Boris Averbukh, Heino Günther

Über die Potenzen und die Potenzfunktionen[1]

1.Vorwort

Ein „großer Teil“ der Schulmathematik ist dem Begriff der Potenz und den Eigenschaften der Potenzfunktion gewidmet. Aber trotzdem fehlen manche wichtige Definitionen, Sätze und Beweise in Lehrbüchern ganz, oder sie sind nur in einer sehr vereinfachten Form vorgestellt. Darum wollen wir in diesem Beitrag die vorhandenen Lehrbücher ergänzen. Wir hoffen dabei, dass der Lehrer einen ihm geeigneten Anteil dieses Stoffes ohne besondere Schwierigkeiten auswählen und in den Unterricht aufnehmen kann[2].

Was findet hier nun ein Leser konkret? Im Unterschied zu manchen amerikanischen Schullehrbüchern der Mathematik (siehe zum Beispiel BENSON, J., DODGE, S. U. A. [1]) betrachten alle uns bekannten deutschen Lehrbücher Potenzen mit negativen Basen nur für ganzzahlige Werte der Exponenten. Nur beispielsweise nennen wir einige Lehrbücher verschiedener Autoren mit verschiedenen Erscheinungsjahren in verschiedenen Erscheinungsländern: VAN BRIEL W., NEVELING R. [1], GRIESEL H., POSTEL H. [1],KUYPERS W. [1], SCHMID A. SCHWEIZER W. [1]. Wir beweisen in diesem Beitrag, dass die Potenz x^r genau dann für $x < 0$ definiert werden kann, wenn r eine rationale Zahl ist, deren gekürzte Form einen ungeraden Nenner hat. Wir zeigen auch mit Beispielen, dass solche Potenzen sehr nützlich für die Lösung mancher Aufgaben sind.

Wir behandeln auch Potenzen mit irrationalen Exponenten. Manche wichtige Formeln (wie zum Beispiel $a^x = e^{x\ln a}$ oder $\log_a x^k = k\log_a x$) enthalten Potenzen mit solchen Exponenten und brauchen für ihre Beweise entsprechende Potenzgesetze. Dabei betrachten wir Potenzen mit positiven und negativen Basen und beliebigen reellen Exponenten, wenn die entsprechenden Potenzen in R existieren. Wir behandeln auch die wichtigsten Eigenschaften der Potenzfunktion x^r in dem Fall, wenn sie für negative x reell definiert ist. Insbesondere beweisen wir, dass die entsprechenden Formeln der Ableitung und der Stammfunktion im Bereich $x < 0$ ebenfalls richtig sind. Am Ende des Beitrags findet man Übungen und Musteraufgaben.

Um den Inhalt des Beitrags besser zu begründen, betrachten wir schon einige Aufgaben hier im Vorwort:

Beispiel 1:

Ein Schüler will die Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ finden. Die Funktion ist stetig für alle reellen x; darum ist ihre Stammfunktion F(x) an jeder Stelle definiert. Die auf der ganzen Zahlengeraden gültigen Formeln $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ und $\int x^{2/3}dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + C = \frac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2} + C$ dürfte der Schüler nur im Fall $x > 0$ verwenden. Deswegen müsste er die Fälle $x < 0$ und $x = 0$ extra behandeln. Für den ersten Fall könnte er die Integralfunktion $I(x) = \int_a^x \sqrt[3]{t^2}\,dt$ benutzen, wobei x und a kleiner als 0 sind und $F(x) = I(x) + C_2$ gilt. In diesem Integral müsste er danach mit $t = -u$ substituieren, und die neue Integrandenfunktion als eine Potenzfunktion darstellen. Nach der Berechnung des Integrals und nach den notwendigen Umformungen würde er finden, dass die Formel $F(x) = \frac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2} + C$ auch für $x < 0$ gilt.

[1] Dieser Beitrag ist eine ausführliche Darlegung und Fortsetzung unseres Vortrages auf dem „10th International Congress on Mathematical Education“ (Kopenhagen, 2004).

[2] Anmerkung des Herausgebers: Für Potenzen stehen z. B. nach dem G8-Plan in Bayern in Jahrgangsstufe 5 ca. 3 Stunden, in Jahrgangsstufe 7 ca. 2 Stunden, in Jahrgangsstufe 8 nur 1 Stunde und in Jahrgangsstufe 9 ca. 6 Stunden à 45 Minuten zur Verfügung. Potenzfunktionen kommen nur im Zusammenhang mit Kurvendiskussion in der Oberstufe vor.

Jetzt müsste er noch den Fall $x = 0$ behandeln. Zuerst sollte er die Stetigkeit der Funktion $F(x)$ bei $x = 0$ benutzen, um $C = C_2$ zu beweisen. Danach müsste er zeigen, dass $F'(0) = f(0)$ gilt. Dies kann nur gezeigt werden, wenn man die Definition der Ableitung verwendet.

Beispiel 2:
Ähnliche Schwierigkeiten entstehen bei Berechnungen von einigen Ableitungen. Wir betrachten beispielsweise die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$. Auch wenn die folgende Formelzeile für alle reellen x gilt, darf sie der Schüler in Deutschland nur für $x > 0$ verwenden: $(x\sqrt[3]{x^2})' = (x^{5/3})' = \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

Auch wenn man vermutlich solche Aufgaben an Schulen vermeiden kann, ist das an Universitäten nicht möglich. Die Potenzfunktion (auch mit einem gebrochenen Exponenten) ist eine der am meisten benötigten Funktionen der Analysis und tritt oft auch in anderen Gebieten der Mathematik auf.

Wir meinen, dass es beim Erlernen von Wurzeln, Potenzen und zugehörigen Funktionen einen vermeidbaren Sprung gibt zwischen dem, was an der Schule unterrichtet wird, und dem, was für viele Universitätsstudiengänge notwendig ist. Das jetzige Niveau der Kenntnisse der Abiturienten in diesem Bereich der Mathematik begrenzt sowohl die Möglichkeiten der Universitätslektoren in der Wahl der Aufgaben und ihrer Lösungsverfahren, als auch die Fähigkeit von Studenten und Spezialisten, die mathematische Literatur selbstständig zu lesen und zu verstehen. Dies möchten wir anhand von weiteren Beispielen zeigen.

Um Analysis erfolgreich zu unterrichten, muss man einen ausreichenden Bestand von bekannten Funktionen haben, an denen sich unterschiedliche bemerkenswerte Eigenschaften von Funktionen demonstrieren lassen. Potenz- und Wurzelfunktionen sind in vielen Fällen für dieses Ziel sehr geeignet.

Beispiel 3:
Wir betrachten zum Beispiel die Funktion f mit $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ in $D(f) = R$. Diese Funktion hat einen Rückkehrpunkt im Ursprung. Sie ist nicht differenzierbar an der Stelle $x = 1$, aber ihr Graph hat eine Tangente im Punkt $(1|0)$, und dieser Punkt ist ein Wendepunkt. Es gibt *eine* Asymptote gleichzeitig für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$, die nicht so leicht zu finden ist. Es wäre nicht einfach, diese Besonderheiten an anderen elementaren Funktionen zu zeigen. Aber wenn wir nur Wurzeln mit nicht negativen Radikanden zulassen, dann bleibt von diesen Eigenschaften fast nichts übrig.

Beispiel 4:
Die Schulbücher, in denen die dritte Wurzel nur für nicht negative Werte des Radikanden definiert wird, geben die Lösung $x = \sqrt[3]{a}$ für die kubische Gleichung $x^3 = a$ im Fall $a > 0$ an. Ist $a < 0$, dann gilt $x = -\sqrt[3]{|a|}$.

Jetzt stellen Sie sich vor, dass ein Universitätsprofessor in seiner Vorlesung den Parameter t aus dem System $x = t^3$, $y = f(t)$ eliminieren soll, wobei t negativ sein kann. Statt einfach $t = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ einzusetzen, müsste er (laut den Schulbüchern) eine Fallunterscheidung für die Funktion f verwenden. Will er diese Funktion weiter bearbeiten, dann muss er u. U. immer wieder diese zwei Fälle berücksichtigen und außerdem noch den Fall $x = 0$ extra behandeln.

Jetzt betrachten wir ausführlicher eine Aufgabe, in der die Lösung bei einem solchen Vorgehen viermal länger als nötig wird.

Beispiel 5:

Es sei die Differentialgleichung $y'^3 = -\frac{y}{x}$ zu lösen.

Die einfachste Lösung benutzt Potenzen mit negativen Basen und gebrochenen Exponenten. Es gilt: $y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$

Im Fall $y \neq 0$ können wir die Variablen trennen. Nach Berechnungen der Integrale und einfachen Umformungen bekommen wir die Gleichung der Integralkurven $x^{2/3} + y^{2/3} = C$.

Wegen $x \neq 0$ und $y \neq 0$ können hier die Variablen ihre Vorzeichen behalten. Darum ist eine solche Kurve ein Bogen einer Astroide, der innerhalb eines beliebigen Koordinatenquadranten liegt. Außerdem ist auch die Funktion $f(x) = 0$ mit $D(f) = R^*$ eine Lösung der Gleichung, und die gefundene Lösungsmenge gibt eine einfache und schöne Illustration der wichtigsten Theoreme der Theorie von Differentialgleichungen.
Dürfen wir jetzt nur Wurzeln mit nicht negativen Radikanden verwenden, dann müssen wir, um die Variablen zu trennen, vier Fälle behandeln: $x > 0, y \geq 0$ oder $x < 0, y \geq 0$ oder $x < 0, y < 0$ oder $x > 0, y < 0$. Entsprechend erhalten wir vier ähnliche Differentialgleichungen; aber nach allen Berechnungen und Umformungen bekommen wir natürlich in allen vier Fällen dieselbe Gleichung der Integralkurven $x^{2/3} + y^{2/3} = C$.

Lassen wir negative Radikanden in Kubikwurzeln zu, aber verbieten negative Basen in Potenzen mit gebrochenen Exponenten, dann entstehen dieselben vier Fälle bei der Integrierung.

Bezüglich der Gleichung der Astroide möchten wir eine Bemerkung machen, die noch einen weiteren Nachteil der jetzigen Situation zeigt. In deutschsprachigen Handbüchern oder auf deutschsprachigen Seiten des Internets (zum Beispiel http://de.wikipedia.org/wiki/Astroide) findet man die Gleichung $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$.
Englischsprachige Seiten des Internets dagegen (zum Beispiel http://mathworld.wolfram.com/Astroid.html oder http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Astroid_dir/astroid.html) benutzen die Gleichung
$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, weil die Autoren die Funktion $x^{2/3}$ auch für negative Werte von x zulassen.

