-m} = \log(ab)^{k-m}$

4. a) $\frac{\lg 5}{\lg 2}$ b) $\frac{\lg 1000}{\lg 100} = \frac{3}{2}$ c) $\frac{\lg 10}{\lg 0{,}1} = -1$ d) $\frac{\lg 10}{\lg 2}$ e) nicht definiert f) $\frac{10\lg|x|}{\lg 3}$

5. a) $0{,}876904545\cdot 15 = 13{,}15356818$ b) $\lg\frac{9{,}9881}{10^{10}} = -10{,}00051712$ c) $-22{,}13667714$
   d) $1{,}84509804$

6. a) $5^{\log_5 7^3} = 7^3 = 343$ b) $2^{\frac{1}{2}\log_2 3} = 2^{\log_2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ c) $2^{\log_2\frac{5}{25}} = \frac{1}{5}$

7. $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \left(\frac{\lg a}{\lg b}\right)^{-1} = (\log_b a)^{-1}$

8. Mit positiven a, b, x folgt aus $k = \frac{\log_a x}{\log_b x}$ das Ergebnis $k = \frac{\lg b}{\lg a} = \log_a b$.

9. $N(100) \approx \frac{100}{2{,}3 \cdot \lg 100} = 21{,}7$; in Wirklichkeit ist $N(100) = 25$.

Mit der Formel gefundenes N:	N mit dem Sieb des ERATHOSTENES gefunden:
$N(100) \approx 21{,}7.$	25
$N(500) \approx 80{,}5.$	95
$N(5000) \approx 587{,}7.$	669
$N(50\,000) \approx 4\,626{,}3.$	5 133
$N(500\,000) \approx 38\,145{,}7$	41 538

Programm in C-Code:

```
// Einbindung der Standardbibiliothek zur Bildschirmausgabe
#include <stdio.h>

// Definition von Konstanten
#define SIZE     1000000
#define TRUE     1
#define FALSE    0

// Beginn des Hauptprogramms
void main(void)
{
  // Definition der Variablen
  int i,k;
  int Anzahl=0;
  int Grenze=0;
  char cFlags[SIZE+1];

  //Löschen des Bildschirms
  system("cls");

  //Eingabe der Berechnungsgrenze
  printf("Bitte obere Grenze zur Berechung angeben - Maximum: %d\n",
SIZE);
  scanf("%d", &Grenze);
  printf("\nPrimzahlen zwischen 2 und %d\n\n", Grenze);

  //Initialisierung des Felds
  for (i=2; i<=Grenze; i++)
    cFlags[i]=TRUE;

  //Ermittlung der Primzahlen mit Ausgabe und Streichen der Vielfa-
chen
  for (i=2; i<=Grenze; i++)
    if (cFlags[i]==TRUE)
      {for (k=i; k<=Grenze; k=k+i)
        cFlags[k]=FALSE;
        Anzahl++;
        printf("%8d",i);
      }

  //Ausgabe der Anzahl
  printf("\n\nAnzahl an Primzahlen: %d\n\n",Anzahl);

  //Schließen des Fensters erst nach Bestätigung
  system("PAUSE");
}
```

10. Die Vorkommazahl des Zehnerlogarithmus plus 1 gibt die Anzahl der Stellen an:

a) $100 \cdot lg\,5 + 1 = 70{,}89$, also 70 Stellen. b) zweideutige Angabe: $1 + \lg\left(5^5\right)^5 = 18{,}4$, also 18 Stellen oder $1 + \lg 5^{\left(5^5\right)} = 2185{,}2.$, also 2185 Stellen. c) $1 + \lg\left(8^4 + 9^9\right)^{10} = 86{,}88..$, also 86 Stellen.

11. a) $1 + \lg 20^{200} = 1 + 200(\lg 2 + 1) = 261{,}2$, d. h. 20^{200} hat 261 Stellen; man beachte: Es wird nicht gefragt nach der Anzahl verschiedener Ziffern.
    b) Wegen $200^{200} = 2^{200} \cdot 10^{400}$ hat die Zahl am Ende mindestens 400 Ziffern Null; weil 2^x nur die Endziffern 2, 4, 8 und 6 hat, sind es also genau 400 Ziffern Null.

