Helmut König

Welchen Beitrag können Grundschulen zur Förderung mathematisch begabter Schüler leisten?

Unser 1991 gegründetes "Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch - naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler" hat sich zunächst mit der Begabtenförderung an Gymnasien befasst, obwohl uns klar war, dass eine *effektive* Begabtenförderung an den Grundschulen beginnen muss. Diese Aufgabe bildet seit 1997 einen Schwerpunkt unserer Arbeit.
Vor allem ging es darum, ein erprobtes Konzept der Begabtenförderung für die Klassenstufen 5 bis 10 auf die Klassenstufen 3 und 4 zu übertragen und anzupassen. Es wurden auch für diese Klassenstufen *Aufgabensammlungen* und *Anleitungen für AG-Leiter* entwickelt (siehe "Unser Literaturangebot" unter www.bezirkskomitee.de).

1. Unsere Auffassung zu "mathematische Begabung" und "Begabtenförderung"

Unter "mathematischer" Begabung verstehen wir eine Begabung für *formales und strukturelles Denken*, die keineswegs nur für die Mathematik sondern auch für die theoretische Physik und die Informatik unentbehrlich ist und die für die Naturwissenschaften, die Technik- und Wirtschaftswissenschaften und auch für viele Geisteswissenschaften äußerst nützlich ist. Die Förderung mathematisch Begabter hat keineswegs nur künftige Mathematiker im Auge sondern soll für das Studium aller genannten Wissenschaften nützlich sein.

Vererbt werden lediglich Begabungs*potenzen*, die sich nur dann zu einer Begabung entwickeln können, wenn zwei Voraussetzungen erfüllt sind: Die Begabungspotenz muss (möglichst frühzeitig) *entdeckt* werden, und dann muss sich eine zeitaufwändige und intensive Beschäftigung mit dem Begabungsgegenstand (hier der Mathematik) anschließen, die man (wie im Sport) *"Training"* nennen kann. Vermutlich werden zur Zeit weniger als 50% der vorhandenen mathematischen Begabungspotenzen entdeckt und entwickelt.
Wenn eine Begabungspotenz ausgeschöpft ist, dann führt (wie auch im Sport und im musischen Bereich) noch so vieles Training zu keiner weiteren Leistungssteigerung. Weder die Höhe einer Begabungspotenz noch der Grad ihrer Ausschöpfung sind messbar; was wir messen können, sind stets nur Leistungen. Nach unserer Erfahrung beruhen Höchstleistungen zu weniger als 50% auf ererbten Begabungspotenzen und zu mehr als 50% auf Trainingsfleiß.

Natürlich sollte die Förderung mathematisch begabter / interessierter Schüler primär ein Problem der Schule selbst sein. Dennoch werden m.E. hinsichtlich einer solchen Förderung bisweilen folgende *falsche Auffassungen* vertreten:
- Ein guter Unterricht reicht aus, um mathematisch begabte Schüler *hinreichend* zu fördern; Aktivitäten im außerunterrichtlichen Bereich sind entbehrlich.
- Breitenförderung ist keine notwendige Voraussetzung für Spitzenförderung.
- Erfolge bei Wettbewerben sind der *alleinige* Maßstab für die Güte der Begabtenförderung.

Solchen Auffassungen sollte man offensiv entgegentreten.
Allerdings muss man zugestehen, dass außerunterrichtliche Aktivitäten (wie zum Beispiel Arbeitsgemeinschaften oder Korrespondenzzirkel) keineswegs zwangsläufig Begabtenförderung als Ziel verfolgen müssen. Eine mathematische Arbeitsgemeinschaft kann natürlich auch das Ziel verfolgen, über den Unterricht hinausgehendes Wissen und Können zu vermitteln, "Teamwork" zu schulen oder nur ein interessantes Freizeitangebot zu sein. In diesem Beitrag wollen wir uns jedoch darauf beschränken zu zeigen, wie man vorgehen kann, wenn es um Begabtenförderung geht.

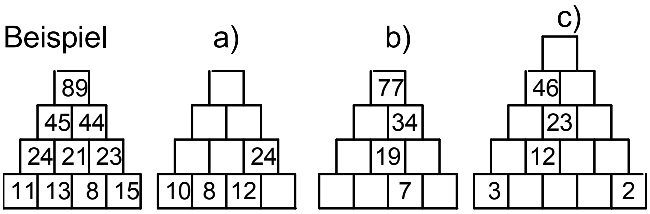
2. Zu den Zielstellungen

Wie bereits erwähnt, ist das möglichst frühzeitige *Entdecken von vorhandenen Begabungspotenzen* eine notwendige Voraussetzung für die Begabtenförderung. Natürlich ist dies auch im Unterricht möglich und sollte bereits in der Grundschule erfolgen. Wesentlich effektiver ist es jedoch, zu diesem Zweck *Knobelstunden* oder *Wettbewerbe* einzusetzen.
Im Regierungsbezirk Chemnitz bieten wir jedes Jahr allen Grundschulen Aufgaben für eine "Knobelstunde" an, die am Ende der 2. Klasse oder zu Beginn der 3. Klasse stattfinden sollte.

K n o b e l n   k a n n   v i e l   S p a ß   m a c h e n !

1) a) 53 + 35 = □ b) 37 + □= 82 c)
□ – 62 = 17
d) 81 – 7 + 18 = □ e) 23 + □ + 39 = 99 f) 78 -
□ - 23 = 37.

2) Bei einer Rechenpyramide steht die Summe zweier benachbarter Zahlen stets unmittelbar über diesen beiden Zahlen.
Überzeuge dich, dass dies bei dem links angegebenen Beispiel der Fall ist.
Fülle die leeren Felder der restlichen drei Rechenpyramiden.



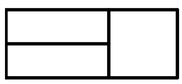
3) Trage die fehlenden Zahlen ein.
a) 1 3 5 7 9
11 13 ______ 19 21
b) 2 4 7 11 16 22
29 ___ ___ 56 67
c) 1 6 4 9 7
12 10 ______ 18 16
d) 72 73 63 65 55 58 48 ___ ___ 47 37

4) Bilde aus den Buchstaben **A , E , F , G , N , R , U** möglichst viele Wörter aus mindestens 3 Buchstaben, wobei jeder Buchstabe nur einmal vorkommen darf.
Beispiele: **AUF , FRAU , ANRUF , GRAUEN .**
....
....

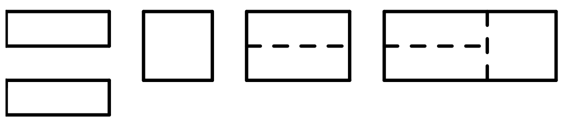
5) Lena hat zwei Schwestern und drei Brüder.
Ihr Bruder Uwe hat ___ Schwestern und ___ Brüder.

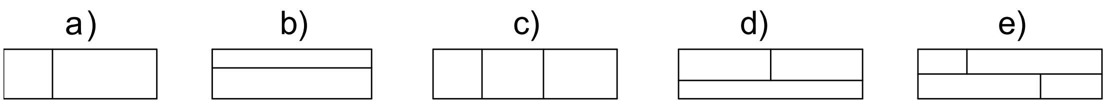
6) Wie viele Vierecke kannst du erkennen?

Beispiel



Man kann (3 + 1 + 1 =) 5 Vierecke erkennen.





__ Vierecke __ Vierecke __ Vierecke __ Vierecke __ Vierecke

Die Schulen erhalten außer dem kopierfähigen Arbeitsblatt mit den Aufgaben der Knobelstunde noch

Hinweise zum Durchführen der Knobelstunde

Ziel:
Angebot an alle Grundschulen:
Vorschlag zur Gestaltung einer "Knobelstunde", die in den ersten Wochen des Schuljahrs mit allen Schülern der Klassen 3 durchgeführt werden kann und die auch leistungsschwachen Schülern Spaß machen soll.
Die ausgewählten Aufgaben ermöglichen eine Auswertung in Hinblick auf das Fördern leistungsstarker Schüler ab Klasse 3 in jedem der 12 Kreise des Regierungsbezirks Chemnitz.

Kriterien zur Auswahl der Aufgaben
1. Für leistungsschwache Schüler werden so viele verschiedenartige leichte Aufgaben zum Knobeln angeboten, dass sich jeder Schüler Aufgaben aussuchen kann, an deren Lösung er mit Erfolg 30 Minuten lang knobeln kann.
2. Begabte Schüler lassen sich mit Hilfe der Aufgaben 2c), 3d) und 6d,e) sowie durch die Geschwindigkeit beim Lösen der restlichen Aufgaben entdecken.
3. Es gibt vermutlich nur sehr wenige Schüler, die alle Aufgaben vollständig lösen werden.

Vorschlag zur organisatorischen Gestaltung
1. Jede Schule (die das Angebot annimmt) legt einen Tag zu Beginn des Schuljahrs fest, an dem alle Klassen 3 die "Knobelstunde" durchführen.
2. Der Lehrer teilt die Arbeitsblätter und Konzeptpapier aus und liest die Aufgaben vor. Es folgen 25 Minuten selbständiges Arbeiten der Schüler, dann 15 Minuten Diskussion über die Lösungen.
3. Jeder Schüler schreibt auf das Arbeitsblatt seinen Namen, die Blätter werden eingesammelt und vom Lehrer durchgesehen (um die besten Leistungen zu erkennen) und dann zurückgegeben.
4. Die Schülerlösungen werden zwar korrigiert aber nicht bewertet.
5. Den Schulen wird empfohlen, auf der Grundlage der gezeigten Leistungen diejenigen Schüler zu finden, für die (in Abstimmung mit den Eltern) ab Klasse 3 eine Förderung an der Schule organisiert werden sollte.

Mitteilungen an die Schüler zu Beginn der Knobelstunde
1. Die ersten 30 Minuten der Unterrichtsstunde knobelt jeder für sich, die restlichen 15 Minuten wollen wir uns über die gefundenen Lösungen unterhalten.
2. Es werden so viele Aufgaben zum Knobeln angeboten, dass sich jeder von euch Aufgaben aussuchen kann, die ihm Spaß machen. Es werden so viele Aufgaben angeboten, dass wohl keiner von euch alle Aufgaben lösen wird. Jeder sollte jedoch versuchen, möglichst viele Teilaufgaben zu lösen.
3. Um die Aufgaben kennen zu lernen, beginnt mit dem Lösen der Aufgaben 1a,b,c), 2a) , 3a) und 4).
4. Die Lösungen werden nicht bewertet. Dennoch sollt ihr auf das Arbeitsblatt euren Namen schreiben und das Blatt abgeben, damit ich beurteilen kann, welche der Aufgaben euch besonders gefallen haben und welche Aufgaben ihr besonders gut gelöst habt.

Lösungen der Aufgaben

1) a) 88 ;   b) 45 ; c) 79 ; d) 92 ; e) 37 ; f) 18 .

2) a) 82; 38, 44; 18, 20; 12.   b) 43; 24, 15; 12, 12, 8 . c) 89; 43; 23, 20; 11, 11, 9; 8, 4, 7 .

3) a) 15, 17   b) 37, 46   c) 15, 13   d) 52, 42 .