Auf manchen Internetseiten kann man nicht die Definition der Potenz mit einer negativen Basis und einem gebrochenen Exponenten finden, wie z. B.
http://mathworld.wolfram.com/Power.html oder
http://functions.wolfram.com/ElementaryFunctions/Power
Die Seite http://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_%28Mathematik%29 enthielt (im Februar 2007) zwar eine solche (nicht die beste) Definition. Aber manche wichtige Fragen blieben doch ohne Antwort. Es gab auch falsche oder nicht klar formulierte Behauptungen, wie zum Beispiel: „Das Potenzgesetz $(a^r)^s = a^{rs}$ gilt dann jedoch nur noch, wenn der Nenner von s ebenfalls ungerade ist.“ In Wirklichkeit ist diese Bedingung hinreichend, aber nicht notwendig.

Offenbar können diese fragmentarischen Auskünfte im Internet nicht ein folgerichtiges und vollständiges Erlernen dieses Stoffes an der Schule ersetzen. Andererseits zeigen sie, dass eine ausführliche Darlegung unseres Themas erforderlich ist. Die Definitionen und die Eigenschaften der Wurzeln mit ungeraden Exponenten und der Potenzen mit gebrochenen Exponenten bleiben fast ohne Änderungen, wenn wir negative Radikanden und Basen zulassen. Keine umfangreichen Ergänzungen zu jetzigen Gymnasiallehrbüchern sind dafür notwendig.

2. Definitionen der Potenzen mit reellen Exponenten

Wie in vielen Universitätslehrbüchern (siehe zum Beispiel ADAMS, KRUSE, SIPPEL [1] oder FORSTER [1]), lassen wir negative Radikanden für Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten zu. Genauso war dies noch vor 100 Jahren an Schulen (siehe zum Beispiel SPIEKER, TH. [1]).

Um die Potenzen negativer Zahlen mit gebrochenen Exponenten zu definieren, betrachten wir sie als besondere Fälle der Potenzen komplexer Zahlen (Anmerkung des Herausgebers: Komplexe Zahlen werden abgesehen von Wahlkursen, in keinem Bundesland mehr gelehrt.). Sei z eine komplexe Variable und r eine rationale Zahl mit der gekürzten Form $r = m/n$. Die Wertemenge der Funktion $f(z) = z^r$ an einer negativen reellen Stelle z enthält eine reelle Zahl genau dann, wenn n ungerade ist. Unter dieser Bedingung existiert nur eine einzige solche reelle Zahl. Für $z = x < 0$ kann man sie mithilfe eines der Terme $(\sqrt[n]{x})^m$ oder $\sqrt[n]{x^m}$ berechnen.

Es ist sinnvoll, die eben formulierte Bedingung als die Bedingung der Existenz und die Zahl $(\sqrt[n]{x})^m$ oder $\sqrt[n]{x^m}$ als den Wert der Funktion $x^{m/n}$ einer reellen Variablen x an der Stelle $x < 0$ zu betrachten. Diese Erklärung möchten wir jetzt verbessern: Offenbar passt sie auch für $x > 0$, und wir dürfen die Voraussetzung $x < 0$ durch $x \neq 0$ ersetzen. Die Voraussetzung, dass n ungerade ist, ist nur im Fall $x < 0$ wichtig und entsteht in diesem Fall automatisch, weil nur Wurzeln mit ungeraden Wurzelexponenten für negative Radikanden definiert sind. Darum dürfen wir diese Voraussetzung auch weglassen. Die endgültigen äquivalenten Definitionen lauten dann wie folgt:

Definition 1´: Seien x eine reelle Zahl und r eine rationale Zahl mit der gekürzten Form r = n/m. Im Fall x = 0 setzen wir außerdem voraus, dass r > 0 ist. Dann gilt $x^r := (\sqrt[n]{x})^m$.

Definition 1´´: Seien x eine reelle Zahl und r eine rationale Zahl mit der gekürzten Form r = n/m. Im Fall x = 0 setzen wir außerdem voraus, dass r > 0 ist. Dann gilt $x^r := \sqrt[n]{x^m}$.

Für alle Werte von r ist diese Funktion $f(x) = x^r$ auf der Menge R^+ definiert und nimmt nur positive Werte an. Falls x = 0 ist, dann ist x^r gleich 0 für r > 0 und ist nicht definiert für $r \le 0$. Für alle $x \ne 0$ gilt $x^0 = 1$; den Fall x = r = 0 betrachten wir später. Für x < 0 ist diese Funktion genau dann an der Stelle x definiert, wenn der Nenner n des gekürzten Exponenten ungerade ist. Sie ist negativ für x < 0 genau dann, wenn der Zähler m des gekürzten Exponenten auch ungerade ist. Für ganzzahlige Werte von r (d. h. n = 1, r = m) bekommen wir für alle reellen Werte von x die übliche Funktion x^r. Ist r = 1/n mit natürlichem n, dann gilt $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ für alle x, wenn n ungerade ist, oder nur für nicht negative x, wenn n gerade ist.

Infolge der Voraussetzung, dass r = n/m gekürzt ist, brauchen wir nicht die Korrektheit der Definitionen 1' und 1'' in beiden Fällen zu beweisen. Stattdessen entsteht die Frage, welche weiteren Bruchdarstellungen von r benutzt werden können. Wir beweisen später, dass dies für x < 0 alle Brüche mit ungeraden Nennern sind. Im Fall x > 0 sind das überhaupt alle Brüche.

Beispiel 6: Berechnen Sie: a) $(-8)^{2/6}$; b) $\sqrt[6]{(-8)^2}$.

Lösungen:

a) $(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

b) $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 8^{2/6} = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$ oder einfach $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Satz 1: Die Definitionen 1' und 1'' sind äquivalent.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass diese Definitionen dieselbe Funktion $f(x) = x^r$ ergeben. Sind m und n teilerfremd, dann ist die Funktion $f_1(x) = \sqrt[n]{x^m}$ (als auch die Funktion $f_2(x) = (\sqrt[n]{x})^m$) genau dann für x < 0 definiert, wenn n ungerade ist. Darum stimmen die Definitionsbereiche dieser Funktionen für alle Exponenten r überein. Wir müssen noch beweisen, dass die entsprechenden Werte dieser Funktionen gleich sind. Dafür benutzen wir die nächste Eigenschaft von Potenzen mit natürlichen Exponenten:

Hilfssatz: Seien a und b beliebige nicht negative (oder beliebige reelle Zahlen). Existiert ein solcher natürlicher (bzw. ungerader natürlicher) Exponent n, dass $a^n = b^n$ gilt, dann gilt auch a = b.

Diese Behauptung folgt aus der Monotonie der Potenzfunktion mit einem natürlichen (bzw. mit einem ungeraden natürlichen) Exponenten auf der Menge R_0^+ (bzw. R). Um sie zu verwenden, bemerken wir jetzt, dass die Zahlen $\sqrt[n]{x^m}$ und $(\sqrt[n]{x})^m$ im Fall $x \ge 0$ nicht negativ sind und dass n nur ungerade sein kann, wenn x < 0 ist. Darum genügt es, die Übereinstimmung der n-ten Potenzen dieser Zahlen zu prüfen. Wir berechnen diese Potenzen und bekommen:

$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n = x^m$ und $\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^m\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right)^m = x^m$. Also ist der Satz bewiesen.

Trotz dieses Satzes meinen wir, dass es in Zukunft methodisch etwas besser wäre, die Definition 1´ in Schullehrbüchern zu verwenden, weil sie für weitere Verallgemeinerungen bequemer ist. Die Ursache liegt im folgenden Ergebnis, dessen Beweis wir auslassen:

Ergebnis:

1. Die Funktionen $z^{m/n}$ und $(\sqrt[n]{z})^m$ stimmen für alle komplexen $z \neq 0$ und für alle ganzen m und natürlichen n überein.

2. Dagegen unterscheiden sich die Funktionen $z^{m/n}$ und $\sqrt[n]{z^m}$, falls m und n nicht teilerfremd sind.

Darum führt die falsche Benutzung der Definition 1´´ öfter zu Fehlern als bei der Definition 1´.

Beispiel 7:
Stellen wir uns vor, dass ein Schüler die Größe $(-1)^{0,2}$ berechnen soll, aber er anstatt der gekürzten Form r = 1/5 den Bruch 2/10 benutzt. Mit der Definition 1´ bekommt er $(-1)^{0,2} = (\sqrt[10]{-1})^2$ und entdeckt wahrscheinlich seinen Fehler, weil die Wurzel reell nicht existiert. Mit der zweiten Definition bekommt er ohne Probleme $(-1)^{0,2} = \sqrt[10]{(-1)^2} = 1$; das ist ein Fehler.

Bemerkung: Ein Leser kann bemerken: „Sie behaupten, dass die Funktionen $z^{m/n}$ und $(\sqrt[n]{z})^m$ übereinstimmen, aber im vorherigen Beispiel gibt auch die Formel $(-1)^{0,2} = \left(\sqrt[10]{-1}\right)^2$ ein falsches Ergebnis." *Antwort:* Die Formel $x^r = (\sqrt[n]{z})^m$ ist unabhängig von m und n immer richtig, wenn die Potenz x^r existiert, aber sie verlangt manchmal (für x < 0, falls m und n gerade sind) Berechnungen mit komplexen Zahlen. Die zusätzliche Bedingung, dass m und n teilerfremd sind, befreit uns nur von solchen Berechnungen. Im Unterschied dazu eliminiert die gleiche Bedingung der Definition 1´´ diejenigen Fälle, in denen diese Definition falsch ist.
Im Vergleich zu der Definition 1´, die man in der englischsprachigen Literatur auch für x < 0 verwendet, hat die Definition 1´´ nur den folgenden Vorteil: Sie steht näher (aber stimmt nicht völlig überein) zur Definition in den gebräuchlichen deutschen Lehrbüchern. Darum benutzen wir in der weiteren Darlegung nur diese Definition.
Bei Berechnungen von Potenzen mit gebrochenen Exponenten mithilfe eines Taschenrechners sollten wir in den Fällen von positiven und negativen Basen unterschiedlich handeln. Die Tastenfolge für die Berechnung der Zahl $(-8)^{5/3}$ sieht zum Beispiel aus wie
[–8] → [INV] → [x^y] → [3] → [x^y] → [5] → [=]   oder   [–8] → [x^y] → [5] → [INV] → [x^y] → [3] → [=].