12. a) nein: $D(4\lg x) = \left]0;\infty\right[$ dgg. $D(\lg x^4) = \left]0;\infty\right[\cup \left]-\infty;0\right[$
    b) ja: $D(lb\sqrt{x}) = D(0{,}5 \cdot lbx) = \left]0;\infty\right[$ c) ja: $D(\sqrt{x}) = D(\lg 10^{\sqrt{x}}) = \left]0;\infty\right[$
    d) nein: $D(4 \cdot \lg\sqrt{2x+3}) = \left]-\frac{3}{2};\infty\right[$ dgg. $D(\lg(2x+3)^2) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.
    e) nein: $D(x) = \mathbb{R}$ dgg. $D(\log_5 5^x) = \left]0;\infty\right[$.

13. a) E_i hat eine Benennung. Der Logarithmus darf als Argument nur eine Zahl haben. Durch den Quotienten kürzt sich die Benennung.
    b) $-2{,}5 \cdot \lg\dfrac{E}{2E} = -2{,}5 \cdot 0{,}30103.. = -0{,}752575 \neq -1 = m - 2m$
    c) $\dfrac{E_2}{E_1} = 10^{(m_1 - m_2)\frac{1}{2,5}} = 10^{(m_1 - m_2)0,4}$ Hieraus folgt: $\dfrac{E_{Sonne}}{E_{Polaris}} = 3{,}37 \cdot 10^{11}$, $\dfrac{E_{Vollmond}}{E_{Polaris}} = 847\,000$, $\dfrac{E_{Sirius}}{E_{Polaris}} = 28$.
    d) $m = m_{Polaris} - 2{,}5 \cdot \lg\dfrac{E}{E_{Polaris}} = 2{,}12 - 2{,}5(\lg 4{,}4 - 9) = 23{,}..$
    e) Aus $m_1 - m_0 = m_1 = -2{,}5 \cdot \lg\dfrac{E_1}{E_0}$ folgt $\dfrac{E_1}{E_0} = 10^{-0,4m_1}$.

       Aus $m_2 - m_0 = m_2 = -2{,}5 \cdot \lg\dfrac{E_2}{E_0}$ folgt $\dfrac{E_2}{E_0} = 10^{-0,4m_2}$. Damit erhält man

       $\dfrac{E_1 + E_2}{E_0} = 10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2}$. Hieraus folgt

       $$m_{1+2} - m_0 = m_{1+2} = -2{,}5 \cdot \lg\frac{E_1 + E_2}{E_0} = -2{,}5 \cdot \lg\left(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2}\right) =$$
       $$= -2{,}5 \cdot \lg\left(10^{-0,4 \cdot 3,7} + 10^{-0,4 \cdot 4,8}\right) \quad 3{,}36.$$

       Der Doppelstern hat also eine Gesamthelligkeit von 3,36.

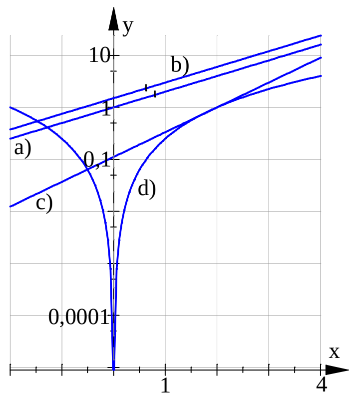
Arbeitsblatt 10.10: Hilfsmittel

Die Aufgaben siehe Seite 39.

1. a) Die Rasterung wiederholt sich nach jeder Zehnerpotenz.
   b) Die Null ist entsprechend a) im Unendlichen.
   c) Nein; nur entspricht die Rasterung i. Allg. der Basis 10.
   d) Es folgt: $\lg\bar{y} = \lg c + \bar{x}\lg a$. Mit $\lg\bar{y} =: y$ und $\bar{x} =: x$ findet man $y = x\lg a + \lg c$.
   e) Es folgt: $\lg\bar{y} = \lg c + a\lg\bar{x}$. Mit $\lg\bar{y} =: y$ und $\lg\bar{x} =: x$ findet man $y = ax + \lg c$.
   f) und g) unterscheiden sich jeweils in der Größe c.

