Karlhorst Meyer

Schüler untersuchen die Geometrie von Billardtischen

Einmal im Jahr geht das so genannte „Mathematikseminar“ des Gymnasiums Starnberg seit 1981 mit ca. 40 Buben und Mädchen nach Sterzing/Südtirol in Klausur. Man kann die Gruppe nicht als Hochbegabte bezeichnen, wenngleich solche sich immer wieder in der Gruppe finden; doch sind alle Beteiligten an Mathematik sehr interessiert. In aller Regel hört man drei bis vier Tage täglich 7 Stunden Mathematik und befasst sich abends jeweils zwei weitere Stunden mit Hausaufgaben zum Gehörten oder löst alte Wettbewerbsaufgaben. An einem Nachmittag findet ein „Ausflug“ statt, der meist mit einer ortsansässigen Industriebesichtigung verbunden wird. Das Seminar besuchen Schülerinnen und Schüler der Klassen 6 mit 12, die ein besonderes Interesse an der Mathematik haben. Die Schülergruppe wird in zwei Gruppen parallel unterrichtet: Klassen 6 mit 8 bilden das „Unterseminar“, der Rest kommt ins „Oberseminar“, wobei bei den Klassen 8 und 9 die Trennung vor Ort anhand der Kenntnisse der einzelnen Schüler entschieden wird. Das Seminar hat im Schnitt gleich viele Mädchen wie Jungen. Aus dem Seminar ist die vorliegende Zeitschrift hervorgegangen.

Anders als bisher bemüht sich der Autor im Folgenden, die Schülerbemerkungen während seines Vortrags in Sterzing 2007 in die Veröffentlichung einzuarbeiten. Er bedankt sich recht herzlich für das Protokollieren dieser Bemerkungen bei seiner Kollegin Frau Traunspurger vom Gymnasium Starnberg.

Der rote Faden des Unterrichts stammt aus dem Hauptvortrag von Professor Dr. Frank Herrlich auf dem 9. Forum für Begabungsförderung in Mathematik an der Universität Karlsruhe (TH) vom 22. bis 24. März 2007. Der Vortrag hatte das Thema „Von Billardtischen über Origamis zur algebraischen Geometrie“. Dankenswerterweise hat Professor Dr. Herrlich seinen Vortrag für die oben genannten Zwecke zur Verfügung gestellt.

1. Vom Physikalischen zur Mathematisierung des Wesentlichen

Billardtische sind rechteckig, ihre Maße spielen zunächst keine Rolle. Stößt man eine Kugel, so wird diese an der „Bande“ reflektiert und läuft bis sie wiederum eine Bande findet. Kommt sie in die Ecken des Tisches, so bleibt sie stehen. Der Weg kann dank der Reibung zwischen Kugel und Tisch nur endlich lang sein. Auf Grund des Radius der Billardkugel stimmt die Reflexion an der Bande nur in Näherung mit der nebenstehenden Zeichnung überein. Beim Mathematisieren macht man Voraussetzungen, die nicht immer mit der physikalischen Realität übereinstimmen. Man sagt:

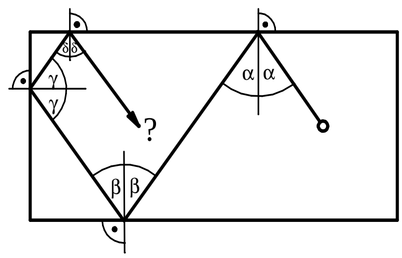

Abb. 1.1

Man arbeitet mit einem **Modell** eines Billardtisches. Nach den theoretischen Überlegungen muss man dann allerdings auch prüfen, ob die gefundenen Ergebnisse noch mit der physikalischen Realität übereinstimmen. Dies soll in der vorliegenden Arbeit nicht geschehen.

1.1 Das Modell

Voraussetzungen:

1. Die Kugel ist punktförmig, hat also den Radius 0.
2. Den Lauf der Kugel nehmen wir reibungslos an.
3. Die Reflexion an der Bande geschehe so, dass der „Einfallswinkel“ gleich dem „Ausfallswinkel“ ist.
4. Zunächst wird angenommen: Der Tisch sei ein Quadrat der Kantenlänge 1.
5. Trifft die Bahn eine Ecke, so soll sie dort enden.