Der andere Rechenweg besteht darin, dass wir getrennt das Vorzeichen und den Betrag des Potenzwertes bestimmen. Sei x eine negative Basis und r ein rationaler Exponent mit einem ungeraden Nenner. Ist der Zähler von r in der gekürzten Form eine gerade (bzw. ungerade) Zahl, dann ist die Potenz x^r positiv (bzw. negativ). Wir berechnen zuerst den Betrag $\left|x^r\right| = |x|^r$ (einen Beweis der Formel siehe im nächsten Abschnitt) und setzen danach das richtige Vorzeichen ein.

Jetzt wollen wir den Begriff der Potenz mit einem irrationalen Exponenten für positive Basen definieren und zeigen, dass solche Potenzen für negative Basen im Bereich reeller Zahlen nicht existieren. Wieder behandeln wir anfangs reelle Zahlen als besondere Fälle komplexer Zahlen. Die Leser, die nicht ausreichend mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen vertraut sind, können einfach ein paar Absätze des Textes auslassen.

Wir betrachten die Potenz $x^a = e^{a\mathrm{Ln}x}$ als eine mehrdeutige Funktion mit komplexen Werten und finden zuerst heraus, für welche reellen x und irrationalen a die Wertemenge dieser Potenz mindestens eine reelle Zahl enthält. Diese Zahl wird danach für die Definition des oben gegebenen Begriffes benutzt werden.

Im Fall x > 0 gilt die Formel a Ln x = a ln x + i2πka mit $k \in Z$, wobei ln x der übliche natürliche Logarithmus der Schule ist. Daraus folgt die Formel

$$e^{a\,\mathrm{Ln}\,x} = e^{a\ln x}(\cos 2\pi ka + i\sin 2\pi ka).$$

Das einzige ganze k, für das sin 2πka = 0 gilt und darum die rechte Seite der letzten Formel eine reelle Zahl ist, ist k = 0. Für den entsprechenden Wert der Größe x^a bekommen wir den Term $e^{a\ln x}$.

Leider kann die Formel $x^a = e^{a \ln x}$ nicht im Schulunterricht für die Definition der Potenz mit einem irrationalen Exponenten verwendet werden, wie man dies manchmal macht, denn, wenn wir die übliche schulische Definition der Exponentialfunktion benutzen, enthält die rechte Seite dieser Formel selbst einen irrationalen Exponenten. Um eine Definition zu geben, die für die Schule geeignet ist, bemerken wir, dass $x^a = e^{a \ln x}$ für jedes positive x eine stetige Funktion von a ist. Sind alle Werte einer auf dem ganzen Definitionsbereich stetigen Funktion nur auf einer dichten Untermenge bekannt, kann man die unbekannten Werte dieser Funktion auf der Restmenge mithilfe der stetigen Fortsetzung eindeutig finden. Darum können wir jetzt das Verfahren der stetigen Fortsetzung verwenden, um Potenzen mit irrationalen Exponenten zu definieren.

Definition 2: Sei x eine nicht negative reelle Zahl, a eine irrationale Zahl und f mit $f(r) = x^r$ die Exponentialfunktion (deren Basis kann aber gleich 0 oder 1 sein) mit dem Definitionsbereich D(f) = Q, falls x > 0 ist, oder $D(f) = Q^+$, falls x = 0 ist. Dann setzen wir $x^a := \lim\limits_{r \to a} x^r$.

Mit anderen Worten, wenn $\{r_i\}$ eine beliebige gegen a konvergierende Folge der rationalen Zahlen ist, dann ist x^a gleich dem Grenzwert der Folge $\{ x^{r_i} \}$.

Andere Varianten der Definition der Potenz mit einem irrationalen Exponenten kann man zum Beispiel in WALTER [1] finden. Laut dieser Definition ist die Zahl 2^π gleich dem Grenzwert der Folge 2^3; $2^{3,1}$; $2^{3,14}$; $2^{3,141}$;.... **Dieses einzige Beispiel könnte genügen, damit die Schüler sich die richtige Vorstellung von den Potenzen mit irrationalen Exponenten machen, und wir schlagen nicht vor, Schülern in einem üblichen Unterricht mehr über die Definition solcher Potenzen zu erzählen.**

Der vorherige Gedankengang mit komplexen Zahlen zeigt, dass die Definition 2 korrekt ist, d. h. der Grenzwert unabhängig von der Auswahl der Folge $\{r_i\}$ ist. Das kann man auch mit den Mitteln der Schulmathematik beweisen, aber wir lassen den Beweis aus und kommen wieder auf die Definition der Potenz mit einem irrationalen Exponenten zurück, um den Fall x < 0 zu betrachten.

Im Fall x^r mit einem irrationalen r und x < 0 gilt die Formel $a \text{ Ln } x = a \ln|x| + i(2k+1)\pi a$ it $k \in Z$. Darum gilt auch die Formel

$$e^{a \text{ Ln } x} = e^{a \ln|x|}(\cos(2k+1)\pi a + i \sin(2k+1)\pi a .$$

Ist a eine irrationale Zahl, dann hat die Gleichung $\sin (2k+1)\pi a = 0$ keine ganze Lösungen k. Daraus folgt, dass die Potenz x^a als eine reelle Zahl nicht existiert, falls x < 0 und a irrational sind.

Jetzt beantworten wir die Frage, warum es eigentlich unmöglich ist, die Potenzen mit negativen Basen und irrationalen Exponenten mithilfe der stetigen Fortsetzung zu definieren.

Satz 2: Die Exponentialfunktion f mit $f(a) = x^a$ und der negativen Basis x, deren Definitionsbereich aus rationalen Zahlen mit ungeraden Nennern besteht, ist unstetig an jeder Stelle a und kann auf keine Stelle außerhalb ihres Definitionsbereiches stetig fortgesetzt werden.

Beweis: Sei a_0 eine beliebige reelle Zahl, die sowohl innerhalb als auch außerhalb des Definitionsbereiches der Funktion f liegen kann. Wir bezeichnen mit $\{r_i\}$ eine Folge, die aus rationalen Zahlen mit geraden Zählern und ungeraden Nennern besteht und gegen a_0 konvergiert, und mit $\{s_i\}$ eine Folge, die aus rationalen Zahlen mit ungeraden Zählern und ungeraden Nennern besteht und auch gegen a_0 konvergiert. Dann gelten die Ungleichungen $f(r_i) = x^{r_i} > 0$ und $f(s_i) = x^{s_i} < 0$. Laut der Folgerung des Potenzgesetzes 2 im nächsten Abschnitt (Wir weisen darauf hin, dass hierdurch kein logischer Zirkelschluss entsteht.) sind auch die folgenden Gleichheiten gültig:

$$|f(r_i)| = |x|^{r_i} \qquad \text{und} \qquad |f(s_i)| = |x|^{s_i}$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion mit einer positiven Basis schließen wir jetzt

$$\lim|f(r_i)| = \lim|f(s_i)| = |x|^{a_0} ,$$

darum gelten auch $\lim f(r_i) = |x|^{a_0}$ und $\lim f(s_i) = -|x|^{a_0}$. Also sind die zwei letzten Grenzwerte unterschiedlich.

Im Fall, wenn a_0 zum Definitionsbereich der Funktion f gehört, bedeutet das, dass diese Funktion unstetig an der Stelle a_0 ist. Wenn aber a_0 nicht zu diesem Definitionsbereich gehört, dann ist die stetige Fortsetzung der Funktion bei der Stelle a_0 unmöglich, weil der Grenzwert der Funktion f von der Auswahl der gegen a_0 konvergierenden Folge der rationalen Zahlen abhängig ist.

Dieses Ergebnis kann man auch noch anders interpretieren: Wir haben ganz einfache Terme (z. B. $(-2)^x$ u. a.) gefunden, die Funktionen mit ziemlich ungewöhnlichen Eigenschaften ergeben: Ihre Definitionsbereiche sind dichte Untermengen der Menge der reellen Zahlen, und sie sind unstetig an jeder Stelle.

Die letzte Frage, die wir in diesem Abschnitt betrachten möchten, ist die Frage über den Wert der Potenz, deren Basis und Exponent gleich null sind. Es gibt viele Argumente zugunsten einer Ergänzung zu den vorherigen Definitionen, dass diese Potenz gleich 1 ist.

Sie erleichtert die Niederschrift und das Verständnis von manchen Potenzreihen und anderen wichtigen Formeln. Wollen wir zum Beispiel die Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$ ohne Fallunterscheidung für n = 1 und x = 0 verwenden, dann müssen wir diese Ergänzung akzeptieren.

Das Symbol 0^0 benutzt man nicht nur als Bezeichnung der Potenz, deren Basis und Exponent gleich null sind, sondern auch in ganz anderem Sinn: Kann ein Grenzwert nicht unmittelbar auf Grund von Grenzwertsätzen berechnet werden, dann heißt der Ausdruck, der unter dem Zeichen des Grenzwertes steht, unbestimmter Ausdruck. Manche Arten der unbestimmten Ausdrücke haben besondere Bezeichnungen. Berechnen wir zum Beispiel einen solchen Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$ unter der Annahme, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ gilt, dann haben wir es mit einem unbestimmten Ausdruck der Art 0^0 zu tun. Das ist nur eine Schreibweise, die wie eine Potenz aussieht; darum ist es zunächst völlig unsinnig, ihr irgendeinen Zahlenwert ($0^0 = 1$ zum Beispiel) zuzuschreiben.

Für alle Arten der unbestimmten Ausdrücke ist die Größe eines entsprechenden Grenzwertes nicht von der Art des Ausdruckes selbst, sondern von konkreten Funktionen f und g abhängig. Zum Beispiel enthält der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} x^{(1-x)\log_x a}$ mit einem beliebigen a > 0 einen unbestimmten Ausdruck der Art 0^0. Nach einer einfachen Umformung kommen wir zum Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} a^{1-x} = a$. Das Ergebnis $0^0 = 1$ verpflichtet uns nicht, diesen Grenzwert gleich 1 anzunehmen, wenn $a \neq 1$ ist. D. h.: Der Grenzwert in einem unbestimmten Ausdruck der Art 0^0 ergibt nicht unbedingt das Ergebnis $0^0 = 1$.

3. Potenz- und Wurzelgesetze

In diesem Abschnitt beweisen wir die Potenzgesetze für Potenzen mit reellen Exponenten. Daraus ergeben sich am Ende die Wurzelgesetze. Wir setzen voraus, dass die Potenzgesetze für Potenzen mit ganzen Exponenten schon bekannt sind, und benutzen immer wieder denselben Weg des Beweises, der sich auf die nächste einfache Behauptung stützt: Sind a und b beliebige nicht negative (bzw. beliebige reelle) Zahlen und existiert ein solcher natürlicher (bzw. ungerader natürlicher) Exponent n, dass $a^n = b^n$ gilt, dann gilt auch a = b.