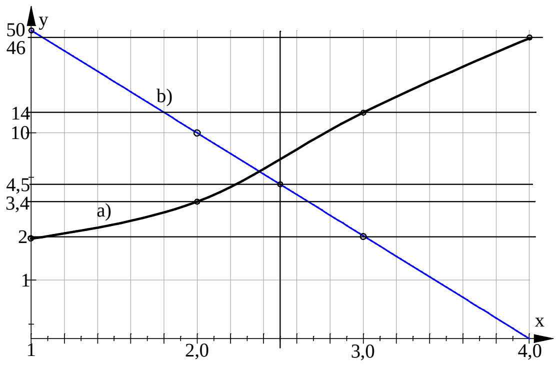
2. Das Vertauschen der Achsen bedeutet ein Vertauschen der Variablen $\bar{x}$ und $\bar{y}$, d. h. man betrachtet die Gleichung $\bar{x} = c \cdot a^{\bar{y}}$. Diese löst man nach $\bar{y}$ auf und erhält $\bar{y} = \log_a \frac{\bar{x}}{c}$. Diese Geraden sind also Logarithmusfunktionen.

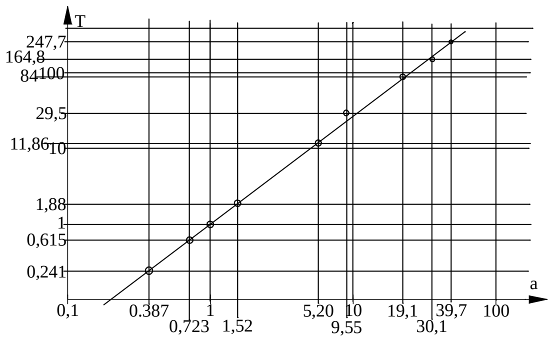
3. Siehe die nebenstehende Abbildung.



4.

a) $\bar{y} = \left(\sqrt[3]{1{,}5}\right)^{\bar{x}}$ b) $\bar{y} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\bar{x}}$ c) $\bar{y} = 2^{\bar{x}+1}$ d) $\bar{y} = 0{,}6$ e) $\bar{y} = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^{\bar{x}}$





5. Siehe die obere linke Zeichnung: Man erkennt im Fall b) eine Exponentialfunktion, während a) keine ist.

6. a) Obiger rechten Zeichnung entnimmt man die Steigung a : T = 0,66 ≈ 2:3; damit erhält man das 3. Gesetz von KEPLER $C = T^2 : a^3$.

b) Weil in der doppel-logarithmischen Darstellung die Daten zu diesem Gestirn nicht auf der gezeichneten Geraden liegen.

Arbeitsblatt 10.11: Exponential- und Logarithmusgleichungen

Die Aufgaben siehe Seite 44.

1. Das Logarithmieren der Seiten einer Gleichung ist erlaubt, da der Logarithmus eine streng monotone Funktion ist. Die Anwendung einer Exponentialfunktion auf beiden Seiten einer Gleichung ist erlaubt, da die Exponentialfunktion eine streng monotone Funktion ist.

2. a) $x = 4$ b) $x = -1$ c) $x = -4$ d) $x = -2$ e) $x = 2$ f) $x = 3$ g) unlösbar

h) D = | i) unlösbar j) $x = \frac{\lg(12 \cdot 81)}{\lg 9} = 3.1309..$ k) $x = \frac{1}{2}\left(\frac{\lg 36}{\lg 13} + 5\right) = 3{,}19985.$

l) $5^{x+1}(5+1) = 2^{x+1}(1+2)$, also $\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1} = 0{,}5$, also $x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 2{,}5} - 1 = -1{,}756..$

m) $x^2 = \frac{\lg 1000}{\lg 200}$, also $x = \pm 1{,}1418.$

n) Die Substitution $y = 5^x$ führt die gegebene Gleichung über in $7y^2 + 4y - 3 = 0$ mit den Lösungen $y = 5^x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{14} > 0$ und damit $y = 5^x = \frac{3}{7}$, also $x = \frac{\lg \frac{3}{7}}{\lg 5} = -0{,}526..$

o) Die Substitution $y = 3^x$ führt die gegebene Gleichung über in $(y-1)^2 = 0$; damit findet man $y = 3^x = 1$, d. h. $x = 0$.

p) $9 \cdot (6^x)^2 - 12 \cdot 6^x + 4 = 0$ hat die Lösung $6^x = \frac{12 \pm \sqrt{144-144}}{18} = \frac{2}{3}$;

also $x = \frac{\lg \frac{2}{3}}{\lg 6} = -0{,}22629..$

3. Die Proben wurden weggelassen, wenn sie überschaubar sind.

a) $\lg x = \lg(2^3 \cdot 2)$, also $x = 16$. b) $lbx^2 = 4 \cdot lb \frac{17}{\sqrt{13}}$, d. h. $lbx^2 = lb \frac{17^4}{13^2}$, also $x = \pm \frac{17^2}{13}$.