4) ANGER, ANRUFE, ARG; AUE, AUF, AUGE, AUGEN / ENG, ERNA / FARN, FARNE, FERN, FRAGE, FRAGEN, FRAU, FRAUEN, FUGE, FUGEN, / GAREN, GARN, GAU, GAUNER, GENAU, GENF, GENUA, GERN, GNU, GRAU, GRAUEN, / NAGER, NUR / RAU, RAUFE, RAUFEN, RUF, RUFEN / UFER, URNE /

5) 3 Schwestern, 2 Brüder.

6) a) (2+1 =) 3 ;   b) (2+1 =) 3 ;   c) (3+2+1 =) 6 ;
d) (3+1+1 =) 5 ;   e) (4+2+1 =) 7.

Dem frühzeitigen *Entdecken von Begabungspotenzen* dient auch die im Dezember stattfindende *1. Stufe der Mathematikolympiade* für die Klassen 2 bis 4, an der im Schuljahr 2004/05 14382 Schüler aus dem Bezirk teilgenommen haben. An der von Januar bis März auf Kreisebene stattfindenden *2. Stufe der Mathematikolympiade* für die Klassen 3 und 4 haben in diesem Schuljahr 804 Schüler teilgenommen. In beiden Fällen handelt es sich um Klausurwettbewerbe, die erfahrungsgemäß den Schülern besonders viel Spaß bereiten.
Schließlich gibt es im Bezirk noch weitere 6 *regionale Wettbewerbe,* an denen insgesamt 229 Schüler aus den Klassen 3 oder 4 teilgenommen haben.

Es sei hervorgehoben, dass für uns Wettbewerbe niemals Selbstzweck sondern stets nur Hilfsmittel der Begabtenförderung sind. Sie erweisen sich jedoch als ein besonders effektives Hilfsmittel, Schüler zu motivieren, viel Freizeit in eine intensive Beschäftigung mit Mathematik zu investieren, damit sich vorhandene *Begabungspotenzen* auch *zu einer Begabung entwickeln* können.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese "Trainingszeit" in Arbeitsgemeinschaften, in Korrespondenzzirkeln oder in anderen Förderformen sinnvoll zu füllen. Oft spielt das Vermitteln von Wissen und Können, das über den Schulstoff hinausgeht, eine entscheidende Rolle. In unseren Korrespondenzzirkeln Mathematik spielt ab Klasse 7 das Vermitteln der Fähigkeit, sich aus "Literatur" selbständig Wissen und Können anzueignen, eine sehr wichtige Rolle, weil wir überzeugt sind, dass sich dadurch die "Studierfähigkeit" der Teilnehmer entscheidend verbessern lässt. Für Grundschüler wäre eine derartige Zielstellung jedoch wenig sinnvoll.

Wir haben uns für folgende ***spezielle Zielstellung*** entschieden: *Entwickeln der Fähigkeit zum problemlösenden Denken* durch bewusstes *Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen.* Dabei orientieren wir uns an den Vorschlägen von G. POLYA, den man als den Vater der modernen Heuristik bezeichnen kann.
Durch die Analyse des Vorgehens erfolgreicher Problemlöser (wobei POLYA neben seinen eigenen Erfahrungen vor allem Arbeiten von DESCARTES und EULER nutzte) lassen sich erfolgversprechende heuristische Vorgehensweisen entdecken und in Form von Fragen oder Impulsen festhalten und vermitteln (vgl. die "Tabelle" in Polya [1] sowie Polya [2]).

Das von POLYA vorgeschlagene Vorgehen ist nicht unumstritten. Man könnte befürchten, dass durch den Versuch, das Problemlösen bis zu einem gewissen Grad zu lehren, die Entwicklung der Kreativität begabter Schüler behindert wird.
Wir teilen diese Befürchtungen nicht, wenn das in den Abschnitten 4. und 5. beschriebene didaktische Vorgehen beachtet wird.
Vor allem hochbegabte Schüler sind durchaus in der Lage, selbständig heuristische Vorgehensweisen zu entdecken. Daher sollte man vor allem solchen Schülern auch sehr schwierige problemhafte Aufgaben zum selbständigen Lösen stellen, ohne dass sie dabei unter Zeitdruck stehen, und man sollte stets in Erfahrung bringen, welche Lösungsversuche sie unternommen haben. Erst wenn sie trotz intensiver Anstrengungen eine Aufgabe nicht selbständig lösen konnten, sollte man sie mit einer erfolgversprechenden heuristischen Vorgehensweise vertraut machen. Auf diese Weise kann die Entwicklung ihrer Kreativität auf einem höheren Niveau fortgeführt werden.

Durch die Analyse problemhafter Aufgaben, wie sie im außerunterrichtlichen Bereich oder in Wettbewerben für Schüler der Klassen 5 bis 10 gestellt werden, haben wir ein entsprechendes heuristisches Regelsystem entwickelt und erprobt (vgl. König [1]). Von diesem Regelsystem ausgehend haben wir durch Analysen von Aufgabensammlungen für Grundschüler festgestellt, welche heuristische Vorgehensweisen bereits in der Grundschule vermittelt werden können.
Im Gegensatz zu algorithmischen Verfahren sind heuristische Vorgehensweisen nicht resultativ, d.h. sie garantieren keinen Lösungserfolg sondern erhöhen lediglich die Wahrscheinlichkeit zu einer Lösung zu gelangen. Es gibt hier auch keine Folgen von Anweisungen sondern nur Impulsblöcke, bei denen die Reihenfolge des Einsatzes nicht vorgegeben ist.
Um die Entwicklung der Kreativität der Schüler zu fördern und nicht etwa zu beeinträchtigen, ist jede "Gängelei" bei der Suche nach einem Lösungsweg zu vermeiden. Hierauf werden wir später noch näher eingehen.

3. Zu den Inhalten

Die *"Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften – Klasse 3"* ist für die Hand der Schüler bestimmt und enthält 115 Aufgaben, die in drei Blöcke "leicht", "mittel", "schwer" unterteilt sind. In jedem Block sind die Aufgaben nach Stoffgebieten geordnet: Arithmetik, Größen, Sachaufgaben, Geometrie, Sonstiges (Kombinatorik, Knobelaufgaben).
Die *"Arbeitsgemeinschaften Klasse 3 – eine Anleitung für AG-Leiter"* enthält außer den Lösungen ausführliche Hinweise zum didaktischen Vorgehen beim Behandeln von 9 Aufgabengruppen. Jede Aufgabe wurde in Hinblick auf ihre "heuristischen Potenzen" analysiert.
Als Beilage sind *"16 Aufgabenblätter für Klasse 3"* mit 112 Aufgaben beigefügt, die nur für die Hand des Lehrers bestimmt sind, der aus ihnen *Arbeitsblätter für die Hand des Schülers* herstellen sollte. Die jeweils 7

Aufgaben eines solchen Aufgabenblattes sind nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Sie wurden so ausgewählt, dass man mit Hilfe von Aufgabenfolgen bestimmte heuristische Vorgehensweisen vermitteln kann.

Auf der letzten Seite findet man folgende ***"Hinweise zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen"***, bei denen angegeben wird, welche dieser Aufgaben für das Vermitteln heuristischer Hilfsmittel, Strategien oder Prinzipien geeignet sind:

Die erste Aufgabe eines jeden Aufgabenblatts ist eine ***algorithmisch lösbare Aufgabe*** und dient dem Überprüfen bzw. dem Festigen von ***Fertigkeiten*** im Rechnen.

1. Einführen von **zweckmäßigen** ***Bezeichnungen***; Verwenden von ***Variablen***
Aufgaben: 3.5), 4.5), 5.5), 6.5), 7.5), 8.1), 8.7), 10.5), 10.6), 11.2), 12.2), 13.2), 4.2), 15.2), 15.5), 15.7), 16.2).

2. Verwenden von ***Tabellen***
Aufgaben: 3.3), 4.3), 5.3), 5.5), 6.3), 6.5), 7.5), 8.3), 9.5), 10.2), 10.5), 10.6), 11.6), 11.7), 12.4), 13.3).

3. Verwenden von ***Skizzen*** und ***Mengendiagrammen***
Aufgaben: 11.5), 12.4), 13.4), 14.4), 15.5), 16.4).

4. ***Systematisches Probieren;*** systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle;
Einsatz von ***Ordnungsprinzipien*** (z.B. lexikografisches Ordnen)
*Aufgaben:*1.2), 1.4), 2.2), 2.3), 3.7), 4.4), 5.4), 6.1), 6.4), 7.3), 7.4), 7.7), 8.1), 8.4), 8.5), 8.7), 9.4), 9.7), 10.2), 10.3), 10.4), 11.3), 11.4), 12.4), 13.6), 13.7), 14.2), 15.2), 16.4), 16.7).

5. ***Vorwärtsarbeiten***; ***Folgern*** aus (gegebenen) Bedingungen
Aufgaben: 1.3), 3.3), 3.7), 4.2), 4.3), 6.3), 6.2), 6.3), 7.2), 8.2), 8.3), 8.5), 8.7), 9.2), 9.3), 10.2), 10.3), 10.5), 10.6), 11.2), 11.3), 11.6), 11.7), 12.2), 13.2), 13.3), 13.4), 14.2), 14.4), 14.6), 14.7), 15.2), 15.3), 15.5), 16.2), 16.3), 18.6), 16.7).

6. ***Rückwärtsarbeiten***
Aufgabe 9.5).

7. ***"Von rückwärts her rechnen"***
Aufgaben: 4.6), 6.6), 8.6).

8. Das Entdecken (Vermuten) von ***Gesetzmäßigkeiten***
Aufgaben: 1.5), 2.4), 2.5), 4.7), 5.2), 10.7), 12.3), 12.7), 13.5), 13.6), 14.3), 14.5).

9. Zurückführen auf ***Hilfsaufgaben***
Aufgaben: 3.4), 6.7), 7.6), 13.7).

10. ***Umformulieren*** von Aufgaben (Problemtransformation)
Aufgaben: 5.6), 5.7), 6.7), 13.7).

11) Ausnützen von ***Analogien***
10.3), 11.3), 12.4), 16.4).

12) ***"Findigkeit"***
Aufgaben: 1.6), 2.6), 2.7), 3.2), 3.6), 7.7), 9.6), 9.7), 12.6), 13.5), 14.5), 15.4), 15.6).

Die letztgenannte Gruppe von Aufgaben dient nicht dem Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen sondern vorwiegend dem Erkennen und Einschätzen von Begabungspotenzen.

Die Anzahl der Aufgaben und der Unterschied im Schwierigkeitsgrad wurde so groß gewählt, dass folgende ***Anwendungsbereiche*** möglich sind:
- Förderung von leistungsstarken Schülern durch *innere Differenzierung im Unterricht*
- *Förderunterricht* für leistungsstarke Schüler im Rahmen der vorgegebenen Stundentafel
- *Schularbeitsgemeinschaften* als außerunterrichtliches Angebot
- *Überschulische Arbeitsgemeinschaften* für Schüler aus mehreren Grundschulen
- *Individuelle Förderung* hochbegabter Schüler

In Abhängigkeit vom Anwendungsbereich muss der Lehrer eine geeignete *Auswahl von Aufgaben treffen* und ein geeignetes didaktisches Vorgehen wählen.