Satz 3: Für die Berechnung der Potenz x^r mit x < 0 und einem rationalen r sind beliebige Bruchdarstellungen von r mit ungeraden Nennern verwendbar. Im Fall $x \geq 0$ sind das überhaupt alle Bruchdarstellungen von r.

Beweis: Seien r = n/m die gekürzte Darstellung von r und r = mk/nk eine andere Bruchdarstellung dieser Zahl, wobei n und k im Fall x < 0 ungerade sind. Dann stimmen die Funktionen (von x) $\sqrt[n]{x^m}$ und $\sqrt[nk]{x^{mk}}$ überein: Sie haben gleiche Definitionsbereiche und sind nicht negativ für $x \geq 0$, und außerdem liefert die Berechnung ihrer n·k-ten Potenzen den gleichen Wert x^{mk}.

Beispiel 8: $(-10)^{1/3} = \sqrt[3]{-10} = \sqrt[9]{-1000} = \sqrt[15]{-100000}$

Warnung: Sind die beiden Zahlen m und n gerade und x < 0, dann kann die Formel $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ falsch sein.

Beispiel 9: $\sqrt[6]{(-1)^2} = 1$ aber $(-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Um die weiteren Potenzgesetze kürzer zu formulieren, werden wir schreiben, dass eine gegebene rationale Zahl einen ungeraden Nenner hat, wenn der Nenner in ihrer gekürzten Form ungerade ist.

Satz 4 (Potenzgesetz 1): Sind die beiden Exponenten r und s rationale Zahlen mit *ungeraden Nennern*, dann gilt die Formel $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$ für alle Werte von x (*außer* für x = 0 in dem Fall, in dem mindestens *eine* der Zahlen r oder s *negativ* ist). Ist mindestens eine dieser Zahlen entweder irrational oder rational mit einem *geraden Nenner*, dann gilt diese Formel nur für x ≥ 0 (mit derselben möglichen Ausnahme).

Beweis:

1. Seien die beiden Exponenten r und s rational und r = m/n, s = p/q gekürzt. Dann ist $r + s = \dfrac{mq + np}{nq}$ eine der Bruchdarstellungen des Exponenten der rechten Seite des Potenzgesetzes 1. Ist x < 0, dann sind die beiden Seiten der Formel definiert, weil alle Exponenten ungerade Nenner haben. Nur in diesem Fall kann eine Seite negativ sein. Jetzt potenzieren wir die beiden Seiten mit nq und bekommen die gleichen Werte x^{mq+np}. Deswegen ist die zu beweisende Formel richtig.

2. Seien jetzt r irrational und s rational. In diesem Fall ist die linke Seite für x < 0 nicht definiert. Genauso ist sie für x = 0 nicht definiert, wenn mindestens eine der Zahlen r oder s negativ ist. Wenn x = 0 ist, aber die beiden Zahlen r und s nicht negativ sind, dann sind die beiden Seiten gleich null. Darum müssen wir nur noch positive Werte von x betrachten. Sei $\{r_i\}$ eine gegen r konvergierende Folge aus rationalen Zahlen. Laut dem ersten Teil des Beweises gilt die Gleichheit $x^{r_i} \cdot x^s = x^{r_i+s}$ für alle i. Außerdem ist $\{r_i + s\}$ eine gegen r + s konvergierende Folge aus rationalen Zahlen. Auf Grund der Definition der Potenz mit einem irrationalen Exponenten gelten die Gleichheiten $\lim x^{r_i} = x^r$ und $\lim x^{r_i+s} = x^{r+s}$. Nach dem Grenzübergang bekommen wir das zu beweisende Potenzgesetz 1.

3. Sind nur s oder die beiden Exponenten r und s irrational, dann ist der Beweis völlig analog zu 2.

Satz 5 (Potenzgesetz 1*): Sind die beiden Exponenten r und s rationale Zahlen mit *ungeraden Nennern*, dann gilt die Formel $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$ für alle Werte von x außer x = 0.
Ist mindestens *eine* der Zahlen r oder s entweder irrational oder rational mit einem *geraden Nenner*, dann gilt diese Formel nur für x > 0.

Der Beweis ist völlig analog zu dem von Satz 4.

Satz 6 (Potenzgesetz 2): Hat eine rationale Zahl r einen *ungeraden Nenner*, dann gilt die Formel $x^r \cdot y^r = (xy)^r$ für alle x und y, *außer* x = 0 oder y = 0, wenn r *negativ* ist.
Ist die Zahl r entweder *irrational oder* rational mit einem *geraden Nenner*, dann gilt diese Formel nur für nicht negative Werte von x oder y mit derselben Ausnahme, wenn r *negativ* ist.

Beweis.
1. Seien zuerst r rational und r = m/n in gekürzter Form. Ist mindestens eine der Zahlen x und y negativ, dann setzen wir voraus, dass n ungerade ist. Nur in diesem Fall kann eine Seite der Formel negativ sein. Wir potenzieren die beiden Seiten mit n, bekommen gleiche Werte und schließen daraus, dass die zu beweisende Formel richtig ist.

2. Sei jetzt r irrational. Wenn x oder y negativ ist oder im Fall x = 0 oder y = 0 der Exponent r negativ ist, dann ist die linke Seite nicht definiert. Falls x = 0 oder y = 0, aber r positiv ist, dann sind die beiden Seiten gleich null. Seien endlich x und y positiv und $\{r_i\}$ eine gegen r konvergierende Folge der rationalen Zahlen. Für alle i

gilt dann die Gleichheit $x^{r_i} \cdot y^{r_i} = (xy)^{r_i}$ und wir müssen nur noch in dieser Gleichheit auf Grund der Definition der Potenz mit einem irrationalen Exponenten zum Grenzwert übergehen.

Korollar: Ist die Potenzfunktion x^r für $x < 0$ definiert, dann gilt $\left|x^r\right| = |x|^r$ für alle Werte von x.

Beweis: Ist die Funktion x^r für $x < 0$ definiert, dann ist r eine rationale Zahl mit einem ungeraden Nenner. Die Größe $(-1)^r$ existiert in diesem Fall und kann nur die Werte ±1 annehmen; darum gilt für $x < 0$
$\left|x^r\right| = \left|(-|x|)^r\right| = \left|(-1)^r|x|^r\right| = \left|(-1)^r\right||x|^r = |x|^r$.

Satz 7 (Potenzgesetz 2*): Hat eine rationale Zahl r einen *ungeraden Nenner*, dann gilt die Formel $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$ für alle Werte von x und y *außer* y = 0 (und *auch außer* x = 0 im Fall, wenn r *negativ* ist).
Ist die Zahl r entweder irrational oder rational mit einem *geraden Nenner*, dann gilt diese Formel nur für nicht negative Werte von x und positive Werte von y mit derselben Ausnahme für x = 0, wenn r *negativ* ist.

Der Beweis ist völlig analog zu dem von Satz 6.

Beispiel 10: Berechnen Sie: a) $\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt{0{,}125} \cdot \sqrt[3]{0{,}\bar{1}}$

Lösungen: a) $\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{9} = (-1)^{1/3} 2^{2/3} 3^{1/3} 2^{3/2} 3^{2/3} = -2^{13/6} 3 = -12\sqrt[6]{2}$

b) Es gilt: $\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt{0{,}125} \cdot \sqrt[3]{0{,}\bar{1}} = (-1)^{1/3} 2^{2/3} 3^{1/3} 2^{-3/2} 3^{-2/3} = -2^{-5/6} 3^{-1/3} = -\sqrt[6]{162}/6$

Jetzt betrachten wir ausführlich das Potenzgesetz 3. Die übliche Formel $(x^r)^s = x^{rs}$ (*)
ist nicht immer gültig für negative Werte von x. Sind ihre beiden Seiten für $x < 0$ definiert, dann haben sie aber immerhin gleiche Beträge. Es gilt nämlich $\left|(x^r)^s\right| = \left|x^r\right|^s = (|x|^r)^s = |x|^{rs} = \left|x^{rs}\right|$ nach dem Korollar zum Potenzgesetz 2 und nach dem Potenzgesetz 3 für positive Basen. Aber es ist möglich, dass nur eine Seite der Formel (*) wie zum Beispiel im Fall $r = s = \sqrt{2}$ für $x < 0$ definiert ist? Außerdem können die Seiten von (*) unterschiedliche Vorzeichen haben.

Wir betrachten jetzt die Situation, wie man einen Ausdruck vereinfacht, der die Potenz einer Potenz enthält. Es ist leicht zu prüfen, dass die Funktion $(x^r)^s$ genau dann für $x < 0$ definiert ist, wenn eine der nächsten Bedingungen erfüllt ist:

a) r ist rational mit einem ungeraden Nenner und einem geraden Zähler oder
b) r ist rational mit einem ungeraden Nenner und einem ungeraden Zähler, und außerdem ist s rational mit einem ungeraden Nenner.

Im Fall a) kann s eine beliebige reelle Zahl sein. Ist s irrational, dann ist die Potenzfunktion x^{rs} für $x < 0$ nicht definiert, und die Formel (*) ist für solche x unsinnig.

Die folgenden Bruchdarstellungen seien gekürzt $s = p/q$, $r = m/n$ und $r \cdot s = k/l$.
Außerdem sei h(m) (bzw. h(q)) die Anzahl der Faktoren 2 in der Primzahlzerlegung der Zahl m (bzw. q).

Im Fall $h(m) < h(q)$ ist der Nenner l gerade. Die Potenzfunktion x^{rs} ist dann für $x < 0$ nicht definiert; und wieder ist die Formel (*) unsinnig.
Im Fall $h(m) = h(q) > 0$ sind der Zähler und der Nenner des Exponenten rs ungerade. Für $x < 0$ sind die Funktion x^{rs} negativ und die Funktion $(x^r)^s$ positiv. Darum gilt (nur für $x < 0$) die Gleichheit $(x^r)^s = -x^{rs}$. (**)
Nur in den verbleibenden Fällen $h(m) = h(q) = 0$ und $h(m) > h(q)$ ist die Formel (*) auch für $x < 0$ gültig.

Wir haben Potenzen mit negativen Basen und gebrochenen Exponenten zugelassen, um Lösungsverfahren von manchen Aufgaben zu vereinfachen. Der Bereich der Anwendung des Begriffes der Potenz wurde größer, die Formel (*) wird allerdings dann manchmal falsch. Im allgemeinen Fall von Potenzen mit komplexen Basen und Exponenten ist (*) meistens falsch.