Wegen der Logarithmusdefinition ist nur $x = \frac{17^2}{13}$ Lösung.

c) $\lg x^3 = \lg \frac{|a|x^2}{a^7} = \lg \frac{ax^2}{a^7}$, weil aus Definitionsgründen $a > 0$ ist. Hieraus folgt $x^3 = \frac{x^2}{a^6}$ und damit $x = a^{-6}$.

Probe l.S.: $\lg a^{-18}$; r. S.: $\lg a \cdot \frac{a^{-12}}{a^7} = \lg a^{-18}$. Das gefundene Ergebnis ist also Lösung.

d) $\lg x = \frac{\lg a^2 \pm \sqrt{(\lg a^2)^2 - 4(\lg a^2 - 1)}}{2} = \frac{\lg a^2 \pm |\lg a^2 - 2|}{2} = \frac{\lg a^2 \pm (\lg a^2 - 2)}{2}$ wegen $\pm$. Hieraus

$\lg x = \begin{cases} \lg a^2 - 1 \\ 1 \end{cases}$, also $x = \begin{cases} \frac{a^2}{10} \\ 10 \end{cases}$.

Probe für $x = \frac{a^2}{10}$: l. S.: $\left(\lg \frac{a^2}{10}\right)^2 - \lg a^2 \cdot \lg \frac{a^2}{10} + \lg a^2 = 1$.

Probe für $x = 10$: l. S.: $1 - \lg a^2 + \lg a^2 = 1$. Da jeweils die rechte Seite denselben Wert wie die linke Seite erreicht, handelt es sich in beiden Fällen um eine Lösung.

e) $\log_5 x = \frac{\log_5 x}{\log_5 125} = \log_5 x^{\frac{1}{3}}$, also $x = x^{\frac{1}{3}}$ und damit $x = 1$.

f) $\log_3(x-3) = 4 = \log_3 3^4$, also $x - 3 = 81$, d. h. $x = 84$.

g) $\log_6(x^2 - 20) = \log_6 6^3$, also $x = \pm\sqrt{236}$.

h) $\lg(x^2 - 3x) = \lg(4 + x)$, also $x^2 - 3x = 4 + x$, d. h. $x^2 - 4x - 4 = 0$ oder $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

Probe l. S. $\lg(4 \pm 8\sqrt{2} + 8 - 6 \mp 6\sqrt{2}) = \lg(6 \pm 2\sqrt{2})$; die linke Seite ist für beide Werte definiert; r. S.: $2 \cdot \lg(6 \pm 2\sqrt{2}) : 2 = \lg(6 \pm 2\sqrt{2})$. Beide Werte erfüllen also die Gleichung.

i) $(\lg 2x)^2 = 9$, d. h. $\lg 2x = \pm 3 = \begin{cases} \lg 1000 \\ \lg \frac{1}{1000} \end{cases}$ und damit $x = \begin{cases} 500 \\ \frac{1}{2000} \end{cases}$

Probe für $x = 500$: l. S.: 1000^3 stimmt mit der rechten Seite 10^9 überein, ist also Lösung.

Probe für $x = \frac{1}{2000}$: l. S. $\left(\frac{1}{1000}\right)^{\lg \frac{1}{1000}} = 10^9$, das ist der Wert der rechten Seite; also handelt es sich auch in diesem Fall um eine Lösung.

4. Die folgenden Lösungen gehören nicht ins Kapitel Exponentialfunktion, weil es sich eigentlich ums Lösen von algebraischen Gleichungen handelt:

   a) $x^2 = 9$, also $x = \pm 3$. b) $x^{-3} = \frac{1}{8}$, also $x = 2$. c) $\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7$, also $x = \pm 7$.

   d) $\left(\sqrt{x}\right)^5 = 4$, also $x = \sqrt[5]{16}$. e) $x^0 = 7$ ist unlösbar.

5. $y^x = \frac{1}{z}$

6. $\log x = \log\left(2^3 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right) = \log 16$, also $x = 16$.

7. Alle verwendeten Größen sind positiv oder a und b beide negativ und c positiv. $x = \frac{\log c}{\log a - \log b}$ falls $a \neq b$. L = ℝ, falls $a = b$ und $c = 1$. In allen anderen Fällen ist die Gleichung für Schüler in Deutschland reell unlösbar.