In vielen Klassen dürfte es Schüler geben, die im Unterricht unterfordert sind, die sich langweilen und daher manchmal auch den Unterricht stören. Es ist ein didaktischer Fehler, solchen Schülern nur eine größere Anzahl von algorithmisch lösbaren Aufgaben zu stellen. Weitaus sinnvoller ist es, hier problemhafte Aufgaben aus den Aufgabensammlungen im Rahmen einer *inneren Differenzierung* einzusetzen.
Im *Förderunterricht*, in *Schularbeitsgemeinschaften* und in *überschulischen Arbeitsgemeinschaften* ist eine planmäßige Begabtenförderung möglich, die sich an den oben genannten Zielen orientiert, wobei durch unterschiedliche Aufgabenauswahl eine Anpassung an die unterschiedlichen Leistungsniveaus und die unterschiedlichen Arbeitszeiten (45 oder 90 Minuten) erforderlich ist. Ausgangpunkt können die (nur für den Lehrer bestimmten) 16 Aufgabenblätter sein, auf deren Grundlage er *Arbeitsblätter* für die Hand des Schülers herstellen kann.

Betrachten wir das

A u f g a b e n b l a t t 3

1)
Addiere zur Zahl 17 die 16 . Multipliziere das Resultat mit 7 . Subtrahiere vom Resultat die 39 . Dividiere das Resultat durch 3 .
Welche Zahl hast du erhalten?

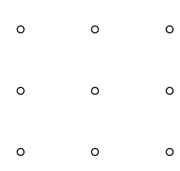
2)
Jeder von 4 Brüdern in der Familie sagt: "Ich habe zwei Schwestern."
Wie viele Kinder gehören zur Familie ?

3)
Markus fährt mit dem Fahrrad zur Schule. Um 7.45 Uhr hat er die halbe Strecke zurückgelegt. Der Unterricht beginnt 8.00 Uhr. Wenn er mit gleichem Tempo weiterfährt, so ist er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn in der Schule.
a) Wie viele Minuten Fahrzeit benötigt Markus für die gesamte Strecke ?
b) Wann fuhr er zu Hause los ?

4)
Karsten behauptet, dass man einen Preis von 10 Cent mit 8 verschiedenen Zusammenstellungen von Münzen bezahlen kann. Uta behauptet, es ginge nur auf 6 Arten, während Peter sogar 11 Möglichkeiten kennen will.
Wer hat hier Recht? Lege eine Tabelle an !

5)
Vier Mädchen sollen sich in einer Sportgruppe der Größe nach aufstellen. Es ist bekannt:
(a) Anne ist kleiner als Britta.
(b) Doris ist kleiner als Christa.
(c) Britta ist kleiner als Doris.
(d) Christa ist größer als Anne.
In welcher Reihenfolge müssen sich die Schülerinnen aufstellen?

6)
Zeichne 4 Geraden so, dass jeder Punkt des nebenstehenden Bildes auf mindestens einer dieser Geraden liegt und keine der Geraden zu einer anderen parallel ist!



Gib drei verschiedene Lösungen an!

7)
Frank nimmt in jede Hand eine Anzahl Kugeln, keine Hand bleibt leer. Er verrät:
"In einer Hand habe ich eine gerade Anzahl Kugeln, in der anderen Hand eine ungerade Anzahl."
Michael sagt: "Multipliziere die Anzahl der Kugeln in der linken Hand mit 4 , die Anzahl der Kugeln in der rechten Hand mit 5 und nenne die Summe der beiden Produkte!"
a) Wie kann man, wenn die Summe genannt wird, mit Sicherheit sagen, in welcher Hand die gerade und in welcher Hand die ungerade Anzahl Kugeln ist?
b) Wie kann man, wenn die Summe 60 genannt wird, mit Sicherheit die beiden Anzahlen der Kugeln herleiten, die Frank in der linken Hand und in der rechten Hand hat?

In Schularbeitsgemeinschaften (nicht aber im Förderunterricht) wird man auf die algorithmisch lösbare Aufgabe 1) verzichten können. Dagegen dürfte die Aufgabe 7) allenfalls für überschulische Arbeitsgemeinschaften, auf jeden Fall aber für die individuelle Förderung hochbegabter Schüler geeignet sein.

Arbeitsblätter für die Hand des Schülers sind in Grundschulen ein bedeutsames didaktisches Hilfsmittel, das auch im außerunterrichtlichen Bereich eingesetzt werden sollte. Ob man sie bereits am Anfang der Stunde austeilt oder erst am Ende, ist nicht so bedeutsam. Wichtig ist nur, dass wesentliche Ergebnisse festgehalten und so für die folgenden AG-Stunden stets verfügbar sind.

Betrachten wir folgenden Vorschlag für ein

A r b e i t s b l a t t 3 für Schularbeitsgemeinschaften, Klasse 3

1)
Jeder von 4 Brüdern in der Familie sagt: "Ich habe zwei Schwestern."
Wie viele Kinder gehören zur Familie ? ...... Kinder gehören zur Familie

2**)**
Markus fährt mit dem Fahrrad zur Schule. Um 7.45 Uhr hat er die halbe Strecke zurückgelegt. Der Unterricht beginnt 8.00 Uhr. Wenn er mit gleichem Tempo weiterfährt, so ist er 5 Minuten vor Unterrichtsbeginn in der Schule.

a) Wie viele Minuten Fahrzeit benötigt Markus für die gesamte Strecke ? ..... Minuten.

b) Wann fuhr er zu Hause los ?

Um ....

Zusatzaufgabe: Aufgabensammlung, S. 12, Nr. 79)

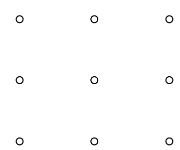
3)
Karsten behauptet, dass man einen Preis von 10 Cent mit 8 verschiedenen Zusammenstellungen von Münzen bezahlen kann. Uta behauptet, es ginge nur auf 6 Arten, während Peter sogar 11 Möglichkeiten kennen will.
Wer hat hier Recht? Lege eine Tabelle an ! .... hat recht.
Zusatzaufgabe: Aufgabensammlung S.15, Nr. 95

4)
Vier Mädchen sollen sich der Größe nach aufstellen. Es ist bekannt:

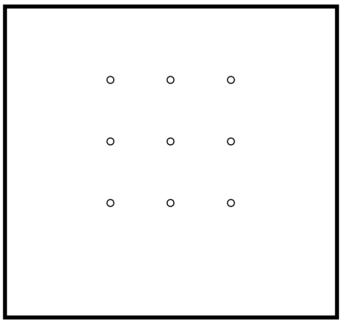
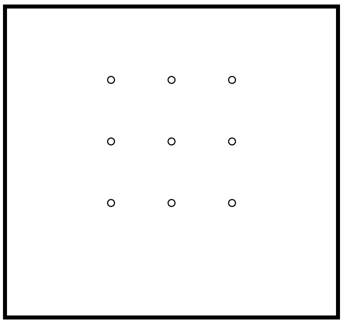
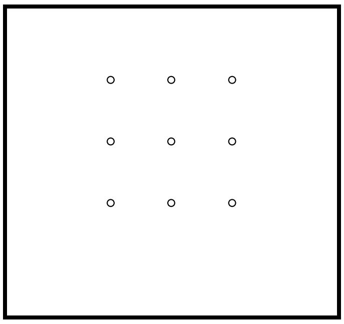
(a) Anne ist kleiner als Britta.
(b) Doris ist kleiner als Christa.
(c) Britta ist kleiner als Doris.
(d) Christa ist größer als Anne.

In welcher Reihenfolge müssen sich die Schülerinnen aufstellen? ....

Zum Knobeln!
Zeichne 4 Geraden so, dass jeder Punkt des nebenstehenden Bildes auf mindestens einer dieser Geraden liegt und keine der Geraden zu einer anderen parallel ist!

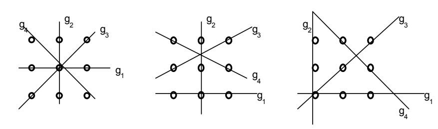


Gib drei verschiedene Lösungen an! (Zeichne zunächst nur mit Bleistift!)

Wir gehen hier davon aus, dass Schularbeitsgemeinschaften 14-tägig stattfinden und 90 Minuten dauern. Man erkennt, dass aus dem Aufgabenblatt 3 die Aufgaben 1) und 7) weggelassen wurden, dass Aufgabe 6) als "Knobelaufgabe" deklariert wurde und dass Leerstellen oder Tabellen zum Eintragen der Resultate vorgesehen sind. Ferner ist wichtig, dass für die leistungsstärksten Schüler stets "Zusatzaufgaben" angeboten werden.
Wir halten es für sehr wichtig, dass Erfahrungen mit dem Einsatz solcher Arbeitsblätter festgehalten und weitergegeben werden. Dies könnte etwa in folgender Form geschehen:

Arbeitsblatt 3)

Aufg.	Zeit (in min)	Zielstellung	didaktisches Vorgehen	Resultat
3.1)	3 - 5	Lockerer Auftakt; Begabtenfindung.	"Wer findet die Lösung am schnellsten?"	6 Kinder
3.2) Z79)	30 - 40	Einführung "Tabellen als Hilfsmittel beim Vorwärtsarbeiten".	Lösungsfindung in 2 Etappen: Tabelle aufstellen / ausfüllen; Eintragen in Arbeitsblatt; Lösungsdarstellung (mdl.).	a) 20 Minuten b) 7.35 Uhr 180 Personen
3.3) Z95)	20 – 30	Übung "Tabellen als Hilfsmittel beim systematischen Probieren".	Nachträglich feststellen lassen, dass es sich um die 10 Möglichkeiten aus Aufg. 1.4) handelt, zusätzlich "10 Cent".	Peter hat recht: 11 Möglichkeiten 12 Zahlen
3.4)	10 – 20	"Übersetzen in die Symbolsprache" ; Vorwärtsarbeiten.	Lösungsweg in Arbeitsblatt eintragen lassen; nachweisen lassen, dass (d) aus (a), (b), (c) ableitbar, also überflüssig.	a < b < d < c , also Anne, Britta, Doris, Christa.
3.5)	Rest	Begabtenfindung	"Wer findet 2 oder gar 3 Lösungen?"	

Aufgabe 2)
Falls viele Schüler die Aufgabe ohne eine Tabelle (sondern etwa m.H. einer Skizze) selbständig lösen, ist diese Aufgabe für das Einführen der Tabellenmethode ungeeignet!
In diesem Fall verwende man die Aufgabe Z95) für diesen Zweck.

	Uhrzeit	Fahrzeit
Abfahrt	**7.35** (5)	
		10 min (3)
halbe Strecke	7.45	
		10 min (2)
Ankunft	7.55 (1)	
Unterrichtsbeginn	8.00	
insgesamt		**20 min** (4)

Aufgabe 4)
(a) Anne ist kleiner als Britta.
(b) Doris ist kleiner als Christa.
(c) Britta ist kleiner als Doris.
(d) Christa ist größer als Anne.

A < B	(c)	A < B < D		
D < C		A < B < D	(b)	A < B < D < C
B < D				
C > A	also	A < C		(überflüssig)

4. Bemerkungen zur Hochbegabtenförderung durch individuelle Betreuung

Als sehr effektives Hilfsmittel zur Organisation der Begabtenförderung im Bezirk Chemnitz hat sich die Berufung von "Kreisbeauftragten für Begabtenförderung an Grundschulen" durch die Regionalschulämter Chemnitz und Zwickau erwiesen. Unter Leitung von Frau Motl, der Leiterin der Arbeitsgruppe Grundschulen unseres Bezirkskomitees, treffen sich die 12 Beauftragten zweimal im Jahr zu einer Beratung.

