Karlhorst Meyer

Trigonometrie und Studierfähigkeit

Völlig unverständlich bleibt für Mathematiker, die nicht nur Schulmathematik studiert haben und die außer Schule auch andere Berufsbereiche kennen gelernt haben, das „Wegrationalisieren" der meisten Trigonometrie am Gymnasium. Hier zeigt sich erschreckend, dass Gymnasiallehrer heute keine Ahnung mehr von den Erfordernissen eines anschließenden Mathematik anwendenden Studiums haben, was auch kürzlich durch eine Untersuchung von Begabtenförderung Mathematik e. V. bundesweit nachgewiesen worden ist. Es ergeben sich Defizite, die in den Hochschulvorlesungen nicht ausgeglichen werden können, die aber dazuführen, dass die Studenten in den Anfängervorlesungen der Naturwissenschaften und des Ingenieurwesens an ihnen unnötig hängen bleiben und so Lehrplangestalter der Gymnasien mithelfen, Studienzeiten unnötig zu verlängern und damit Steuern zu veruntreuen.

1. Additionstheoreme

Die Lehrplanmacher aller Bundesländer gehen heute davon aus, dass der Anwender bei Additionstheoremen in einer Formelsammlung nachsieht. Wie soll er aber in den oft 1000 Seiten dicken Formelsammlungen Einschlägiges finden, wenn er das Wort „Additionstheorem" nicht kennt und nicht weiß, was man mit solchen Sätzen machen kann. In all den Jahren vor dem Streichen der Additionstheoreme haben sich die meisten „großen" Lehrplangestalter geweigert, Formelsammlungen benutzen zu lassen, weil sie diese Formeln für so wichtig gehalten haben, dass man sie auswendig lernen sollte. Und jetzt auf einmal glaubt man, sie am Gymnasium überhaupt nicht mehr erwähnen zu müssen.

Aus diesem Grund will ich an Beispielen zeigen, wie wichtig Trigonometrie für den Anwender ist und doch der dazugehörige mathematische Hintergrund nicht an die Universität sondern ans Gymnasium gehört. Vorher aber will ich einen kurzen Weg zu den Additionstheoremen beschreiben, damit die Kolleginnen und Kollegen sehen können, dass dieses Kapitel durchaus seinen Platz am Gymnasium haben muss:

Satz 1.1 Additionstheoreme: Die folgenden Formeln lernt man nicht auswendig, man entnimmt sie einer Formelsammlung:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (1)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (2)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (3)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$, wobei entweder stets die oberen oder stets die unteren Vorzeichen gelten. (5)

Aufgabe 1.1: *a)* Beweise (2) mittels (1); gehe hierbei davon aus, dass $\alpha + \beta = \alpha + (-\beta)$ ist.
b) Beweise (3) mittels (1); beachte hierzu $\cos\alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$.
c) Beweise (4) mittels (3); benutze hierzu den „Trick" von *a)*.
d) Beweise (5) mittels (1), (2), (3) und (4).

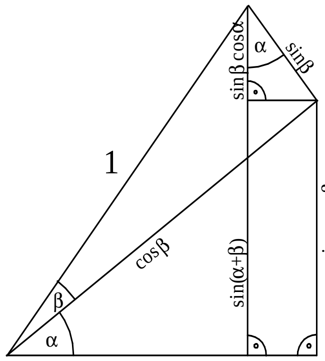
Die jeweiligen Hilfestellungen kann man wohl bei den begabteren Schülerinnen und Schülern weglassen. Es bleibt also ein Beweis von (1). Löse vorher die folgende Aufgabe:

Aufgabe 1.2: Ist in (1) α und/oder β größer als 90°, so gibt es stets ein $\underline{\alpha}$ und/oder $\underline{\beta}$ so, dass bis auf die Periode von Sinus und Cosinus $\alpha = 180^\circ \pm \underline{\alpha}$ oder $\alpha = 360^\circ - \underline{\alpha}$. Analoges gilt für β bzw. $\underline{\beta}$. Beweise die Gültigkeit von (1) in allen Fällen, wenn die Gültigkeit von (1) für spitzwinklige α und β bekannt ist.
Hinweis: Es sind mindestens 6 Berechnungen durchzuführen. Man sollte die einzelnen Fälle in der Klasse verteilen.