8. a) $(x-1)\lg 2 = (-x+2)\lg 5$, also $x(\lg 2 + \lg 5) = \lg 2 + 2\lg 5$ und damit $x = \lg 50$.

   b) Die Substitution $y := 10^x$ führt zu $5y^2 - 1200y - 12500 = 0$ mit den Lösungen $10^x = y = \frac{1200 \pm \sqrt{1440000 + 250000}}{10} = \frac{1200 \pm 1300}{10} = \begin{cases} 250 \\ -10 \end{cases}$; das 2. Ergebnis kann nicht Lösung sein. L = $\{\lg 250\}$

9. a) Die Gleichung ist nur für $x > \frac{1}{5}$ sinnvoll. Also gilt $\lg\sqrt{7x^2+2} = \lg(5x-1)$ und damit $7x^2 + 2 = (5x-1)^2$, also $18x^2 - 10x - 1 = 0$ mit $x = \frac{10 \pm \sqrt{100+72}}{36} = \frac{5 \pm \sqrt{43}}{18}$.

   Wegen $x > 0{,}2$ kann das 2. Ergebnis keine Lösung sein. Es gilt also L = $\left\{\frac{5+\sqrt{43}}{18}\right\}$.

   b) $2\lg x \cdot \lg x = 2$, also $\lg x = \pm 1$ und damit $x = \begin{cases} 10 \\ 0{,}1 \end{cases}$.

   c) $25 \cdot 5^x - 2 \cdot 4^x = 4 \cdot 4^x - 5 \cdot 5^x$, also $30 \cdot 5^x = 6 \cdot 4^x$ und damit $x = \frac{\lg 0{,}2}{\lg 1{,}25}$.

   d) $x^2 \lg 200 = \lg 1000 = 3$, also $x = \pm\sqrt{\frac{3}{\lg 2 + 2}}$.

   e) $7 \cdot 5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 3 = 0$ mit $5^x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{14} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{7} \end{cases}$. Das erste Ergebnis führt zu keiner Lösung; es gilt L = $\left\{\frac{\lg\frac{3}{7}}{\lg 5}\right\}$.

   f) $9 \cdot 6^{2x} - 12 \cdot 6^x - 4 = 0$ mit $6^x = \frac{12 \pm \sqrt{144+144}}{18} = \frac{2\left(1 \pm \sqrt{2}\right)}{3}$. Das zweite Ergebnis ist unbrauchbar; es gilt L = $\left\{\frac{\lg\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\lg 6}\right\}$.

g) Aus Definitionsgründen muss $x > -4$ und $x^2 - 3x \;>\; 0$ sein. (1)

$x^2 - 3x \;=\; 4 + x$, d. h. $x_2 - 4x - 4 \;=\; 0$ mit $x \;=\; 2\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$; da beide Ergebnisse (1) erfüllen, handelt es sich um 2 Lösungen.

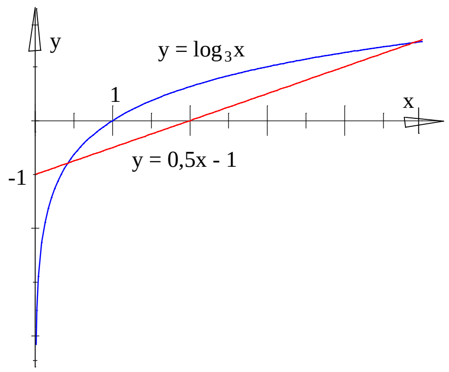
h) $\log_3 5x \;=\; \log_3 \dfrac{3}{x+6}$ mit $x > 0$ und $x > -6$. Es folgt $5x^2 + 30x - 3 \;=\; 0$ mit $x \;=\; -3 \pm \sqrt{9{,}6}$.

Der zweite Wert erfüllt nicht die Bedingungen; für $x \;=\; -3 + \sqrt{9{,}6}$ liefert die Probe mit dem Taschenrechner für beide Seiten der Gleichung den Wert -0,645734601..; es handelt sich also um eine Lösung.

i) $\dfrac{\lg 7}{\lg x^2} \;=\; \lg \dfrac{1}{2}$, d. h. $x \;=\; \pm\sqrt{10^{\frac{\lg 7}{\lg 0{,}5}}}$

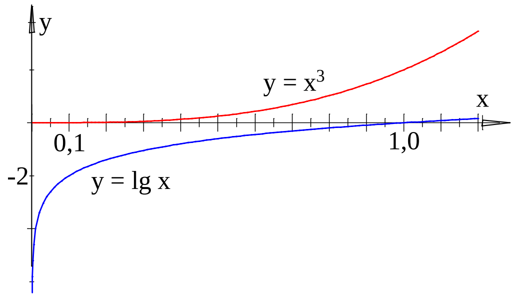
j) Die Logarithmusdefinition verlangt $x < 2$. Die quadratische Gleichung hat die Lösungen
$\lg(2-x) \;=\; \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \;=\; \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$ und damit $x \;=\; \begin{cases} 2 - 10^4 \\ 2 - 8 \end{cases} \;=\; \begin{cases} -9998 \\ -8 \end{cases}$. Beide Ergebnisse erfüllen die genannte Bedingung; die Probe zeigt, dass es sich um zwei Lösungen handelt.