Will der Spieler mit einer Kugel eine andere treffen, so visiert er – in Gedanken – das Spiegelbild dieser Kugel an, d. h. durch das Spiegelbild liegt der an der Bande gebrochene Weg auf einer Geraden. Man kann den Tisch also durch seine Spiegelbilder an allen 4 Banden fortsetzen (siehe die folgende Zeichnung); allerdings entste-

hen hierbei bis zu 4 verschiedene Spiegelbilder des ursprünglichen Tisches, die sich durch ihre Anordnung unterscheiden. Dies wird entweder durch die Kennzeichnung der gleichen Banden (kleine Striche) oder durch die Nummern 1 bis 4 im Inneren markiert.
Man stellt sich vor, dass der erste Bahnteil in einem ersten Tischexemplar läuft und nach der 1. Reflexion ein zweites Exemplar (auf dem ersten gelegen) erreicht usw. Es liegen also viele Billardtischexemplare übereinander, die man jetzt **„entwickelt"** d. h. sie geordnet nebeneinander gelegt hat.

1.2 Erste Ergebnisse

1. Der entwickelte quadratische Billardtisch der Kantenlänge 1 überdeckt mit 4 verschiedenen Quadraten die ganze Ebene (siehe das nebenstehende Bild).
2. Aus der vielfach reflektierten Bahn wird eine Halbgerade mit der Gleichung
   $y - y_0 = m(x - x_0)$
   durch den Anfangspunkt $(x_0 | y_0)$ und dem Steigungskoeffizienten m.
3. Die Schüler nennen den Fall einer auf der Bande senkrechten Bahn „langweilig".
   Deshalb wird dieser Fall in der Folge außer Acht gelassen, d. h. die Untersuchungen werden auf $m \neq 0$ und $m \neq 4$ eingeschränkt.
4. Negative m können o. B. d. A. vermieden werden, indem man dann die Ebene vom ersten Billardtischexemplar nach links pflastert und das Ganze an einer vertikalen Ebene spiegelt. Man kann im Folgenden davon ausgehen, dass
   $0 < m < \infty$. Wir benutzen also jeweils nur einen Quadranten.

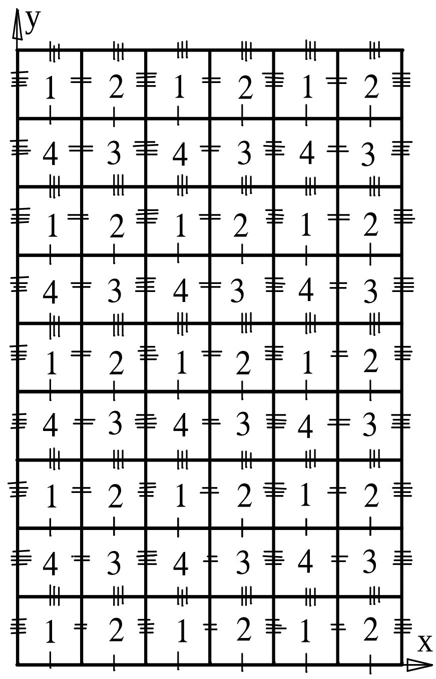

Abb. 1.2

In Abbildung 1.3 wird eine periodische Umlaufbahn der Kugel im Billardtisch und die entsprechende Bahn im konstruierten Modell dargestellt.

Aufgabe 1.1: Was ist der Grund, dass die gezeichnete Billardbahn periodisch ist? Kommt die Kugel an irgendeinem Platz zum Stehen? In welchen Feldern der idealisierten Bahn liegen die gleichen Anordnungen wie im Ausgangsfeld vor?

Lösung: Wie man der idealisierten Bahn entnehmen kann, ist $m \approx 1$. Die Kugel kommt im gezeichneten Fall nicht zum Stehen, weil der Ablauf reibungsfrei ist. Die gleiche Anordnung wie im Ausgangsfeld liegt in allen Feldern vor, die mit „1" gekennzeichnet sind.

Aufgabe 1.2: Konstruiere eine weitere periodische Bahn. Welche Gesetzmäßigkeit wird vermutet?