Nach der 2. Stufe der Mathematikolympiade für Grundschulen meldet jeder Kreis 3 bis 5 besonders leistungsfähige und vermutlich hochbegabte Schüler aus der Klassenstufe 3, die sich (im Einverständnis mit ihren Eltern) bereit erklärt haben, im nächsten Schuljahr als Frühstarter an der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade (Kreisolympiade) für Klasse 5 teilzunehmen. Diese Schüler erhalten als individuellen Betreuer eine Lehrkraft, die sie auf diesen Frühstart vorbereitet. Als Arbeitsmaterial stellt das Bezirkskomitee die (für diesen Zweck kopierten) Aufgaben und Lösungen der 2. Stufe der 35. bis 44. Mathematik-Olympiade für Klasse 5 zur Verfügung. Die Kreisbeauftragten für Begabtenförderung an Gymnasien organisieren die Teilnahme dieser Schüler an der im November stattfindenden Kreisolympiade.
In der Regel sollen diese Schüler an einer Schularbeitsgemeinschaft oder einer überschulischen Arbeitsgemeinschaft teilnehmen, und meist wird der AG-Leiter als Betreuer ausgewählt. Die individuelle Betreuung **soll nicht in einem zusätzlichen Vermitteln von Wissen und Können bestehen**. Vielmehr sollen diese Schüler motiviert werden, im gesamten Schuljahr viel Zeit in das *selbständige* Lösen geschickt ausgewählter Olympiadeaufgaben zu investieren. In regelmäßigen Abständen (etwa am Ende der AG-Stunden) sollen die Lösungsversuche des Schülers besprochen und neue Aufgaben ausgegeben werden.
Nach dem Frühstart bei der Kreisolympiade wird diesen Schülern ein Frühstart bei der 1. Stufe des Adam-Ries-Wettbewerbs (ARW) für Schüler der Klasse 5 angeboten (siehe www.bezirkskomitee.de). Dies bedeutet die Teilnahme an einem Hausaufgabenwettbewerb von Dezember bis Januar und an einem Klausurwettbewerb im Februar und führt zu einem ersten Kontakt mit dem Gymnasium, das diese Schüler im nächsten Schuljahr besuchen wollen.

Im Schuljahr 2004/05 haben 62 Schüler aus der Klassenstufe 4 als Frühstarter an der Kreisolympiade in Klasse 5 teilgenommen. 52 dieser Schüler waren auch Frühstarter bei der 1. Stufe des ARW, drei von ihnen haben die 2. Stufe, einer von ihnen hat sogar die 3. Stufe des ARW erreicht. Diese 52 Schüler haben im April vom Bezirkskomitee die Aufgaben der 2. Stufe der 34. bis 43. Mathematik-Olympiade für Klasse 6 erhalten, um sich auf einen eventuellen Frühstart bei der Kreisolympiade in Klasse 6 vorbereiten zu können. Die Namen dieser Schüler wurden den Gymnasien mitgeteilt, die die individuelle Betreuung dieser Schüler fortsetzen und sie vor allem auch für den Korrespondenzzirkel Mathematik des Bezirks Chemnitz werben sollen.

5. Zum didaktischen Vorgehen

Das im Unterricht noch häufig anzutreffende Abwechseln zwischen Lehrervortrag, Unterrichtsgespräch und gemeinsamem Üben anhand der gleichen Aufgaben für alle Schüler ist ungeeignet, um in Schularbeitsgemeinschaften die genannten Ziele der Begabtenförderung zu erreichen. Es ist sogar günstig, wenn sich das Vorgehen in einer AG-Stunde deutlich von dem Vorgehen im Unterricht unterscheidet.

Ausgehend von den genannten Zielen stellen wir folgende ***didaktische Forderungen**:*

- Kein Schüler darf unterfordert werden! Für die leistungsstarken Schüler müssen stets *Zusatzaufgaben* bereit gehalten werden.
- Es ist abzusichern, dass jeder Schüler die zu lösende problemhafte *Aufgabe voll verstanden* hat. Dies erfordert "Stichproben" bei den leistungsschwächeren Schülern.
- Man beginne niemals mit einem Unterrichtsgespräch sondern *stets* mit *selbständiger Stillarbeit*! Wer eine Lösung gefunden zu haben glaubt, hat sich zu melden und bekommt eine Zusatzaufgabe.
- Wenn das Resultat der zu lösenden Aufgabe nicht auch den Lösungsweg verrät, dann darf der Schüler sein Resultat als *"Angebot"* nennen; es wird vom Lehrer kommentarlos an der Tafel festgehalten. Der nächste Schüler kann sich diesem Angebot anschließen oder ein *"Gegenangebot"* machen, das ebenfalls an der Tafel festgehalten wird. Welches der unterschiedlichen Angebote die richtige Lösung der Aufgabe ist, wird nicht vom Lehrer sondern von den Schülern entschieden.
- Wenn eine Aufgabe von den meisten Schülern selbständig gelöst werden konnte, dann ist sie für das Vermitteln einer heuristischen Vorgehensweise ungeeignet. In einem solchen Fall werden nur Fragen der

Lösungsdarstellung besprochen, und man wird anschließend eine schwierigere Aufgabe desselben Typs stellen.
- Nach angemessener Zeit beginnt die *Phase der gemeinsamen Auswertung* in Form einer vom Lehrer geleiteten Diskussion. Wer einen *Lösungsweg* kennt darf ihn *nicht verraten*. Er darf lediglich Fragen stellen, Impulse geben oder auf Fragen des Lehrers antworten.
- Der Lehrer soll eine *"Impulstechnik"* anwenden, die absichert, dass die Schüler in ihrer Denktätigkeit nicht gegängelt werden und dass möglichst alle Schüler an der Lösungsfindung beteiligt sind.

Um so vorgehen zu können, müssen die verwendeten problemhaften Aufgaben gründlich in Hinblick auf ihre "heuristischen Potenzen" analysiert werden. Das bedeutet:
- *Alle naheliegenden Lösungswege* finden. (Aufgaben mit mehreren Lösungswegen sind diesbezüglich stets wertvoller als solche mit nur einem Lösungsweg.)
- Zu jedem Lösungsweg *chancenreiche heuristische Vorgehensweisen* (Hilfsmittel, Strategien, Prinzipien) ermitteln.
- Die zugehörigen *Fragen oder Impulse* finden, die dem Steuern der geistigen Tätigkeit des Schülers dienen *ohne ihn dabei zu gängeln.* Man beginne stets mit einem vom konkreten Inhalt der Aufgabe unabhängigen *"Hauptimpuls"*, der im Bedarfsfall durch *"Unterimpulse"* ergänzt wird.

Eine derartige Analyse problemhafter Aufgaben ist sehr zeitaufwändig und es wäre uneffektiv, sie voll dem Lehrer zu übertragen. Wir haben daher die Resultate derartiger Analysen in unseren *"Anleitungen für AG-Leiter"* festgehalten.
Begabte Schüler sind durchaus in der Lage, beim Lösen von Aufgaben selbständig heuristische Vorgehensweisen zu entdecken, und man sollte sie zu einem derartigen kreativen Vorgehen auch stets ermuntern. Daher sollten die in der Spitzenförderung eingesetzten Betreuer sich darauf beschränken, aus den zur Verfügung gestellten Olympiadeaufgaben geeignete Aufgaben auszuwählen, sie ihrem Schüler zum *selbständigen* Lösen zu übergeben und in regelmäßigen Zeitabständen seine Lösungsversuche mit ihm zu besprechen.

Das bewusste *Vermitteln heuristischer Vorgehens*weisen sollte zu den Zielstellungen der Arbeitsgemeinschaften gehören. Hierbei wird in der Regel zunächst der Lehrer die Impulse (in einer einprägsamen "normierten" Form) formulieren mit dem Ziel, dass sie nach und nach von den Schülern übernommen und angewendet werden. Diese ***"Technik der Impulsgebung"*** wollen wir anhand konkreter Beispiele demonstrieren.
Wenn man unseren didaktischen Empfehlungen folgt besteht keine Gefahr, dass es dadurch zu einer Beeinträchtigung der Entwicklung der Kreativität der Schüler kommen kann.

6. Demonstration des didaktischen Vorgehens beim Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen

6.1 Einführen von zweckmäßigen Bezeichnungen

Das Einführen von *zweckmäßigen Bezeichnungen* sowie das *Übersetzen aus der Wortsprache in die Symbolsprache* ist ein wichtiges heuristisches Hilfsmittel.
Die Schüler sollen erkennen, wie nützlich es ist, etwa für Namen, Berufe u.ä. *Buchstaben* als abkürzende Bezeichnungen zu verwenden und auch die Relationszeichen "=, <, >" (in einem etwas erweiterten Sinn) einzusetzen, um gewisse Beziehungen knapp und übersichtlich festzuhalten.
Wenn z. B. A und B als Abkürzung der Namen "Arnd" und "Bert" verwendet werden dann kann man vereinbaren, dass "A < B" die Aussage "A ist jünger als B" oder die Aussage "A ist kleiner als B" oder die Aussage "A kam früher ins Ziel als B" usw. festhält. Dies ist immer dann statthaft, wenn die betreffende Beziehung die Eigenschaften einer Ordnungsrelation besitzt.

Die folgenden Aufgaben stammen alle aus "16 Aufgabenblätter für Klasse 3". Dabei bezeichnet 10.5 die 5. Aufgabe des 10. Aufgabenblattes.

Aufgabe 1) [10.5]

Andreas, Bernd, Claus, Dieter, Erich, Franz und Gunther waren die Teilnehmer an einem 100m-Lauf. Keine zwei von ihnen hatten in dem Lauf dieselbe Zeit erreicht. Über die Reihenfolge ihres Zieleinlaufs wird berichtet:

(a) Andreas kam direkt vor Bernd und unmittelbar hinter Claus ins Ziel.
(b) Dieter lief gleich hinter Erich ein.
(c) Franz erzielte den mittleren der sieben Plätze.

Weiterhin ist bekannt:

(d) Andreas und Dieter wohnen in A-Stadt.
(e) Den zweiten Platz schaffte ein Junge aus B-Stadt.

Wie war nach diesen Informationen die Platzverteilung?

Zunächst sollen die Schüler in *selbständiger Arbeit* versuchen, die Lösung zu finden. Wenn dies den meisten Schülern gelingt, dann wird man ihnen eine schwierigere Aufgabe dieses Typs stellen. Nur wenn die meisten Schüler scheitern, wird man in der anschließenden *gemeinsamen Arbeit* eine erfolgversprechende *heuristische Vorgehensweise* einführen.