Übrigens ist diese Formel sogar falsch in einigen an der Schule zugelassenen Fällen:

Beispiel 11: Es gilt $(x^2)^{1/2} = -x$ für $x < 0$.

Andererseits sind die Formeln (**) und (***) (siehe unten) genauso einfach wie die Formel (*). Manche Schwierigkeiten können entstehen, wenn wir im Rahmen einer Aufgabe unterschiedliche Formeln benutzen müssen. Mithilfe des Korollars zum Potenzgesetz 2 können wir oft zu nicht negativen Basen übergehen, für die die Formel (*) immer richtig ist.

Die Formel (**) kann unbequem sein, wenn wir eine Potenz umformen müssen, deren Basis ein unbekanntes Vorzeichen hat. Außerdem umfasst sie nicht die oben betrachteten besonderen Fälle, wenn die Funktion x^{rs} für $x < 0$ nicht definiert ist. Darum benutzen wir eine andere Formel in der nächsten Formulierung.

Satz 8 (Potenzgesetz 3): 1) Ist $x > 0$, dann gilt $(x^r)^s = x^{rs}$ für *beliebige reelle* Exponenten r und s. (*)
Ist $x = 0$, dann gilt diese Formel für beliebige nicht negative reelle Exponenten r und s.

2) Jetzt sei die Potenzfunktion $(x^r)^s$ für $x < 0$ definiert. Ist dabei s *rational* mit *einem ungeraden Nenner*, dann gilt die Formel (*) auch für alle $x < 0$. *Sonst* gilt die Formel $(x^r)^s = |x|^{rs}$ für alle $x \neq 0$ (***)
(und natürlich auch für $x = 0$, wenn r und s *zusätzlich nicht negativ* sind).

3) Die beiden Formeln (*) und (***) gelten zusammen für alle $x \neq 0$ genau dann, wenn r rational mit einem *ungeraden Nenner* und $r{\cdot}s$ rational mit einem *geraden Zähler* und einem *ungeraden Nenner* sind.

***Bemerkung:* Jede der Formeln (*), (**), (***) gilt für alle x < 0, falls sie für x = –1 gilt. Anstatt die Bedingungen ii) oder iii) zu prüfen, kann man x = –1 einsetzen und die gültige Formel herausfinden.**

Beweis des Satzes 8: Wieder betrachten wir vor allem den Fall, wenn die beiden Zahlen r und s rational sind. Ist $x = 0$, dann setzen wir außerdem voraus, dass r und s nicht negativ sind.
1) Für $x \geq 0$ sind die beiden Seiten der Formel (*) nicht negativ. Darum darf man die Bruchdarstellung $r \cdot s = mp/nq$ für die Berechnung der rechten Seite benutzen. Nach der Potenzierung der beiden Seiten mit nq bekommen wir auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Werte x^{mp}; darum ist die Formel (*) in diesem Fall richtig.

2) Seien jetzt $x < 0$ und die beiden Nenner n und q ungerade. Dann ist auch der Nenner l ungerade. Die beiden Funktionen $(x^r)^s$ und x^{rs} sind für $x < 0$ definiert und haben gleiche Beträge. Darum ist die Formel (*) gültig für $x < 0$, wenn sie auch gleiche Vorzeichen haben. Die Funktion $(x^r)^s$ ist dann und nur dann für $x < 0$ positiv, wenn mindestens einer der Zähler m oder p gerade ist. Genau in diesem Fall ist auch die Funktion x^{rs} positiv für $x < 0$, weil der Zähler k eine gerade Zahl ist.

Die Formel (***) ist offenbar gültig für $x > 0$. Für alle reellen x haben ihre Seiten gleiche Beträge. Die rechte Seite ist dabei nicht negativ. Darum gilt diese Formel für $x < 0$ genau dann, wenn die Funktion $(x^r)^s$ positiv auf dieser Menge ist. Diese Bedingung ist immer erfüllt außer im Fall, wenn n, q, m und p ungerade sind. Aber wir haben schon bewiesen, dass die Formel (*) in diesem Fall gilt.

3) Die Formeln (*) und (***) gelten genau dann zusammen für $x < 0$, wenn die beiden Funktionen $(x^r)^s$ und x^{rs} positiv auf dieser Menge sind. Aber das ist genau dann richtig, wenn k gerade und l ungerade sind.

Sei jetzt mindestens eine der Zahlen r oder s irrational. Die Funktion $(x^r)^s$ ist in diesem Fall genau dann für $x < 0$ definiert, wenn s irrational und r rational mit einem ungeraden Nenner und einem geraden Zähler sind. Für $x = 0$ sind die beiden Funktionen $(x^r)^s$ und x^{rs} genau dann zusammen definiert, wenn r und s nicht negativ sind. In diesem Fall ist die Formel (*) offenbar gültig. Für $x > 0$ sind die Seiten von (*) immer definiert.

Wir bezeichnen jetzt mit $\{r_i\}$ und $\{s_i\}$ gegen r und s konvergierende Folgen der rationalen Zahlen. Ist eine der Zahlen (zum Beispiel r) rational, dann nehmen wir $r_i = r$ für alle i an. Die Folge $\{r_i \cdot s_i\}$ besteht aus rationalen Zahlen und konvergiert gegen rs. Dann gilt $(x^{r_i})^{s_i} = x^{r_i s_i}$, falls x > 0 ist, oder $(x^{r_i})^{s_i} = |x|^{r_i s_i}$, falls x < 0 ist. Wir können jetzt unsere Behauptungen mithilfe des Grenzüberganges auf den beiden Seiten dieser Gleichheiten bekommen. Aber dieser Grenzübergang wird noch im Folgenden begründet:

Ist nur s irrational, dann brauchen wir für diese Begründung nur die Definition der Potenz mit *einem* irrationalen Exponenten. Laut dieser Definition ist der Grenzwert der linken Seite gleich $(x^r)^s$ und der Grenzwert der rechten Seite gleich x^{rs}.
Ist nur r irrational, dann werden wir für die Berechnung des Grenzwertes der linken Seite die Stetigkeit der Potenzfunktion f mit $f(t) = t^s$ an beliebiger Stelle t > 0 benutzen. Als die gegebene Stelle muss man dabei $t = x^r$ annehmen. Sind die beiden Zahlen r und s irrational, dann brauchen wir die Stetigkeit der Funktion f von zwei Variablen mit $f(u,v) = u^v$ an allen Stellen (u,v) mit u > 0. Als die gegebene Stelle muss man dabei $u = x^r$, v = s annehmen. Das beendet den Beweis.

Bemerkung: **Wir schlagen natürlich nicht vor, diesen Beweis für irrationale Exponenten im Unterricht durchzuführen.** Dgg. kann er möglicherweise für Referate usw. benutzt werden. Wir betonen nochmals die große Bedeutung dieses Stoffes: Die wichtigen Formeln $a^x = e^{x \ln a}$ und $\log_a x^k = k \log_a x$ enthalten in der Regel Potenzen mit irrationalen Exponenten und brauchen für ihre Beweise gerade das Potenzgesetz 3 in der vorliegenden Form.

Beispiel 12: Für alle reellen x gelten $(x^4)^{1/4} = |x|$, $(x^{2/5})^{3/2} = |x|^{3/5}$, $(x^3)^{1/3} = x$, $(x^2)^{\sqrt{2}} = |x|^{2\sqrt{2}}$. $(x^2)^{\sqrt{2}} = x^{2\sqrt{2}}$ ist falsch für x < 0, weil die rechte Seite nicht definiert ist.

Bemerkung: Oben haben wir zwei Definitionen der Potenz mit einem gebrochenen Exponenten betrachtet. Im Unterricht wird die eine davon als die Ausgangsdefinition und die andere als eine wichtige Eigenschaft betrachtet werden. Den Beweis dieser Eigenschaft kann man leicht mithilfe des Potenzgesetzes 3 (oder 2) erhalten. Benutzen wir die Definition 1´´ als Ausgangsdefinition, dann beweisen wir die nächste Folgerung.

Korollar: Aus der Definition 1'' $x^r := \sqrt[n]{x^m}$ folgt:

a) Für *ungerade* n stimmen die Funktionen $x^{m/n}$ und $(\sqrt[n]{x})^m$ unabhängig von m überein.
b) Ist n eine *gerade* Zahl, dann stimmen sie für x > 0 (und natürlich auch für x = 0, wenn m *nicht negativ* ist) überein.

Beweis:
Auf Grund des Potenzgesetzes 3 gilt sowohl für jedes ungerade n und alle reellen x (außer x = 0 im Fall m < 0) als auch für jedes gerade n und alle nicht negativen x (mit derselben Ausnahme) $(\sqrt[n]{x})^m = (x^{1/n})^m = x^{m/n}$.

Beispiele 13: 1) Berechnen Sie: $\left((-8)^{4/3}\right)^{1/2}$ 2) $\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^{2/3}\right)^{-3/4}$ 3) $\sqrt{\left(\sqrt[9]{\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2}\right)^{15}}$

Lösungen: 1) Hier ist r = 4/3, rs = 2/3, und die Formel (*) kann trotz der negativen Basis der Potenz verwendet werden. Mit dieser Formel bekommen wir $\left((-8)^{4/3}\right)^{1/2} = (-8)^{2/3} = 4$..

2) Hier ist r = 2/3, s = –1/2. Mithilfe der Formel (***) bekommen wir $((-1/4)^{2/3})^{-3/4} = (1/4)^{-1/2} = 2$.

3) Wir benutzen die Potenzen mit gebrochenen Exponenten und schreiben den gegebenen Term in $((x^{3/5})^{2/9})^{15/2}$ um. Alle Exponenten haben ungerade Nenner, deswegen ist die entsprechende Funktion für x < 0 definiert. Das Produkt der Exponenten ist gleich 1, darum ist sie gleich x für x ≥ 0. Ihr Wert für x < 0 ist dann gleich x oder

–x, weil jeweils *eine* der Formeln (*) oder (**) bei jedem Schritt einzusetzen ist. Um das richtige Vorzeichen zu finden, setzen wir x = –1 ein und bekommen den Wert 1. Darum ist der Termwert gleich –x für alle x < 0, und das Ergebnis lautet $\sqrt{\left(\sqrt[9]{\left(\sqrt[5]{x^3}\right)^2}\right)^{15}} = |x|^3$ für alle $x \in R$.

Beispiel 14: Welche der Funktionen f_1 mit $f_1(x) = (x^{\pi})^2$, f_2 mit $f_2(x) = (x^2)^{\pi}$, f_3 mit $f_3(x) = x^{2\pi}$ stimmen nun überein?