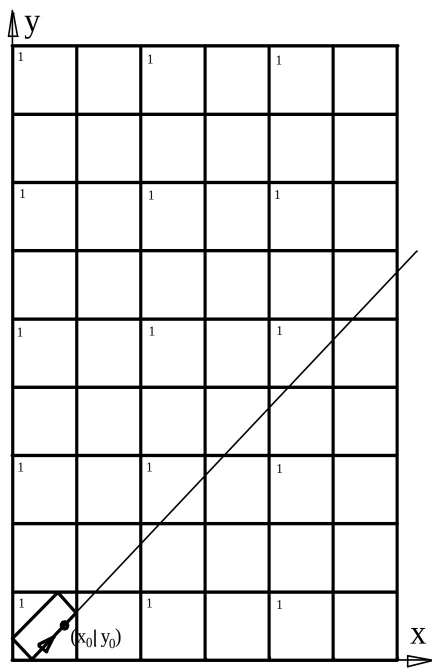

Abb. 1.3

Zur Lösung: Man wähle z. B. m = 2. Verbindet man im gezeichneten Gitternetz zwei kongruent gelegene Punkte $(x_0|y_0)$ und $(x_1|y_1)$ in Quadraten 1, so sind $x_1 - x_0$ und $y_1 - y_0$ natürliche Zahlen und somit $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ rational.

Hat man umgekehrt ein rationales m, so kann man zwei Punkte $(x_0|y_0)$ und $(x_1|y_1)$ in Quadraten der Nummer 1 mit $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ wählen. Die beiden Punkte liegen in ihren Quadraten so, dass sie bei Verschiebung dieser Quadrate ineinander übergehen. Also ist die Bahn periodisch.

Damit hat man den folgenden Satz gefunden:

Satz 1.1: Eine Bahn ist genau dann periodisch, wenn ihre Steigung rational ist.

Ist also m irrational, so kann es sich nicht um eine periodische Bahn handeln. Im Folgenden werden solche Bahnen bzw. ihr Abstand zu einem beliebigen Punkt $Q_0(q_0|\underline{q_0})$ des Ausgangsquadrats untersucht, Q_0 liege nicht auf der Bahn:

Die Bahn habe die irrationale Steigung m, also eine Zahl mit einer nicht periodischen Dezimalzahldarstellung. Dann gibt es auf der nicht periodischen Bahn im ersten Quadrat 1 einen Punkt $P_0(p_0|\underline{q_o})$, für den $|q_0 - p_0|$ höchstens kleiner als der Abstand $|P_0Q_0|$ ist.
Die Bahn durchläuft dann immer wieder Quadrate vom Typ 1, in denen zu Q_0 kongruente Punkte $Q_k(q_k|\underline{q_k})$ mit $q_k = q_0 + 2k$ mit k ∈ ⌉ liegen. In diesem Quadrat gibt es abermals ein $P_k(p_k|\underline{q_k})$ mit $p_k = p_0 + h \cdot \frac{2}{m}$, wie man der nebenstehenden Abbildung 1.4 entnehmen kann, wobei auch $h \in \mathbb{N}$. Hierbei gilt:

$$|P_hQ_k| = \left|\left(p_0 + h \cdot \frac{2}{m}\right) - (q_0 + 2k)\right|$$

Aufgabe1.3: Weshalb haben P_h und Q_k dieselbe y-Koordinate, falls $|P_hQ_k|$ minimal wird?

Lösung: Liegen P_h und Q_k bei minimalem Abstand in verschiedenen Quadraten des Typs 1, ist ihr Abstand mindestens 2 und damit nicht minimal.

Das zu Grunde gelegte Koordinatensystem wird jetzt so gewählt, dass P_0 der Ursprung und damit $p_0 = 0$ sind.

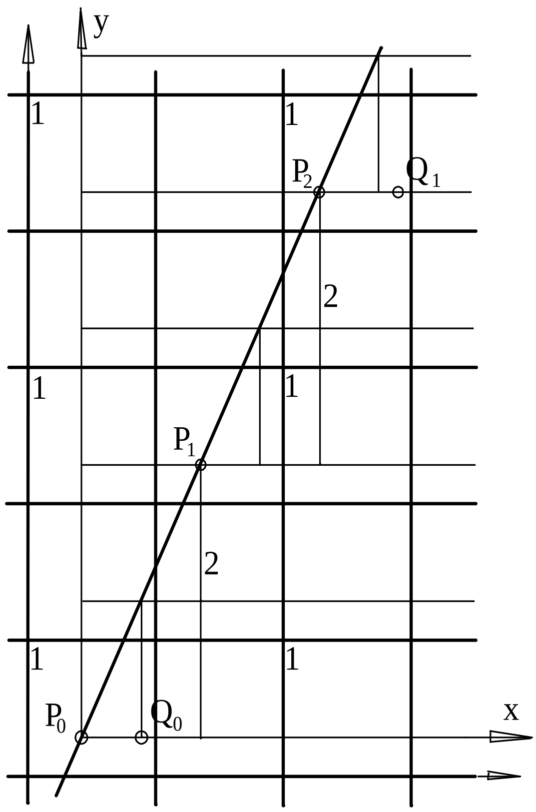

Abb. 4

ε sei eine kleine Zahl. Der gesuchte Abstand soll kleiner als ε sein. Damit gilt für den gesuchten Abstand:

$$\left|\left(\frac{2h}{m} - 2k\right) - q_0\right| < \varepsilon$$

Diese Ungleichung ist gleichwertig mit $q_0 - \varepsilon < \frac{2h}{m} - 2k < q_0 + \varepsilon$. Man kann im mittleren Glied 2:m > 0 ausklammern und durch diese Zahl die Ungleichungen dividieren, ohne sie zu ändern. Man erhält:

$$\frac{m}{2}(q_0 - \varepsilon) < h - km < \frac{m}{2}(q_0 + \varepsilon)$$

(h|k) mit h – km etwa gleich dem Mittelwert $\frac{m}{2} \cdot 2\varepsilon = m\varepsilon$ der beiden Ränder würde die beiden Ungleichungen erfüllen. Das Problem ist also auf die folgende Frage zurückgeführt:

> *Aufgabe 1.5:* Gibt es zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε und einem irrationalen m ein Paar (h|k) so, dass h:m = k + ε ist?

Lösung: Nehmen wir an $0 < \varepsilon < 0{,}1^r$. Wir zeigen, dass es h und k so gibt, dass die ersten r Nachkommastellen von h:m – k nur Ziffern 0 haben:
h:m ist irrational, hat also bei den Nachkommastellen keine Periode. Für die ersten 10^r h gibt es mindestens zwei $h_1 < h_2$ mit denselben r ersten Nachkommastellen, deshalb hat dann $(h_2 - h_1)$:m unmittelbar hinter dem Komma r Nullen; damit gibt es ein natürliches k mit $(h_2 - h_1):m - k < \varepsilon$. Man wähle also $h = h_2 - h_1$.

> *Aufgabe 1.6:* Zeige mit einem Programm, dass die Paare (h|k) natürlicher Zahlen aus Aufgabe 1.5 existieren.

Lösung:
```
program billard08;

uses crt;
var h,q: LongInt;
m,k,l,p,e: Real;

begin
  write('q=');
  readln(q);
  write('e=');
  readln(e);

  h := 1;
  m := Sqrt(q);

  repeat
    l := trunc ((h/m)*(1/e));
    k := (l*e);
    p := frac (k);
          if (p = 0) then writeln('h= ',h,' k=',k)
             else h := h + 1;
  until p = 0;

  readln;
end.
```

Man bekommt z. B. für q = 2 und	e = 0,1	h = 7
	e = 0,01	h = 99
	e = 0,001	h = 577
	e = 0,0001	h = 11 482
für q = 3 und	e = 0,1	h = 7
	e = 0,01	h = 97
	e = 0,001	h = 362
	e = 0,0001	h = 5 042

Damit haben wir den folgenden Satz gefunden:

> **Satz 1.2:** Eine Billardbahn mit irrationaler Steigung kommt jedem Punkt auf dem Billardtisch beliebig nahe.

Man kann die erforderlichen h und k zumindest für relativ große ε durch Handrechnung finden:

> *Aufgabe 1.7:* Berechne für m = $\sqrt{2}$ und ε = 0,1 die erforderlichen h und k.

Lösung:
h = 1, also h: $\sqrt{2}$ = 0,707...; für h = 10 folgt hieraus h: $\sqrt{2}$ = 7,07, d. h.: h = 10 und k = 7 liefert ein Q_7, das von der Bahn weniger als 0,1 entfernt ist. Löse das Problem für ε = 0,01 und m = 1: $\sqrt{2}$.

> *Aufgabe 1.8:*
> **Korollar 1.3:** Die Billardbahn mit irrationalem m erreicht nicht jeden Punkt des Tisches.

Lösung:
Die Bahn beginn in $(0|0)$ und habe m = $\sqrt{2}$.
Dann liegt der Punkt $(1|\sqrt{3})$ und alle weiteren $(1 + 2a|\sqrt{3} + 2b)$ mit natürlichen a und b nicht auf der Bahn.
Begründung:
Annahme $(1 + 2a|\sqrt{3} + 2b)$ liegt auf $y = \sqrt{2}\,x$, also $\sqrt{3} + 2b = \sqrt{2}\,(1 + 2a)$. Man quadriert diese Gleichung und erhält: $3 + 4b^2 + 4b\sqrt{3} = 2(1 + 4a^2 + 4a)$, also $\sqrt{3} = \dfrac{8a^2 + 8a - 4b^2 - 1}{4b}$. Rechts steht eine rationale Zahl, links eine irrationale; d. i. ein Widerspruch. Also werden diese Punkte nicht erreicht.