Folgende ***Impulse*** können dabei hilfreich sein:

- Führe zweckmäßige Bezeichnungen ein!
  Übersetze die Aufgabenstellung in die "Symbolsprache"!
  - ° Wähle für die Abkürzung der Namen die Anfangsbuchstaben! [A,B,C,D,E,F,G]
    Wie kann man festhalten, dass A vor B eintraf? [A < B]
    Wie kann man festhalten, dass F den mittleren der sieben Plätze erzielte? [F = 4.]
- Was lässt sich aus den Bedingungen (d) und (e) unmittelbar folgern? Begründe!
  Halte die Folgerungen in der Symbolsprache fest!
  [Wenn A und D in A-Stadt wohnen und wenn der Junge, der den 2. Platz schaffte, aus B-Stadt kommt, dann gilt $A \neq 2.$ und $D \neq 2.$]

Ferner ist es günstig, die gesuchte Platzverteilung in einer *Tabelle* festzuhalten.
Man lasse erkennen, dass A < B noch nicht bedeutet, dass A *unmittelbar* vor B eingelaufen ist, d.h. dass wir mit unserer symbolischen Schreibweise noch nicht alle Informationen festgehalten haben. Bedingung (a) lässt sich daher genauer in der Form (C;A;B) festhalten, wenn man vereinbart, dass auf diese Weise die zusätzliche Information "direkt" oder "unmittelbar" festgehalten werden soll.

Das Resultat kann man wie folgt an der *Wandtafel* festhalten:

(a)	C < A < B	(C;A;B)
(b)	E < D	(E;D)
(c)	F = 4.	

(d)
→ $A \neq 2.$ und $D \neq 2.$
(e)

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
			F			

- Was lässt sich nun unmittelbar folgern? Begründe!
  [Wegen $A \neq 2$ muss (C;A;B) = (5.;6.;7.) gelten. Wegen $D \neq 2$ muss (E;D) = (2.;3.) gelten. Daraus folgt dann (als letzte Möglichkeit) G = 1.]
- Antwortsatz!
  [Die Reihenfolge des Zieleinlaufs lautet: Gunther, Erich, Dieter, Franz, Claus, Andreas, Bernd.]
- Probe am Text!
  [Es wird geprüft, ob die angegebene Reihenfolge tatsächlich die Bedingungen (a) bis (d), wie sie im Aufgabentext stehen, erfüllen.]

Ab Klasse 6 spielt folgende *heuristische Vorgehensweise* eine wichtige Rolle:

- Führe Variable ein!
- Übersetze die Aufgabe in die Sprache der Gleichungen!
- Löse die Gleichungen!

Wenn man den letztgenannten Impuls weglässt, dann kann man leistungsstarke Schüler bereits in der Grundschule mit dieser Vorgehensweise vertraut machen.

Aufgabe 2) [8.7]
Ein Bauer kauft 3 Kühe und 4 Ziegen und bezahlt dafür 108 Taler. Ein anderer Bauer kauft 7 Kühe und 6 Ziegen und bezahlt 212 Taler.
Wie viele Taler kostete eine Kuh und wie viele Taler kostete eine Ziege ?

Bezeichnet man die Anzahl der Kühe mit k und die Anzahl der Ziegen mit z , dann lässt sich diese Aufgabe wie folgt in die *Sprache der Gleichungen* übersetze

Wortsprache	Sprache der Gleichungen
3 Kühe und 4 Ziegen kosten 108 Taler. 7 Kühe und 6 Ziegen kosten 212 Taler.	$3\cdot k + 4\cdot z = 108$, $7\cdot k + 6\cdot z = 212$.
a) Wie viele Taler kosten 1 Kuh und 1 Ziege zusammen?	a) $k + z = ?$
b) Wie viele Taler kostet 1 Kuh und wie viele Taler kostet 1 Ziege?	b) Ermittle alle Zahlenpaare (k; z), für die beide Gleichungen gelten!

Das Ermitteln der gesuchten Zahlenpaare erfolgt mit Hilfe der *Strategie des systematischen Probierens*, wobei den Schülern schon bekannt sein soll, dass hierfür *Tabellen* ein nützliches *Hilfsmittel* sind.

Impulse:
- Mit welcher (besonders einfachen) Zahl k wollen wir das Probieren beginnen? [z. B. $k = 10$]
- Was lässt sich hieraus unmittelbar berechnen ? Wie wählen wir die Spalteneingänge der Tabelle?
  [$3\cdot k = 30$; $4\cdot z = 108 - 30 = 78$; $z = 19{,}5$ kann keine Lösung liefern, daher lohnt es nicht, $7\cdot k$, $6\cdot z$ und $(7\cdot k + 6\cdot z)$ noch zu berechnen.]
- Mit welcher Zahl k wollen wir das systematische Probieren fortsetzen?
  [Man könnte mit k = 11, 12, 13, 14, ... so lange fortsetzen, bis man die Lösung gefunden hat. Da man leicht erkennt, dass für ungerade k auch $4\cdot z$ ungerade und daher nicht durch 4 teilbar ist, wird man sich auf das Untersuchen der geraden k beschränken. Desgleichen kann man erkennen, dass auch für k = 10, 14, 18, 22, ... $4\cdot z$ nicht durch 4 teilbar ist.]

Auf diese Weise kann man zu folgender Tabelle gelangen und feststellen lassen, dass es außer der einen gefundenen Lösung keine weiteren geben kann, weil für $k > 24$ erst recht $7\cdot k + 6\cdot z > 212$ gilt.

k	$3\cdot k$	$4\cdot z$	z	$7\cdot k$	$6\cdot z$	$7\cdot k + 6\cdot z$	= 212?
10	30	78	k.L.	---	---	---	---
12	36	72	18	84	108	192	< 112
14	42	66	k.L.	---	---	---	---
16	48	60	15	112	90	202	< 112
18	54	54	k.L.	---	---	---	---
20	60	48	**12**	140	72	**212**	**= 112**
24	72	36	9	168	54	222	> 112

6.2 Vorwärtsarbeiten verbunden mit dem Einsatz von Tabellen

Das *Vorwärtsarbeiten* (VA) ist die einfachste heuristische Strategie, die wohl auch von wenig geübten Aufgabenlösern intuitiv verwendet wird. Sie lässt sich durch folgende *Fragen/Impulse* charakterisieren:
- Was lässt sich aus dem Gegebenen (Zahlen / Größen / Gleichungen / Bedingungen / Voraussetzungen) unmittelbar berechnen bzw. folgern?
  Begründe!

Tabellen sind ein heuristisches Hilfsmittel, das verschiedene Aufgaben erfüllen kann:
- Festhalten der Aufgabenstellung (Gegebenes und Gesuchtes kennzeichnen)
- Hilfe bei der Lösungsfindung
- Festhalten des gefundenen Lösungsweges
- Probe am Text (bei einer Sachaufgabe)

Sie kommen häufig in Verbindung mit der Strategie des systematischen Probierens vor, worauf hier nicht eingegangen wird (siehe König [2]).
In Verbindung mit dem Vorwärtsarbeiten lassen sie sich häufig bei *Sachaufgaben* oder bei *logisch-kombinatorischen Zuordnungsaufgaben* einsetzen.

Hier können folgende *Impulse* nützlich sein:
- Wähle Zeilen und Spalten der Tabelle so, dass Felder entstehen, in die man das Gegebene, das Gesuchte und günstig gewählte Hilfsgrößen eintragen kann!
- Als *Spalteneingänge* eignen sich Größen oder Anzahlen, die in der Aufgabe vorkommen.
  Als *Zeileneingänge* eignen sich die in der Aufgabe beschriebenen "Situationen"
- Manchmal ist es günstig, nachträglich weitere Zeilen oder Spalten einzuführen, um die Resultate benötigter Nebenrechnungen festzuhalten.

Aufgabe 3) [13.2]

Fülle die leeren Felder in der Tabelle!

	x	y	z	$x\cdot y-(x+z)$	$x\cdot y+(x+z)$	$x\cdot y$	$x+z$
a)	3	2	1				
b)	3	3		0			
c)	5		2		27		
d)*	99	1					

Die letzten beiden Spalten werden erst im Prozess der Lösungsfindung eingetragen. Die Teilaufgaben sind nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Aufgabe a) ist algorithmisch lösbar; d)* bezeichnet eine schwere Zusatzaufgabe, mit der sich diejenigen Schüler beschäftigen sollen, die die Aufgaben a), b) und c) gelöst zu haben glauben.

Die Schüler haben mit [11.2] und [12.2] bereits zwei analoge Aufgaben gelöst und kennen den *Hauptimpuls für das VA*:
- "Was lässt sich aus den gegebenen Zahlen unmittelbar berechnen? Begründe!"

Hier dient die *Tabelle* nur dem *Festhalten der Aufgabenstellung.*

Die *1. Phase der gemeinsamen Auswertung* beginnt, wenn die meisten Schüler die Aufgaben a) und b) gelöst haben. Die Resultate werden zunächst noch nicht verraten. Wer sie zu kennen glaubt, darf nur auf die Frage antworten:
- Welches Feld lässt sich als erstes füllen?

Da bei Aufgabe b) zunächst kein Feld existiert, in die man das berechenbare $x\cdot y = 9$ eintragen kann, wird die erste Hilfsspalte eingeführt.
Wegen $9-(3+z)=0$ kann man dann im zweiten Schritt $z=6$ berechnen und das Feld in der 3. Spalte füllen.
Um das dann berechenbare $x+z=9$ eintragen zu können, führt man die zweite Hilfsspalte ein und kann dann schließlich das Feld in der 5. Spalte mit $(9+9=)\ 18$ füllen.
Das selbständige Lösen der analogen Aufgabe c) dürfte nun keine Schwierigkeiten mehr bereiten.
Bei Aufgabe d)* besteht die Schwierigkeit darin, zu erkennen, dass wegen des Terms in der 4. Spalte $x\cdot y \geq x+z$ gelten muss, was wegen des berechenbaren $x\cdot y = 99\cdot 1$ zu $99 \geq 99+z$ und damit zu $z=0$ führt.

Aufgabe 4) [16.6]
Jeder Buchstabe des Wortes "KNOBELN" bezeichnet eine Zahl. Über diese Zahlen ist bekannt:

$$\begin{aligned} E\cdot L-K &= B\\ K:N &= B\\ B+B &= B\cdot B\\ 3\cdot L-E &= B\\ 8\cdot B:L &= 2\cdot B\\ K+N-O+B-E+L-N &= 17 \end{aligned}$$

Welche Zahl bezeichnet der Buchstabe O ?

Analog zu Aufgabe 1) sind folgende Impulse nützlich
- Was lässt sich aus den gegebenen Gleichungen unmittelbar folgern? Begründe!
  - ° Mit Hilfe welcher Gleichung lässt sich welcher Buchstabe ermitteln?

- Was lässt sich nun aus den gegebenen Gleichungen und dem ermittelten Buchstaben unmittelbar folgern? Begründe!

Eine *Tabelle* kann hier dem *Festhalten des gefundenen Lösungswegs* dienen.