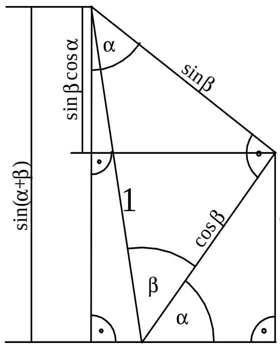
Beweis von (1) im Satz 1.1 für $\alpha < 90^\circ$ und $\beta < 90^\circ$: Man wird die Winkel α und β so aneinandersetzen, dass man den Winkel $\alpha + \beta$ erhält. Die schräg verlaufenden Schenkel der Winkel bilden mit den Koordinatenparallelen viele rechtwinklige Dreiecke. Die entstehenden Gesamtfiguren sind nur bis auf Ähnlichkeit bestimmt. Um bequem rechnen zu können, gibt man jeweils der längsten Hypotenuse die Länge 1. Auf diese Weise ist gewährleistet, dass alle anderen diagonal verlaufenden Linien Längen haben, die durch Sinus oder Cosinus berechnet werden können.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$\alpha + \beta \leq 90^o$



$\alpha + \beta > 90^o$



Der Beweis ist in beiden Fällen derselbe: Dem freie Schenkel von $\alpha + \beta$ gibt man die Länge 1. Man fällt von seinem Ende ein Lot auf den schrägen Schenkel von α. Der Satz: Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich (oder ergänzen sich zu 180^o, liefert einen zweiten Winkel α. Die Sinuse von α, β und $\alpha + \beta$ liegen dann auf „Senkrechten". Das Additionstheorem (1) ergibt sich aus einer Streckenaddition; beachte die senkrechte Vermaßung.

Es folgen die „üblichen" Aufgaben:

Aufgabe 1.3:
a) Berechne exakt die Werte der trigonometrischen Funktionen für $\alpha = 15^o$.
b) Erstelle eine Liste möglichst viele Argumente, für die man die Werte der trigonometrischen Funktionen exakt berechnen kann.
c) Vereinfache die Additionstheoreme im Fall $\alpha = \beta$. Was folgt daraus für die Berechnung der halben Argumente?
d) Weshalb ist $\sin 36^o = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$?
e) Begründe mit Algebra aus Satz 1.1:

$$\sin \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Finde weitere derartige Formeln für Sinus und Cosinus.

Für weitere Aufgabenbeispiele wird auf BARTH U. A. [1] verwiesen. Im Folgenden findet man einige Beispiele, die mit einfachsten Mitteln belegen, dass Mathematik-Anwender nicht ohne Trigonometrie auskommen und Trigonometrie meist den Einsatz von Additionstheoremen und goniometrischen Gleichungen verlangt:

Aufgabe 1.4: Stromkreise mit kapazitiven oder induktiven Widerständen zeigen Phasenverschiebungen zwischen der angelegten Spannung und dem fließenden Strom. Berechne diese Phasenverschiebung, wenn ein kapazitiver Widerstand mit einem induktiven Widerstand parallel bzw. hintereinander geschaltet sind.

Zur Lösung werden in der Anfängervorlesung komplexe Zahlen benutzt, an deren Schaubildern „verständlich" wird, dass man diese Phasenverschiebung mit Hilfe des Satzes von MOIVRE **dank der Additionstheoreme** ausrechnen kann. Der Dozent geht dabei davon aus, dass letztere aus dem Gymnasium bekannt und geübt sind. Wenn er in der Vorlesung *ein* solches Beispiel vorrechnet und bestenfalls in Parallelübungen ein zweites bringt, beherrschen höchstens die Hochbegabten die von ihm verwendete Methode, wenn nicht Hintergrundwissen aus dem Gymnasium vorhanden ist.