10. a)



Die Zeichnung lässt Schnittpunkte bei 0,4 und 5,0 vermuten:

b)



Die beiden Kurven schneiden sich nicht; die gegebene Gleichung hat also keine Lösung.

zu a)

x	$\log_3 x$	$0{,}5x - 1$	Urteil
0,4	– 0,834..	– 0,8	zu klein
0,45	– 0,726..	– 0,775	zu groß
0,42	– 0,789..	– 0,79	zu groß
0,41	– 0,811..	– 0,795	zu klein

$x = 0{,}41\ldots$ ist also die eine Lösung.

x	$\log_3 x$	$0{,}5x - 1$	Urteil
5,0	1,46..	1,5	zu groß
4,8	1,42..	1,40	zu klein
4,88	1,4438..	1,440	zu klein
4,89	1,4447..	1,445	zu groß

$x = 4{,}88\ldots$ ist also die andere Lösung.

11. a) $0{,}1 \;>\; \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ und damit $n \;>\; \log_{\frac{5}{6}} 0{,}1 \;=\; 12{,}629..$, also $n > 12$.

b) $1{,}7^n \;>\; 6 \cdot 10^7$ und damit $n \;>\; \dfrac{\lg\left(6 \cdot 10^7\right)}{\lg 1{,}7} \;=\; 33{,}7$, also $n > 33$.

c) $2 \;\geq\; 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, d. h. $1 \geq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$, also $n \;\geq\; 1$.

d) $1350 < 8\cdot 4^n + 16\cdot 4^n = 24\cdot 4^n$; hieraus folgt $n > \dfrac{\lg\frac{1350}{24}}{\lg 4} \approx 2{,}9...$, also $n \geq 3$.

12. a) $\dfrac{\lg|x|}{\lg 8} \leq 3$, also $\lg|x| \leq 3\cdot\lg 8 = \lg 8^3$ und damit $|x| \leq 512$, also $-512 \leq x \leq 512$.

b) $-3 < \lg 2x < 3$, d. h. $\dfrac{1}{2000} < x < 2000$.

c) $\lg|2x-3| \geq \lg 0{,}630957344..$ und damit $-0{,}630.. \leq 2x-3 \leq 0{,}630..$ d. h.
$1{,}1845.. \leq x \leq 1{,}8154..$

d) $\log_3(2x)^2 \leq 2 = \log_3 9$, d. h. $4x^2 \leq 9$, also $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$.

13. a) $\dfrac{10\,000}{2^n} = 312{,}5$, hieraus $32 = \dfrac{10\,000}{312{,}5} = 2^n$, also $n = 5$, d. h. DIN-A5.

b) $\sqrt{2}$; einen Beweis findet man unter c).

c)

Format DIN-	„Länge“	< oder >	„Breite“	Flächeninhalt
A0	a_0	>	b_0	$a_0 b_0 = 1$
A1	$a_0 : 2$	<	b_0	1 : 2
A2	$a_0 : 2$	>	$b_0 : 2$	1 : 4
A3	$a_0 : 4$	<	$b_0 : 2$	1 : 8
A4	$a_0 : 4$	>	$b_0 : 4$	1 : 16

Aus der Tabelle folgt $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{2b_0}{a_0}$, also $a_0 = b_0\sqrt{2}$ und damit $\dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{b_0\sqrt{2}}{b_0} = \sqrt{2}$. Da

$a_0 b_0 = b_0^2\cdot\sqrt{2} = 1$ folgt $b_0 = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 0{,}840896415$ in m und daraus

$a_0 = \dfrac{1}{b_0} = 1{,}189207115$ ebenfalls in m. Das sind die Maße der Seiten bei DIN-A0. Hieraus findet man – z. B. mit der Tabelle – die zugehörigen Maße für DIN-A4 als $a_4 = 0{,}29730..$m und $b_0 = 0{,}21022..$ m.