Beim selbständigen Suchen nach einem Lösungsweg sollen die Schüler zunächst nur "Schmierpapier" benutzen. Wer erkennt, dass man mit der 3. Gleichung beginnen muss und dass $B = 2$ eine Lösung dieser Gleichung ist, wird vermutlich diese ermittelte Zahl in alle Gleichungen einsetzen und wieder nach einer Gleichung suchen, mit deren Hilfe sich nun ein weiterer Buchstabe ermitteln lässt. Dies ist die 5. Gleichung, die jetzt $16 : L = 4$ lautet und aus der man $L = 4$ folgern kann.
Im nächsten Schritt kann man aus der 4. Gleichung, die vereinfacht $12 - E = 2$ lautet, $E = 10$ folgern, usw.
Wenn nach angemessener Zeit kein Schüler diese Aufgabe selbständig lösen konnte, wird man mit der *gemeinsamen Auswertung* beginnen und die oben angegebenen Impulse einsetzen. Beim gemeinsamen Ermitteln von $B = 2$, $L = 4$ und $E = 10$ wird man den Schülern zeigen, wie der Lösungsweg nebst Resultaten in einer *Tabelle* festgehalten werden kann. Anschließend kommt wieder eine Phase *selbständiger Stillarbeit.*

Den gefundenen Lösungsweg wird man abschließend wie folgt festhalten:

		vereinfachte Gleichung	Resultat
$E \cdot L - K = B$	(4)	$40 - K = 2$	$K = 38$
$K : N = B$	(5)	$38 : N = 2$	$N = 15$
$B + B = B \cdot B$	(1)		$B = 2$
$3 \cdot L - E = B$	(3)	$12 - E = 2$	$E = 10$
$8 \cdot B : L = 2 \cdot B$	(2)	$16 : L = 4$	$L = 4$
$K + N - O + B - E + L - N = 17$	(6)	$34 - O = 17$	**O = 17**

Abschließend sollte man die Schüler darauf hinweisen, dass die Aufgabe wesentlich leichter wird, wenn man die Gleichungen in der Reihenfolge anordnet, wie dies in der 1. Spalte der Tabelle angegeben ist.
Ferner sollen sie nachträglich herausfinden, dass die Gleichung $B + B = B \cdot B$ außer $B = 2$ noch die Lösung $B = 0$ besitzt und warum dieser Fall zu keiner Lösung führt.

Aufgabe 5) [6.3]
Acht Enten, alle völlig gleich, schwimmen auf dem kleinen Teich.
Eine Ente aber ging an Land, weil sie da mehr Futter fand.
Drei tunkten ihre Köpfe klein in das kalte Wasser ein
und hoben ihre Beine hoch zum Zeichen, dass sie leben noch.
Wie viele Köpfe und wie viele Beine waren unter Wasser?
Wie viele Köpfe und wie viele Beine waren nicht im Wasser?

Bei dieser Aufgabe dient eine *Tabelle* dem *Finden eines Lösungswegs.* Würde man die Tabelle vorgeben, dann wäre diese Aufgabe sehr leicht. Die wesentliche Leistung besteht im Aufstellen der Tabelle.
Die gegebenen und die gesuchten Größen legen es nahe, vier Spalten einzurichten.
Dem Text sind 3 "Situationen" zu entnehmen, die 3 Zeileneingänge nahe legen. Dass eine 4. Zeile benötigt wird, erkennt man erst später.
Diese Überlegungen können zu folgender Tabelle führen, in der man die gesuchten Größen durch "rote" (hier "fette") Umrandung der betreffenden Felder kennzeichnet:

	Anzahl der Köpfe		Anzahl der Beine	
	über Wasser	unter Wasser	über Wasser	unter Wasser
1 Ente an Land				
3 Enten "verkehrt" im Wasser				
8 Enten insgesamt				

Das Ausfüllen der Felder der Tabelle erfolgt durch *Vorwärtsarbeiten.*
- Welche Felder der Tabelle lassen sich unmittelbar ausfüllen? Begründe!

Dies kann zu folgender Tabelle führen:

	Anzahl der Köpfe		Anzahl der Beine	

	über Wasser	unter Wasser	über Wasser	unter Wasser
1 Ente an Land	1	0	2	0
3 Enten "verkehrt" im Wasser	0	3	6	0
8 Enten insgesamt				

- Was lässt sich aus diesen Angaben unmittelbar folgern?
  ° Was lässt sich über die restlichen Enten aussagen?

Dies kann zu folgender Tabelle führen:

	Anzahl der Köpfe		Anzahl der Beine	
	über Wasser	unter Wasser	über Wasser	unter Wasser
1 Ente an Land	1	0	2	0
3 Enten "verkehrt" im Wasser	0	3	6	0
4 Enten "normal" im Wasser	4	0	0	8
8 Enten insgesamt				

Nun lassen sich die vier Felder mit den gesuchten Größen leicht ausrechnen und man erhält folgenden *Antwortsatz:* Es waren 3 Köpfe und 8 Beine unter Wasser, und es waren 5 Köpfe und 8 Beine nicht im Wasser.

Aufgabe 6) [10.6]
Vier Herren mit den Namen Arzt, Bauer, Fleischer und Schlosser waren von Beruf Arzt, Bauer, Fleischer bzw. Schlosser. Jeder der Herren hatte einen anderen Beruf und keiner hatte den Beruf, den sein Name angibt.
Der Fleischer hatte die anderen drei Herren zum Schlachtfest eingeladen. Herr Schlosser kam kurz nach Herrn Bauer und teilte mit, dass der vierte Herr leider nicht kommen könne, da er zu einem Patienten gerufen wurde.
Welchen Beruf hatte Herr Bauer?

Wenn eine derartige *logisch-kombinatorische Zuordnungsaufgabe* so leicht ist, dass sie die meisten Schüler selbständig lösen können, dann ist sie für das Vermitteln einer heuristischen Vorgehensweise ungeeignet. Die vorliegende Aufgabe dürfte hinreichend schwer sein, um dem Vermitteln des heuristischen Hilfsmittel *Tabelle* dienen zu können.
Auch hier kann eine Tabelle beim *Finden eines Lösungswegs* helfen.
Da hier die Bezeichnung der Namen mit der Bezeichnung der Berufe übereinstimmt, ist die Wahl *zweckmäßiger Bezeichnungen* erforderlich. So kann man etwa die Berufe mit A, B, F, S und die Namen mit a, b, f, s abkürzen.

Bei derartigen Aufgaben liegt es sehr nahe, für die Spalteneingänge bzw. Zeileneingänge der Tabelle die einander zuzuordnenden Begriffe zu wählen.
Die Folgerung, dass eine Zuordnung nicht zutreffen kann, wird in dem betreffenden Feld mit einem "-" gekennzeichnet. Die Folgerung, dass eine Zuordnung zutrifft, wird mit einem "+" gekennzeichnet.

Die ersten drei Zeilen der Aufgabenstellung führen zu folgender Tabelle, wobei die (1) in den Feldern angibt, dass dies die erste Folgerung aus den gegebenen Bedingungen ist.

	A	B	F	S
a	- (1)			
b		- (1)		
f			- (1)	
s				- (1)

Nun werden die leeren Felder der Tabelle durch weiteres *Vorwärtsarbeiten* gefüllt.

- Was folgt aus der gegebenen Bedingung, dass der Fleischer die anderen drei Herren zum Schlachtfest eingeladen hat? Begründe!

Hieraus allein lässt sich noch nichts folgern. Erst die gegebene Bedingung "Herr Schlosser kam kurz nach Herrn Bauer" macht klar, dass diese beiden Herren Gäste waren und daher nicht der Fleischer sein können. Dies wird als Folgerung (2) in die Tabelle eingetragen.
Da nun in der 3. Spalte dreimal "-" steht, bleibt für den Fleischer nur der Namen Arzt übrig, woraus dann folgt, dass weder der Bauer noch der Schlosser Arzt heißen können.
Die der Lösungsfindung dienende Tabelle hat nun folgende Gestalt angenommen:

	A	B	F	S
a	- (1)	- (3)	+ (3)	- (3)
b		- (1)	- (2)	
f			- (1)	
s			- (2)	- (1)

Der letzten gegebenen Bedingung ist zu entnehmen, dass der dritte Gast der Arzt war.
Da die anderen beiden Gäste Bauer und Schlosser heißen und da der Fleischer Arzt heißt, bleibt für den Arzt nur der Name Fleischer übrig.
Es reicht sogar aus, nur festzustellen, dass der Arzt nicht Bauer heißen kann, um dann folgern zu können, dass der Schlosser nur Bauer heißen kann.
Damit ist der Antwortsatz gefunden und es ist leicht, auch noch den Namen des Bauern zu ermitteln.

Die Tabelle, die den Lösungsplan festhält, sieht dann so aus:

	A	B	F	S
a	- (1)	- (3)	+ (3)	- (3)
b	- (4)	- (1)	- (2)	**+ (5)**
f	+ (6)		- (1)	
s	- (4)	+ (7)	- (2)	- (1)

Das Lösen von solchen logisch-kombinatorischen Zuordnungsaufgaben wird in den Arbeitsgemeinschaften für Klasse 5 wieder aufgegriffen. Hier lernen die Schüler, wie man auf der Grundlage eines solchen Lösungsplans die Lösung exakt darstellen kann und dass zur vollständigen Darstellung der Lösung ein Einzigkeitsnachweis und ein Existenznachweis gehören.
Hierauf wird man in Schularbeitsgemeinschaften der Klasse 3 natürlich verzichten. Im Zusammenhang mit der individuellen Förderung hochbegabter Schüler, die auf einen Frühstart bei der Kreisolympiade in Klasse 5 vorbereitet werden, spielt dies allerdings auch eine Rolle.

6.3 Problemtransformation und Suche nach Hilfsaufgaben

Es ist meist nur recht schwer zu erkennen, dass sich eine Aufgabe durch *"Problemtransformation",* d.h. durch ein *geschicktes (äquivalentes) Umformulieren* vereinfachen lässt.
Sollte ein Schüler von selbst dazu in der Lage sein, dann deutet dies auf eine hohe *Begabungspotenz* hin. In der Regel wird der Lehrer nachträglich auf eine solche Möglichkeit eingehen.

Aufgabe 7) [5.6]
Von den 9 Ziffern, die in der Additionsaufgabe stehen, sollten 6 Ziffern gestrichen werden, so dass das bereits hingeschriebene Ergebnis "20" auch richtig ist!

$$111 + 777 + 999 = 20$$

Sollten die meisten Schüler diese Aufgabe nicht selbständig lösen können, dann kann man beim *gemeinsamen Behandeln* folgende ***Impulse*** einsetzen:

- Lässt sich die Aufgabe vereinfachen?
  - ° Statt 6 von den 9 Ziffern wegzulassen, könnte man doch auch ... ?
    [Man kann 3 aus den 9 Ziffern auswählen.]
  - ° Welche Ziffern kommen hierfür nur in Frage?
    - **:** Wie lässt sich die 20 als Summe von Zahlen aus den gegebenen Ziffern darstellen?

  [11 + 9 = 20 ; 1 + 19 = 20 liefert keine Lösung, da diese Gleichung nicht durch Streichen von Ziffern erhalten werden kann.]
- Welche 6 Ziffern müssen also gestrichen werden? [Eine 1, drei 7, zwei 9.]

Bei diesem Vorgehen ist auch leicht zu sehen, dass die angegebene Lösung die *einzige* Lösung ist.

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die folgende Aufgabe vor allem dann, wenn *alle* Lösungen zu ermitteln sind.

Aufgabe 8) [5.7]
Wähle aus den acht Zahlen 16, 12, 18, 25, 11, 21, 13, 36 einige so aus, dass deren Summe 100 ergibt ! Gib alle Möglichkeiten an!