Satz 1.2 (Formel von MOIVRE): Sind $z_k = |z_k|(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ für k = 1 oder 2 zwei komplexe Zahlen, so ist deren Produkt $z_1z_2 = z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine komplexe Zahl mit der reellen Zahl $|z| = |z_1||z_2|$ und $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Zum Beweis: Man multipliziert die beiden gegeben komplexen Zahlen aus, benutzt die reelle Regel für das Multiplizieren von Beträgen und wendet das Additionstheorem für Cosinus und das für Sinus an.

> *Aufgabe 2.2:* Berechne, dass der Kurzschluss der drei Drehstromphasen den Nullleiter ergibt (so genannte Sternschaltung).

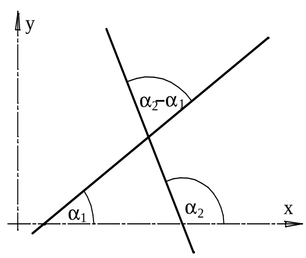
Lösung:
$U\cdot(\sin \alpha + \sin(\alpha + 120^o) + \sin(\alpha + 240^o)) =$
$U\cdot(\sin \alpha + \sin \alpha \cos 120^o + \sin 120^o \cos \alpha + \sin \alpha \cos 240^o + \sin 240^o \cos \alpha) =$

$$U\cdot\left(\sin\alpha\cdot\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\cos\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right)=0$$

Zur Lösung benötigt man **Additionstheoreme**. Ganz allgemein ist die Überlagerung von Schwingungen ohne Additionstheoreme nicht zu bearbeiten. Nun kann man zwar in einem gewissen Bereich hierauf verzichten, wenn man sich mit einem Computerausdruck der Überlagerung begnügt. Mehr Information erhält man allerdings, wenn man die Überlagerung wiederum als *eine* Schwingung formelmäßig darstellen kann. Gute Schulbücher haben das immer gelehrt, siehe z. B. BAIERLEIN, BARTH U. A., Anschauliche Analysis 2 Leistungskurs, Ehrenwirthverlag München 1981.

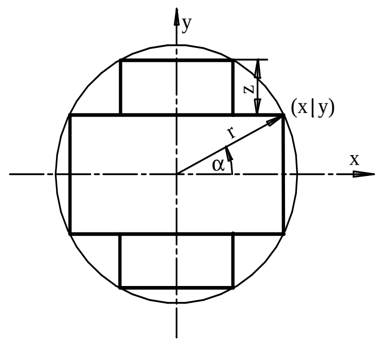
> *Aufgabe 2.4:* Bestimmen Sie den Winkel, unter dem sich zwei vorgegebene Geraden in einem Koordinatensystem schneiden.

Die Lösung benötigt das **Additionstheorem** des Tangens: Es seien die Geradengleichungen $y = m_ix + t$ gegeben mit $m_i = \tan \alpha_i$ für i = 1 oder 2. Dann gilt im nebenstehend gezeichneten Dreieck für den Winkel δ zwischen den Geraden $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$. Da es zwei sich zu 180° ergänzende Winkel δ gibt, gilt **nach dem Additionstheorem** $\tan\delta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$.



Aus PHILIPP HÄFNER, 2. Auflage Verlag Ferdinand Enke Stuttgart 1921, Seite 376 stammt die folgende Aufgabe:

> *Aufgaben 2.5:* Von allen Flächen mit gleichem Inhalt hat die Kreisfläche den kleinsten Umfang. Da man bei Wechselstromelektromagneten keinen massiven Eisenkern verwenden darf (wegen der entstehenden Wirbelströme), sondern vielmehr gezwungen ist, den Kern aus lamellierten dünnen Eisenblechen zusammenzusetzen – die Blechbreiten aber aus Herstellungsgründen nicht zu oft abstufen will –, sucht man durch einen aus verschiedenen Paketen zusammengesetzten kreuzförmigen Querschnitt den kreisförmigen Hohlraum der Spulen möglichst gut auszunutzen.
> Welche Abmessungen muss nun das Kreuz der nebenstehenden drehsymmetrischen Abbildung haben, damit es einen Kreis vom Halbmesser r möglichst gut ausfüllt?