14. a) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{10^{8,25}}{10^{6,40}} = 70{,}7.. \approx 71$

b) Die Skala ist nach oben offen, weil der Logarithmus zwar sehr langsam steigt, aber doch über alle Grenzen hinweg.

15. a) Die Einschränkungen sind wegen der verwendeten Logarithmen erforderlich. Es gilt:

$$\sum_{n=2}^{k}(\log_n x)^{-1} = \sum_{n=2}^{k}\frac{\lg n}{\lg x} = \frac{\lg k!}{\lg x}$$

b) Die Einschränkungen sind wegen der Definition des Logarithmus erforderlich. Es gilt:

$\left|\dfrac{\lg b}{\lg a}\right| + \left|\dfrac{\lg a}{\lg b}\right| = \left|\dfrac{\lg b}{\lg a}\right| + \dfrac{1}{\left|\frac{\lg b}{\lg a}\right|} \geq 2$, weil dies für alle reellen Zahlen r größer als null gilt.

Beweis:
Fall 1: Für $r > 1$ gibt es ein positives e mit $r = 1+e$. Es wird untersucht

$$1+e+\frac{1}{1+e} = \frac{1+2e+e^2+1}{1+e} = \frac{2(1+e)+e^2}{1+e} \quad 2+\frac{e^2}{1+e} \geq 2$$

Fall 2: Für $0 < r < 1$ ist dann $\dfrac{1}{r} > 1$ und der Beweis geht wie im 1. Fall.

16. a) $\log_a x \cdot \log_a x = \log_a a^2 + \log_a x$, d. h. $(\log_a x)^2 - \log_a x - 2 = 0$ mit

$$\log_a x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}, \text{ also } x = \begin{cases} a^2 \\ a^{-1} \end{cases}.$$

b) $4 \cdot \frac{\lg x}{\lg 4} + 3 = \frac{\lg 4}{\lg x}$; hieraus folgt $\frac{4}{\lg 4}(\lg x)^2 + 3\lg x - \lg 4 = 0$ mit

$$\lg x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2 \cdot \frac{4}{\lg 4}} = \begin{cases} \frac{\lg 4}{4} \\ -\lg 4 \end{cases}, \text{ also } x = \begin{cases} \sqrt[4]{4} \\ \frac{1}{4} \end{cases}.$$

c) Die Einschränkungen sind aus Definitionsgründen erforderlich.

$$\frac{\lg x}{\lg a} \cdot \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\lg b}{\lg a}, \text{ also } (\lg x)^2 = (\lg b)^2 \text{ mit } \lg x = \pm \lg b, \text{ also } x = \begin{cases} b \\ \frac{1}{b} \end{cases}.$$

17. $2 = \log_a(2b+c) \Rightarrow \log_a a^2 = \log_a(2b+c) \Rightarrow a^2 = 2b+a$, (1)

$0 = \log_a(-b+c) \Rightarrow \log_a 1 = \log_a(-b+c) \Rightarrow 1 = -b+a \Rightarrow b = a-1$, (2)

$1 = \log_a c \Rightarrow c = a$. (3)

(2) eingesetzt in (1) gibt $a^2 = 2a - 2 + a$, also $a^2 - 3a + 2 = 0$ mit $a = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$.

Der zweite Wert ist als Basis unbrauchbar und nach Voraussetzung ausgeschlossen. Insgesamt findet man $y = lb(x+2)$.

Dank

Manch eine Idee, sicher aber viele Aufgaben, stammen aus MEYER U.A. [1] bis [6]. Deshalb ist den ehemaligen Brennpunkt-Autoren ENGLERT, HILMER, KRÄMER, MERTENBACHER und SCHLOSSER zu danken. Mein Dank gilt auch BERND ULITZKA für Software-Beratung beim Fertigen der Zeichnungen. Schließlich danke ich meiner Frau CHRISTA MEYER, die abermals Deutsch-Korrekturen gelesen hat.

Sollte der Nutzer dieser Publikation Rechenfehler u. a. finden, so bin ich dankbar für jede Benachrichtigung schon jetzt.