> **Definition 1.4:** Für den Sachverhalt, dass bei irrationalem m die Bahn jedem Punkt beliebig nahe kommt (falls sie nicht in einer Ecke hängen bleibt – siehe Vereinbarung 5 in 1.1), sagt man auch, die Bahn ist überall **dicht**.

Hinweis:
Man verzerrt den Billardtisch zu einem Rechteck mit den Kantenlängen a und b. An obigen Untersuchungen in Abhängigkeit von m ändert sich dadurch nichts; d. h.:
Auch beim üblichen Billardtisch ist die Bahn periodisch, falls ihr Steigungskoeffizient m ein rationales Vielfaches von b:a ist, sonst ist sie überall dicht. In beiden Fällen ist vorauszusetzen, dass die Bahn keine Tischecke trifft, weil sie sonst dort endet.

2. Andere „Billardtische"

Die bisher gemachten Überlegungen lassen sich realisieren, wenn der Billardtisch ein von Strecken gebildetes Vieleck ist und mit diesem Vieleck analog zu Kapitel 1 die Ebene gepflastert werden kann.

> *Aufgabe 2.1:* Das reguläre Vieleck V_n mit n Ecken habe die Eigenschaft, dass mit ihm die Ebene gepflastert werden kann.

Lösung:
Alle Winkel zwischen benachbarten Seiten (die Winkel heißen dann Innenwinkel des Vierecks) sind gleich groß und das Winkelmaß muss Teiler von 360 sein. D. h.: 180 ist Teiler, aber es gibt kein Vieleck mit Innenwinkel 180°. 120 ist Teiler, d. h. das reguläre **6-Eck** ist Lösung. 90° führt zum Quadrat (siehe Kapitel 1). Es gibt kein reguläres Vierleck, dessen Innenwinkel 72° beträgt. Das **gleichseitige Dreieck** hat einen Innenwinkel von 60°. Zu den Teilern 45, 40, 36 usw. gibt es keine regulären Vielecke. Es bleiben also nur die regulären 3- bzw. 6-Ecke.
Will man die Pflasterungen zur Theorie der Billardtische aus Kapitel 1 benutzen, muss man darauf achten, wie viele verschiedene Kopien des Ausgangstisches bis auf Translation vorkommen.

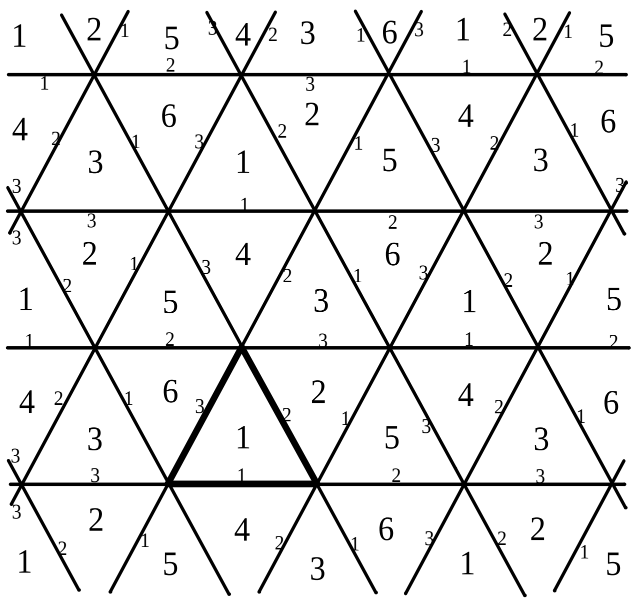

Abb. 2.1

2.1 Reguläres Dreieck als Billardtisch

Abbildung 2.1 entnimmt man, dass 6 verschiedene Dreiecke benötigt werden. Die großen Ziffern bezeichnen den Dreieckstyp, die kleinen Ziffern die Seite, an der gespiegelt wird, bzw. die Dreiecke verheftet werden. Abbildung 2.2 zeigt den Weg einer Billardkugel und dessen Auflösung zu einer Geraden.
Beachte: A sei der Anfangspunkt und E jeweils der Endpunkt.

> *Aufgabe 2.2:* Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit eine periodische Bahn entsteht?