Lösung: f_1 und f_3 sind nur für $x \geq 0$ definiert und nehmen immer gleiche Werte an. Darum stimmen sie überein. Die zweite Funktion ist für alle reellen x definiert.

Beispiel 15: Lösen Sie die Gleichungen: 1) $\sqrt[3]{(x^2-2x+1)^2} = 16$ 2) $(x-1)^{2/3} = (x^2-1)^{1/3}$

1. Lösung der Gleichung 1): Zuerst schreiben wir die Gleichung in $(x-1)^{4/3} = 16$ um und potenzieren mit 3/4. Das ist eine äquivalente Umformung, weil Potenzen mit gleichen rationalen Exponenten und unterschiedlichen positiven Basen nicht gleiche Werte haben können. Hier sind r = 4/3, s = 3/4 und rs = 1. Darum darf man die Formel (***) verwenden. Sie ergibt die Gleichung $|x-1| = 8$, und die Lösungsmenge besteht aus x = –7 und x = 9.

2. Lösung der Gleichung 1): Wieder schreiben wir die Gleichung in $(x-1)^{4/3} = 16$ um, aber jetzt nehmen wir zuerst Beträge von den beiden Seiten (das ist eine äquivalente Umformung, weil die beiden Seiten nicht negativ sind) und verwenden das Korollar des Potenzgesetzes 2. Wir bekommen die Gleichung $|x-1|^{4/3} = 16$ und potenzieren ihre beiden Seiten mit 3/4. Wie oben ist das eine äquivalente Umformung. Die Anwendung der Formel (*) ergibt die Gleichung $|x-1| = 8$, und die Lösungsmenge besteht aus x = –7 und x = 9.

Lösung der Gleichung 2:. Wir potenzieren die beiden Seiten mit 3. Das ist eine äquivalente Umformung, weil die Kuben von unterschiedlichen Zahlen nicht gleich sein können. Mit der Formel (*) bekommen wir die Gleichung $(x-1)^2 = x^2 - 1$. Darum gilt entweder x – 1 = 0 oder x – 1 = x + 1 und die einzige Lösung ist x = 1.

Es folgen die Wurzelgesetze als besondere Fälle der entsprechenden Potenzgesetze:

Satz 9 (Wurzelgesetz 1): Ist n eine *ungerade* Zahl, dann gilt die Formel $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ für alle (reellen) x und y.
Ist n eine *gerade* Zahl, dann gilt diese Formel nur für nicht negative x und y.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Potenzgesetz 2 für r = 1/n.

Satz 10 (Wurzelgesetz 1*):
Ist n eine *ungerade* Zahl, dann gilt die Formel $\sqrt[n]{x} / \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x/y}$ für alle x und y außer y = 0.
Ist n eine *gerade* Zahl, dann gilt sie nur für nicht negative x und positive y.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Potenzgesetz 2* für r = 1/n.

Satz 11 (Wurzelgesetz 2): Sind die *beiden* Wurzelexponenten n und k *ungerade*, dann gilt die Formel $\sqrt[k]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nk]{x}$ für alle x.
Ist *einer* der Wurzelexponenten eine *gerade* Zahl, dann gilt sie nur für nicht negative x.

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Potenzgesetz 3 für r = 1/n, s = 1/k.

4. Eigenschaften der Potenzfunktionen mit negativen Basen

Die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^r$ und $r \neq 0$ ist genau dann für $x < 0$ definiert, wenn r eine rationale Zahl mit einem *ungeraden Nenner* ist.

Satz 12: Sei r eine rationale Zahl, deren gekürzte Form $r = m/n$ einen *ungeraden Nenner* hat. Ist m eine *gerade* (bzw. *ungerade*) Zahl, dann ist die Funktion $f(x) = x^r$ eine *gerade* (bzw. *ungerade*) Funktion.

Bemerkung: Wir erinnern an die folgende Definition: Die Funktion f heißt *gerade* (oder *ungerade*),
wenn $f(–x) = f(x)$ (bzw. $f(–x) = – f(x)$) für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt. Der Graph einer solchen Funktion ist achsensymmetrisch zur y- Achse (bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung).

Beweis des Satzes 12: Für beliebige Werte von x gilt $f(-x) = (-x)^{m/n} = (-1)^{m/n} x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{-1}\right)^m f(x) = (-1)^m f(x)$.

Der bewiesene Satz erleichtert die Untersuchung einer solchen Potenzfunktion. Um ihre Eigenschaften, die uns für $x > 0$ bekannt sind, auf die Menge R^- zu übertragen, genügt es, ihre Symmetrieeigenschaften zu benutzen.

Korollar 1 zu Satz 12: Jede Potenzfunktion ist stetig auf ihrem ganzen Definitionsbereich.

Korollar 2 zu Satz 12: Sei r eine rationale Zahl, deren gekürzte Form $r = m/n$ einen *ungeraden Nenner* hat.
a) Ist m eine *ungerade positive* Zahl, dann steigt die Funktion f streng monoton auf ihrem ganzen Definitionsbereich R, und es gelten $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b) Ist m eine *ungerade negative* Zahl, dann fällt diese Funktion auf ihrem ganzen Definitionsbereich R\{0} und es gelten $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$.
c) Ist m eine *gerade positive* Zahl, dann ist die Funktion f auf der ganzen Menge R definiert. Sie steigt streng monoton in $[0;+\infty[$, fällt streng monoton in $]-\infty;0]$, und es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
d) Ist m eine *gerade negative* Zahl, dann ist die Funktion f auf der Menge R\{0} definiert. Sie steigt streng monoton in $]-\infty;0[$, fällt streng monoton in $]0;+\infty[$, und es gelten $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Beispiele 16:
1) Wir verwenden diese Eigenschaften der Potenzfunktionen für die Lösung der Gleichung $x^r = a$, wobei $a \neq 0$ und $r \neq 0$ reelle Parameter sind.
2) Lösen Sie die Ungleichung $(x^{2/3} – 12)^{5/3} < –32$.
3) Lösen Sie die Ungleichung $(x^{2/3} – 1)^{-\pi} \geq 1$.

Lösungen:
1) Zuerst sei $a > 0$. Nach dem Potenzgesetz 3 ist die Zahl $a^{1/r}$ für alle Werte von r eine der Lösungen. Infolge der Monotonie der Funktion $f(x) = x^r$ auf der Menge R^+ hat die Gleichung keine anderen positiven Lösungen. Daraus folgt, dass sie überhaupt keine anderen Lösungen hat, wenn r eine irrationale Zahl oder eine rationale Zahl mit einem geraden Nenner ist.
Für $a < 0$ hat die Gleichung unabhängig von r keine positiven Lösungen, und im oben betrachteten besonderen Fall hat sie überhaupt keine Lösungen, weil negative Zahlen in diesem Fall nicht zur Wertemenge von f gehören.
Sei jetzt $r = m/n$ eine rationale Zahl mit einem ungeraden Nenner.
Ist m gerade, dann ist die Funktion f auch gerade und die Gleichung hat eine zu 0 symmetrische Lösungsmenge.
Im Fall $a > 0$ ist dann $–a^{1/r}$ auch eine der Lösungen und
im Fall $a < 0$ gibt es keine Lösungen.

Sei jetzt auch m ungerade. Nach dem Potenzgesetz 3 ist dann die Zahl $a^{1/r}$ eine der Lösungen unabhängig vom Vorzeichen von a, und die Gleichung hat keine anderen Lösungen, weil die Funktion f streng monoton auf ihrem ganzen Definitionsbereich ist.

2) Die Potenzfunktion $x^{5/3}$ steigt streng monoton auf der ganzen Zahlengeraden. Darum bekommen wir nach der Potenzierung mit 3/5 eine äquivalente Ungleichung. Die Formel (*) ist dabei verwendbar; man findet
$x^{2/3} - 12 < (-32)^{3/5} = -8$ und damit $x^{2/3} < 4$.
Die Potenzfunktion $x^{2/3}$ steigt streng monoton für $x \geq 0$ und fällt streng monoton für $x \leq 0$. Den Wert 4 nimmt sie an den Stellen 8 und – 8 an, darum ist die Lösungsmenge gleich dem Intervall]–8;8[.

3) Die Potenzfunktion $x^{-\pi}$ ist auf der Menge R^+ definiert, fällt streng monoton und nimmt den Wert 1 an der Stelle x = 1 an. Darum ist die gegebene Ungleichung den Ungleichungen $0 < x^{2/3} - 1 \leq 1$ und $1 < x^{2/3} < 2$ äquivalent. Die Lösungsmenge besteht also aus zwei halboffenen Intervallen $[-2\sqrt{2};-1[$ und $]1;2\sqrt{2}]$.

Satz 13 (Ableitung der Potenzfunktion): $(x^r)' = rx^{r-1}$ für alle x

Beweis: x > 0: Dann gilt $x^r = e^{r \ln x}$. Mithilfe der Kettenregel bekommen wir die zu beweisende Formel
$(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot r/x = r\,x^{r-1}$.
x < 0: Da offenbar für gerade Funktionen $f'(x) = (f(-x))' = -f'(-x)$ gilt (analog für ungerade Funktionen), folgt: Ist eine gerade (bzw. ungerade) Funktion differenzierbar für x > 0, dann ist sie auch für x < 0 differenzierbar und ihre Ableitung ist eine ungerade (bzw. gerade) Funktion.

Sei jetzt r = m/n die gekürzte Form von r. Ist die Funktion f für x < 0 definiert, dann ist n eine ungerade Zahl. Ist dabei auch m ungerade, dann ist die Funktion f eine ungerade Funktion, sonst ist sie gerade. Im ersten Fall ist die Funktion $g(x): = rx^{r-1} = r^{m-n/n}$ eine gerade Funktion, weil der Zähler m – n des Exponenten eine gerade Zahl ist. Sonst ist g eine ungerade Funktion. Also sind die beiden Funktionen f ’ und g zusammen gerade oder ungerade. Sie stimmen für x > 0 überein, darum stimmen sie auch für x < 0 überein. Es fehlt noch x = 0:
Wir setzen voraus, dass die Funktion f an der Stelle x = 0 definiert ist, d. h. r > 0 und f(0) = 0 sind. Dann gilt
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{r-1}.$$
Für r < 1 existiert dieser Grenzwert nicht. Für r = 1 ist er gleich 1, und für r > 1 ist er gleich 0. Also sind die Funktionen f ’und g auch an der Stelle x = 0 nur zusammen definiert und nehmen immer gleiche Werte an.

