Karlhorst Meyer

Komplexe Zahlen als Beispiel für eine Binnendifferenzierung

Sicher ist für den angeschlagenen Mathematikunterricht am Gymnasium Binnendifferenzierung kein Allheilmittel. Da aber immer noch geeignete erste Beispiele für Binnendifferenzierung fehlen, wird hier ein solches vorgeschlagen. Zu Beginn bittet der Autor alle Leser, in Leserbriefen über die Brauchbarkeit des Folgenden Statements abzugeben. Stellen Sie sich bitte hierbei nicht auf den Standpunkt von Elternvereinigungen, Politikern und Ministerialbeamten, die glauben, dass nur ein Abbau der gymnasialen Fächer weiterhelfen kann, und insbesondere die Meinung haben, die wenigsten Gymnasialabsolventen benötigen Mathematik. Sie glauben das Ganze so im Auge zu behalten und vergessen, dass heute bereits die Studienrichtungen, die einen Beruf ein Leben lang gewährleisten, von der Mathematik abhängig sind und so ein weitaus größerer Prozentsatz der Schüler eines Gymnasiums Schulmathematik im Beruf (Industriearbeiter, Bauhandwerker, Kaufleute, Ingenieure, Biologen, Pharmazeuten, Mediziner, Chemiker, Physiker, Informatiker, Mathematiker, Astronomen, Geodäten u. v. m.) benötigt als diejenigen, die das nicht müssen (z. B. Musiker). Vielen Dank.

Weshalb sind die komplexen Zahlen ein geeignetes Beispiel für die Binnendifferenzierung des Unterrichts?

- Durch das Verschwinden der komplexen Zahlen im gymnasialen Mathematikunterricht entstehen im Studium bei den Erstsemestlern aber auch für manche Handwerksberufe (Meisterprüfung) unangenehme Lücken. Vorlesungen (z. B. Elektrotechnik, aber auch Höhere Mathematik) gehen i. Allg. davon aus, dass das Rechnen mit komplexen Zahlen Stoff des Gymnasiums ist.
- Vielen Lehrern ist heute gar nicht mehr bewusst, dass Potenzen im Reellen, wie man sie heute lehrt, nur dann am Gymnasium vollständig behandelt sind, wenn auch komplexe Zahlen vorhanden sind (siehe AVERBOUKH U. GÜNTHER [1]).
- Auch wenn ein eigener Unterricht über komplexe Zahlen in den Lehrplänen nicht vorgesehen ist, heißt das nicht, dass das Thema im Unterricht unter allen Umständen zu vermeiden ist.
- Zwei weitere Abhandlungen werden erscheinen, in denen Kenntnisse über und Fähigkeiten mit komplexen Zahlen vorausgesetzt werden.

Im Folgenden wird beim Einführen komplexer Zahlen und deren Vorbereitung zunächst zwischen dem Normalunterricht der Gruppe A und *Bemerkungen für die Interessierten* und *Zusatzaufgaben für diese Gruppe B,* letzteres durch *Kursivschrift,* unterschieden. Bei den folgenden Vorschlägen muss im Unterricht immer wieder betont werden, dass dieser Zusatzunterricht nicht prüfungsrelevant ist. Die hier empfohlene Binnendifferenzierung ist nur erfolgreich, wenn die Lehrerin/der Lehrer bereit ist, jeder Zeit auch außerhalb des Unterrichts auf Schülerfragen einzugehen. Da man davon ausgehen muss, dass laufend eine Fluktuation zwischen den beiden Schülergruppen stattfinden wird, sollte man immer wieder klarstellen, dass sich die Schüler gegenseitig unterstützen und so auch „Versäumtes“ nachlernen können. Ansonsten wird man wohl als Lehrerin oder Lehrer gelegentlich auch außerhalb des eigentlichen Unterrichts helfend eingreifen müssen.

1. Vorbereitungen

1.1 Jahrgangsstufe 5

Eigentlich unterscheidet sich – oberflächlich betrachtet – der Mathematikunterricht am Gymnasium in Klasse 5 kaum von dem an anderen Schularten. Erst beim genaueren Hinsehen erkennt man, dass gelegentlich am Gymnasium mehr als üblich unterrichtet wird, was sich vor allem darin äußert, dass die/der Unterrichtende stets die späteren Ziele der Gymnasiasten vor Augen hat und oft damit im Zusammenhang stehende kurze Bemerkungen angebracht werden.

- Bei den Rechengesetzen im Körper spielt weniger die Axiomatik als das Vermitteln der Fachsprache eine Rolle. Hierüber darf nicht das Einüben von Rechenfertigkeiten übersehen werden. Der Schüler lernt: **Rechnen geschieht mit Zahlen. Zahlen sind die Elemente, mit denen man rechnet.**

- Ganze Zahlen geben Anlass, oberflächlich in Teilbarkeitsregeln bis hin zur Primfaktorzerlegung einzusteigen. Durch Anwendungen wird erkannt: Die Primfaktorzerlegung ist – unter gewissen Voraussetzungen – eindeutig.
- Nicht alle ganzen Zahlen kann man als Divisor benutzen. Man muss also null ausschließen.
  Der Quotient zweier ganzer Zahlen muss keine ganze Zahl sein. Innerhalb der ganzen Zahlen kann man also nicht uneingeschränkt rechnen.
- Hier ergibt sich dann der natürliche Übergang zum Bruchrechnen.
- Gleichungen werden nach einer Unbekannten aufgelöst, wobei aber jetzt am Gymnasium die Lösungsverfahren deutlicher als in der Grundschule herausgestellt werden. Die Unbekannte steht hierbei immer für eine auszurechnende feste Zahl.

1.2 Jahrgangsstufe 7 und 8

Beim Einstieg ins Buchstabenrechnen sind die folgenden Aspekte hervorzuheben:

- Buchstaben – besser Parameter – ermöglichen, viele gleichartige Rechenbeispiele simultan zu lösen. Unter den Buchstaben kann man sich jede bisher kennen gelernte Zahl vorstellen.
- Binome insbesondere vom Grad 2 und 3 werden auswendig gelernt.
- Beim Distributivgesetz wird nicht nur das Ausmultiplizieren geübt, *sondern die Schüler auch zum Faktorisieren von Polynomen angehalten. Man weist darauf hin, dass man ohne Faktorisieren keine Theorie in der Algebra entwickeln kann und dass CAS-Taschenrechner nur dann erfolgreich sein können, wenn man bereits eine Theorie entwickelt hat. Bei der Division von Bruchtermen wird das Vereinfachen der Nenner geübt.* In fast jedem vor 1990 entwickelten Algebrabuch für das Gymnasium kann man hierzu Aufgabenmaterial finden.
- In Jahrgangsstufe 8 kommt man zu Bruchtermen bzw. Bruchgleichungen und –ungleichungen. Die Bestimmung der Definitionsmenge eines Bruchterms gehört jetzt zum Lösen einer Gleichung. Erst das Faktorisieren ermöglicht das Kürzen von Bruchtermen, dient also zum Vereinfachen der gegebenen Probleme und ist beim Gleichungslösen unerlässlich.
- *„Mittlere“ Betragsungleichungen werden gestellt*, wie man sie etwa bei MEYER U. A. [1] findet.

Die ersten beiden Musterbeispiele bei der Einführung von Bruchgleichungen werden der Gesamtklasse vorgeführt. Etwa beim 3. Beispiel führt man simultan für die Gruppen A und B an der Tafel geeignete Beispiele vor:

Beispiel 1.2.1: Bestimme die Lösungsmenge L in der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Gruppe A:

$$\frac{x+7}{x+3} = \frac{2x+13}{2x+5} \qquad (1)$$

Lösung:

$(x+3)(2x+5)$ ist der Hauptnenner.

$D = \mathbb{R}\backslash\{-3; -\frac{5}{2}\}$. Aus (1) folgt in D:

$$(x+7)(2x+5) = (2x+13)(x+3)$$

Äquivalenzumformungen:

$$2x^2 + 19x + 35 = 2x^2 + 19x + 39$$

$$35 = 39 \quad \text{d. i. Unsinn}$$

Deshalb ist $L = \varnothing$

Gruppe B: .... in Abhängigkeit vom Parameter e.

$$\frac{e+2}{3x+e} + \frac{e-3}{3x-e} = \frac{6e^2-8e}{9x^2-e^2} \qquad (1)$$

Lösung:

$(3x+e)(3x-e) = 9x^2-e^2$ *ist der Hauptnenner.*

$D = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{e}{3};\frac{e}{3}\}$. *Aus (1) folgt in D:*

$$3xe - e^2 + 6x - 2e + 3xe + e^2 - 9x - 3e = 6e^2 - 8e$$

Äquivalenzumformungen

$$6xe - 3x + 5e = 6e^2 - 8e$$

$$3x(2e-1) = 3e(2e-1)$$

$$x(2e-1) = e(2e-1) \qquad (2)$$

1. Fall: $2e-1 \neq 0$, *also* $e \neq 1:2$; $x = e$		*2. Fall* $2e-1 = 0$, *also* $e = 1:2$
Für $e \neq 0$ *ist* $x \in D$, *also* $L = \{e\}$.	*Für* $e = 0$ *ist* $x \notin D$, *also* $L = \varnothing$.	*(2) lautet hier* $x \cdot 0 = 0$; *also:* $L = D = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{e}{3};\frac{e}{3}\}$

Welcher Leistungsstand hierbei erreicht werden kann, wird an einigen Aufgaben gezeigt:

Aufgabe 1.2.2: Bestimme die Lösungsmenge über ℝ: $\frac{2}{e-5} - \frac{4}{e-7} = \frac{11}{7e-35} - \frac{3}{e-7}$

Aufgabe 1.2.3: Bestimme x in Abhängigkeit von a und b:
$(a-2x)(-xa-xb) = 2x^2(a+b) + a^2 - b^2$

Anschließend an das Kräfteparallelogramm im Physikunterricht sollte in Geometrie *zumindest in der Gruppe der Interessierten Vektoren als Verschiebungen eingeführt werden. Man zeigt ihre Darstellung in (rechtwinkligen) Koordinaten und ihre Addition, deren Gesetze und die Auswirkung in der Koordinatendarstellung. Man weist darauf hin, dass Vektoren in der Koordinatenebene durch Pfeile dargestellt werden, wobei eine Verschiebung einen Pfeil durch jeden Punkt der Ebene als Anfangspunkt hat. Alle diese Pfeile sind gleich lang und gleich gerichtet. Es ist gleichgültig, durch welchen seiner Pfeile ein Vektor dargestellt wird; die verschiedenen Darstellungen eines Vektors wirken sich nicht auf die Addition zweier Vektoren aus.*

Aufgaben 1.2.4:
a) *Welche Summe haben die Vektoren, wenn sie Pfeile haben, die sich in der graphischen Addition schließen?*

b) *Es seien* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. *Berechne die Koordinaten von* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *aus* $3\vec{x} - 5\vec{a} + 5\vec{b} - 6\vec{x} = 7\vec{x} + \vec{c} - 2\vec{a}$.

c) *Zu jedem Punkt X gehört ein Vektor* $\overrightarrow{X}$. *Welche Punkte X der Ebene werden durch* $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + k\vec{b}$ *für alle* $k \in \mathbb{R}$ *dargestellt?*

Zur Unterrichtsgestaltung:
Zweckmäßig ist, *eigene Arbeitsblätter für die Interessierten und Leistungsfähigen zu entwerfen*. Man gibt ihnen hieraus Hausaufgaben. Sollte die besondere Gruppe die gestellten Hausaufgaben nicht lösen können, so fertigen sie die allgemeine Hausaufgabe z. B. aus dem verwendeten Lehrbuch. Die Hausaufgabe der Gruppe A wird im Unterricht besprochen, *während die Gruppe B ihre Hausaufgabe beim Lehrer abgibt, der sie selbst korrigiert oder einen sehr guten Schüler die Hausaufgabe korrigieren lässt.*

1.3 Jahrgangsstufe 9 und 10

Es hat Sinn, in Klasse 9 nicht nur das Lösen quadratischer Gleichungen und den Satz des VIETA zu behandeln, auch wenn es in aller Regel bei einer höheren algebraischen Gleichung nur um das Erkennen eines Spezialfalles geht. So ist es eindeutig Unfug, mit dem Problem $x^n = 1$ auf den Taschenrechner zu gehen. *Wenn schon biquadratische Gleichungen kein Allgemeinthema mehr sein können, so sollte man doch das Lösen durch Substitution seinen interessierten Schülerinnen und Schülern lehren.* Es werden einige wichtige Aufgabentypen für beide Gruppen angegeben:

Aufgabe 1.3.1:
a) Berechne die fehlende Lösung und den fehlenden Koeffizienten für $2x^2 - 4x + c = 0$ und $x_1 = 1$.
b) Wie lautet die Gleichung einer Parabel, deren Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ sind und die durch den Punkt $(2|1)$ geht?
c) Bestimme die Lösungen zu $x^2 - 15x + q = 0$, wenn die eine Lösung das Vierfache der anderen ist.

Aufgabe 1.3.2:
a) *Gegeben ist eine Parabel durch* $y = ax^2 + bx + c$ *und eine Gerade durch* $y = mx + t$. *Bestimme bei vorgegebenen* $m \in |$ *die Größe t so, dass die Gerade die Parabel berührt, also nur genau* ***einen*** *Punkt mit der Parabel gemeinsam hat.*
b) *Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:*
$x^4 - 16x^2 + 63 = 0$ $\qquad$ $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

c) *Finde durch gezieltes Raten eine Lösung von* $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$ *und löse anschließend das Problem vollständig.*
d) *Bestimme die Lösungsmenge zu* $\left(4x^2 - 5\right)\left(\left(1 - x\right) + \left(x^2 - 2x + 1\right) - 56\right) = 0$.

Die Wurzelgleichungen bilden das erste Beispiel, bei dem unter den zunächst gefundenen Ergebnissen die Lösungen durch Probe herausgefunden werden. Dies wird dadurch verursacht, dass das zum Lösen erforderliche Quadrieren keine Äquivalenzumformung darstellt.