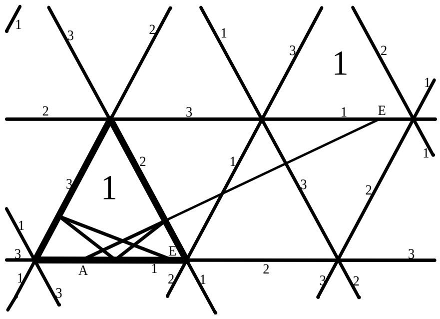

Abb. 2.2

Lösung:
Wenn die Punkte A und E von der jeweiligen linken unteren Ecke des Dreiecks vom Typ 1 die gleiche Entfernung haben, wird die Bahn periodisch, sonst nicht. Wie sich das Ergebnis auf den Steigungskoeffizienten auswirkt, wird hier nicht mehr untersucht .

Die weiteren Überlegungen fanden die Schüler selbst durch „Bleistiftexperimente“: Anhand verschiedener Zeichnungen entstanden Vermutungen, die es dann – soweit möglich – zu überprüfen galt.

2.2 Reguläres Sechseck als Billardtisch

Wie Abbildung 2.3 zeigt, ist das Pflastern der Ebene durch Spiegeln jetzt an den Sechseckseiten nicht mehr eindeutig möglich, da nach dem Ausgangssechseck die Seiten mehrere Nummern bekommen; z. B. erhält die Seite zwischen den Sechsecken 2 und 3 beim Spiegeln an der Seite 5 die Nummer 4. Damit gibt es in Sechseck Nummer 3 zwei Seiten mit der Nummer 4. Man muss also abhängig vom Weg die einzelnen Exemplare des Billardtisches verheften.

Die gleiche Problematik erhält man, wenn man versucht, Rauten durch Spiegelungen an ihren Seiten zu verheften.

> *Aufgabe 2.3:* Zeige, dass man eine passende Pflasterung der Ebene erhält, wenn man gleichseitige rechtwinklige Dreiecke an ihren Seiten spiegelt. Finde hier (auch rechnerisch) eine Bedingung für eine periodische Billardbahn.

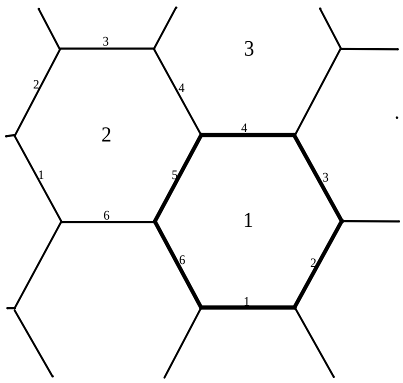

Abb. 2.3

Lösung:
Fertige eine Zeichnung wie in Abbildung 2.4 und führe darin konsequent die Nummerierung der Seiten durch.

Man kann im Weiteren wie bei den Quadraten in Kapitel 1 verfahren und findet das gleiche Ergebnis:
Die Billardbahn ist genau dann periodisch, wenn der Steigungsfaktor der Geraden rational ist. In allen anderen Fällen wird jeder Punkt beliebig angenähert und die Bahn liegt überall dicht. In beiden Fällen muss natürlich ausgenommen werden, dass eine Dreiecksecke getroffen wird. Dann endet die Bahn an dieser Stelle.

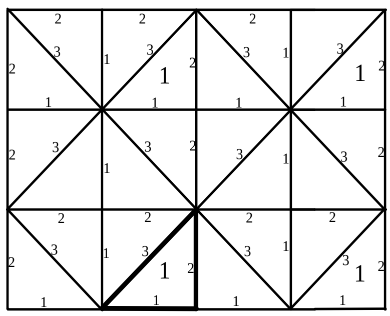

Abb. 2.4

2.3 Beliebiges Vieleck als Billardtisch

Wie man bereits bei HANS ENGELHAUPT [1] nachlesen kann, lassen sich die hier anschließend an HERRLICH [1] vorgeführten Überlegungen auf beliebige Billardtische, deren Bande ein beliebiges Vieleck, also von Strecken, begrenzt ist, durchführen. Freilich, Aussagen z. B. über den Steigungsfaktor m der Ausgangsbahn können dann nicht mehr allgemein formuliert werden. Auch ist es meist nicht mehr möglich, den Billardtisch in die ganze Ebene fortzusetzen, da der Zusammenhang zwischen den gespiegelten Tischen komplexer ist.