Die Schüler sollten sich bereits daran gewöhnt haben, bei derartigen Auswahlaufgaben die gegebenen Elemente (in diesem Fall die Zahlen der Größe nach) zu *ordnen*: { 11, 12, 13, 16, 18, 21, 25, 36 }.
Es ist möglich, dass dann einige Schüler etwa die Lösung 18 + 21 + 25 + 36 = 100 *selbständig* finden, es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, dass ein Schüler in angemessener Zeit durch reines Probieren auch die restlichen drei Lösungen findet. Also wird man mit der *gemeinsamen Arbeit* beginnen:

- Lässt sich die Aufgabe vereinfachen?
  - ° Betrachte zunächst die Summe aus allen acht Zahlen! [152]
    - **:** Wie kann man das ausnützen? Wie sind wir bei Aufgabe 5.6) vorgegangen?

  [Wegen 152 = 100 + 52 kann man auch die folgende einfachere Aufgabe lösen:]

1. Hilfsaufgabe*:* Wähle aus den acht Zahlen solche mit der Summe 52 aus!
Erst wenn die meisten Schüler nach angemessener Zeit die vier Lösungen nicht finden konnten, wird man erneut mit der *gemeinsamen Arbeit* beginnen:

- Lässt sich die Hilfsaufgabe weiter vereinfachen?
  - ° Betrachte die Einerstellen der acht Zahlen!
    - **:** Welche Bedingung müssen sie erfüllen? [Summe 2 oder Summe 12]

2. Hilfsaufgabe*:* Wähle aus den Einerziffern { 1, 1, 2, 3, 5, 6, 6, 8 } solche aus, deren Summe 2 oder 12 beträgt!
Überprüfe, ob die zugehörigen Zahlen die Summe 52 besitzen!

- Wie kann man (systematisch) vorgehen, um keine zulässige Auswahlmöglichkeit zu vergessen?
  [Erst 2 Summanden, dann 3 Summanden usw. betrachten.]

Hier sollte man wiederholen und üben, wie man (*lexikografisch geordnet*) alle Paare, alle Tripel und alle Quadrupel aus den acht Einerziffern bildet.
Wiederum werden die Schüler aufgefordert, *selbständig* nach den Lösungen der 2. Hilfsaufgabe zu suchen.
Abschließend wird man den gesamten *Lösungsplan* nochmals wiederholen und die wichtigsten Resultate wie folgt an der *Wandtafel* festhalten:

1 + 1 = 2	11 + 21 $<$ 52	Lösungen:
6 + 6 = 12	16 + 36 = 52	11 + 12 + 13 + 18 + 21 + 25 = 100

1 + 3 + 8 = 12	11 + 13 + 18 = 52	12 + 13 + 21 + 25 + 36 = 100
	21 + 13 + 18 > 52	
1 + 5 + 6 = 12	11 + 25 + 16 = 52	12 + 16 + 21 + 25 + 36 = 100
	sonst stets > 52	
1 + 2 + 3 + 6 = 12	11 + 12 + 13 + 16 = 52	18 + 21 + 25 + 36 = 100
	sonst stets > 52	

Wie man die heuristische Strategie *"Systematisches Probieren"* vermitteln kann, wird in König [3] gezeigt.

7. Ausblick

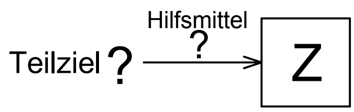
Beim Übergang in das *Gymnasium* wachsen die Möglichkeiten, heuristische Vorgehensweisen zu vermitteln. Dabei besteht das Endziel heuristischer Schulung für uns darin, die Schüler zu befähigen, sich beim Lösen problemhafter Aufgaben oder bei der Suche nach neuen Erkenntnissen (in der Regel unbewusst) weitgehend inhaltsunabhängige *Fragen* zu stellen oder *Impulse* zu geben und auf diese Weise ihre *geistige Tätigkeit selbst zu steuern.* Durch den Einsatz solcher Fragen und Impulse lässt sich häufig verhindern, dass ein Problemlöseprozess erfolglos abgebrochen wird, weil der Löser nicht weiß, was er noch unternehmen könnte, um ans Ziel zu gelangen.
Ausgewählte heuristische Vorgehensweisen sollten (als eine spezielle Art von Verfahrenskenntnissen) im Prozess der Tätigkeit *bewusst vermittelt* werden. Es stimmt zwar, dass begabte Schüler beim selbständigen Lösen von problemhaften Aufgaben heuristische Vorgehensweisen selbst entdecken können. Es wäre aber sehr uneffektiv, sich im Unterricht darauf zu verlassen. Wie bereits erwähnt, trifft unserer Erfahrung nach die Befürchtung nicht zu, dass ein bewusstes Vermitteln heuristischer Regeln oder geistiger Techniken die schöpferische Entwicklung bei begabten Schülern beeinträchtigt. Dagegen lässt sich fehlende Intuition oder mangelnde geistige Beweglichkeit durch den Einsatz heuristischer Vorgehensweisen teilweise kompensieren.

Beispiele dafür, wie man in der Sekundarstufe I *heuristische Hilfsmittel* (Einführen günstiger Bezeichnungen; Verwenden von Tabellen und Skizzen) vor allem beim Lösen von Sachaufgaben einsetzen kann, findet man in Heyer [1], Heyer/König [1] und König [1].
Unter den *heuristischen Strategien* spielt (im Gegensatz zu Grundschulen) vor allem das *Rückwärtsarbeiten* eine wichtige Rolle. Dies soll abschließend anhand von Beispielen erläutert werden.
Spätestens zu Beginn der Klasse 5 sollte man die Schüler mit folgendem Spiel vertraut machen, bei dem man durch Rückwärtsarbeiten leicht eine Gewinnstrategie finden kann:

Aufgabe 10)
Spiel "Hundert gewinnt": A nennt eine der Zahlen von 1 bis 7. B addiert zu dieser Zahl eine der Zahlen von 1 bis 7 und nennt die entsprechende Summe. A addiert zu dieser Zahl eine der Zahlen von 1 bis 7 und nennt die neue Summe; usw. Gewonnen hat derjenige Spieler, der die Zahl 100 als Summe nennt.
a) Mit welcher Zahl muss A beginnen und wie muss er spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen?
b) Ändere die Spielregeln so ab, dass B bei richtigem Spiel gewinnen kann!

Begabte Schüler sind durchaus in der Lage, die entscheidende Frage selbst zu finden: "Welche Zahl müsste ich (im vorletzten Zug) nennen, um dann (im letzten Zug) mit Sicherheit "100" sagen zu können? [Ich müsste die Zahl 92 nennen, denn... .]
Auf diese Weise findet man mit Sicherheit folgende Folge von Gewinnzahlen:
$\mathbf{4} \to 12 \to 20 \to 28 \to 36 \to 44 \to 52 \to 60 \to 68 \to 76 \to 84 \to 92 \to \mathbf{100}$

Beim *Rückwärtsarbeiten* geht man vom "Ziel" (dem Gesuchten bei Bestimmungsaufgaben, der Behauptung bei Beweisaufgaben) aus. Diese Strategie lässt sich durch ein Paar von Fragen charakterisieren, die *Teilzielfrage* und die *Hilfsmittelfrage*. Dabei spielt die Reihenfolge, in der die Fragen gestellt werden, eine wichtige Rolle. In der nebenstehenden schematischen Darstellung werden diese Fragen durch "?" symbolisiert.



In der Regel wird man mit der Teilzielfrage beginnen:
- Woraus ließe sich die (gesuchte Größe) / (Behauptung) unmittelbar (berechnen) / (ableiten)?
- Begründe! (Welche Formel, welcher Satz, welche Definition wurde verwendet?)

Führt dies noch nicht zum Ziel oder will man systematisch nach mehreren Lösungswegen suchen, dann sollte man mit der Hilfsmittelfrage beginnen:

- Betrachte das Ziel! Was könnte als Hilfsmittel dienen?
  ° Welche (Formeln enthalten die gesuchte Größe) / (Sätze enthalten eine gleichartige Behauptung)?
  : Wähle aus diesen Hilfsmitteln ein erfolgversprechendes aus!
  Welches Hilfsmittel kommt in Frage, welches nicht? Begründe!
- Woraus lässt sich also die (gesuchte Größe berechnen) / (Behauptung ableiten)?

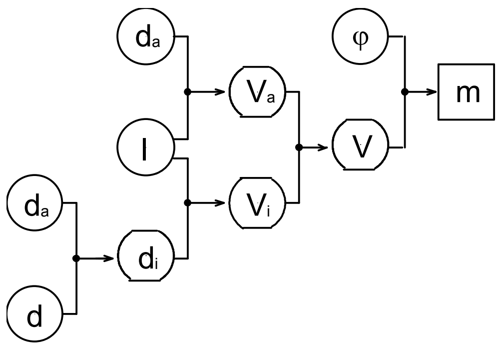
Beim Lösen geometrischer Beweisaufgaben ist ein zweckmäßig angelegter *Hilfsmittelspeicher* von Nutzen, in dem geometrische Sätze nach Behauptungen geordnet festgehalten sind. Um etwa die Gleichheit zweier Winkel herzuleiten, lernen die Schüler im Unterricht mehr als zehn Sätze kennen.

Aufgabe 11)

Ein 6,00 m langes Kupferrohr hat einen äußeren Durchmesser von 36 mm und eine Wanddicke von 3 mm. Welche Masse hat dieses Rohr?

Bei derartigen Aufgaben kommt man durch Rückwärtsarbeiten mit hoher Wahrscheinlichkeit ans Ziel, wenn man eine Formelsammlung zur Hand nimmt.
Der so gewonnene *Lösungsplan* lässt sich in Form eines *Lösungsgraphen* wie folgt festhalten, wobei folgende Bezeichnungen verwendet werden:

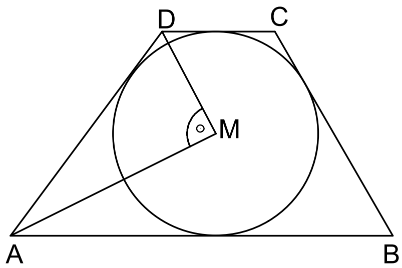
d_a :Außendurchmesser,
V_a: Volumen des äußeren Zylinders,
d_i: Innendurchmesser,
V_i: Volumen des inneren Zylinders,
d: Wanddicke,
V: Volumen des Hohlzylinders,
l: Länge des Rohres,
φ: Dichte von Kupfer,
m: Masse des Rohres.



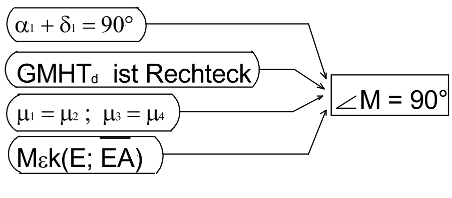
Aufgabe 12)

Ein Trapez mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ besitze einen Inkreis k(M;r). Was lässt sich über den Winkel $\angle$DMA aussagen? Beweise deine Vermutung!