Der übliche Beweis der Schule besteht aus mehreren Schritten. Zuerst findet man die Ableitungen der Potenzfunktionen mit ganzen Exponenten. Danach dehnt man die gefundene Formel auf Wurzelfunktionen aus, und am Ende bekommt man mithilfe der Kettenregel die Ableitungen der Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten. Wollen wir nicht den Fall irrationaler Exponenten behandeln, dann ist dieser Weg auch geeignet, aber er ist nicht kürzer oder einfacher.

Zum Schluss dieses Abschnittes beweisen wir, dass die gebräuchliche Formel der Stammfunktion einer Potenzfunktion gültig bleibt, wenn diese Funktion auch für negative Werte ihres Argumentes definiert ist:

Satz 14: Für eine beliebige nicht negative rationale Zahl r mit ungeradem Nenner ist die Formel
$\int x^r\,dx = x^{r+1}/(r+1) + C$ für alle Intervalle der Zahlengeraden gültig. Für beliebige negative rationale r mit ungeradem Nenner, außer r = – 1, ist diese Formel für alle Intervalle gültig, die ganz links oder ganz rechts von null liegen.

Beweis: Sei $r \neq 1$ eine rationale Zahl mit ungeradem Nenner, dann hat auch die Zahl r + 1 einen ungeraden Nenner. Darum gilt die Formel $(x^{r+1}/r+1)' = x^r$ für alle reellen x, wenn $r \geq 0$ ist, oder für $x \neq 0$, wenn r < 0 ist.

Beispiel 17: Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} (x^{5/3} - 1)^{4/3} x^{2/3} dx$.

Lösung: Wir substituieren mit $u = x^{5/3} - 1$. Dann gilt $u' = 5/3x^{2/3}$. Wir erhalten

$$\int_{-1}^{1}(x^{5/3}-1)^{4/3}x^{2/3}dx=\frac{3}{5}\int_{-1}^{1}u^{4/3}(x)u'(x)dx=\frac{3}{5}\int_{-2}^{0}u^{4/3}du \;=\; \frac{3\cdot 3}{5\cdot 7}\cdot[u^{7/3}]_{-2}^{0} \;=\; \frac{9}{35}\cdot 2^{7/3}\approx 1{,}30\,.$$

Weitere entsprechende Beispiele wurden bereits im Vorwort betrachtet.

5. Übungen und Musterlösungen

Es folgen Aufgaben, zu deren Lösungen Potenzen mit negativen Basen und gebrochenen Exponenten benutzt werden. Manche Aufgaben enthalten auch Potenzen mit irrationalen Exponenten.

Aufgabe 1: Vereinfachen Sie:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{-4}\;\sqrt[6]{3}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{-9}\;\sqrt[6]{2}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{-6}\;\sqrt[6]{48}}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{-24}\;\sqrt[6]{3}}{\sqrt{12}}$ e) $\dfrac{\sqrt[6]{9}\;\sqrt{8}}{\sqrt[3]{-48}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{27}\;\sqrt{2}}{\sqrt[3]{-36}}$

Lösungen. a) $\dfrac{\sqrt[3]{-4}\sqrt[6]{3}}{\sqrt{2}}=(-1)^{1/3}\,2^{2/3-1/2}\,3^{1/6}=-\sqrt[6]{6}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{-9}\sqrt[6]{2}}{\sqrt{3}}=(-1)^{1/3}\,2^{1/6}\,3^{2/3-1/2}=-\sqrt[6]{6}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-6}\sqrt[6]{48}}{\sqrt{3}}=(-1)^{1/3}\,2^{1/3+2/3}\,3^{1/3+1/6-1/2}=-2$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{-24}\sqrt[6]{3}}{\sqrt{12}}=(-1)^{1/3}\,2^{1-1}\,3^{1/3+1/6-1/2}=-1$

e) $\dfrac{\sqrt[6]{9}\sqrt{8}}{\sqrt[3]{-48}}=(-1)^{-1/3}\,2^{3/2-4/3}\,3^{1/3-1/3}=-\sqrt[6]{2}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{27}\sqrt{2}}{\sqrt[3]{-36}}=(-1)^{-1/3}\,2^{1/2-2/3}\,3^{1/2-2/3}=-\,1/\sqrt[6]{6}$

Aufgabe 2: Finden Sie den Definitionsbereich zu f und vereinfachen Sie den zugehörigen Term:

a) $f(x) = ((x^{-2/3})^{\pi})^{3/5}$ b) $f(x) = ((x^{3/2})^{2/7})^{1/3}$ c) $f(x) = ((-x^{1/3})^{-3/2})^{2}$

d) $f(x) =((x^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}})^{-1/2}$ e) $f(x) = ((x^{-1/3})^{-3/5})^{5/9}$ f) $f(x) = ((-x^{1/2})^{2/3})^{3}$

Lösungen: a) Die Potenzfunktion $x^{-2/3}$ ist für alle $x \neq 0$ definiert und nimmt nur positive Werte an. Darum ist auch die Funktion $(x^{-2/3})^{\pi}$ für alle solche x definiert, und nach der Formel (***) gilt $(x^{-2/3})^{\pi} = |x|^{-2\pi/3}$. Nach der Potenzierung mit 3/5 bekommen wir $f(x) = |x|^{-2\pi/5}$ für alle $x \in D(f) = R\backslash\{0\}$.

b) Die Potenzfunktion $x^{3/2}$ ist für alle $x \geq 0$ definiert und nimmt nur positive Werte an. Darum sind auch die weiteren Potenzen für nicht negative x definiert und können mithilfe der Formel (*) berechnet werden. Für alle x aus $D(f) = R_0^+$ gilt $f(x) = x^{1/7}$.

c) Die Potenzfunktion $x^{-3/2}$ ist nur für $x > 0$ definiert. Darum ist der Definitionsbereich der Funktion $(-x^{1/2})^{-3/2}$ gleich R^-, und die Formel $(-x^{1/3})^{-3/2} = ((-x)^{1/3})^{-3/2} = (-x)^{-1/2}$ ist für alle $x \in R^-$gültig. Nach der Potenzierung mit 2 bekommen wir $f(x) = -\,1/x$ für alle $x \in R^-$.

d) Die Potenzfunktion $x^{-\sqrt{2}}$ ist nur für $x > 0$ definiert und nimmt nur positive Werte an. Die Basen von weiteren Potenzen sind positiv, und die Formel (*) ist verwendbar. Daraus folgt, dass die Gleichheit $f(x) = ((x^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}})^{-1/2} = x$ für alle $x \in D(f) = R^+$ gültig ist.

e) Die Potenzfunktion $x^{-1/3}$ ist für alle $x \neq 0$ definiert. Alle Exponenten haben ungerade Nenner, und die Formel (*) ist immer verwendbar. Die Antwort lautet: Für $x \in D(f) = R\backslash\{0\}$ gilt $f(x) = ((x^{-1/3})^{-3/5})^{5/9} = x^{1/9}$.

f) Die Potenzfunktion $x^{1/2}$ ist für alle nicht negativen x definiert. Die Formel $(-x^{1/2})^{2/3} = (-1)^{2/3}(x^{1/2})^{2/3} = x^{1/3}$ gilt für alle solche x. Darum ist für alle $x \in D(f) = R_0^+$ die Gleichheit $f(x) = ((-x^{1/2})^{2/3})^3 = x$ gültig.

Aufgabe 3: Lösen Sie die Gleichungen:

a) $2x^{1/3} + 5 = 1$ b) $(3x - 2)^{-3/5} = -1/8$ c) $4x^{2/3} - 1 = 8$ d) $(2x - 1)^{2/3} = 4$ e) $(x^2 - 9)^{4/3} = 16$

f) $\sqrt[5]{x}\Big/\sqrt[15]{x} + \sqrt[15]{x} - 2 = 0$ g) $x\sqrt[5]{x^3} = 2\sqrt[5]{x^2} + x$ h) $x^{4/5} - 7x^{-2/5} + 6x^{-1} = 0$ i) $13\sqrt{x \cdot \sqrt[5]{x}} - 14\sqrt[5]{x^3} = 1$

Lösungen:

a) Äquivalent sind hierzu $x^{1/3} = -2$ und $x = -8$.

b) Hat eine rationale Zahl r ungerade Zähler und Nenner, dann ist die Potenzierung der beiden Seiten mit r eine äquivalente Umformung einer beliebig gegebenen Gleichung. Darum besteht die nächste Kette aus äquivalenten Umformungen: $3x - 2 = (-1/8)^{-5/3} = -32$ und $x = -10$.

c) Sind die beiden Seiten einer Gleichung positiv für alle Werte der Unbekannten, dann ist die Potenzierung mit einem beliebigen Exponenten eine äquivalente Umformung. So erhalten wir den nächsten Lösungsweg:

$4x^{2/3} - 1 = 8 \Leftrightarrow x^{2/3} = 9/4 \Leftrightarrow (x^{2/3})^{3/2} = (9/4)^{3/2} = 27/8 \Leftrightarrow |x| = 27\big/8 \Leftrightarrow x = \pm 27/8$

d) $(2x - 1)^{2/3} = 4 \Leftrightarrow |2x - 1| = 8 \Leftrightarrow L = \{-7/2; 9/2\}$

e) $(x^2 - 9)^{4/3} = 16 \Leftrightarrow |x^2 - 9| = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1$ oder $x^2 = 17 \Leftrightarrow L = \{-\sqrt{17}; -1; 1: \sqrt{17}\}$

f) $\sqrt[5]{x}\Big/\sqrt[15]{x} + \sqrt[15]{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x \neq 0,\ x^{2/15} + x^{1/15} - 2 = 0$

Jetzt substituieren wir mit $t = x^{1/15}$ und lösen die entsprechende quadratische Gleichung.
Die Antwort ist $L = \{-2^{15}; 1\}$.

g) Die Exponenten 2/5; 1; 8/5 der gegebenen Gleichung $x\sqrt[5]{x^3} = 2\sqrt[5]{x^2} + x$ bilden eine arithmetische Folge; deshalb bekommen wir nach Umformungen eine quadratische Gleichung. Es gilt $x^{2/5}(x^{6/5} - x^{3/5} - 2) = 0$; deswegen ist entweder $x^{6/5} - x^{3/5} - 2 = 0$ oder $x = 0$. Die erste Gleichung gibt die Werte 2 und –1 für $x^{3/5}$; damit ist die Lösungsmenge $L = \{-1; 0; 2^{5/3}\}$.

h) Nach der äquivalenten Umformung $x^{4/5} - 7x^{-2/5} + 6x^{-1} = 0 \Leftrightarrow x^{9/5} - 7x^{3/5} + 6 = 0$ lösen wir diese kubische Gleichung und bekommen die Werte 1, 2 und –3 für $x^{3/5}$. Die Antwort ist $L = \{-3^{5/3}; 1; 2^{5/3}\}$.

i) Nach der äquivalenten Umformung $13\sqrt{x \cdot \sqrt[5]{x}} - 14\sqrt[5]{x^3} = 1 \Leftrightarrow 13(x^{6/5})^{1/2} - 14x^{3/5} = 1 \Leftrightarrow$ $13|x|^{3/5} - 14x^{3/5} = 1$ betrachten wir zwei Fälle:

Ist $x < 0$, dann gelten $-27x^{3/5} = 1$ und $x = -3^{-5}$.