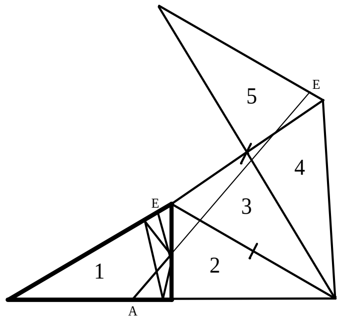

Abb. 2.5

Das im Allgemeinen noch durchführbare Vorgehen wird am Beispiel eines „beliebigen“ rechtwinkligen Dreiecks in Abbildung 2.5 vorgeführt. A ist der Anfangspunkt, E der Endpunk der Bahn.

In Abbildung 2.6 wird am gleichen rechtwinkligen Dreieck eine zweite Bahn von A nach E vorgeführt, die nicht mehr über die Dreiecke 2 bis 5 (schraffiert) gefunden werden kann. Hier braucht man neue Dreiecke 6 bis 8, die auch nicht aus den vorherigen durch Verschiebung hervorgehen.

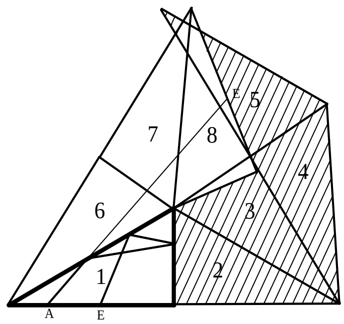

Abb. 2.6

Beim allgemeinen Fall ist es also sehr unwahrscheinlich, dass zwei Dreiecke durch Translation auseinander hervorgehen.

Im allgemeinen Fall überlappen sich die Dreiecke verschiedener Wege wie in Abbildung 2.6. Man sagt: **Der Zusammenhang der Pflasterung ist komplizierter als vorher.** Die Pflasterung ist nicht mehr in der Ebene darstellbar. Abschließend kann die folgende Vermutung formuliert werden:

> **Vermutung 2.3:** Man kann den Billardtisch an seinen Banden stets so spiegeln, dass die Bahn davon überdeckt wird. Nach einer endlichen Anzahl von solchen Spiegelungen entsteht eine periodische Bahn, wenn alle Innenwinkel des Billardtisches rationale Vielfache von π sind.

Man beachte: Diese Vermutung ist kein Widerspruch zum Beispiel, in dem die Bande ein reguläres Sechseck ist.

3. Ränder verkleben

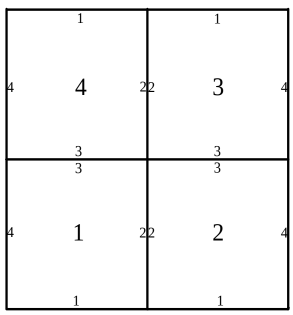

Abb. 3.1

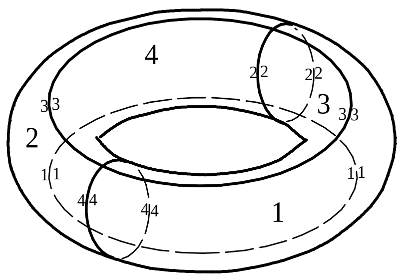

Abb. 3.2

Alle Quadrate der Abbildung 1.2 lassen sich durch Verschieben mit den Quadraten 1 bis 4 identifizieren. Die Quadrate vom Typ 1 bis 4 haben Ränder (vgl. die Abbildung 3.1). Die Randnummern 1 bis 4 des Ausgangsquadrats 1 kommen in den Quadraten 2, 3 und 4 vor.

Identifiziert man (verklebt man) die Ränder 1, so erhält man ein Stück einer zylindrischen Fläche etwa mit waagrechter Achse. Verklebt man dann auch noch die Ränder 4 miteinander, so entsteht ein Torus (siehe die Abbildung 3.2).

Bei der **Abbildung**, die vom Bild 3.1 zum Bild 3.2 führt, darf nicht stören, dass jetzt die Kanten der Quadrate durch das „Biegen“ zu Kreisbögen – oder noch allgemeineren Kurvenstücken – geworden sind.

Überlegungen dieser Art sind für den Mathematikunterricht an Gymnasien unüblich, sie sind aber nicht unmöglich, wenn man entsprechende Modelle zu Hilfe nimmt. Mit großem Eifer haben die Schüler solche gebastelt, um sich die Dinge besser vorstellen zu können.

Aufgabe 3.1: Führe die beschriebene Abbildung mit einem Stück Papier aus.