Lösung:
$x = r \cos \alpha$

$y = r \sin \alpha$
$z = r(\cos \alpha - \sin \alpha) = x - y$ und damit $y = x - z$;
Fläche des „Kreuzes“ $F =$ $4xy + 4yz =$
$4x(x - z) + 4z(x - z) =$
$4x^2 - 4z^2 =$
$4r^2\cos^2\alpha - 4r^2(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 =$
$8r^2\cos \alpha \sin \alpha - 4r^2 \sin^2 \alpha =$
$4r^2 (\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha)$

$\frac{dF}{d\alpha} = 4r^2(2\cos 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$ ergibt $2 \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$. (1)

Selbst wenn der Bearbeiter recht geschickt ist, wird er nur nach sehr vielem Probieren beim letzten Schritt weiterkommen. Eine Formelsammlung – vor allem wie sie von Ingenieuren benutzt wird – ist zu umfangreich, als dass man ohne Kenntnis des Wortes „**Additionstheoreme**“ das letzte Gleichheitszeichen ausführen kann.
(1) führt dann auf $\tan 2\alpha = 2$ und somit $\alpha = 31^o\ 43'$.

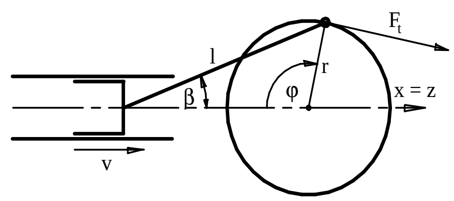
Raumfahrt und viele andere Bereiche, die z. B. Berechnungen auf der Einheitskugel ausführen, benötigen Formeln der Sphärischen Trigonometrie, um Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks herzustellen. Will man mit diesen Formeln Berechnungen ausführen, kommt man oft ohne **Additionstheoreme** nicht zum Ziel. Eine solche Formel ist z. B. im sphärischen Dreieck mit den Seiten a, b, c und den jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ:

> **Sphärischer Cosinussatz:** $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$, wenn Winkel α der Seite a gegenüberliegt.

Der sphärische Sinussatz ist dgg. eine Proportion wie in der ebenen Geometrie.

Früher hat man am Gymnasium komplexe Aufgaben auch aus der ebenen Geodäsie gelöst, die heute dank neuer Entfernungsmessungen kaum mehr eine Rolle spielen. Hier hat die technische Weiterentwicklung die Schulmathematik „überrollt“.

Aufgabe 2.6: In der nebenstehenden Skizze ist eine Kurbelwelle dargestellt. Die Tangentialkraft F_t des Schwungrades berechnet sich gemäß $F_t = F\cdot\frac{\sin(\beta+\varphi)}{\cos\beta}$. Hierbei ist β eine Funktion von φ. Stelle die Tangentialkraft möglichst einfach als Funktion nur von φ dar.



Die Formel ist entnommen EDUARD WALTHER, Taschenbuch technischer Formeln, Verlag Harry Deutsch, Thun und Franfurt/Main 1990, Seite 166.

Lösung:

Nach dem Sinussatz ist $\sin \beta = \frac{r}{l}\sin\varphi$ und damit $\cos\beta = \pm\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}$. Man wendet zwei **Additionstheoreme** an und erhält:

$$F_t = F\frac{\frac{r}{l}\sin\varphi\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}{\pm\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}} = F\cdot\left(\pm\frac{r\sin 2\varphi}{2l\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}} + \sin\varphi\right)$$