Aufgabe 1.3.4:
a) Für welche reellen Zahlen ist die Wurzel $\sqrt{x^2 - 4}$ definiert?
b) Löse $x - \sqrt{2x - 1} = 2$.
c) Weshalb gibt es in $\mathbb{R}$ bei der Gleichung $\sqrt{x - 5} = -2$ keine Lösung?

Aufgabe 1.3.5:
a) *Löse* $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{3x + 10} = \sqrt{11x + 9}$.
b) *Wo schneidet der Graph zu* $y = -2 + \sqrt{0{,}5x + 1}$ *für* $x \geq -2$ *die x-Achse?*
Bestimme zu dieser Funktion die Umkehrfunktion.
c) *Bestimme die Lösungsmenge zu* $\left(3u^2 + u - 2\right)\left(u + 2\right) \geq 0$.

Im Zusammenhang mit der zentrischen Streckung mit Streckungsfaktor k wird die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar k (Zahl) zeichnerisch und rechnerisch behandelt.

Aufgabe 1.3.6:
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind drei Pfeile zu dem Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *mit den Anfangspunkten* $(0|0)$, $(4|3)$ *und* $(-2|3)$ *und die zentrische Streckung von* $(0|0)$ *ausgehend mit dem Streckungsfaktor –2 gegeben.*
Berechne den gestreckten Vektor und konstruiere zu den drei Pfeilen die entsprechenden gestreckten.

Wenn im Unterricht die trigonometrischen Funktionen für die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ *vorhanden sind, sollten für die Interessierten Polarkoordinaten eingeführt werden. Die Umkehrfunktionen werden intuitiv mit dem Taschenrechner benutzt.*

Aufgabe1.3.7:
a) *Berechne die Polarkoordinaten für den Punkt* $(-2|3)$ *bzw.* $(x|y)$.
b) *Berechne für* $\varphi = \pi/6$ *und* $r = 2{,}7$ *bzw.* $(r|\varphi)$ *die dazugehörigen kartesischen Koordinaten.*

Leider ist davon auszugehen, dass schon in wenigen Jahren in keinem Bundesland die Additionstheoreme mehr Thema sind. Deshalb sollte man den Interessierten ein Arbeitsblatt etwa mit dem folgenden Inhalt zur Verfügung stellen:

Satz 1.3.8 Additionstheoreme: *Die folgenden Formeln heißen Additionstheoreme. Man lernt sie nicht auswendig, sondern entnimmt sie einer Formelsammlung:*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (2)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (3)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}, \qquad (5)$$

wobei entweder stets die oberen oder stets die unteren Vorzeichen gelten.

Aufgabe 1.3.9:
a) Beweise (2) mittels (1).
b) Beweise (3) mittels (1).
c) Beweise (4) mittels (3).

d) Beweise (5) mittels (1), (2), (3) und (4).

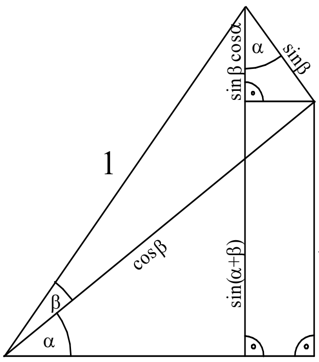
Es bleibt also ***ein*** *Beweis von (1). Löse vorher die folgende Aufgabe:*

Aufgabe 1.3.10: Ist in (1) α und/oder β größer als 90°*, so gibt es stets ein $\underline{\alpha}$ und/oder $\underline{\beta}$ so, dass bis auf die Periode von Sinus und Cosinus $\alpha = 180^\circ \pm \underline{\alpha}$ oder $\alpha = 360^\circ - \underline{\alpha}$. Analoges gilt für β bzw. $\underline{\beta}$. Beweise die Gültigkeit von (1) in allen Fällen, wenn die Gültigkeit von (1) für spitzwinklige α und β bekannt ist.*
Hinweis: *Es sind mindestens* 6 *Berechnungen durchzuführen. Man sollte die einzelnen Fälle in der Gruppe verteilen.*

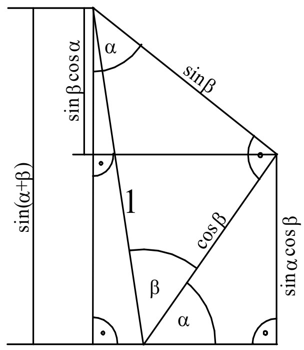
Beweis von (1) im Satz 1.1 für $\alpha < 90^\circ$ und $\beta < 90^\circ$: Man wird die Winkel α und β so aneinandersetzen, dass man den Winkel $\alpha + \beta$ erhält. Die schräg verlaufenden Schenkel der Winkel bilden mit den Koordinatenparallelen viele rechtwinklige Dreiecke. Die entstehenden Gesamtfiguren sind nur bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Um bequem rechnen zu können, gibt man jeweils der längsten Hypotenuse die Länge 1. Auf diese Weise ist gewährleistet, dass alle anderen diagonal verlaufenden Linien Längen haben, die durch Sinus oder Cosinus berechnet werden können.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$\alpha + \beta \leq 90^\circ$



$\alpha + \beta > 90^\circ$



Der Beweis ist in beiden Fällen derselbe: Dem freien Schenkel von $\alpha + \beta$ gibt man die Länge 1*. Man fällt von seinem Ende ein Lot auf den schrägen Schenkel von α. Der Satz: Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich (oder ergänzen sich zu* 180°*), liefert einen zweiten Winkel α. Die Sinuse von α, β und $\alpha + \beta$ liegen dann auf „Senkrechten". Das Additionstheorem (1) ergibt sich aus einer Streckenaddition; beachte die senkrechte Vermaßung.*

Es folgen die „üblichen" Aufgaben:

Aufgabe 1.3.11:
- a) *Vereinfache die Additionstheoreme im Fall $\alpha = \beta$. Was folgt daraus für die Berechnung der halben Argumente?*
- b) *Berechne exakt die Werte der trigonometrischen Funktionen für $\alpha = 15^\circ$.*
- c) *Erstelle eine Liste möglichst vieler Winkel, für die man die Werte der trigonometrischen Funktionen exakt berechnen kann.*
- d) *Weshalb ist* $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ *?*
- e) *Begründe mit Algebra aus Satz 1.1:*
  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
  $\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
  Finde weitere derartige Formeln für Sinus und Cosinus.

In der nächsten Unterrichtsstunde wird man während einer Stillarbeitszeit in der Klasse die Interessierten über obigen Beweis ausfragen um festzustellen, dass das Wesentliche verstanden worden ist. Alternativ kann aber auch eine Sonderunterrichtsstunde außerhalb des normalen Unterrichts über das Arbeitsblatt gegeben werden.

2. Einführung der komplexen Zahlen

2.1 Jahrgangsstufe 9

Wie üblich wird die Lösungsformel für quadratische Gleichungen entwickelt und hinsichtlich der Anzahl der Lösungen diskutiert. Es stellt sich heraus, dass der Wert „unter der Wurzel“, die so genannte **Diskriminante der quadratischen Gleichung** negativ sein kann, was im Reellen zu keiner Lösung führt, denn dort kann ein Quadrat nicht negativ sein.

Man gibt der Klasse den historischen Hinweis, dass LEONHARD EULER (1707 geboren in Basel, gestorben 1783 in Königsberg in Ostpreußen) die Idee gehabt hat, „nicht vorstellbare“ Zahlen, also **imaginäre Zahlen**, einzuführen. Wenn man vernünftig mit den neuen Zahlen rechnen will, sollten alle bisher kennen gelernten Rechengesetze weiterhin gelten. D. h. mit positivem c und beliebigen reellen a und d soll gelten:

$a + d\sqrt{-c} = a + d \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1} = a + bA\, i$, wobei $b := d \cdot \sqrt{c}$ offenbar wiederum eine reelle Zahl ist.

D. h.: Eigentlich braucht man nur *eine* weitere Zahl $\sqrt{-1} =: i$, die EULER die **imaginäre Einheit** nannte. Die Menge $\{z = a + bi$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{C}$ nannte er die Menge der **komplexen Zahlen**. a nennt man den **Realteil**, b den **Imaginärteil** der komplexen Zahl z.

Man führt vor:

Beispiel 2.1.1:
a) $2i - 3i = -i$ b) $(3 - 2i) + (6 + i) = 9 - i$ c) $(2 - i)(3 + 2i) = 8 + i$ d) $(2 - i)(2 + i) = 5$
e) $0 \cdot i = 0$ f) $1 \cdot i = i$ g) $(-1) \cdot i = -i$ h) $(-i) \cdot i = 1$

Das letzte Beispiel zeigt: Die quadratische Gleichung $x^2 = -1$ hat die Lösungen $x_1 = i$ und $x_2 = -i$.

Den Interessierten gibt man die folgenden Hausaufgaben:

Aufgabe 2.1.2:
a) *Untersuche, was wir mit den Elementen einer jeden Zahlenmenge gemacht haben.*
b) *Weshalb ist der Quotient zweier komplexer Zahlen wiederum eine solche?*
c) *Weshalb hat EULER mit Recht $\mathbb{C}$ eine Menge aus Zahlen genannt?*
d) *Berechne i^n für ganze n. Welche Besonderheit stellst du fest?*
e) *Was kann man über n aussagen, wenn $i^n = i$ bzw. $i^n = -i$ ist?*
f) *Weshalb gilt für $ax^2 + bx + c = 0$ mit komplexen a, b und c die Lösungsformel?*
g) *Löse $ix^2 + (2 + 3i)x - 2i = 0$.*
h) *Zeige: Jedes Polynom vom Grad 2 zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.*
i) *Mitteilung: In der “Höheren Mathematik“ erfährt man den so genannten **Hauptsatz der Algebra: Jedes Polynom vom Grad n mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.** Beweise den Hauptsatz für $n = 3$, falls die Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ sind.*
j) *Im Reellen gilt für zwei verschiedene Zahlen a und b entweder $a > b$ oder $a < b$. Zeige durch einen Widerspruchsbeweis an den Zahlen i und 0, dass dies im Komplexen falsch ist. Man stellt fest: **Die komplexen Zahlen haben keine Anordnung.***

Da man davon ausgehen muss, dass nicht nur Hochbegabte in der Gruppe der Interessierten sind, muss man weitere Aufgaben stellen, um die Nutzung der komplexen Zahlen zu festigen:

Aufgabe 2.1.3:
a) *Verwandle die folgenden Terme in die Form $a + bi$:*
$(3 + i) - (12 - i^2)$ $(14 + 13i)(7 - 5i)$ $(14 + 13i):(7 + 5i)$

$1:(4+3i)$ $\sqrt{-3}\left(11-\sqrt{-3}\right)$

b) *Verwandle die Gleichung* $4z-3=5+6z$ *durch* $z=a+bi$ *in 2 Gleichungen in den Unbekannten a und b und löse dieses Gleichungssystem.*
c) *Untersuche allgemein: Hat man eine komplexe Gleichung in* $z=a+bi$*, dann ist diese Gleichung stets gleichwertig einem System aus 2 Gleichungen in a und b.*
d) *In der Gleichung* $2z^2-3iz+a=0$ *mit* $a\neq 0$ *soll a so bestimmt werden, dass die Lösungen der Gleichung rein imaginär werden.*

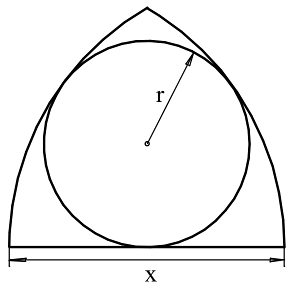
Nach dem Unterrichten des Lehrsatzes von PYTHAGORAS muss dieser auch auf quer liegende Strecken im rechtwinkligen Koordinatensystem zwei- und dreidimensional angewendet werden; hier kann man hinsichtlich des Schwierigkeitsgrades schon in den ersten Aufgaben zwischen den Gruppen A und B Unterschiede erzielen:

Aufgabe 2.1.4:
a) Berechne den Abstand der in einem kartesischen Koordinatensystem gegebenen Punkte $P(1|4)$ und $Q(3|6)$.
b) Berechne die Länge aller Diagonalen in einem Quader mit den Kantenlängen 3,0 cm, 4,0 cm und 6,2 cm.
c) Gegeben ist eine gerade Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche der Kantenlänge 5,2 cm und der Höhe 5,2 cm. Berechne die Längen der Seitenkanten.
d) Finde eine Formel für die Punkte $(x|y)$ eines Kreises um $M(0|0)$ mit Radius r.