Ergebnis 3.1: Bis auf „Translation“ beschreiben die vier Teilstücke eines Torus die Situation eines Billardtisches.

Aufgabe 3.2: Überlege: Was kann dann die Bahn der Billardkugel auf dem Torus sein?

Zur Lösung: Die Kugelbahn kann jetzt eigentlich jede Punktbahn auf dem Torus ausgehend von der Fläche des Typs 1 sein.

Aufgabe 3.3: Nebenstehend ist ein L-Vieleck. Es sollen hiervon 4 Exemplare durch Spiegeln an den Kanten 1 bis 4 erzeugt werden.
a) Weshalb bringt ein Spiegeln an den Kanten 5 und 6 keine weiteren grundsätzlich verschiedene L-Vielecke?
b) Verklebe jeweils zwei entsprechende Kanten mit den Nummern 2 und 3.
Hinweis: Es entsteht ein Kreuz.
c) Nun werden noch die Kanten 1, 4, 5 und 6 verklebt. Bastle eine solche Fläche und beschreibe, was diese (geschlossene) Fläche mit einem Torus zu tun hat.

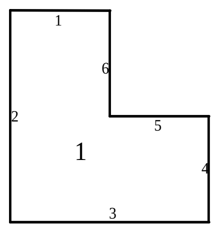

Abb. 3.3

Das Ergebnis ist eine „Kugel“ mit 2 Henkeln, d. h. ein Torus mit einem (weiteren) Henkel. Ohne Beweis wird der folgende Satz angegeben:

EULERsche Polyederformel 3.1: Eine Fläche F wird in f Flächen mit k Kanten und e Ecken zerlegt. Dann berechnet sich das Geschlecht g der Fläche gemäß der Formel $2 - 2g = f - k + e$.

Satz 3.2: Die Fläche F der EULERschen Polyederformel 3.1 kann auf eine Kugel gelegt werden, die g Henkel hat.

Aufgabe 3.4: Berechne das Geschlecht der Fläche aus Aufgabe 3.3 und erkläre, wo die „Kugel“ beim gebastelten Gebilde zu suchen ist.

Aufgabe 3.5:
Man verklebe endlich viele einzelne Einheitsquadrate wie folgt:
Die linke Kante eines jeden Quadrats wird mit einer rechten Kante eines anderen Quadrats identifiziert (siehe im Fall von 4 Quadraten Abbildung 3.4). Es entsteht ein Ring aus Quadraten, bei denen die Quadratecken so mit Punkt und Kreuz markiert werden, dass sich auf allen Kanten die Markierungen abwechseln.

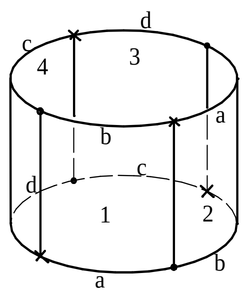

Abb. 3.4

a) Wie viele Flächenteile, Kanten und Ecken hat die Gesamtfläche bei 4 Ausgangsquadraten?
b) Berechne im Fall a) nach der EULERschen Polyederformel das Geschlecht der Gesamtfläche.
c) Skizziere die Gesamtfläche von a).

Lösung:
a) f = 2, k = 2, e = 2
b) 2 – 2g = 2 – 2 + 2 also g = 2
c) siehe die nebenstehende Abbildung 3.5. e =... entsteht aus den „senkrechten Kanten der Quadrate in Abbildung 3.4

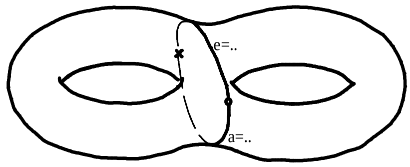

Abb. 3.5

Solche verklebten Flächen entstehen bei Origamis (siehe auch MICHAEL SPIELMANN [1])

Literatur

Engelhaupt, Hans [1]: Kürzeste Wege Teil I, Mathematikinformation Nr. 41 (2004), Seiten 24 – 61
[2]: Kürzeste Wege Teil II, Mathematikinformation Nr. 42 (2005), Seiten 3 – 30

Herrlich, Frank [1]: Von Billardtischen über Origamis zur algebraischen Geometrie, Vortragsmanuskript des 9. Forums für Begabungsförderung in Mathematik 2007 an der Universität Karlsruhe (TH)

Spielmann, Michael [1]: Origami im Mathematikunterricht, Mathematikinformation Nr. 44 (2006) Seiten 58 – 60.

Anschrift des Autors:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg
karlhorst@meyer-muc.de

Eingereicht am 10. Januar 2008