2. Goniometrische Gleichungen

Ihr Fehlen ist heute am Gymnasium besonders zu bedauern, da erst sie ein hinreichendes Verständnis für das Lösen von Gleichungen verursachen. Die Gleichungslehre ist überhaupt auf dem Rückzug aus den Gymnasien, da man dort – unberechtigterweise – glaubt, ein händisches Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen spiele in der Computerzukunft keine Rolle. Ganz im Gegenteil verlangt der Computer von seinem Benutzer grundlegende Kenntnisse, ohne die man den Computer nicht kontrollieren kann, wenn man nicht hilflos CAS u. a. ausgeliefert sein will. Man möge nur daran denken, dass selbst bei Nutzung der größten Rechenanlagen der Welt der Nutzer von ihnen nicht beliebig große Gleichungssysteme lösen lassen kann. Er wird sich immer wieder entscheiden müssen, welche Unbekannten nicht so wichtig sind und die vor Beginn einer Berechnung herausgenommen werden müssen, damit man zu endlichen Rechnerzeiten gelangt.

Ursprünglich hat man eigentlich alle Verfahren zum händischen Gleichungslösen auf der Schule kennen gelernt. Meist waren es algebraische Gleichungen, auch Systeme, die endlich viele Lösungen – abgesehen von Randfällen – zur Folge hatten. Anders ist dies bei goniometrischen Gleichungen, bei denen es i. Allg. unendlich viele Lösungen dank der Periodizität der trigonometrischen Funktionen gibt, wobei aber oft bei Anwendungen nur eine endliche Anzahl relevant ist, die es zu finden gilt. Das muss geübt werden. Bei nicht Hochbegabten benötigt man hierzu Zeit, die in *einer* Hochschulübung nicht zur Verfügung stehen kann. D. h. damit besteht die Gefahr, dass Ingenieure u. a. solche Probleme gleich dem Computer übergeben wie heute beim Integrieren, ewig mit Zahlenkolonnen herumspielen, alles glauben, was der Computer ausspuckt und sich dann fürchterlich ärgern, wenn ein Mathematiker eine geschlossene Lösung in wenigen Minuten präsentiert.

> *Aufgabe 3.1:* In einem Dreieck ist ein Winkel doppelt so groß wie ein anderer; die Gegenseiten dieser Winkel verhalten sich wie 5:3. Wie groß sind die Dreieckswinkel?

3.1 ist aus ZWERGER-KLUG, Trigonometrie, 19. Auflage, J. Lindauer Verlag München 1960.

Lösung:

Annahme $\alpha = 2\beta$. Es ist $\beta \neq 0$. Nach dem Sinussatz gilt dann $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{5}{3}$. Nach einem **Additionstheorem** folgt hieraus $\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta = \frac{5}{3}$, weil $\beta \neq 0$ ist und es sich um ein Dreieck handelt. Man findet näherungsweise: $\beta = 33{,}56^{o}$, $\alpha = 67{,}11^{o}$ und $\gamma = 79{,}33^{o}$.

Bei 3.1 handelt es sich um eine Aufgabe, wie man sie früher in jedem Trigonometriebuch gefunden hat. Selbstverständlich muss das Lösen solcher Fragestellungen am Gymnasium geübt werden. Leider findet man in den alten Trigonometriebüchern kaum Anwendungen zum Thema Additionstheoreme und goniometrische Gleichungen. Aus diesem Grund werden solche Anwendungen im Folgenden dargestellt. Es wird hierbei auf die methodisch sicher erforderlichen weiteren Aufgabenstellungen im Bereich des Hinführens verzichtet.

Die nächste Aufgabe ist entnommen bei KARL WÖRLE, Mathematik in Beispielen für Ingenieurstudenten, Oldenbourg München 1962:

> *Aufgabe 3.2:* Ist α der Steigungswinkel einer Schraube, $\mu = \tan\rho$ der Reibungskoeffizient zwischen der Schraube und dem Material, in das sie hineingedreht wird, so berechnet sich der Wirkungsgrad η für die Umsetzung des Drehmoments in die Längskraft gemäß $\eta = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\rho)}$. (1)
>
> Man stelle $\tan\alpha$ in Abhängigkeit von ρ und η dar. Wie groß ist α, wenn für $\mu = \tan\rho = 0{,}10$ der Wirkungsgrad $\eta = 0{,}80$ betragen soll?