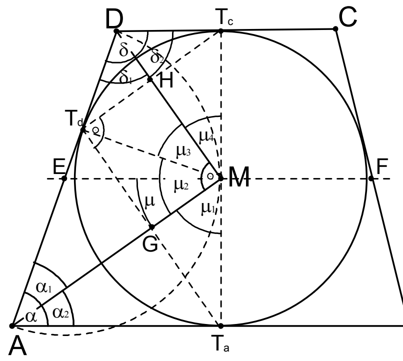
Wenn man die Vermutung mit Hilfe einer genauen Zeichnung gefunden hat, dann kann man den zu beweisenden Satz wie nebenstehend angegeben festhalten.
Wenn man nach möglichst vielen verschiedenen Lösungswegen suchen will, dann wird man mit der *Hilfsmittelfrage* beginnen.
Wenig Chancen dürften dabei der Satz über Diagonalen im Drachenviereck, die Umkehrung des Satzes des Pythagoras, der Satz über Tangente und Berührungsradius oder über Zentrale und Berührungssehne bieten.
Als chancenreich erweisen sich der Innenwinkelsatz für das Dreieck AMD, die Eigenschaften eines Rechtecks, der Satz über die Winkelhalbierenden eines Nebenwinkelpaares und der Satz des Thales.
Die anschließende *Teilzielfrage* führt dann zu den im nebenstehenden Graphen festgehaltenen hinreichenden Feststellungen, die leistungsstarke Schüler durch Vorwärtsarbeiten erreichen dürften. Gelingt dies nicht, dann ist weiteres Rückwärtsarbeiten angesagt.



V_1: ABCD ist ein Trapez
V_2: ABCD besitzt k(M;r) als Inkreis
Beh.: $\angle$DMA = 90°



Auf diese Weise kann man zu folgenden Lösungswegen gelangen:



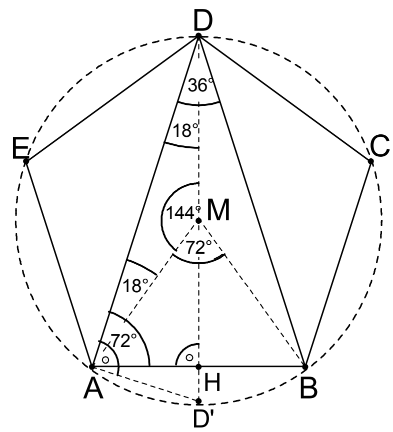
1. Lösungsweg:
Wegen $\alpha + \delta = 180°$ und $\alpha = 2\alpha_1$ sowie $\delta = 2\delta_1$ erhält man $\alpha_1 + \delta_1 = 90°$ und hieraus $\angle M = 90°$.

2. Lösungsweg:
Nach dem Satz über Zentrale und Berührungssehne gilt $\angle G = \angle H = 90°$, nach dem Satz des Thales gilt $\angle T_d = 90°$, also ist $GMHT_d$ ein Rechteck, woraus dann $\angle M = 90°$ folgt.

3. Lösungsweg:
Die Zentralen AM und DM erweisen sich als Winkelhalbierende eines Nebenwinkelpaares, woraus $\angle M = 90°$ folgt.

4. Lösungsweg:
Wegen EM||AB (als Mittellinie) gilt $\mu = \alpha_2$ (Wechselwinkel), wegen $\alpha_1 = \alpha_2$ also $\mu = \alpha_1$, woraus $\overline{EA} = \overline{EM}$ (= $\overline{ED}$) folgt. Daher liegt M auf dem Halbkreis über $\overline{AD}$ und nach dem Satz des Thales gilt $\angle M = 90°$.
Die beim Aufschreiben von ableitbaren oder von hinreichenden Feststellungen eingeführten Bezeichnungen wurden in nebenstehender Planfigur festgehalten. Dies trifft auch auf die so gefundenen Hilfslinien zu.

Aufgabe 13)
Sei ABCD ein regelmäßiges Fünfeck mit dem Umkreisdurchmesser d . Drücke den Inhalt des Dreiecks ABD durch d aus!



Es liegt nahe, in der Planfigur als Hilfslinien den Umkreis k(M;r), die Radien $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ sowie den Durchmesser $\overline{DD'}$ einzuführen. Durch Vorwärtsarbeiten gelangt man leicht zu den in der Planfigur angegebenen Winkelgrößen.
Die Hilfsmittelfrage beim Rückwärtsarbeiten kann zu folgenden drei Lösungswegen führen:

1. Lösungsweg:
Für den Inhalt I(ABD) des Dreiecks gilt $I(ABD) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \sin 36°$, wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ also $\frac{1}{2} \cdot \overline{AD}^2 \cdot \sin 36°$. So ist man auf die *hinreichende Hilfsgröße* $\overline{AD}$ gestoßen, für die sich $\overline{AD} = d \cdot \cos 18°$ ableiten lässt. Folglich gilt $I(ABD) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 18° \cdot \sin 36° \cdot d^2$.

2. Lösungsweg:
Es gilt $I(ABD) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DH}$, was zum Einführen des Hilfspunktes H und zu den hinreichenden Hilfsgrößen $\overline{AB}$ und $\overline{DH}$ führt, wobei $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH}$ gilt.
Man erhält $\overline{AH} = \sin 18° \cdot \overline{AD}$ und $\overline{DH} = \cos 18° \cdot \overline{AD}$. Hieraus folgt $I(ABD) = \sin 18° \cdot \cos 18° \cdot \overline{AD}^2$.
Wegen $\overline{AD} = d \cdot \cos 18°$ folgt hieraus $I(ABD) = \sin 18° \cdot \cos^3 18° \cdot d^2$.

3. Lösungsweg:
Es gilt $I(ABD) = I(ABM) + I(BDM) + I(MDA)$ mit $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{DM} = \frac{1}{2} d$. Für die drei hinreichenden Hilfsgrößen gilt $I(AMD) = I(BMD)$. Ferner gilt $I(ABM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \sin 72°$ und $2I(AMD) = \frac{d^2}{4} \cdot \sin 144° = \frac{1}{4} \cdot d^2 \cdot \sin 36°$. Hieraus folgt dann $I(ABD) = \frac{1}{8}(\sin 72° + 2\sin 36°) \cdot d^2$.

Bei allen drei Lösungswegen gilt $I(ABD) \approx 0{,}266 d^2$.

Aufgabe 14)

V_1: $k(M;r_u)$ ist der Umkreis des Dreiecks ABC;

V_2: $k(N;r_i)$ ist der Inkreis des Dreiecks ABC;

V_3: $\overline{AC} = \overline{BC}$;

Beh.: $\overline{MN} = \sqrt{r_u(r_u - 2r_i)}$

Wir betrachten hier nur den Fall, dass $\angle ACB < 60°$ gilt.

Beim Rückwärtsarbeiten bemerkt man, dass die Struktur der Behauptung keinen Hinweis auf ein chancenreiches Hilfsmittel gibt. Also werden wir die Behauptung so lange umformen, bis dies der Fall ist.

Sei $\overline{MN} = x$. Dann ist die Behauptung äquivalent mit $x^2 = r_u^2 - 2r_ur_i$ sowie mit $2r_ur_i = (r_u + x)(r_u - x)$ und schließlich mit (*) $\dfrac{r_i}{r_u + x} = \dfrac{r_u - n}{2r_u}$.

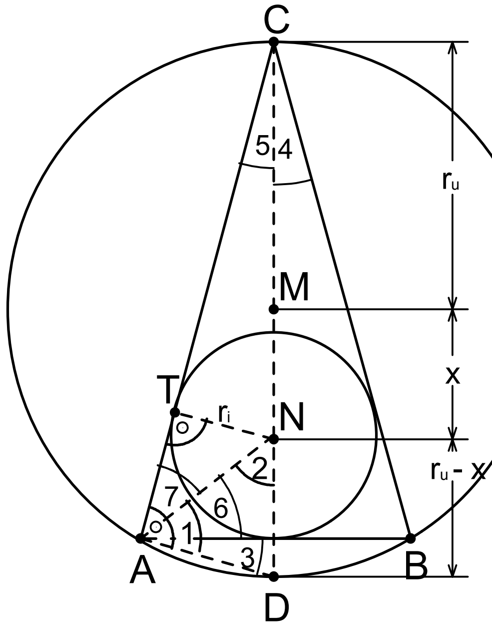
Dies weist auf "Ähnlichkeit" als *Hilfsmittel* hin und motiviert das Einführen des Durchmessers $\overline{CD} = 2r_u$ und der Strecke $\overline{TN} = r_i$ als *Hilfslinien.*

Um ein zum Dreieck TNC ähnliches Dreieck zu erzeugen zeichnen wir die Hilfslinie $\overline{AD}$ (mit zunächst noch unbekannter Länge) ein. Ferner kann man feststellen, dass $\overline{ND} = r_u - x$ gilt.

Man kann leicht zeigen, dass die Dreiecke NCT und DCA ähnlich sind. Wenn man zeigen könnte, dass $\overline{AD} = \overline{ND} = r_u - x$ gilt, könnte man die mit der Behauptung äquivalente Gleichung (*) ableiten und wäre am Ziel.

Weiteres Rückwärtsarbeiten führt zur *Hilfslinie* $\overline{AN}$ und zum *hinreichenden Teilziel* $\angle 1 = \angle 2$.

Dieses Teilziel lässt sich mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes, einer Eigenschaft gleichschenkliger Dreiecke, des Satzes über die Zentrale eines Tangentenpaars, des Außenwinkelsatzes und einiger Umformungen aus den Voraussetzungen herleiten. Wie dies geschehen kann, zeigt folgender Lösungsgraph.



$V_1 \rightarrow \angle 3 = \angle 4$

$V_3 \rightarrow \angle 4 = \angle 5$

$\rightarrow \angle 3 = \angle 5$

$V_2 \rightarrow \angle 6 = \angle 7$

$\rightarrow \angle 3 + \angle 6 = \angle 5 + \angle 7$

Es gilt $\angle 1 = \angle 3 + \angle 6$ $\rightarrow \angle 1 = \angle 2 \rightarrow \boxed{\overline{AD} = \overline{ND}}$

Es gilt $\angle 2 = \angle 5 + \angle 7$

Es gilt $\angle NCT = \angle DCA$

Es gilt $\angle NTC = \angle DAC = 90°$

$\rightarrow \Delta TNC \sim \Delta ADC$

Es gilt $\overline{TN} = r_i$

Es gilt $\overline{NC} = r_u + x$

$\boxed{\overline{AD} = \overline{ND}}$

Es gilt $\overline{ND} = r_u - x$

$\rightarrow \overline{AD} = r_u - x$

Es gilt $\overline{DC} = 2r_u$

$\rightarrow \dfrac{r_i}{r_u + x} = \dfrac{r_u - x}{2r_u} \rightarrow$ Beh.

Hiermit ist ein Lösungsplan für diese recht anspruchsvolle Beweisaufgabe gefunden.

Literatur

Heyer, U.[1]: Überlegungen zur langfristigen Ausbildung heuristischer Vorgehensweisen. Der Mathematikunterricht, Heft 3, 1992

Heyer, U., König H. [1]: Heuristische Vorgehensweisen bewusst herausbilden – Methodische Empfehlungen für den Mathematikunterricht. Der Mathematikunterricht, Heft 3, 1992

König, H. [1]: Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. Der Mathematikunterricht, Heft 3, 1992

König, H. [2]: Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich. Chemnitz, 1996

König, H. [3]: Begabtenförderung im außerunterrichtlichen Bereich an Grundschulen im Regierungsbezirk Chemnitz. Der Mathematikunterricht, Heft 3, 2006.

Polya, G. [1]: Schule des Denkens. Francke-Verlag Tübingen, 1995

Polya, G. [2]: Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Band 1 und Band 2, Birkhäuser-Verlag Basel/Stuttgart, 1996

Dr. Helmut König
Wenzel – Verner – Str. 82
09120 Chemnitz
HHWKoenig@t-online.de