Aufgabe 2.1.5:
a) *Berechne den Abstand der in einem kartesischen Koordinatensystem gegebenen Punkte* $P(1|2|3)$ *und* $Q(-2|-3|-4)$.
b) *Berechne die Länge des Vektors* $\vec{a}+\vec{b}$,

falls $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *und* $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$.

c) *In einem Dreieck ABC sind* $c = 7{,}4$ cm*, die Höhe* $h_c = 5{,}6$ cm *und die Seitenhalbierende* $s_c = 5{,}9$ cm *gegeben. Berechne die beiden anderen Dreiecksseiten a und b.*



d) *In einem Spitzbogen mit Radius x soll (vgl. Abb.) ein Kreis so eingezeichnet werden, dass er den Bogen und die Basis von innen berührt. Stelle eine allgemeine Beziehung zwischen x und dem Kreisradius r auf.*
e) *Gib eine Formel für die Punkte einer Kugel um* $M(m_1|m_2|m_3)$ *mit Radius r an.*

Bei der Gruppe B sind viel weniger Aufgaben als in Gruppe A erforderlich, wenn man den Stand der Aufgabe 2.1.4 erreichen will. Nach der kurzen folgenden Bemerkung stellt man den Interessierten Aufgabe 2.1.6:

Weil man den Realteil mit dem Imaginärteil einer komplexen Zahl nur symbolisch addieren kann, hat die Addition der komplexen Zahlen etwas mit der Addition von Vektoren zu tun. Deshalb hat CARL FRIEDRICH GAUSS (30. 4. 1777 geboren in Braunschweig, Professor an der Universität Göttingen, 23. 2. 1855 gestorben in Göttingen) *die komplexen Zahlen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt:*
Man schreibt statt $z=a+bi$ *auch* $z=(a|b)$*. Die waagrechte Achse trägt a, die senkrechte Achse b.*

Aufgabe 2.1.6:
a) *Wodurch sind die reellen Zahlen innerhalb der komplexen ausgezeichnet?*
b) *Schreibe in Koordinaten bzw. zeichne in ein Koordinatensystem die Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen und Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen ein.*
c) *Schreibe die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Koordinatenschreibweise. Weshalb bekommt man mit der geometrischen Deutung im Koordinatensystem Probleme?*
d) *Verbinde den zu* $(a|b)$ *gehörigen Punkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems durch einen Pfeil, der auf* $(a|b)$ *hinweist und berechne die Länge r dieses Pfeils. r nennt man den* ***Betrag von*** $z=a+bi$ *und schreibt hierfür* $r=|z|$.

e) *$\bar{z} = a - bi$ nennt man die **konjugiert komplexe** Zahl zu z = a + bi. Zeige, dass das konjugiert Komplexe von dem konjugiert Komplexen einer Zahl z die Zahl z selbst ist: In Zeichen $\bar{\bar{z}} = z$. Beweise $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ und $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Was stellt man für $z \cdot \bar{z}$ und $z + \bar{z}$ stets fest?*

f) *Begründe: $z = \bar{z}$ gilt genau dann, wenn z reell ist. $\bar{z} = -z$ gilt genau dann, wenn z rein imaginär ist.*

g) *Berechne das konjugiert Komplexe der folgenden Zahlen:*

13 $\quad$ 3 + 4*i* $\quad$ $z \cdot |z|$ $\quad$ $z + \bar{z}$ $\quad$ $\dfrac{(z+\bar{z})(2z-\bar{z})}{(3z-\bar{z})^2}$

h) *Begründe, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn z = 0 ist.*

i) *Begründe: Eine quadratische Gleichung mit einer komplexen Lösung hat genau dann zwei konjugiert komplexe Lösungen, wenn ihre Koeffizienten aus ℝ sind.*

j) *Begründe: Wenn das Produkt zweier komplexer Zahlen null ist, so ist mindestens einer der beiden Faktoren* 0 = 0 + *i*A0 = (0 | 0).

2.2 Jahrgangsstufe 10

Viele Kolleginnen und Kollegen unterrichten erst am Schuljahresende Trigonometrie. Deshalb kann man das Folgende auch erst am Schuljahresende oder in der darauf folgenden Klasse lehren (siehe 1.3).

Aufgabe 2.2.1:

a) *Bezeichne mit φ den Winkel zwischen dem zu* (a | b) *gehörigen Pfeil und der Realachse. Begründe $z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.*

b) *Wodurch sind in dieser Polarschreibweise die reellen Zahlen bzw. die rein imaginären Zahlen ausgezeichnet?*

c) *Begründe die so genannte **Formel von Abraham de Moivre** (1667 – 1754):*
Aus $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ und $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ folgt
$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

d) *Finde eine entsprechende Formel für den Quotienten zweier komplexer Zahlen.*

An dieser Stelle empfiehlt sich, in der Gruppe der Interessierten eine weitere Extrastunde zur Festigung des Bisherigen zu geben. Hierbei stellt man weitere Hausaufgaben:

Aufgabe 2.2.2:

a) *Erläutere für $z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ mit Hilfe der Formel von Moivre:*
$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

b) *Das Radizieren ist die Umkehroperation des Potenzierens; bestimme hiermit $\sqrt[n]{z}$ für alle natürlichen n und komplexen z.*

c) *Wie viele verschiedene komplexe Werte $\sqrt[n]{z}$ gibt es zunächst unendlich viele Wurzeln gibt?*

d) *Begründe, dass das Lösen der Gleichung $x^2 = 4$ im Reellen mit dem Berechnen im Komplexen übereinstimmt.*

e) *Untersuche: Für welche n gibt es unter $\{\sqrt[n]{z} \mid z \in \mathbb{R}^+\}$ reelle Werte? In welcher Form kann man also das Wurzelziehen im Reellen erweitern?*

f) *Finde zeichnerisch und rechnerisch alle komplexen dritten Wurzeln aus* 8 *und* 27. *Weshalb sind beide Probleme simultan zu lösen, wenn man alle komplexen dritten Wurzeln aus* 1 *kennt?*

Spätestens an dieser Stelle werden viele Schülerinnen und Schüler die Gruppe B verlassen, wenn man nicht für sie eine Zusatzstunde hält und die Aufgabe 2.2.2 ausführlich behandelt, was hier nicht dargestellt werden muss, da man in Kapitel 4 die Lösungen für die gestellten Aufgaben findet. Auch driftet jetzt das, was man mit den Schülerinnen und Schülern der Gruppe B macht so weit mit den eigentlichen Lehrzielen der Gruppe A auseinander, dass spätestens hier alles Weitere nicht mehr allein durch Binnendifferenzierung gelehrt werden kann, da auch für die Gruppe B der Normalunterricht im Detail wichtig geworden ist. D. h. spätestens hier geht die Binnendifferenzierung in einen Ergänzungsunterricht über.

3. Ergänzungsunterricht

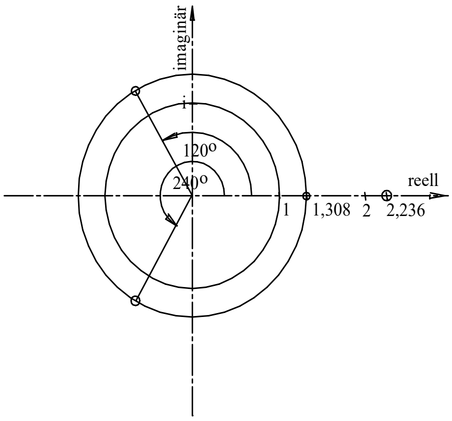
3.1 Einheitswurzeln

Aufgabe 2.2.2 führt zum folgenden Satz:

Satz 3.1.1: $z = x + iy = |z|(\cos\,\varphi + i\,\sin\varphi)$ hat $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$ als Wurzeln. $\sqrt[n]{|z|}$ ist die bereits im Reellen kennen gelernte positive Wurzel aus einem positiven Radikanden; sie hat den Wert null, wenn der Radikand null ist; $\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$ sind n verschiedene Wurzeln, d. h. sie liegen alle auf einem Kreis um den Ursprung der GAUSS-Ebene mit Radius 1. Es gilt

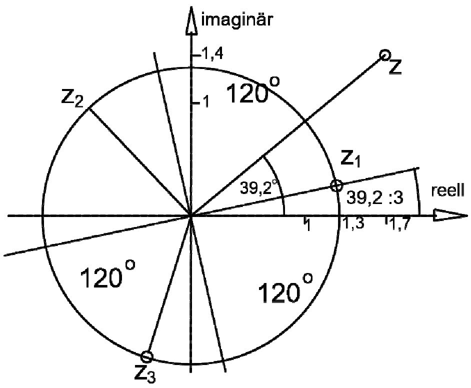
$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ für beliebige ganze k. Für $\varphi = 0$ heißen alle $\sqrt[n]{1}$ **n-te Einheitswurzeln**, die man mit $e_k := \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{2k\pi}{n}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ kennzeichnet.

Beispiel 3.1.2:
Ist z eine reelle Zahl und n ungerade, z. B. $n = 3$, so zieht man die Wurzel $a = \sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{z\bar{z}}$, wobei $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$ ist. Hieraus erhält man dann die dritten Wurzeln, wenn man diese reelle Zahl a jeweils mit den dritten Einheitswurzeln e_k multipliziert. Siehe die nebenstehende Zeichnung.



Im Einzelnen: Nebenstehend werden die dritten Wurzeln aus der reellen Zahl $\sqrt{5} \approx 2{,}236..$ untersucht. Die dritten Wurzeln liegen auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt[3]{\sqrt{z\bar{z}}} = \sqrt[6]{5} \approx 1{,}308$. Weil die Ausgangszahl $\varphi = 0°$ hat, ergeben sich für die Wurzeln $\varphi_1 = 0°$, $\varphi_2 = 120°$ und $\varphi_3 = 240°$.

Beispiel 3.1.3:
Im Fall einer nicht reellen Zahl z verfährt man genauso: Für $n = 3$ und $\sqrt[3]{|z|} = \sqrt[6]{z\bar{z}} = \sqrt[6]{5}$ muss dann nur obige Zeichnung um $\varphi/3$ im mathematischen Uhrzeigersinn im Koordinatensystem gedreht werden.



Im Einzelnen: Nebenstehend werden die dritten Wurzeln aus der komplexen Zahl $z = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$ untersucht. Die dritten Wurzeln liegen wiederum auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $r = \sqrt[3]{\sqrt{z\bar{z}}} = \sqrt[6]{5} \approx 1{,}308$. Weil die Ausgangszahl z das Argument $\varphi = 39{,}23..°$ hat, ergeben sich für die dritten Wurzeln die folgenden Argumente:
$\varphi_1 = 13{,}077..°$, $\varphi_2 = 133{,}077..°$ und
$\varphi_3 = 253{,}077..°$.

Satz 3.1.4: Wenn z_1 eine beliebige Lösung von $x^n = z$ ist, dann erhält man durch $z_k = z_1 \cdot e_k$ mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ alle Lösungen dieser Gleichung.

Aufgabe 3.1.5:

a) Finde unter den endlich verschiedenen n-ten Einheitswurzeln alle solche e_i, die so genannte **Erzeugende** sind, d. h. sie haben die Eigenschaft, dass e_i^k *für* $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ alle n-ten Einheitswurzeln ergeben.

b) Beweise Satz 3.1.4.

c) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{OP_i}$ vom Ursprung O zum Punkt $P_1(2|3)$ bzw. $P_2(-2|-1)$. Man benutze die Kenntnisse über komplexe Zahlen und bestimme den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP_i}$ für i = 1 und i = 2.

d) Finde mit der Formel von MOIVRE Formeln für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$.

Didaktische Bemerkung:
In der Einleitung werden bereits zwei weitere Abhandlungen angekündigt, die mit komplexen Zahlen zu tun haben. Umso mehr erhebt sich hier die Frage, welche Inhalte man für einen ersten Ergänzungskurs am Gymnasium auswählen soll.

Der Autor hat sich entschieden, mit primitiven Mitteln etwas mehr auf die Einheitswurzeln einzugehen, weil man diese an verschiedenen Stellen der Anwendungen brauchen kann. Es geht dabei nicht um die Entwicklung abstrakter Theorien, sondern die Anschauung steht im Vordergrund. Darüber hinaus wird man im Folgenden die wichtigsten Anwendungen in den Naturwissenschaften angedeutet finden, um den Stellenwert derselben den Schülern zu vermitteln. Es sollen aber auch innermathematische Anwendungen angedeutet werden:

Da ist einmal das Rechnen an sich. Alle Unterstrukturen der komplexen Zahlen gestatten ein umfassendes Rechnen, wie dies der Schüler bei den reellen Zahlen kennen gelernt hat. Die Hierarchien, die dabei auftreten, haben natürlich zu mathematischen Begriffsbildungen geführt, die zum Teil untersucht werden.

Beim Rechnen spielt das Gleichungslösen eine entscheidende Rolle. Leider muss man in jüngerer Zeit an Hochschulen feststellen, dass die durchaus erforderliche Vertiefung komplexer Textaufgaben dazu geführt hat, dass angehende Studenten immer weniger Verfahren des Rechnens beherrschen (siehe POLACZEK [1]). Mich hat sehr beeindruckt, als ich schon lange nach dem Kennenlernen der GALOIStheorie in der Algebravorlesung (**EVARISTE GALOIS (1811 – 1832))** in einem Kolloquiumsvortrag von ZASSENHAUS (1966) ganz einfach und schlicht erfahren habe, dass man mit GALOIStheorie beweist, dass es für Gleichungen vom Grad größer als vier keine allgemeinen Lösungsverfahren mehr gibt. Auch wenn ich aus einer Formelsammlung die CARDANOformel kannte (CARDANO (1501 – 1576)), gelang es mir trotzdem nicht, bei vorgegebenen ganzzahligen Lösungen diese wiederum in ihrer komplexen Darstellung zu erkennen, weil ich eben auch zu wenig Rechenfertigkeit hatte. So ist es durchaus angebracht, interessierten Schülerinnen und Schülern die Lösungsverfahren für Gleichungen vom Grad 3 und 4 einmal vorzuführen, letztlich auch um zu zeigen, dass ein solcher Rechenaufwand im Zeitalter der Computer dank Näherungsverfahren vermieden wird. Auch scheint es mir historisch interessant, dass Mathematiker vor GALOIS und Nichtmathematiker nach GALOIS bis heute bemüht sind, Lösungsverfahren für höhere Gleichungen zu finden.

Definition 3.1.6: Eine Menge M mit einer Verknüpfung $\otimes$, die jedem Element aus der Menge MHM der Paare wiederum ein Element aus M zuordnet (i. Z. $\otimes$: M×M $\to M$) heißt **Gruppe**, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

G1 $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ für alle a, b, c aus M

G2 Es gibt genau ein Element $1 \in M$ genannt **neutrales Element** 1 mit $1 \otimes a = a \otimes 1 = a$ für alle a aus M.

G3 Zu jedem a aus M gibt es genau ein **Inverses** $a^{-1} \in M$ mit $a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = 1$.

Die Gruppe heißt **kommutativ** oder **ABELsch**, wenn außerdem gilt:

G4 Für alle a und b aus M gilt $a \otimes b = b \otimes a$.

Aufgabe 3.1.7:

a) Welche der kennen gelernten Zahlmengen sind Gruppen?

b) Begründe: Hinsichtlich der Multiplikation im Komplexen bilden die n-ten Einheitswurzeln eine ABELsche Gruppe.

Definition 3.1.8: Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\otimes$, wobei (K, $\oplus$) eine ABELsche Gruppe und (K, $\otimes$) eine Gruppe ist, heißt **Schiefkörper** (manche sagen auch nur Körper), wenn das folgende Axiom gilt:
G5 Für alle a, b und c aus K das Distributivgesetz gilt: $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$
Ist darüber hinaus (K, $\otimes$) ABELsch, so spricht man von einem **kommutativen Körper** (manche sagen auch hier nur Körper).

Aufgabe 3.1.9:
a) Welche kennen gelernten Zahlmengen sind Körper?
b) Beweise: $M = \{a + b\sqrt{3}$ für rationale a und b mit der „normalen" Addition und Multiplikation$\}$ ist ein kommutativer Körper.

3.2 Lösen von Gleichungen

$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2)....(z - z_n)$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt **Polynom vom Grad *n*.** $p_n(z) = 0$ nennt man eine **algebraische Gleichung vom Grad *n***. Verfahren zum Lösen solcher Gleichungen im Fall $n = 1$ oder $n = 2$ sind bereits allen Schülerinnen und Schülern bekannt. Ohne Beweis benutzen wir:

Satz 3.2.1 (Hauptsatz der Algebra): Jedes Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren; d. h. $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2)....(z - z_n)$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$.
Die z_i sind die Nullstellen des Polynoms. Es können hiervon mehrere gleich sein.

Hinweis: 3.2.1 ist eine Verallgemeinerung des Satzes von VIETA. Kennt man eine der Nullstellen, so kann man das Problem der Nullstellensuche um einen Grad reduzieren; z. B.: Kennt man die Lösung $z = b$ von $p_n(z) = 0$, so muss man nur noch das Problem $p_n(z):(z - b)$ bearbeiten. Hier zeigt sich also der Stellenwert der Polynomdivision. Die Linearfaktoren übernehmen die Rolle der Primzahlen bei den ganzen Zahlen. Ob auch hier die Primfaktorzerlegung eindeutig ist, bleibt offen.

Kubische Gleichung

Spezialfälle kubischer Gleichungen wurden bereits im Altertum bearbeitet. Im Folgenden wird ein Verfahren zum Lösen der kubischen Gleichung entwickelt, wie dies erstmals von CARDANO [1] (1501 – 1576) für reelle Koeffizienten veröffentlicht worden ist. Die Lösungen bekam er 1539 von TARTAGLIA (1500 – 1557) und veröffentlichte sie 1545 in seiner „Ars magna" gegen den Willen von TARTAGLIA; vermutlich aber waren die Formeln bereits früher SCIPIONE DEL FERRO bekannt.

Die allgemeinste kubische Gleichung hat die Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $a \neq 0$. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 1$ annehmen.

A: Im Fall $n = 2$ hat man die ersten beiden Glieder des Polynoms betrachtet und diese „künstlich" zu einem vollständigen Quadrat gemacht (so genannte quadratische Ergänzung). Hier benutzt man analog eine kubische Ergänzung:

$$
\begin{aligned}
&x^3 + bx^2 + \quad cx + \quad d = \\
&\left(x+\frac{b}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{b}{3}\right)^2\left(x+\frac{b}{3}\right) + \frac{b^3}{9} - \left(\frac{b}{3}\right)^3 + c\left(x+\frac{b}{3}\right) - \frac{cb}{3} + d = \\
&u^3 \quad - \frac{b^2}{3}\cdot u \quad + \frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} \quad + c\cdot u \quad - \frac{cb}{3} + d = \\
&u^3 + u\left(c - \frac{b^2}{3}\right) + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d\right) = \\
&u^3 + pu \quad + q \; = \; 0 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

mit $u := x + \frac{b}{3}$, $p := c - \frac{b^2}{3}$ *und* $q := \frac{2b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$.

Damit hat man völlig analog zur quadratischen Ergänzung das Problem vereinfacht. Im Folgenden geht es nun darum, den Grad 3 zu einem Grad 2 zu reduzieren. Hierzu braucht man Erfahrung, die um 1550 sicher nicht vorhanden war – oder doch? – oder man muss den Mut haben, viele Beispiele zu rechnen, was vermutlich dem historischen Vorgehen entspricht:

B: Schließlich findet man den folgenden „Trick“: Setze $u := v + w$, dann gilt: (2)

$$u^3 = (v+w)^3 = v^3 + 3v^2w + 3vw^2 + w^3 = 3vw(v+w) + v^3 + w^3$$

Hieraus folgt mit (1):

$$u^3 - 3vw(v+w) - (v^3 + w^3) = u^3 + pu + q = 0$$

Mit Koeffizientenvergleich findet man:

$p = -3vw$ und (3)

$q = -(v^3 + w^3)$ (4)

v und w sind sicher nicht null, weil sonst p null wäre, was zu einem Zusammenhang (1) führen würde, den man mit den Kenntnissen aus Kapitel 3.1 lösen könnte. Aus (3) folgt $w = -\frac{p}{3} \cdot \frac{1}{v}$. Diese Formel setzt man in (4) ein und erhält:

$$q = -\left(v^3 - \left(\frac{p}{3,}\right)^3 \cdot \frac{1}{v^3}\right)$$

Umformungen ergeben:

$$v^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{v^3} + q = 0$$

$$v^6 + qv^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

Damit hat man für das Problem (1) vom Grad 3 eine Gleichung vom Grad 6 gefunden. D. h. die Lösungen dieser Gleichung müssen überprüft werden, inwieweit sie auch Lösungen für (1) sind, also z. B. (3) und (4) erfüllen.

Für die quadratische Gleichung in v^3 erhält man als Lösung:

$$v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und damit} \quad v_k = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \cdot e_k \text{ für } k = 0, 1, 2. \qquad (5)$$

Hieraus findet man mit (4):

$$w^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{und damit} \quad w_k = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \cdot e_k \text{ für } k = 0, 1, 2. \qquad (6)$$

In (5) und (6) gelten entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen. Mit (2) werden also u. a. für die Gleichung (1) die folgenden Lösungen gefunden:

$$u_{kl} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \cdot e_k + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot e_l \text{ für } k = 0, 1, 2 \text{ bzw. } l = 0, 1, 2 \qquad (7)$$

mit der so genannten **Diskriminante** $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Der andere Fall der Vorzeichen ergibt: $u_{kl} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot e_k + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \cdot e_l$, das ist aber dasselbe wie (7).

Die Gleichung (1) kann nur drei und keine neun Lösungen haben. Man muss also überprüfen, welche dieser neun Ergebnisse die Ausgangsbedingungen (3) und (4) erfüllen. (4) ist sicher wegen der Konstruktion der neun Ergebnisse erfüllt. Anders ist das mit (3). Es gilt

$$-v_k \cdot w_l = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}} \cdot e_k \cdot e_l = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}} \cdot e_k \cdot e_l = -\frac{p}{3} \cdot e_k \cdot e_l = -\frac{p}{3}$$

genau dann, wenn $e_k \cdot e_l = 1$ ist. Betrachtet man die Multiplikationstafel für die dritten Einheitswurzeln, so findet man, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $k = l = 0$ oder $k = 1$ und $l = 2$ oder $k = 2$ und $l = 1$ sind. D. h. man hat die drei Lösungen so gefunden.

Cardanische Formel 3.2.2:
Die Gleichung $u^3 + pu + q = 0$ hat die drei komplexen Lösungen

$$u_{kl} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} \cdot e_k + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}} \cdot e_l \quad \text{mit} \quad D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{8}$$

für $k = l = 0$ oder $k = 1$ und $l = 2$ oder $k = 2$ und $l = 1$.

Aufgabe 3.2.3:

a) Wie lautet für (1) das Analogon für den Satz des VIETA?
b) Hat man für (1) die Lösung $u = u_1$ gefunden, so ist noch die quadratische Gleichung $(u - u_2)(u - u_3) = 0$ zu lösen. Finde die Lösungen u_2 und u_3 als Funktionen von u_1 und q.
c) Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.
d) Suche eine Lösung der Gleichung von c) durch „gezieltes Raten".

Satz 3.2.4 (Diskussion der Lösungen bei einer Ausgangsgleichung mit reellen Koeffizienten)**:**
Im Fall $D > 0$ gibt es genau eine reelle Lösung und zwei echt komplexe Lösungen.
Im Fall $D = 0$ gibt es entweder eine doppelte reelle Lösung und eine einfache reelle Lösung oder eine dreifache reelle Lösung.
Im Fall $D < 0$ gibt es drei verschiedene reelle Lösungen.

Beweis:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $q \neq 0$ voraussetzen.

***D* > 0:** Man erhält reellwertige Wurzeln $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$ und $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$; deshalb ist

$u_{kl} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} \cdot e_k + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}} \cdot e_l$ für $k = l = 1$ reell. Für $k = 1$ und $l = 2$ findet man

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\,(\cos 120^0 + i \sin 120^0) + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\,(\cos 120^0 - \mathrm{i} \sin 120^0) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\right) + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\right) \in |,$$

weil wegen $D > 0$ gilt $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} \neq \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$. (9)

Es gibt also eine echte komplexe Lösung. Analog verhält sich der Fall $k = 2$ und $l = 1$.

***D* = 0:** Hier berechnen sich die Lösungen gemäß $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \cdot e_k + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \cdot e_l = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \cdot (e_k + e_l)$.

Für $k = l = 1$ findet man eine reelle Lösung.
Für $k = 1$ und $l = 2$ oder $k = 2$ und $l = 1$ ist $e_k + e_l$ reell. Damit sind alle Lösungen reell, wobei zwei oder gar drei Lösungen gleich sein können.

***D* < 0** (genannt casus irreducibilis)**:** Jetzt sind $z_m = r_m(\cos\varphi_m + i\sin\varphi_m) = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D}$, wobei

$m = 1, 2$ echte komplexe Zahlen mit $r = \sqrt{\frac{q^2}{4} + D^2}$ und $\varphi_m \neq 0$ sind. z_1 ist zu z_2 konjugiert komplex.

Für (8) erhält man also im Fall $k = l = 0$:

$$u_{11} = \sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}+\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\cdot 2\cos\frac{\varphi}{3}$$

Das ist eine reelle Zahl.
Im Fall $k = 1$ und $l = 2$ bekommt man aus (8):

$$u_{12} = \sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right) =$$

$$\sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{3}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{3}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$\sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\right)$. Wegen $\varphi \neq 0$ ist das eine reelle Zahl $u_{12} \neq u_{11}$.

Im Fall $k = 2$ und $l = 1$ bekommt man aus (8):

$$u_{21} = \sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right) =$$

$$\sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{3}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{i}{2}\sin\frac{\varphi}{3}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\cos\frac{\varphi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$\sqrt[6]{\frac{q^2}{4}+D^2}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\right)$. Das ist eine reelle Zahl u_{21}, die wegen $\varphi \neq 0$ von u_{11} und u_{12} verschieden ist.

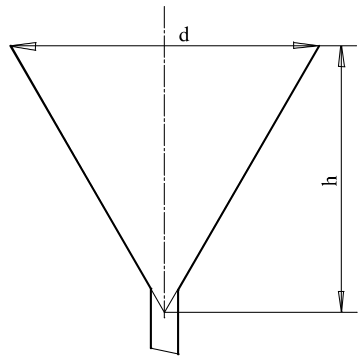
Ein ähnliches Verfahren findet man im Literaturverzeichnis unter Verlag Harri Deutsch [1].

Aufgabe 3.2.5:

a) Überprüfe das Ergebnis der Aufgabe 3.2.3 mit Satz 3.2.4.

b) Löse die so genannte **biquadratische Gleichung** $x^4 + bx^2 + d = 0$. Dividiere die so genannte **symmetrische Gleichung vom Grad 4** $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ durch x^2 und löse die neue Gleichung durch die Substitution y = $x + \frac{1}{x}$.

c) Der Achsenschnitt eines genormten Glastrichters ist ein gleichseitiges Dreieck (siehe die Abbildung). Wie groß ist die Trichterweite d, wenn das Fassungsvermögen des Trichters $V = 765$ cm³ beträgt?
Nach Verlag Harri Deutsch [1], Seite 96.



Gleichung vom Grad 4

Satz 3.2.6: Die allgemeine algebraische Gleichung vom Grad 4 mit reellen Koeffizienten, also $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ist in $\mathbb{C}$ lösbar. Sie hat 4 Lösungen, von denen u. U. welche gleich sein können.

Beweis nach www.math.tu-freiberg.de*:*
Man geht analog zum Auffinden der Formel von CARDANO (siehe 3.2.2) vor:

A: Die Anzahl der beteiligten Koeffizienten wird reduziert:

$$x^4 + ax^3 \qquad\qquad + bx^2 \qquad\qquad\qquad + cx \qquad\qquad\qquad + d =$$

$$\left(x+\frac{a}{4}\right)^4 + \left(-\frac{3}{8}a^2 + b\right)\left(x+\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)\left(x+\frac{a}{4}\right) + \left(-\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ac + cd\right) = 0 \qquad (1)$$

Man substituiert $u := x + \frac{a}{4}$ und erhält

$$u^4 + pu + qy + r = 0 \text{ mit} \qquad (2)$$

$$p = \left(-\frac{3}{8}a^2 + b\right)$$

$$q = \left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)$$

$$r = \left(-\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ac + cd\right).$$

B: Falls $q = 0$, ist (1) eine biquadratische Gleichung (siehe Aufgabe 3.2.5). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir also an $q \neq 0$. (2) wird umgeformt zu

$$y^4 + py = -qy - r$$

und so ergänzt, dass man die linke Seite als ein vollständiges Quadrat erhält:

$$\left(y^2 + p\right)^2 = py^2 - qy - r + p^2 \qquad (3)$$

1. Fall:
Steht rechts – zufällig – ein vollständiges Quadrat, kann man auf beiden Seiten die Wurzel ziehen und erhält so für y quadratische Gleichungen usw. Sonst hat man den
2. Fall:
FERRARI (1522 – 1565, ein Schüler von CARDANO, der die Formel für den Grad 4 ebenfalls in seiner „Ars magna" 1545 veröffentlicht) hatte wohl als Erster die Idee, eine Hilfsvariable z so einzuführen, dass links das vollständige Quadrat erhalten bleibt und gleichzeitig rechts ein solches entsteht:

$$\left(y^2 + p + z\right)^2 = py^2 - qy - r + p^2 + 2z\left(y^2 + p\right) + z^2 =$$
$$= (p + 2z)y^2 - qy + \left(p^2 - r + 2pz + z^2\right)$$

Die neue rechte Seite ist genau dann ein Quadrat, wenn die Diskriminante der dazugehörigen quadratischen Gleichung den Wert null hat, also gilt:

$$(-q)^2 - 4(p + 2z)\left(p^2 - r + 2pz + z^2\right) = 0 \qquad (4)$$

Man formt (4) zu der folgenden kubischen Gleichung um:

$$8z^3 + 20pz^2 + \left(16p^2 - 8r\right)z + \left(4p^3 - 4pr - q^2\right) = 0 \qquad (5)$$

FERRARI hat (4) mit der Formel des CARDANO (siehe 3.2.2) gelöst. D. h. das Verfahren bei den Gleichungen vom Grad 4 geht völlig analog zu dem bei den Gleichungen vom Grad 3: Man reduziert zunächst die Anzahl der beteiligten Koeffizienten um 1 und erniedrigt dann anschließend durch einen „Trick" den Grad um 1. Man könnte nun glauben, dass diese Idee auch bei noch höheren Gleichungen zu Lösungen führt. Dem ist – abgesehen von Spezialfällen – nicht so.

> Aufgaben 3.2.7:
> Finde die Lösungen von $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 30x + 25 = 0$ (nach www.math.tu-freiberg.de).

3.3 Gebiete

Ungleichungen im Reellen stellen Intervalle dar. Ungleichungen im Komplexen gibt es zunächst nicht, da | nicht angeordnet ist. Es gibt aber mehrere Möglichkeiten, im Komplexen reelle Zahlen zu betrachten, wie bereits auseinander gesetzt worden ist:

Satz 3.3.1: z sei eine beliebige komplexe Zahl. Dann sind $|z|$, $z + \bar{z}$ und $z \cdot \bar{z}$ reelle Werte.

Hiermit kann man z. B. Kreise darstellen:

Satz 3.3.2: $|z| = r$ und $z \cdot \bar{z} = r^2$ sind jeweils Kreise um $z = 0$ und Radius r.

Aufgabe 3.3.4:
a) Gib zwei komplexe Gleichungen für einen Kreis um m mit Radius r an.
b) Übertrage die Gleichung $\bar{u}z + u\bar{z} + r = 0$ mit einer komplexen Zahl u und einem reellen r in zwei reelle Gleichungen. Was wird hierdurch dargestellt?

Was man in einem Ergänzungskurs mit komplexen Zahlen an Kreisen und Geraden – auch hinsichtlich Spiegelungen an diesen – machen kann, findet man unter MEYER [3] und [4].

Aufgabe 3.3.5: Untersuche die folgenden komplexen Zahlen z:
a) $\{z \mid |z - m| < r\}$ für ein reelles r.
b) $\{z \mid r_1 \le |z - m| \le r_2\}$ für reelle Zahlen r_1 und r_2.
c) Was ändert sich an der Punktmenge b), wenn die Gleichheitszeichen wegfallen?
d) $\{z \mid -2 \le z + \bar{z} \le 4\}$
e) $\{z \mid -2 \le -(z - \bar{z})\, i \le 4\}$
f) Gesucht werden alle komplexen Zahlen, die innerhalb des Kreises um den Ursprung mit Radius 3 auf einem Sektor mit dem Öffnungswinkel 30° liegen, wobei einer der beiden geradlinigen Sektorränder auf der Geraden durch den Ursprung mit Steigung 1 liegt.
g) Beschreibe im Komplexen alle Punkte des Rechtecks in der GAUSS-Ebene, das die drei Punkte 0, 4 und $4 + 2i$ hat.

3.4 Physikalische Anwendungen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit können nur einige Anwendungen in Technik und Physik durch Beispiele und Aufgaben genannt werden.

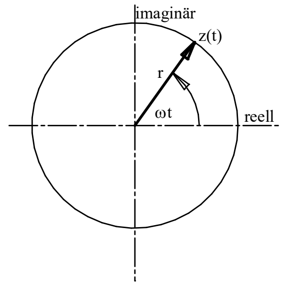
3.4.1 Geometrische Abläufe in der Ebene

In diesem Abschnitt sind Kenntnisse der Differenzialrechnung erforderlich:
Hat man einen Bewegungsvorgang in der $(x|y)$-Ebene, so kann man jedem Punkt $(x|y)$ eine komplexe Zahl $z = x + iy$ zuordnen. Das ist bei kreisförmigen Bewegungen besonders sinnvoll (DITTMANN [1], Seite 115):

Aufgabe 3.4.1.1: Gegeben ist die Bewegung $z(t) = \mathrm{r}(\sin \omega t + i \cos 2\omega t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t mit den Konstanten r, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und der Zeit T für einen vollen Umlauf. Es sei $0 \le t \le T$. Fertige einen Graphen für diese Bewegung.
a) Berechne den Geschwindigkeitsbetrag. Für welche Zeiten ist die Geschwindigkeit null?
b) Berechne den Betrag der Beschleunigung und zeige, dass diese nie null wird.
c) Zeige, dass die Bahn ein Stück der Parabel zu $y = r\left(1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2\right)$ ist, wenn $z = x + iy$ ist.

3.4.2 Zeigerdiagramme

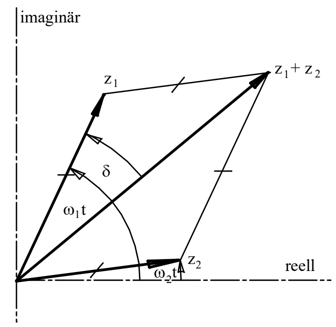
Insbesondere bei Schwingungen und deren Überlagerungen ist die Nutzung komplexer Zahlen sinnvoll.



Beispiel 3.4.2.1: Wir betrachten einen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, der mit der konstanten Kreisfrequenz oder Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ um den Ursprung

herumläuft. T ist die Schwingungsdauer, f die Frequenz des Umlaufes. Einen solchen umlaufenden Vektor nennt der Anwender einen **Zeiger** oder auch umlaufenden Zeiger. Statt Vektorschreibweise kann man nun auch die Schreibweise der komplexen Zahlen zum Einsatz bringen: $z(t) = r(\cos \omega t + i \sin \omega t)$

Der Vorteil der Zeigerdiagramme zeigt sich, wenn sich an einer Stelle zwei harmonische Schwingungen überlagern. Man braucht dann nur die beiden komplexen Zahlen zu addieren, wie dies in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist:
$z(t) = z_1(t) + z_2(t) = r_1(\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + r_2(\cos \omega_2 t + i \sin \omega_2 t)$,
wobei unter Umständen $\omega_1 = \omega_2$ oder $\omega_2 = \omega_1 + \delta$ mit einer festen **Phasenverschiebung** δ ist.



3.4.3 Wechselstrom

Nur bei einem OHMschen Widerstand haben die Stromstärke und die angelegte Spannung gleiche Phase. Legt man die Wechselspannung $U(t)$ an einen Kondensator, der eine Kapazität C hat, so fließt durch ihn ein Strom $I(t)$, welcher der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ vorauseilt; d. h.:

$U(t) = U_0 \sin \omega t$ mit der **Kreisfrequenz** ω, so beschreibt $I(t) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ den Strom durch den *Kondensator*.

Legt man an eine Spule die Spannung $U(t)$ an und setzt voraus, dass die *Spule* keinen OHMschen Widerstand hat, also nur einen induktiven Widerstand, so fließt durch die Spule ein Strom $I(t)$, der der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ nachhinkt.

Man findet die folgenden Gleichungen:

OHMscher Widerstand R: $\quad R = \dfrac{U(t)}{I(t)}$

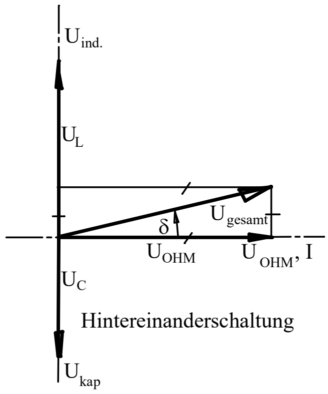
Kapazitiver Widerstand bei einer Kapazität C:

$$-\frac{1}{C\omega} i = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0(\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t)}{C\omega U_0\left(\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Induktiver Widerstand bei einer Induktivität L:

$$L\omega i = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0(\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t)}{\frac{U_0}{L\omega}\left(\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Man möchte jetzt Beispiele rechnen, in denen jeweils mindestens 2 der genannten Widerstände vorkommen. Hierzu sind Zeigerdiagramme eine große Hilfe: Bei Hintereinanderschaltung von Widerständen fließt durch jeden Widerstand der gleiche Strom. Beim OHMschen Widerstand sind Stromstärke und Spannung phasengleich, deshalb trägt man beide waagrecht ins Zeigerdiagramm. Der Strom durch eine Spule eilt der Spannung voraus, also muss im Diagramm die Abfallspannung an der Spule der Abfallspannung am OHMschen Widerstand $\pi/2$ vorauseilen, bzw. die Abfallspannung am Kondensator hinkt der Spannung am OHMschen Widerstand $\pi/2$ nach. Im Diagramm erhält man dann die Gesamtabfallspannung und die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. δ gibt die endgültige



Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom an.

Aufgabe 3.4.3.1:
Finde ein entsprechendes Diagramm für die Parallelschaltung der drei Widerstandsarten.

4. Lösungsumdrucke

Zu Aufgabe 1.2.2:

$\frac{2}{e-5}-\frac{4}{e-7}=\frac{11}{7e-35}-\frac{3}{e-7}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\diagup\{5;\ 7\}$ und den Hauptnenner $HN = 7(e-5)(e-7) \neq 0$, mit dem man die gesamte Gleichung multiplizieren kann:

$$14(e-7)-28(e-5)=11(e-7)-21(e-5)$$
$$14e-98-28e+140=11e-77-21e+105$$
$$4e=14$$
$$e=\frac{7}{2} \in D \text{ und damit } L=\left\{\frac{7}{2}\right\}$$

Zu Aufgabe 1.2.3:

$$(a-2x)(-xa-xb)=2x^2(a+b)+a^2-b^2 \text{ mit } D=\mathbb{R}.$$
$$(a-2x)(-x)(a+b)=2x^2(a+b)+(a+b)(a-b)$$

1. Fall: $a+b\neq 0$:

$$-ax+2x^2=2x^2+a-b$$
$$-ax=a-b$$

a) $a\neq 0$: $x=\frac{b-a}{a} \in D$ und $L=\left\{\frac{b-a}{a}\right\}$.

b) $a=0$: Falls $a-b=0$ ist $L=\mathbb{R}$. Sonst ist $L=\varnothing$.

2. Fall: $a+b=0$: Hier ergibt sich $L=\mathbb{R}$.

Zu Aufgabe 1.2.4:

a) $\sum \overrightarrow{a_i}=\vec{0}$

b) $3\vec{x}-5\vec{a}+5\vec{b}-6\vec{x}=7\vec{x}+\vec{c}-2\vec{a}$

$$10\vec{x}=-3\vec{a}+5\vec{b}-\vec{c} \text{ also folgt } \vec{x}=\begin{pmatrix}-2{,}4\\1{,}9\end{pmatrix}.$$

c) Eine Zeichnung zeigt, dass es sich um die Punkte einer Geraden handelt.

Zu Aufgabe 1.3.1:

a) $x^2-2x+\frac{c}{2}=0$ folgt nach VIETA für die Lösungen $x_1=1$ und x_2: $x_2=2-1=1$ und damit

$\frac{c}{2}=x_1x_2=1$ also $c=2$.

b) Die Parabel hat ihren Scheitel bei $x=2$. D. h. der gegebene Punkt ist der Scheitel und die Scheitelgleichung der notwendigerweise nach unten geöffneten Parabel lautet $y-t=a(x-s)^2$ mit $t=1$ und $s=2$. Mit der einen Nullstelle findet man $a=-1$.

c) Aus $x_1=4x_2$ findet man mit VIETA $5x_2=15$ und $q=4x_2^2$ also $q=36$.

Zu Aufgabe 1.3.2:

a) Man betrachtet die Schnittpunkte, d. h. hierfür $mx + t = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$. Wenn die Gerade die Parabel berühren soll, darf sie nur 1 Schnittpunkt mit ihr haben und deswegen muss die Diskriminante der Gleichung den Wert null haben, d. h. $t = \dfrac{4ac - (b-m)^2}{4a}$.

b) Die Substitution $y := x^2$ ergibt $y^2 - 16y + 63 = 0$ mit den Lösungen $y_1 = 9$ und $y_2 = 7$. In beiden Fällen kann man im Reellen die Substitution rückgängig machen und erhält die 4 Lösungen:

$x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = \sqrt{7}$ und $x_4 = -\sqrt{7}$.

Die Substitution $y := x^3$ ergibt die Gleichung $y^2 - 9y + 8 = 0$ mit den Lösungen $y_1 = 8$ und $y_2 = 1$. In beiden Fällen kann man im Reellen die Substitution rückgängig machen und erhält:

$x_1 = \sqrt[3]{8}$ und $x_2 = 1$.

c) Siehe auch die Lösung zu 3.2.3. Durch Raten findet man $x = 1$. Es bleibt das Problem $(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) : (x-1) = x^2 - x - 12 = 0$. Man erhält die Lösungen $x_3 = 4$ und $x_3 = -3$.

$$
\begin{array}{l}
x^3 - x^2 \\
\quad -x^2 - 11x \\
\quad -x^2 + x \\
\qquad -12x + 12 \\
\qquad -12x + 12
\end{array}
$$

d) Man formt um zu $(4x^2 - 5)(1-x)(1 + 1 - x - 56) = 0$. Die erste Klammer liefert die Lösungen $x_1 = \sqrt{\frac{5}{4}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{5}{4}}$. Die zweite Klammer liefert $x_3 = 1$. Durch die letzte Klammer bekommt man $x_4 = -54$.

Zu Aufgabe 1.3.4:

a) Die Wurzel ist für $x^2 \geq 4$ definiert. Z. B. an einer Parabel überlegt man sich, dass dann die Wurzel für alle $\mathbb{R} /]-2; 2[$ definiert ist.

b) Man stellt um zu $x - 2 = \sqrt{2x-1}$ und quadriert. Das ist keine Äquivalenzumformung. Man erhält deshalb Ergebnisse, die keine Lösungen des Ausgangsproblems sind. Deshalb können erst durch Probe die Lösungen gefunden werden:

$x^2 - 4x + 4 = 2x - 1$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ hat die Ergebnisse $x_1 = 5$ und $x_2 = 1$.

$x_1 = 5$ eingesetzt in $x - \sqrt{2x-1}$ ergibt die rechte Seite 2; d. h. $x_1 = 5$ ist Lösung der Wurzelgleichung. $x_2 = 1$ eingesetzt in die linke Seite der Wurzelgleichung ergibt 0, was von der rechten Seite der Gleichung verschieden ist; $x_2 = 1$ ist also keine Lösung. Insgesamt ergibt sich $L = \{5\}$.

c) Die reelle Wurzel ist stets positiv oder null, kann also nicht gleich –2 sein.

Zu Aufgabe 1.3.5:

a) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+10} = \sqrt{11x+9}$ (1)

Bestimmung der Definitionsmenge: Die erste Wurzel ist definiert für $x \geq 1/2$, die zweite für $x \geq -10/3$ und die dritte für $x \geq -9/11$. Alle drei sind also definiert für $x \geq ½$. Die Gleichung wird quadriert (keine Äquivalenzumformung!):

$2x - 1 + 2\sqrt{2x-1}\sqrt{3x+10} + 3x + 10 = 11x + 9$

$2\sqrt{(2x-1)}\sqrt{3x+10} = 6x$

$\sqrt{(2x-1)}\sqrt{3x+10} = 3x$. Erneutes Quadrieren ergibt

$6x^2 + 20x - 3x - 10 = 9x^2$.

$3x^2 - 17x + 10 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 2/3$.

Probe für $x_1 = 5$: linke Seite von (1): $\sqrt{10-1} + \sqrt{15+10} = 8$

rechte Seite von (1): $\sqrt{64} = 8$

Probe für $x_2 = 2/3$: linke Seite von (1): $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{12} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

rechte Seite von (1): $\sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

Die beiden gefundenen Werte sind Lösungen von (1).

b) Die Schnittpunkte mit der x-Achse findet man für $y = 0$, also für $2 = \sqrt{0{,}5x+1}$:
$4 = 0{,}5x + 1$ d. h. $x = 6$. Probe linke Seite: $\sqrt{4}$, rechte Seite 2, d. h.: Bei $x = 6$ schneidet der Graph die x-Achse.
Bestimmung des Wertebereichs der Funktion $y = -2 + \sqrt{0{,}5x+1}$ für $x \geq -2$: Die Funktion ist streng monoton steigend und wächst über alle Grenzen, d. h. der Wertebereich ist [–2; 4[.
Bestimmung der Umkehrfunktion: $x = -2 + \sqrt{0{,}5y+1}$ oder $x^2 + 4x + 4 = 0{,}5y + 1$ oder
$y = 2\left(x^2 + 4x\right) + 3$ für $x \in$ [2; 4[.

c) Ein Produkt aus zwei Faktoren ist positiv, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ sind.
1. Fall: $y = 3u^2 + u - 2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Punkte in der oberen Halbebene „außerhalb der Nullstellen“ (bei –1 und 2/3), also für]–4; –1]∪[2/3; 4[liegen. $y = u + 2$ ist ebenfalls streng monoton steigend und $y \geq 0$ für $x \in$ [–2; 4[. Beide Bedingungen sind gleichzeitig in der Schnittmenge erfüllt, also für
$u \in$ [–2; –1]∪[2/3; 4[=:L_1.
2. Fall: $y = 3u^2 + u - 2$ hat unterhalb der x-Achse Punkte zwischen den Nullstellen, also für
$u \in$ [–1; 2/3]. $y = u + 2$ hat Punkte unterhalb der x-Achse für $u \in$]–4; –2]. Dies liefert eine zweite Lösungsmenge $L_2 := \emptyset$.
Die Ungleichung hat als Lösungsmenge nur L_1.

Zu Aufgabe 1.3.6: Der gestreckte Vektor hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die drei Pfeile sind durch die folgenden Endpunkte festgelegt: (–4|–2), (0|1), (–6|1)

Zu Aufgabe 1.3.7:

a) Die Polarkoordinaten seien $(r;\ \varphi)$; dann gilt $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ bzw. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und
$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$. Für die angegebenen kartesischen Koordinaten ergibt sich dann mit dem Taschenrechner:
$r = \sqrt{13}$ und $\varphi = -56{,}3099..^o$.

b) Für die angegebenen Polarkoordinaten findet man mit dem Taschenrechner: $x = 1{,}35 \cdot \sqrt{3} = 4{,}070..$
und $y = 1{,}35$, wenn man die angegebene Genauigkeit vernachlässigt.

Zu Aufgabe 1.3.9

a) $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \cdot (-\sin\beta) = ...$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(90^o + \alpha + \beta\right) = \sin\left(90^o + \alpha\right)\cos\beta + \cos\left(90^o + \alpha\right)\sin\beta =$
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

c) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha \cdot (-\sin\beta) = ...$

d) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$, wobei entweder stets die oberen oder stets die unteren Vorzeichen gelten.

Zu Aufgabe 1.3.10:

a) Es sei $90^\circ \le \alpha < 180^\circ$; dann gibt es $\underline{\alpha} < 90^\circ$ mit $90^\circ + \underline{\alpha} = \alpha$.

1. Fall $\beta \le 90^o$:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(90^o + \underline{\alpha} + \beta\right) = \cos(\underline{\alpha}+\beta) = \cos\underline{\alpha}\cos\beta - \sin\underline{\alpha}\sin\beta = \quad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

2. Fall $90^\circ < \beta$: Nun gibt es auch ein $\underline{\beta} = \beta - 90^\circ$ und

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(180^o + \underline{\alpha} + \underline{\beta}\right) = -\sin\underline{\alpha}\cos\underline{\beta} - \sin\underline{\beta}\cos\underline{\alpha} = \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha$.

b) Die weiteren Fälle verlaufen genauso und werden hier weggelassen.

Zu Aufgabe 1.3.11:

a) Nach Satz 1.3.8 gilt $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$. Die letzteren beiden Umformungen geschehen mit Hilfe von $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Hieraus folgt:

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)}$, $\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}$, $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

b) Für $\alpha = 15^\circ$ folgt $\sin 15^o = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$ und $\cos 15^o = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}$. Hieraus folgt

$\tan 15^o = +\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$. Das Vorzeichen ergibt sich aus den Kenntnissen der einzelnen Graphen.

c) Man kann die Werte der trigonometrischen Funktionen berechnen für Winkel $\alpha = 2^n \cdot \beta$ für alle ganzen n, wenn man die Werte für β kennt, also für $\beta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Man kann aber auch noch weitere Werte über die Additionstheoreme berechnen, wie z. B. für $90^\circ + 45^\circ$ usw.

d) Die Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks einbeschrieben in einen Einheitskreis gehört zu einem Zentrumswinkel von 72° und beträgt $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Wer sich das herleiten will, möge an den goldenen Schnitt denken. Zeichnet man in das entsprechende gleichschenklige Dreieck die Höhe ein, die senkrecht auf der 5-Eckseite steht, so halbiert diese den Winkel von 72° und man erhält die Behauptung.

e) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ liefert die Behauptung.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)$$

Weitere diesbezügliche Formeln findet man in jeder Formelsammlung.

Zu Aufgabe 2.1.2:

a) Wir haben Zahlen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert.

b) +, –, · und : verknüpfen jeweils zwei komplexe Zahlen zu einer komplexen Zahl.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Die beiden Brüche sind reell und deshalb das Gesamtergebnis eine komplexe Zahl; also sind die Rechenarten auf $\mathbb{C}$ abgeschlossen und deshalb heißt $\mathbb{C}$ zu Recht ein Körper.

c) Wir haben bereits die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division komplexer Zahlen kennen gelernt.

d) $i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i$ usw.

D. h.:

$$i^n = \begin{cases} i & \text{falls } n = 4k+1 \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2 \\ -i & \text{falls } n = 4k+3 \\ 1 & \text{falls } n = 4k \end{cases} \quad \text{für alle ganzen } k.$$

e) Siehe d)

f) Alle Rechenoperationen, die zur reellen Lösungsformel quadratischer Gleichungen führen, gelten auch im Komplexen, weil auch das Radizieren hier möglich ist. Im Komplexen ist die Quadratwurzel allerdings zweideutig, was man elegant mit den Einheitswurzeln beherrscht.

g) $ix^2 + (2+3i)x - 2i = 0$ wird umgeformt zu $x^2 + (3-2i)x - 2 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-(3-2i) \pm \sqrt{(3-2i)^2 + 8}}{2} = \frac{-3+2i \pm \sqrt{9-12i-4+8}}{2} = \frac{-3+2i \pm \sqrt{13-12i}}{2}.$$

Es gilt $13-12i = \sqrt{169+144}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $\tan\varphi = \frac{-12}{13}$ also $\varphi = -42{,}70938996...^0$

Man berechnet zunächst $\sqrt{13-12i} = \sqrt[4]{169+144}\left(\cos\frac{-42{,}7..^0 + 360^0 k}{2} + i\sin\frac{-42{,}7..^0 + 360^0 k}{2}\right) =$

$$= \begin{cases} 4{,}206... \cdot (0{,}931... - i \cdot 0{,}364...) & = 3{,}9175... - i \cdot 1{,}5313... \\ 4{,}206... \cdot (-0{,}931... + i \cdot 0{,}364...) & = -39175... \; + i \cdot 1{,}5313... \end{cases}$$

Insgesamt findet man: $x_{1,2} = \begin{cases} 0{,}458755... + i \cdot 0{,}234343455... \\ -3{,}458755... + i \cdot 1{,}765665654.. \end{cases}$

h) Der Satz von VIETA beruht auf einem Koeffizientenvergleich, der auch im Komplexen durchführbar ist.

i) Eine Polynomfunktion von ungeradem Grad (wie 3) geht entweder von –4 nach +4 oder umgekehrt. Deshalb wird mindestens einmal bei x_1 die x-Achse vom Graphen der Funktion geschnitten. Den Wert von x_1 findet man näherungsweise durch gezieltes Raten. Dividiert man das Polynom durch $x - x_1$, so erhält man ein Polynom vom Grad 2 mit reellen Koeffizienten, dessen 2 Nullstellen man bestimmen kann. Damit erhält man bis zu 3 verschiedene Nullstellen und damit die Zerlegung in Linearfaktoren.

j) Aus $a > 0$ folgt im Reellen $a^2 > 0$. Zur Annahme $i > 0$ findet man dann den Widerspruch $i^2 < 0$.
Aus $a < 0$ folgt im Reellen $a^2 > 0$. Zur Annahme $i < 0$ findet man dann den Widerspruch $i^2 < 0$.
Die Annahme $i = 0$ würde $\mathbb{R} = \mathbb{C}$ bedeuten. Das kann nicht sein, da bekanntlich $x^2 = -4$ keine Lösung im Reellen haben kann.

Zu Aufgabe 2.1.3:

a) $(3+i) - (12 - i^2) = -10 + i \qquad (14+13i)(7-5i) = 163 + 21i$

$$(14+13i):(7+5i) = \frac{(14+13i)(7-5i)}{74} = \frac{163+21i}{74} = \frac{163}{74} + \frac{21}{74}i$$

$$\frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{25} = \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i \qquad \sqrt{-3}\left(11 - \sqrt{-3}\right) = 3 + 11 \cdot \sqrt{3} \cdot i$$

b) $4z - 3 = 5 + 6z$ ergibt $4a - 3 = 5 + 6a$, also $a = -4$, und $4b = 6b$, also $b = 0$.

c) Man kann eben jede Gleichung in einer komplexen Variablen als zwei Gleichungen – getrennt in Realteil und Imaginärteil – auffassen.

d) Nach VIETA gilt für die Lösungen $z_1 + z_2 = \frac{3i}{2}$ und $z_1 z_2 = a$. Die Lösungen sollen rein imaginär sein, also $z_1 = b_1 i$ und $z_2 = b_2 i$. Damit liefert VIETA: $b_1 + b_2 = \frac{3}{2}$ und $b_1 b_2 = -a \in \mathbb{R}$. Damit erhält man für die b_j die reelle quadratische Gleichung $b^2 - \frac{3}{2}b - a = 0$ mit den Lösungen

$b = \dfrac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4a}}{2}$. Diese sind nur dann aus ℝ, wenn die Diskriminante größer oder gleich null ist, d. h.

$\alpha \ge -\dfrac{9}{16}$.

Zu Aufgabe 2.1.4:

a) $\sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

b) Die Seitendiagonalen haben die Längen 5,0 cm, 6,9 cm und 7,4 cm. Die Raumdiagonalen sind 8.0 cm lang.

c) Alle Seitenkanten haben die Länge 6,4 cm.

d) PYTHAGORAS lehrt: Die Punkte eines Kreises erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Zu Aufgabe 2.1.5:

a) $\sqrt{(-2-1)^2 + (-3-2)^2 + (-4-3)^2} = 9{,}1104..$

$\sqrt{5^2 + 0 + 0} = 5$

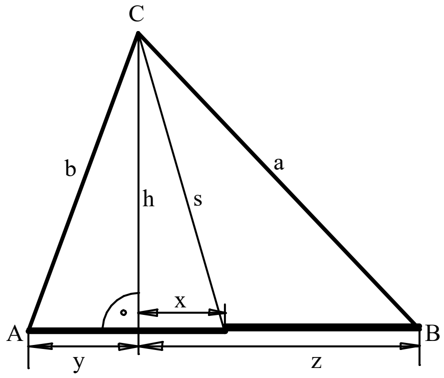
b) $x = \sqrt{5{,}9^2 - 5{,}6^2} = 1{,}9$

c) $y = \dfrac{7{,}4}{2} - x = 1{,}8$

$z = \dfrac{7{,}4}{2} + x = 5{,}6$

$a = \sqrt{5{,}6^2 + z^2} = 7{,}9$

$b = \sqrt{5{,}6^2 + y^2} = 5{,}9$



d) A und B seien die Endpunkte von x und M der Mittelpunkt des Inkreises. Dann gilt:

$\left|\overline{BM}\right| = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + r^2}$ und $\left|\overline{BM}\right| + r = x$, also $\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + r^2} = x - r$. Quadrieren dieser Wurzelgleichung

ergibt: $\dfrac{3}{4}x^2 - 2rx = 0$ mit der einen „Lösung“ $x = 0$, die für das Problem ohne Interesse ist.

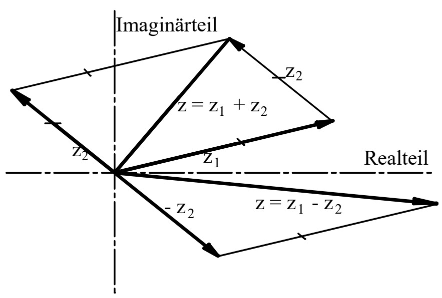
Die andere Lösung lautet $x = \dfrac{8}{3}r$.

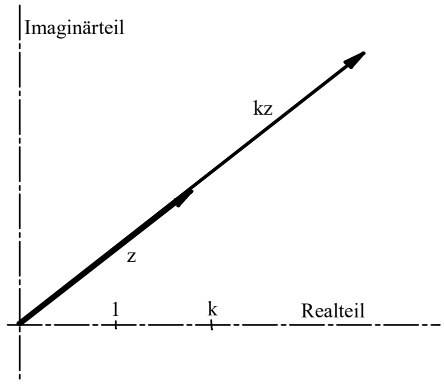
e) $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Zu Aufgabe 2.1.6:

a) r ist genau dann reell, wenn $r = \bar{r}$.

b)





$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm a_2 \\ b_1 \pm b_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ kb_1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd \\ bc+ad \end{pmatrix}$. Das Produkt zeichnerisch darzustellen ist mühsam.

d) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS.

e) Zweimaliger Vorzeichenwechsel ist die identische Abbildung. Deshalb ist das konjugiert Komplexe vom konjugiert Komplexen einer Zahl die Zahl selbst.

$\overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{a+c+(b+d)i} = a+c-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{a+bi} + \overline{c+di}$

$\overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{ac-bd+(bc+ad)i} = ac-bd-(bc+ad)i = (a-bi)\cdot(c-di) = \overline{a+bi}\cdot\overline{c+di}$

$|a+bi|^2 = a^2+b^2 = (a+bi)\cdot(a-bi)$

$z\cdot\overline{z}$ genannt **Norm von z** und $z+\overline{z}$ genannt **Spur von z** sind stets reell.

f) $a+bi = a-bi$ bedeutet $b=-b$. Also ist $b = 0$ und somit z reell und umgekehrt.

$a+bi = -a+bi$ bedeutet $a=-a$. Also ist $a = 0$ und somit z rein imaginär und umgekehrt.

g) $\overline{13} = 13$ $\overline{3+4i} = 3-4i$ $\overline{z\cdot|z|} = \overline{z}|z| = \overline{z}\overline{|z|}$ $\overline{z+\overline{z}} = \overline{z}+z = z+\overline{z}$

$\overline{\left(\frac{(z+\overline{z})(2z-\overline{z})}{(3z-\overline{z})^2}\right)} = \frac{(\overline{z}+z)(2\overline{z}-z)}{(3\overline{z}-z)^2}$

h) $\sqrt{(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})} = \sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})} = |z_1|\cdot|z_2|$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ und $z\overline{z} = a^2+b^2 = 0$ im Reellen genau dann, wenn $a = b = 0$, also $z = 0$ ist.

i) Wenn eine quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten eine komplexe Lösung hat, so zeigt die Lösungsformel, dass die zweite hierzu das Konjugierte ist.
Hat eine quadratische Gleichung mit dem Koeffizienten 1 beim quadratischen Glied konjugiert komplexe Lösungen z_1 und $z_2 = \overline{z_1}$, so zeigt der Satz des VIETA, dass der Koeffizient beim linearen Glied $z_1+\overline{z_1}$ eine Spur und der weitere Koeffizient $z_1\overline{z_1}$ eine Norm ist und damit beide reell sind.

j) Aus einem Koeffizientenvergleich in $ac-bd+(bc+ad)i = 0+0i$ erhält man

I $ac-bd = 0$

II $bc+ad = 0$

$a \neq 0,\ \ b \neq 0$: Aus I folgt $c = \frac{bd}{a}$ und damit mit II $ad + \frac{b^2d}{a} = 0$. Diese Gleichung multipliziert mit a ergibt $(a^2+b^2)d = 0$; also muss $d = 0$ sein, was mit II bedeutet $c = 0$.

$a \neq 0,\ \ b = 0$: Aus I folgt $c = 0$ und mit II $d = 0$.

$a = 0,\ \ b \neq 0$: Aus I folgt $d = 0$ und mit II $c = 0$.

$a = 0,\ \ b = 0$: Dieser Fall ist die Behauptung.

Zu Aufgabe 2.2.1:

a) Nach Definition ist der Realteil $a = |z|\cos\varphi$ und der Imaginärteil $b = |z|\sin\varphi$.

b) Für die reellen Zahlen gilt $\varphi = 0$. Die rein imaginären Zahlen haben $\varphi = \pi/2$.

c) Nach 2.1.6 h) gilt $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$. Es ist noch zu zeigen:

$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$
$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)$ **nach den Additionstheoremen.**

d) Nach 2.1.6 h) gilt $\left|z_1 \frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1| : |z_2|$, weil $\left|\frac{1}{z_2}\right||z_2| = 1$ ist. Es bleibt zu zeigen: Weil $(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = 1$ ist $1 : ((\cos\varphi + i\sin\varphi)) = (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ und somit $(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) : (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)$.

Zu Aufgabe 2.2.2:

a) Aus Aufgabe 2.2.1.c) folgt die angegebene Formel für n = 2. Da auch im Komplexen gilt $z^{n-1} \cdot z = z^n$ folgt die Formel für alle natürlichen n. Für n = 0 ist sie trivial. Mit Aufgabe 2.2.1. d) folgt sie dann für die restlichen ganzen n.

$\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|} \in \mathbb{R}$. Aus der Umkehroperation findet man aus der Formel von MOIVRE;

$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}$. Da aber $\varphi + 2k\pi$ für alle ganzen Zahlen k dieselbe komplexe Zahl ist,

wird das erste Ergebnis verbessert zu $\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$.

b) Die Wurzelergebnisse von b) sind nur n verschiedene Werte für k = 0, 1, 2, … n – 1, weil sich die Argumente der trigonometrischen Funktion mit 2π wiederholen.

c) Die komplexe Rechnung $\sqrt{4} = 2\left(\cos\frac{0+2k\pi}{2} + i\sin\frac{0+2k\pi}{2}\right)$ liefert für k = 0 den Wert 2 + i 0 = 2 und für k = 1 den Wert $2(-1 + i\cdot 0) = -2$.

d) Für n = 2 findet man im Reellen alle komplexen Wurzeln. Für ungerade n liefert die n-te Wurzel im Reellen nur 1 reellen Wert. Im Komplexen hat die n-te Wurzel aus einer von null verschiedenen Zahl stets n verschiedene Werte.

e) Ist n gerade, so gibt es genau zwei reelle Wurzelwerte. Ist n ungerade, so gibt es genau einen reellen Wurzelwert. Im letzteren Fall bekommt man auch für negative Radikanden genau einen negativen Wurzelwert.

f) Zwei Dinge gehören im Komplexen zum Wurzelziehen: Man muss den reellen Wert $\sqrt[n]{|z|}$ und die n-ten Wurzeln aus $\cos\varphi + i\sin\varphi$ berechnen. Das aber ist stets eine Zahl auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius 1, genannt Einheitskreis. Da 8 und 27 reell sind, ist bei beiden $\varphi = 0$. Die dritten Wurzeln aus $\cos\varphi + i\sin\varphi$ berechnen sich zu

$e_1 = 1$ für k = 0 oder $e_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ für k = 1 oder $e_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ für k = 2.

Die Wurzel ist stets die reelle Quadratwurzel. Insgesamt erhält man:

$\sqrt[3]{8} = 2$ oder $\sqrt[3]{8} = -1 + i\sqrt{3}$ oder $\sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{27} = 3$ oder $\sqrt[3]{27} = -\frac{3}{2} + i\frac{3}{2}\sqrt{3}$ oder $\sqrt[3]{27} = -\frac{3}{2} - i\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Die zeichnerische Lösung ist hier nicht ausgeführt (siehe diese Beispiel 3.1.2).

Zu Aufgabe 3.1.5:

a) Die Erzeugende e hat die Eigenschaft, dass e^k für k = 0, 1, 2,…, n verschiedene Werte liefert. Es ist bekannt, dass e_1 eine Erzeugende ist und der Winkel jeder komplexen Zahl nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Wählt man irgendeine Einheitswurzel e_j aus, so muss $e_j^k = e^{jk}$ alle Einheitswurzeln ergeben, wobei jk bis auf Vielfache von n (man sagt modulo n) bestimmt ist. Sieht man sich die Multiplikationstafeln modulo n an, so stellt man fest, dass im Fall einer Primzahl n in jeder Zeile oder Spalte alle Werte 0, 1, 2, …., n – 1 vorkommen; dies ist anders, wenn n keine Primzahl ist: Für j = 1 und j = n – 1 kommen zwar alle Werte modulo n vor, nicht aber, wenn n und j gemeinsame Teiler (ungleich 1) haben; z. B. gilt modulo 6 für j = 3:

k =	0	1	2	3	4	5
jk =	0	3	0	3	0	3

Das sind nicht alle Werte; also kann hier e_3 keine Erzeugende sein.

b) Die Werte $z_j e_k = r\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\, j + 2\pi\, k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\, j + 2\pi\, k}{n}\right)$ sind alle verschieden; denn wenn $j + k_1 = j + k_2$ modulo n ist, folgt $k_1 = k_2$ modulo n. D. h.: Es gibt n verschiedene $z_j e_k$.

c) Zu $\overrightarrow{OP_i}$ gehört $z_1 = \sqrt{13}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ mit $\varphi_1 = \arctan\frac{3}{2}$ bzw. $z_2 = \sqrt{13}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ mit $\varphi_2 = 180^o + \arctan\frac{1}{2}$, weil die Zahl im 3. Quadranten ist.

1. Lösung: Der gesuchte Winkel ist also $|\varphi_2 - \varphi_1| = \left|180^o + \arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{3}{2}\right| \approx 150{,}255..^o$.

2. Lösung: Es geht um den Winkel φ von $\frac{-2-i}{2+3i} = \frac{(2-3i)(-2-i)}{13} = \frac{-7}{13} + i\frac{-4}{13}$. Also ist $\tan\varphi = \frac{4}{7}$.

Man bekommt denselben Wert.

d) $\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - ...\right) +$

$+i\left(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + ...\right)$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt den Realteil als die gesuchte Formel für den Cosinus, den Imaginärteil für den Sinus.

Zu Aufgabe 3.1.7:

a) Die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen bilden jeweils eine additive ABELsche Gruppe.
Die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen jeweils ohne die Null bilden auch eine multiplikative ABELsche Gruppe.

b) Multipliziert man zwei Einheitswurzeln, so kann man beide mit einer Erzeugenden *e* darstellen und die Multiplikation lautet $e^k \cdot e^l = e^{k+l}$, wobei $k + l$ modulo n „verkürzt“ wird. Man erhält abermals eine Einheitswurzel. Das neutrale Element ist e_0. Das „Inverse“ zu e^k ist e^{-k} . Alle Rechengesetze können nachgeprüft werden. Insbesondere ist $e^k \cdot e^l = e^l \cdot e^k$ weil $k + l = l + k$ auch modulo n gilt.

Zu Aufgabe 3.1.9:

a) Die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen bilden hinsichtlich ihrer Addition und Multiplikation jeweils kommutative Körper.

b) Offensichtlich ist $(M, +)$ eine ABELsche Gruppe mit $0 = 0 + 0\cdot\sqrt{3}$. Das additive Inverse von $a + b\sqrt{3}$ ist $-a - b\sqrt{3}$. Das multiplikative Inverse ist $1 = 1 + 0\cdot i$. Offensichtlich gilt das Distributivgesetz. Man muss nur noch zeigen, dass eine Division in M nicht aus dieser Menge herausführt:
$\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}} = \frac{(a+b\sqrt{3})(c-d\sqrt{3})}{c^2-3d^2} = \frac{ac-3bd}{c^2-3d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3} \in M$, weil a, b, c, d rationale Zahlen, also Elemente eines Körpers sind.

Zu Aufgabe 3.2.3:

a) $u^3 + pu + q = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) = 0$ und damit
$-(u_1+u_2+u_3) = 0$, $\quad p = u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3$, $\quad q = -u_1u_2u_3$.

b) $(u^3 + pu + q):(u-u_1) = u^2 + uu_1 + p + u_1^2 = 0$

$u^3 - u^2u_1$

$u^2u_1 + pu$

$u^2u_1 - u_1^2u$

$(p+u_1^2)u + q$

$(p+u_1^2)u - (p+u_1^2)u_1$

0,

weil u_1 Lösung von (1) ist.

Die weiteren Lösungen sind $u_{2,3} = \dfrac{-u_1 \pm \sqrt{u_1^2 - 4\left(p + u_1^2\right)}}{2}$.

c) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Nach Reduktion der Koeffizientenanzahl durch die Substitution $u := x - \dfrac{1}{3}$ findet man $p = -\dfrac{4}{3}$

und $q = \dfrac{16}{27}$. Hieraus wird die Diskriminante berechnet:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{16^2}{4 \cdot 27^2} - \frac{4^3}{3^3 \cdot 3^3} = 0$$

Damit erhält man die folgenden Lösungen für u:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{16}{54}} + \sqrt[3]{-\frac{16}{54}} = -\frac{4}{3} \quad \text{also } x_1 = u_1 + \frac{1}{3} = -1\,.$$

$$u_2 = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad \text{also } x_1 = u_1 + \frac{1}{3} = 1\,.$$

$$u_3 = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad \text{also } x_1 = u_1 + \frac{1}{3} = 1\,.$$

Das Lösungsverfahren ist kompliziert, der Rechenaufwand immens und deshalb hat dieses Verfahren im Computerzeitalter nur noch theoretische Bedeutung. In der Praxis verfährt man anders:

d) Das gezielte Raten führt hier – wegen der einfachen Lösungen – rasch zu einem Ergebnis:

X	$x^3 - x^2 - x + 1$	Lösung L
0	1 zu groß	
–2	-13 zu klein	$-2 < L < 0$
–1	0	$L = 0$

Zu Aufgabe 3.2.5:

a) In Aufgabe 3.2.3.c) ist die Diskriminante $D = 0$. Somit gibt es nach Satz 3.2.4 drei reelle Lösungen von denen mindestens zwei gleich sind.

b) $x^4 + bx^2 + d = 0$ Man substituiert $x^2 = u$ und erhält

$u^2 + bu + d = 0$ mit den Lösungen $u = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4d}}{2}$. Damit erhält man für die Ausgangsgleichung die Lösungen $x = \pm\sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4d}}{2}}$. Da die Vorzeichen voneinander unabhängig sind, hat man also 4 Lösungen gefunden.

Die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ teilt man durch x^2 und erhält: $x^2 + ax + b + \dfrac{a}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$

Hieraus folgt mit der Substitution $u = x + \dfrac{1}{x}$:

$u^2 + au + b = 0$ mit den Lösungen $u = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = x + \dfrac{1}{x}$ oder $x^2 - ux + 1 = 0$. D. h.

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2} = \frac{\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2 - 4}}{2}$$, was man algebraisch vereinfachen kann.

Da die Vorzeichen ± nur im ersten und dritten Fall dieselben sind, der zweite Fall aber davon unabhängig, sind dies i. Allg. vier Lösungen.

c) Da der Achsenschnitt des Trichters ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge d ist, beträgt die Höhe des Dreiecks und damit die Höhe des Trichters $h = \frac{d\sqrt{3}}{2}$ und der Trichterradius $r = \frac{d}{2}$.

Für das Kegelvolumen erhält man also in cm³ $765 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{2}$. Hieraus erhält man $d^3 = \frac{18360}{\pi\sqrt{3}}$. Es gibt zwei konjugiert komplexe Lösungen, die für das Anwendungsbeispiel ohne Interesse sind; deshalb ist das Taschenrechnerergebnis die einzige Lösung für das Problem: $d = 14{,}9987.. \approx 15\,[\text{cm}]$.

Zu Aufgabe 3.2.7:

$x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 30x + 25 = 0$. Die Substitution $x = y - \frac{3}{2}$ führt zu der Gleichung:

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)^4 + 6\left(y - \frac{3}{2}\right)^3 + 18\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 30\left(y - \frac{3}{2}\right) + 25 = 0$$

$$y^4 - 4 \cdot \frac{3}{2} y^3 + 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 y^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 y + \left(\frac{3}{2}\right) + 6y^3 - 6 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} y^2 + 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 y - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 18y^2 - 18 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} y +$$

$$+18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 30y - \frac{90}{2} + 25 = 0$$

$$y^4 + y^3(-6+6) + y^2\left(\frac{27}{2} - \frac{54}{2} + \frac{36}{2}\right) + y\left(-\frac{27}{2} + \frac{81}{2} - \frac{108}{2} + 30\right) + \left(\frac{81}{16} - \frac{81}{4} + \frac{81}{2} - \frac{90}{2} + 25\right) = 0$$

$$y^4 + \frac{9}{2} y^2 + 3y + \frac{85}{16} = 0$$

Wir haben also die folgenden Parameter gefunden $p = \frac{9}{2}$, $q = 3$, $r = \frac{85}{16}$. Die quadratische Ergänzung liefert:

$$y^4 + 9y^2 + \frac{81}{4} = \frac{9}{2} y^2 - 3y - \frac{85}{16} + \frac{81}{4}$$

$$\left(y^2 + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} y^2 - 3y + \frac{239}{16}$$

Mit der Hilfsvariablen z des Verfahrens folgt:

$$\left(y^2 + \frac{9}{2} + z\right)^2 = \frac{9}{2} y^2 - 3y + \frac{239}{16} + 2z\left(y^2 + \frac{9}{2}\right) + z^2$$

$$\left(y^2 + \frac{9}{2} + z\right)^2 = \left(\frac{9}{2} + 2z\right) y^2 - 3y + \left(\frac{239}{16} + 9z + z^2\right) \qquad (1)$$

Rechts steht sicher kein vollständiges Quadrat. Man wählt jetzt z so, dass dies erfüllt wird. Hierzu muss die Diskriminante D der rechten Seite null werden:

$$D = (-3)^2 - 4\left(\frac{9}{2} + 2z\right)\left(\frac{239}{16} + 9z + z^2\right) = -\frac{2079}{8} - \frac{563}{2} z - 90z^2 - 8z^3 = 0$$

Auf die Gleichung $z^3 + \frac{45}{4} z^2 + \frac{563}{16} z + \frac{2079}{64} = 0$ wendet man die Substitution $z := u - \frac{15}{4}$ analog zu 3.2.2 an und erhält:

$$\left(u - \frac{15}{4}\right)^3 + \frac{45}{4}\left(u - \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{563}{16}\left(u - \frac{15}{4}\right) + \frac{2079}{64} = 0$$

$$u^3 - \frac{45}{4} u^2 + \frac{675}{16} u - \frac{3375}{64} + \frac{45}{4} u^2 - \frac{675}{8} u + \frac{19125}{64} + \frac{563}{16} u - \frac{8445}{64} + \frac{2079}{64} = 0$$

$$u^3 + u\left(-\frac{675}{16} + \frac{563}{16}\right) + \frac{-3375 + 10125 - 8445 + 2079}{64} = 0$$

$$u^3 - 7u + 6 = 0$$

Grundsätzlich kann man nun mit dem Lösungsverfahren der kubischen Gleichungen fortsetzen; man bekommt allerdings z. B. mit der rationalen Darstellung von $\cos\frac{\varphi}{3}$ Schwierigkeiten. Deshalb sollte man zumindest bei einer solchen einfachen Gleichung versuchen, Lösungen zu raten. Man findet die drei reellen Lösungen

$u_1 = 1$ und damit $z_1 = -\frac{11}{4}$,

$u_2 = 2$ und damit $z_2 = -\frac{7}{4}$ und

$u_3 = -3$ und damit $z_3 = -\frac{27}{4}$.

Für das Weitere benutzen wir z_1 und erhalten aus (1) die biquadratische Gleichung

$$\left(y^2 + \frac{11}{4}\right)^2 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$$

Hieraus erhält man durch Wurzelziehen

I $\quad y^2 + \frac{11}{4} = y - \frac{3}{2}$ $\quad$ oder $\quad y^2 - y + \frac{17}{4} = 0$ $\quad$ bzw.

II $\quad y^2 + \frac{11}{4} = -y + \frac{3}{2}$ $\quad$ oder $\quad y^2 + y + \frac{5}{4} = 0$.

I hat die Lösungen $y_1 = \frac{1}{2} + 2i$ und $y_2 = \frac{1}{2} - 2i$.

II hat die Lösungen $y_3 = -\frac{1}{2} + i$ und $y_4 = -\frac{1}{2} - i$.

Das sind vier verschiedene Lösungen. Verwendet man z_2 bzw. z_3, so erhält man die Gleichungen:

III $\quad y^2 - iy + \frac{1}{4}(7 - 6i) = 0$ bzw.

IV $\quad y^2 + iy + \frac{1}{4}(7 + 6i) = 0$

Mit den gleichen Lösungen $y_1, \ldots y_4$. Man muss noch die erste Substitution rückgängig machen und erhält:

$x_1 = -1 + 2i$, $\quad x_2 = -1 - 2i$, $\quad x_3 = -2 + i$, $\quad x_4 = -2 - i$

Zu Aufgabe 3.3.4:

a) $|z - m| = r$ und $(z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2$

b) Für $z = a + bi$ und $u = c + di$ erhält man für die reellen Zahlen r, a, b, c, d:

$$(c - di)(a + bi) + (c + di)(a - bi) + r = 0$$

$$(ac + bd + ac + bd + r) + i(bc - ad + ad - bc) = 0$$

Das ist *eine* reelle Gleichung $2(ac + bd) + r = 0$ in den Variablen a und b: $2ac + 2bd + r = 0$ ist die Gleichung einer Geraden

Zu Aufgabe 3.3.5:

a) Das ist das Innere eines Kreises um m mit Radius r.
b) Das ist das Innere einschließlich der Ränder eines Rings zweier konzentrischer Kreise um m mit den Radien r_1 und r_2.
c) Fallen die Gleichheitszeichen weg, so gehören die Ränder nicht zur Menge.
d) Für $z = a + bi$ ist die zu z gehörige Spur $z + \bar{z}$ reell, deshalb stellt die gegebene Menge in der GAUSS-Ebene einen senkrechten Streifen einschließlich Rand zwischen –1 und 2 dar.

e) Für $z = a + bi$ ist $z - \bar{z}$ rein imaginär; es handelt sich also um einen waagrechten Streifen einschließlich Rand zwischen –1 und 2.

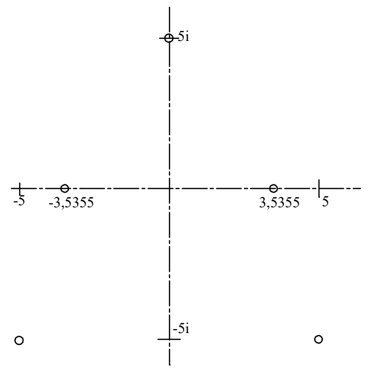
f) Es handelt sich also um alle $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $r < 3$ und entweder $45^o \le \varphi \le 75^o$ oder $15^o \le \varphi \le 45^o$. Unklar ist, ob die Gleichheitszeichen bei den letzten Ungleichungen dazu gehören oder nicht.

g) Man braucht 2 Ungleichungen: {z | $0 \le z + \bar{z} \le 8$ und $0 \le -(z - \bar{z})\,i \le 4$ }.

Zu Aufgabe 3.4.1.1:

a)

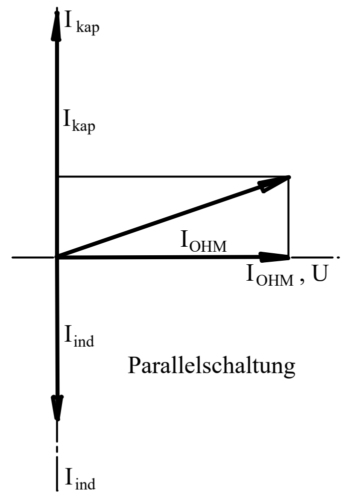
T	$\frac{0}{8}T$	$\frac{1}{8}T$	$\frac{2}{8}T$	$\frac{3}{8}T$	$\frac{4}{8}T$	$\frac{5}{8}T$	$\frac{6}{8}T$	$\frac{7}{8}T$	$\frac{8}{8}T$
$\frac{2\pi}{T}\cdot t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$x = r \cdot \sin\omega t$	0	$5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$		$5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$		$-5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$		$-5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$	
$y = r\cdot\cos 2\omega t$	5	0	-5	0	5	0	-5	0	5



b)
Die Geschwindigkeit berechnet sich als $v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = r(\cos\omega t - 2i\sin 2\omega t)\omega$. Der Geschwindigkeitsbetrag ist $r\cdot\omega\cdot\sqrt{\cos^2\omega t + 4\sin^2 2\omega t}$.
Für $\cos\omega t = 0$, also für $\omega t = \frac{\pi}{2}$ oder $\omega t = \frac{3\pi}{2}$, also bei $t = \frac{2}{8}T$ oder $t = \frac{6}{8}T$ wird jeweils $\sin 2\omega t = 0$ und deshalb die Geschwindigkeit null. Es handelt sich hierbei um die Umkehrpunkte der „Schwingung".

c) Annahme:
$b(t) := \frac{dv(t)}{dt} = r\,\omega^2(-\sin\omega t - 4i\cos 2\omega t) = 0$,
dann muss $\sin\omega t = 0$ sein, also $\omega t = 0$ oder $\omega t = \pi$ oder $\omega t = 2\pi$. In allen drei Fällen ist $\cos 2\omega t \ne 0$ und damit $b(t) \ne 0$.

d) $x + iy = r\sin\omega t + ir(1 - 2\sin^2\omega t)$. Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt: $\sin\omega t = \frac{x}{r}$ und $y = r\cdot\left(1 - 2\frac{x^2}{r^2}\right)$ für x ∈ [-5; 5], damit ist also obige Kurve ein Parabelstück.



Zu Aufgabe 3.4.3.1:
Bei Parallelschaltung liegt an jedem Zweig dieselbe Spannung, deren Phase beim Ohmschen Widerstand die gleiche wie bei der Stromstärke ist. Man macht deshalb ein Zeigerdiagramm für die Stromstärken (siehe die Zeichnung).

5. Literatur

Averbukh, Boris u. Günther, Heino	[1]:	Über die Potenzen und zugehörige elementare Funktionen, Mathematikinformation Nr. 49 (2008) Seiten 5 - 23
Dittmann, Helmut	[1]:	komplexe zahlen, bsv München 1981
Meyer, Karlhorst u. a.	[1]	Brennpunkt Algebra, Bände 7 und 8, Schroedel Schulbuchverlag 2. Auflage, Hannover 1998
Meyer, Karlhorst	[2]	Geometrie und Studierfähigkeit, Mathematikinformation Nr. 49 (2008) Seiten 38 - 45
	[3]:	Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26 (1996) Seiten 3 bis 24; siehe auch www.bfmathematik.info
	[4]:	Aufgaben zur Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 30 (1998) Seiten 33 – 39; siehe auch www.bfmathematik.info
Polaczek, Christa	[1]:	Gute Vorkenntnisse verkürzen die Studienzeit, MI Heft 49 (2008) Seiten 46 - 50
TU Freiberg	[1]:	www. Math.tu-freiberg.de
Verlag Harri Deutsch	[1]:	Mathematik Ratgeber, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1988, speziell Seite 93ff.

Autor:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg

Diese Arbeit wurde am 26. Mai 2008 eingereicht.