Lösung:
Es muss sein $0 < \alpha < 90^{o} - \rho$, weil sonst nach (1) $\eta < 0$ wäre. (2)
Aus (1) folgt mit dem **Additionstheorem für den Tangens**:

$$\tan\alpha = \eta\frac{\tan\alpha + \tan\rho}{1 - \tan\alpha\tan\rho}$$

Hieraus folgt: $\eta\tan\alpha + \eta\tan\rho = \tan\alpha - \tan^2\alpha\tan\rho$

$$\tan\rho\tan^2\alpha - (1-\eta)\tan\alpha + \eta\tan\rho = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{1-\eta \pm \sqrt{(1-\eta)^2 - 4\eta\tan^2\rho}}{2\tan\rho}$$

Für die angegebenen Zahlenwerte liefert der Taschenrechner
$\alpha_1 = 55{,}35618598^o$, sinnvoll gerundet zu 55^o,
$\alpha_2 = 28{,}93322089^0$, sinnvoll gerundet zu 29^o, eine Steigung, die übliche Metallschrauben haben. Da aus tan ρ = 0,10 folgt gerundet $\rho = 5{,}7^o$, liegen die beiden α-Werte im Definitionsbereich (2).

> *Aufgabe 3.3:* Mit der Kraft F wird ein „Fahrzeug" der Masse m (g = Erdbeschleunigung) eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hochgezogen (Reibungskoeffizient $\mu < 1$). Die Anfangsgeschwindigkeit sei null. Für welche Neigungswinkel α ist die Beschleunigung a = 0, also
> $\frac{F}{gm} = \sin\alpha + \mu\cos\alpha$? (Nach EDUARD WALTHER, Taschenbuch technischer Formeln, Verlag Harry Deutsch, Thun und Franfurt/Main 1990, Seite 41)

Lösung:
F = Hangabtrieb + beschleunigende Kraft + Reibungskraft,
wobei jede abwärts gerichtete Kraft negativ und jede aufwärts gerichtete Kraft positiv zu nehmen ist. Es ergibt sich dann die folgende Kraftgleichung für eine Aufwärtsbewegung:
$F = mg\cdot\sin\alpha + \mu m\cdot\cos\alpha + am$

$$a = \frac{F}{m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0$$

Diese Gleichung soll für a = 0 nach α aufgelöst werden, wobei
o. B. d. A. $0 < \alpha < 90^o$ und (1)
$\mu > 0$. (2)

Wir kürzen ab r: = $\frac{F}{mg}$ und sin α = :z und erhalten

$$z + \mu\sqrt{1-z^2} = r. \qquad (3)$$

Die negative Wurzel kommt nicht vor, weil nach (1) der Cosinus positiv ist.
Diese **Wurzelgleichung** löst man durch Quadrieren; deshalb bekommt man Lösungen auch für die Gleichung $z - \mu\sqrt{1-z^2} = r$. Man muss also bei den Ergebnissen prüfen, ob sie (3) lösen. Aus (3) folgt

$$(r-z)^2 = \mu^2(1-z^2)$$

$$r^2 + z^2 - 2rz = \mu^2 - \mu^2 z^2$$

$$z^2(1+\mu^2) - 2rz + r^2 - \mu^2 = 0$$

$$z = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4(1+\mu^2)(r^2-\mu^2)}}{2(1+\mu^2)} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - r^2 - \mu^2 r^2 + \mu^2 + \mu^4}}{1+\mu^2} = \frac{r \pm \mu\sqrt{\mu^2 + 1 - r^2}}{1+\mu^2}, \qquad (4)$$

letzteres, weil $\mu > 0$ ist. (4) ist nur sinnvoll, wenn $\mu^2 + 1 - r^2 \geq 0$ ist. (5)