Karlhorst Meyer

Literatur

Averbukh, B., Günther, H.	[1]	Über die Potenzen und die Potenzfunktionen, Mathematikinformation Nr. 49 (2008), Seiten 5 – 23
Meyer, Kh., Krämer, A.	[1]	Brennpunkt Mathematik 5, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover 1988, 1992
Meyer, Kh., Englert, Th., Krämer, A.	[2]	Brennpunkt Mathematik 6, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover 1989, 1992
Meyer, Kh., Hilmer, H., Mertenbacher, R., Schlosser, R.	[3]	Brennpunkt Mathematik Algebra 7, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover 1988, 1992
Meyer, Kh., Hilmer, H., Mertenbacher, R., Schlosser, R.	[4]	Brennpunkt Mathematik Algebra 8, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover 1990

Meyer, Kh., Englert, Th., Hilmer, H., Mertenbacher, R. [5] Brennpunkt Mathematik Algebra 9, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover 1992

Meyer, Kh., Hilmer, H., Mertenbacher, R. [6] Brennpunkt Mathematik Algebra 10, unveröffentlichte Fahne

Meyer, Kh. [7] Komplexe Zahlen als Beispiel für eine Binnendifferenzierung, Mathematikinformation Nr. 50 (2009), Seiten 7 – 37

Meyer, Kh., Krämer, A. [8] Zur Arithmetik der Jahrgangsstufen 5 und 6, Mathematikinformation Nr. 36 (2002), Seiten 11 – 27

Sonar, Thomas [1] Von der Berechnung der Logarithmentafeln: Ein historischer Exkurs mit mathematischem Gehalt, Mathematikinformation Nr. 47 (2007), Seiten 40 – 62

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
e-mail: karlhorst@meyer-muc.de

Eingereicht am 25 August 2009.

Anweisung für Autoren

Manuskripte sind stets in zweifachem Ausdruck oder als Attachment im Textsystem **MS Word** oder **Latex** nach dem neuesten Duden einzureichen. Als Schrift wird **Times New Roman** verwendet. Abbildungen (Wincad3 empfohlen) und Formeln sind möglichst in derselben Schrift elektronisch einzubinden.
Hinweis für Latex-Nutzer: Eine Style-File (mathinfo.sty) und eine Anleitung (mathinfo-doc.tex) zur Verwendung des Style-Files finden Sie am Ende von www.mathematikinformation.info

Die Abhandlung ist 1,0-zeilig in der Schriftgröße 10 Punkte im Blocksatz mit Silbentrennung zu schreiben, wobei der
- linke, rechte und obere Rand 26 mm
- der untere Rand 23 mm betragen.

Aufbau und Besonderheiten:

1. Seite:
Name des Autors: 10 Punkte
3 Leerzeilen; alle Leerzeilen in 10 Punkten.

Titel der Abhandlung: 18 Punkte

2 Leerzeilen

Zusammenfassung (auch in einer anderen Sprache) und/oder Vortext 10 Punkte
und/oder 2 Leerzeilen

1. Kapitelüberschrift: 16 Punkte

1 Leerzeile

1.1 Kapitelunterüberschrift: 14 Punkte

1 Leerzeile
Vor Kapitelüberschriften 3 Leerzeilen, vor Unterüberschriften 2 Leerzeilen usw. Sollten weitere Überschriften erforderlich sein, so kann dies in 12 Punkte-Schrift oder sog. **Halbfettschrift** (10 Punkte) geschehen mit Buchstaben z. B. **a)** vorab oder es kann auch **Halbfettschrift** (10 Punkte) und z. B. der Nummerierung wie **1.1.1** erfolgen. Im Text können Textstellen **halbfett** oder *kursiv* hervorgehoben werden. Zitierte Namen werden im Text mit KAPITÄLCHEN geschrieben.

Zwischen Textabsätzen ist 1 Leerzeile.

Abbildungen und Formelkästen sind ganzzeilig oder halbzeilig anzulegen, sie können links- oder rechtsgebunden sein. Nummern für Formelzeilen stehen am rechten Rand.

Die Seiten sind oben außen zu nummerieren. Die erste Seite hat keine Seitennummer.

Literatur 14 Punkte

1 Leerzeile
Die verwendete Literatur wird in 10 Punkten in der Form
Meyer, Karlhorst [1]:.. zitiert.

Abschließend kommt die Anschrift des Autors in 10 Punkten und das Einreichungsdatum.

Abbildungen sind in farblosen (transparenten) Tabellen ohne Ränder einzubinden; bitte andere Methoden vermeiden, da sie in aller Regel nicht konvertierbar sind.
Formeln bitte entweder mit dem Formeleditor von msword oder nur mit dem „normalen“ Schreibtext erstellen.
Ansonsten gelten die erschienenen Artikel als Vorbild.