Aus der Voraussetzung $x \geq 0$ folgt $-x^{3/5} = 1$ und $x = -1$. Das ist ein Widerspruch. Die Lösungsmenge ist also $L = \{-3^{-5}\}$.

Aufgabe 4: Lösen Sie die Ungleichungen:

a) $x^{2/3} \leq 4$ b) $x^{-\pi} > 1$ c) $x^{3/5} \geq -8$ d) $x^{-2/3} < 4$ e) $x^{\sqrt{2}} \leq 2$ f) $x^{-5/3} \geq -32$

Lösungen:

a) Die Potenzfunktion $x^{2/3}$ ist für alle reellen x definiert. Sie fällt streng monoton auf der Halbgeraden $x \leq 0$, steigt streng monoton auf der Halbgeraden $x \geq 0$ und nimmt den Wert 4 an den Stellen – 8 und 8 an. Darum ist die Antwort $L = [-8; 8]$.

b) Die Potenzfunktion $x^{-\pi}$ ist nur für positive x definiert. Sie fällt streng monoton auf dem ganzen Definitionsbereich und nimmt den Wert 1 an der Stelle 1 an. Darum ist die Antwort $L =]0; 1[$.

c) Die Potenzfunktion $x^{3/5}$ ist für alle reellen x definiert, steigt streng monoton auf dem ganzen Definitionsbereich und nimmt den Wert – 8 an der Stelle – 32 an. Darum ist die Antwort L = [– 32; +∞[.

d) Die Potenzfunktion $x^{-2/3}$ ist für alle reellen $x \neq 0$ definiert. Sie steigt streng monoton auf]–∞; 0[, fällt streng monoton auf]0; ∞[und nimmt den Wert 4 an den Stellen – 1/8 und 1/8 an.
Darum ist die Antwort L =]–∞; –1/8[∪]1/8; +∞[.

e) Die Potenzfunktion $x^{\sqrt{2}}$ ist nur für nicht negative x definiert. Sie steigt streng monoton auf dem ganzen Definitionsbereich und nimmt den Wert 2 an der Stelle $2^{1/\sqrt{2}} \approx 1{,}633$ an.
Darum ist die Antwort L = [0; $2^{1/\sqrt{2}}$].

f) Die Potenzfunktion $x^{-5/3}$ ist für alle reellen $x \neq 0$ definiert. Sie fällt streng monoton auf dem ganzen Definitionsbereich, ist negativ auf]–∞; 0[und positiv auf]0,+∞[. Den Wert – 32 nimmt sie an der Stelle – 1/8 an. Darum ist die Antwort L =]–∞; – 1/8] ∪]0; +∞[.

Aufgabe 5: An welchen Stellen ist die gegebene Funktion differenzierbar? Bestimmen Sie ihre Ableitung.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ c) $f(x) = x^2 / \sqrt[3]{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ e) $f(x) = \ln \sqrt[3]{x^2}$ f) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)^{\sqrt{2}}$

Lösungen:
a) Die Funktion f ist für alle x definiert und kann durch den Term $x^{2/3}$ angegeben werden. Sie ist nicht differenzierbar an der Stelle 0, weil der Exponent kleiner als 1 ist. Für $x \neq 0$ ist die Ableitung gleich
$f'(x) = 2/3 \cdot x^{-1/3} = 2/3 \cdot 1/\sqrt[3]{x}$.

b) Die Funktion f ist für alle x definiert und kann durch den Term $x^{8/3}$ angegeben werden. Sie ist an jeder Stelle differenzierbar, und ihre Ableitung ist gleich $f'(x) = 8/3 \cdot x^{5/3} = 8/3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

c) Die Funktion f ist für alle reellen $x \neq 0$ definiert und kann auf dieser Menge durch den Term $x^{4/3}$ angegeben werden. Die Ableitung ist gleich $f'(x) = 4/3 \cdot x^{1/3} = 4/3 \cdot \sqrt[3]{x}$, wobei aber $x \neq 0$ ist.

d) Die Funktion f ist für alle x definiert. Sie ist nicht differenzierbar an den Stellen x = ± 1, weil die Potenzfunktion $x^{1/3}$ nicht an der Stelle x = 0 differenzierbar ist. Die Ableitung existiert auf der Menge $x \neq \pm 1$ und kann mit der Kettenregel berechnet werden. Sie ist gleich $f'(x) = 1/3\,(x^2 - 1)^{-2/3} \cdot 2x = 2x / 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

e) Die Funktion f ist für alle $x \neq 0$ differenzierbar. Mithilfe der Kettenregel bekommen wir die Ableitung:
$$f'(x) = 1/\sqrt[3]{x^2} \cdot 2/3 \cdot x^{-1/3} = 2/3x$$

f) Die Potenzfunktion $\sqrt[3]{x^4} = x^{4/3}$ ist für alle x definiert. Sie nimmt nur nicht negative Werte an, darum ist auch die Funktion f für alle reellen x definiert. Nach der Formel (***) kann diese Funktion mit dem Term $|x|^{4\cdot\sqrt{2}/3}$ angegeben werden. Die Ableitung an der Stelle 0 können wir wie im vorigen Abschnitt mit der Definition der Ableitung bestimmen. Der Exponent $4 \cdot \sqrt{2}/3$ ist größer als 1, deswegen ist diese Ableitung gleich 0. An einer beliebigen Stelle $x \neq 0$ kann man die Ableitung mit der Kettenregel berechnen. Auf Grund der Formel

$|x|' = \text{sgn}(x)$ für $x \neq 0$, bekommen wir $f'(x) = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot |x|^{\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3} - 1} \cdot \text{sgn}(x)$. Die rechte Seite ist gleich 0 für x = 0; darum ist diese Formel auch für x = 0 gültig.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie jeweils die Stammfunktion der Funktion f:

a) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^2}$ b) $f(x) = x^3 \sqrt[3]{x^2}$ c) $f(x) = x(\sqrt[3]{x} - 1)$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1)$ e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{(x\sqrt[3]{x} + 1)}$ f) $f(x) = \sqrt[3]{x}(x \cdot \sqrt[3]{x} - 1)^2$

Lösungen: In allen Aufgaben ist die gegebene Funktion stetig auf der ganzen Zahlengeraden; darum existieren ihre Stammfunktionen auf dieser Menge.

a) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{8/3} dx = \frac{3}{11} x^{11/3} + C = \frac{3}{11} x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$

b) $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{11/3} dx = \frac{3}{14} x^{14/3} + C = \frac{3}{14} x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$

c) $\int x(\sqrt[3]{x} - 1) dx = \int (x^{4/3} - x) dx = \frac{3}{7} x^{7/3} - \frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{7} x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{2} + C$

d) $\int \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1) dx = \int (x^{2/3} + x^{1/3}) dx = \frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{3}{4} x^{4/3} + C = \frac{3}{5} x \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4} x \cdot \sqrt[3]{x} + C$

e) Wir formen zuerst den gegebenen Term um: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{(x\sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} + 1}$

Dann bemerken wir, dass die Ableitung des Nenners $u(x) = x^{4/3} + 1$ proportional zum Zähler ist, denn es gilt $u'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3}$. Darum substituieren wir im nächsten Integral mit u(x) und bekommen:

$$\int \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} + 1} dx = \frac{3}{4} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{3}{4} \ln|u(x)| + C = \frac{3}{4} \ln(x \cdot \sqrt[3]{x} + 1) + C$$

f) Wie bei g) bemerken wir, dass die Ableitung der Funktion $u(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} - 1 = x^{4/3} - 1$ gleich $u'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3}$ ist. Darum substituieren wir u(x) und bekommen:

$$\int \sqrt[3]{x}(x \cdot \sqrt[3]{x} - 1)^2 dx = \frac{3}{4} \int u^2(x)\, u'(x)\, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{u^3(x)}{3} + C = \frac{(x \cdot \sqrt[3]{x} - 1)^3}{4} + C$$

Literatur

Adams, Kruse, Sippel, Pfeiffer [1]: Mathematik zum Studieneinstieg. Grundwissen der Analysis für Wirtschaftswissenschaftler, Ingenieure, Naturwissenschaftler und Informatiker. 4. Auflage. Springer-Verlag Berlin 2002. ISBN 3-540-43193-4.

Benson, J., Dodge S. u. a. [1]: Teacher's Edition. Algebra 2 and Trigonometry. McDougal, Littel & Co. Evanston 1991. ISBN 0-8123-5869-4

Forster, O. [1]: Analysis I. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. 6. Auflage. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH Wiesbaden 2001. ISBN 3-528-57224-8

Griesel, H., Postel, H. [1]: Mathematik heute – 10. Schroedel Schulbuchverlag GmbH Hannover 1996. ISBN 3-507-83270-4.

Kuypers, W. [1]: Mathematikwerk für Gymnasien – Oberstufe – Analysis II, Pädagogischer Verlag Schwann Düsseldorf 1981 ISBN 3-590-12328-1

Schmid, A., Schweizer, W. [1]: Analysis Leistungskurs Gesamtausgabe, Ernst Klett Schulbuchverlag Stuttgart Düsseldorf Berlin Leipzig 1999 SBN 3-12-739650-3

Spieker, Th. [1]: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 8. Auflage. A. Stein's Verlagsbuchhandlung Berlin 1911(?).

Van Briel, W., Neveling, R., Riemer, W. [1]: Leistungskurs Analysis, Bayerischer Schulbuch-Verlag München 1985 ISBN 3-7627-3480-1

Walter, W. [1]: Analysis I. Grundwissen Mathematik, Band 3. Springer-Verlag Berlin 1985. ISBN 3-540-12780-1

Anschriften der Autoren:

Dr. Boris Averbukh
Mengsbergerstr. 6
34630 Gilserberg

Heino Günther
Kasselerstr. 13
34630 Gilserberg

Die Arbeit wurde erstmals am 8. Mai 2006 bei Mathematikinformation eingereicht.