Welche der Lösungen von (4) die richtigen sind, kann man nur durch Einsetzen in (3) überprüfen; man beachte $1 + \mu^2 > 1$. Es ist zu berechnen:

$$\frac{r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}}{1+\mu^2} + \mu\sqrt{1 - \left(\frac{r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}}{1+\mu^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\mu^2}\left(r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\sqrt{(1+\mu^2)^2 - \left(r^2 + \mu^2(\mu^2+1-r^2) \pm 2r\mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\mu^2}\left(r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\sqrt{1 + 2\mu^2 + \mu^4 - r^2 - \mu^4 - \mu^2 + \mu^2 r^2 \mp 2r\mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\mu^2}\left(r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\sqrt{1 + \mu^2 - r^2 + \mu^2 r^2 \mp 2r\mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}}\right) = A$$

Wegen (5) ergibt sich hieraus:

$$A = \frac{1}{1+\mu^2}\left(r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\sqrt{\left(\sqrt{\mu^2+1-r^2} \mp \mu r\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\mu^2}\left(r \pm \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\left|\sqrt{\mu^2+1-r^2} \mp \mu r\right|\right) = A$$

Fall 1: Wir betrachten das jeweils obere Vorzeichen.

Fall 1a: $\sqrt{\mu^2+1-r^2} \geq \mu r$; dann gilt $A = \frac{1}{1+\mu^2}\left(r + \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} - \mu^2 r\right) \neq r$ und damit ist (3) nicht erfüllt.

Fall 1b: $\sqrt{\mu^2+1-r^2} < \mu r$; dann gilt $A = \frac{1}{1+\mu^2}\left(r + \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} - \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu^2 r\right) = r$ und man hat eine Lösung.

Fall 2: Wir betrachten das jeweils untere Vorzeichen.

Fall 2a: $\sqrt{\mu^2+1-r^2} \geq \mu r$; dann gilt $A = \frac{1}{1+\mu^2}\left(r - \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu^2 r\right) = r$ und man hat eine Lösung.

Fall 2b: $\sqrt{\mu^2+1-r^2} < \mu r$; dann gilt $A = \frac{1}{1+\mu^2}\left(r - \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} - \mu\sqrt{\mu^2+1-r^2} + \mu^2 r\right) = r$ und damit ist (3) nicht erfüllt.

Ergebnis: Der in der Aufgabe beschriebene Fall tritt nur ein, wenn B: = $\mu^2 + 1 - \left(\frac{F}{mg}\right)^2 \geq 0$ ist. Im Fall $\sqrt{B} \geq \mu\frac{F}{mg}$ erhält man die Lösung $\sin\alpha = \frac{r+\mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}}{1+\mu^2}$,

im Fall $\sqrt{B} < \mu\frac{F}{mg}$ erhält man als Lösung $\sin\alpha = \frac{r-\mu\sqrt{\mu^2+1-r^2}}{1+\mu^2}$ mit jeweils $r = \frac{F}{mg}$.

Aufgabe 3.4: Ist α der Steigungskoeffizient einer Schraube, $\mu = \tan\rho$ der Reibungskoeffizient zwischen der Schraube und dem Material, so berechnet sich der Wirkungsgrad η für die Umsetzung des Drehmoments in die Längskraft gemäß $\eta = \frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\rho)}$.

(1)

Gibt es einen technisch realisierbaren Winkel α, für den der Wirkungsgrad η bei gegebenem ρ optimal wird?

Lösung:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\tan(\alpha+\rho)\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} - \tan\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2(\alpha+\rho)}}{\tan^2(\alpha+\rho)} = 0\,, \qquad (2)$$

wobei $0 < \alpha < 90^o - \rho$ sein muss und $\rho < 90^o - \alpha$, weil sonst nach (1) $\eta < 0$ wäre. (3)

(2) ist erfüllt, wenn $\sin(\alpha + \rho)\cos(\alpha + \rho) - \sin\alpha\cos\alpha = 0$ ist. Hieraus folgt nach **Additionstheoremen**: **$\sin 2(\alpha + \rho) = \sin 2\alpha\cos 2\rho + \cos 2\alpha\sin 2\rho = \sin 2\alpha$**

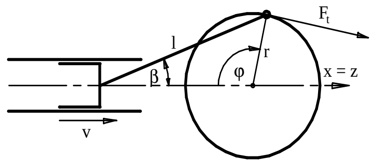
$$\sin 2\alpha\cdot(\cos 2\rho - 1) + \cos 2\alpha\sin 2\rho = 0$$
$$\sin 2\alpha\cdot(1 - \cos 2\rho) = \cos 2\alpha\sin 2\rho$$
$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\rho}{1-\cos 2\rho} \qquad (4)$$

Der Fall $1 - \cos 2\rho = 0$ liefert $\rho = 0$ wegen (3). Da aber der Wirkundgrad nicht null ist, kommt dieser Fall nicth vor.

Also kann davon ausgegangen werden, dass in (4) $1 - \cos 2\rho \neq 0$. Damit hat man die Lösung $\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin 2\rho}{1-\cos 2\rho}$

Zum Beispiel $\mu = 0{,}8$; dann ist $\rho = 38{,}7^{\circ}$ und $\alpha = 1{,}2^{\circ}$ ist optimal.

Aufgabe 3.5: In der nebenstehenden Skizze einer Kurbelwelle ist die Zylindergeschwindigkeit
$v = r\omega(\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{l}\sin 2\varphi)$.
Für welchen Winkel φ wird die Geschwindigkeit v extremal?



Die Formel ist aus EDUARD WALTHER, Taschenbuch technischer Formeln, Verlag Harry Deutsch, Thun und Franfurt/Main 1990, Seite 166.

Lösung:

$\frac{dv}{d\varphi} = r\omega\left(\cos\varphi + \frac{r}{l}\cos 2\varphi\right) = 0$; mit einem **Additionsheorem** folgt hieraus:

$\frac{2r}{l}\cos^2\varphi + \cos\varphi - \frac{r}{l} = 0$. Alle φ, für die gilt $\cos\varphi = l\cdot\frac{-1\pm\sqrt{1+8\frac{r^2}{l^2}}}{4r}$, sind Lösungen.

Abschließend muss festgestellt werden:

Moderner Unterricht darf nicht nur auf die hochbegabten Schülerinnen und Schüler ausgerichtet sein. Er muss all die seit langem vernachlässigten Bereiche, die längst bekannt sind, lehren, damit eine größere Anzahl von Abiturienten die Möglichkeit bekommt, Mathematik anwendende Studienrichtungen zu ergreifen und vor allem mit Erfolg in einer angemessenen Zeit zu beenden. Der Bedarf der Gesellschaft diesbezüglicher Studienrichtungen stagniert nicht, sondern steigt sicher noch lange. Immer neue Bereiche werden mit Mathematik durchsetzt, um Kosten zu sparen. Es wird aber auch erwartet, dass die Mathematik, die am Gymnasium gelehrt werden kann, Abiturienten so beherrschen, dass ihnen sichere und elegante Lösungen in kürzester Zeit gelingen.

Sollten solche Bemühungen nicht greifen, ist die bestehende allgemeine Hochschulreife verspielt.

Da man heute nicht mehr allen Schülerinnen und Schülern dies alles am Gymnasium lehren kann, ist die letzte Chance, bestehende Klassen zu teilen, und die erforderliche weitere Mathematik den willigen und befähigten Jugendlichen zu lehren. Dieser Ergänzungsunterricht ist derzeit die einzig bekannte Möglichkeit, die bestehende allgemeine Hochschulreife zu erhalten.

Literatur

Barth Elisabeth und Friedrich, Gert Krumbacher, Konrad Ossiander — Anschauliche Geometrie 10, Ehrenwirth München 1996

Autor:
Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg