Karlhorst Meyer

Anwendungen der stereometrischen Grundtatsachen

Die folgende Abhandllung zeigt einen Schnellkurs in der räumlichen Geometrie für begabte Schülerinnen und Schüler, wie er 2002 innerhalb von 180 Minuten im Trainingslager der „Bayerischen Olympiamannschaft“ in Pleinfeld durchgeführt worden ist. Der Kurs ist aber auch für jeden Förderkurs geeignet, wenn man sich etwas mehr Zeit lässt, als in Pleinfeld vorhanden war. Man sollte sich nicht daran stören, dass an einigen Stellen Vektorrechnung zum Einsatz kommt, die in aller Regel erst in der Kollegstufe vorhanden sein dürfte. In diesen Fällen ist auch eine elementargeometrische Lösung angegeben. Einige Aufgaben kommen vor, bei denen Kenntnisse der Infinitesimalrechnung erforderlich sind. Sollten diese nicht vorhanden sein, so ist es unproblematisch, diese Aufgaben wegzulassen.

1. Stereometrische Grundtatsachen

In der Geometrie geht es u. a. um Äußerungen wie „geht durch“, „liegt auf“, „ist senkrecht zu“, „ist parallel zu“, „schneidet“ und deren Negationen. Leider werden an der Schule oft diese Grundtatsachen nur im Rahmen der Planimetrie definiert und leider gelten sie dann nicht immer im Raum so, wie man sie aus der Planimetrie kennt. Hier liegt sicher eine Ursache für den Umstand, dass es dann gerade guten Schülerinnen und Schülern manchmal schwer fällt, räumliche Geometrie zu verstehen, d. h. sich räumliche Konfigurationen vorzustellen. Dies gilt im verstärkten Maße, wenn die Schülerin oder der Schüler vor der Pubertät mit räumlichen Problemen nicht vertraut gemacht worden ist (vgl. SINGER [1]). Vorbilder für das Folgende sind LANGE, SEYBOLD U. A. [1], MEYER U. A. [1] bzw. eine über 40-jährige Unterrichtserfahrung an Gymnasien und Universitäten. Im Folgenden werden hiervon der kürzehalber nur die Abweichungen gegenüber den Kenntnissen aus der Planimetrie aufgezählt.

1.1 Parallelsein

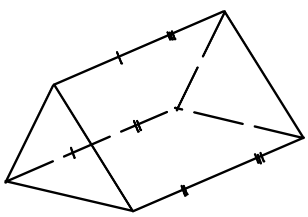
1.1.1 Definition in der ebenen Geometrie: Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben oder die identisch sind, heißen parallel.

Meist spricht man ja auf der Schule nicht davon, dass auch identische Geraden parallel heißen. Das ist aber zweckmäßig, um die Parallelität zu einer Äquivalenzrelation zu machen, d. h. auf diese Weise künstlich die Reflexivität zu erzwingen.

1.1.2 Definition im Raum: Zwei Geraden einer Ebene, die keinen Punkt gemeinsam haben oder die identisch sind, heißen parallel. Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben und nicht in einer Ebene liegen, heißen windschief.

1.1.3 Folgerung: Zwei parallele verschiedene Geraden liegen in genau einer Ebene.

1.1.4 Abweichung: Ganz allgemein gilt der Satz (*Transitivität der Parallelität*): Sind zwei Geraden zu einer dritten Geraden parallel, so sind sie untereinander parallel, liegen also in einer Ebene.



Diese Ebene muss aber nicht alle drei Geraden enthalten, wie die nebenstehende Skizze zeigt (Konfiguration einer prismatischen Fläche).

1.1.5 Parallelenaxiom: Zu einer Geraden a und einem Punkt P gibt es genau eine Gerade b durch P so, dass b parallel zu a ist. Man beachte: Es kann a = b sein.

Im Raum gibt es aber neben der Geradenparallelität auch noch andere:

1.1.6 Definition: Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben oder identisch sind.

1.1.7 Folgerung: Zwei verschiedene Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, haben eine Gerade gemeinsam.

Will man Sätze dieser Art „beweisen“, so muss man zum Teil sehr viel schreiben. Das ist aber nicht nötig, da solche Sätze längst bewiesen sind und man i. Allg. solche Sätze der Anschauung entnimmt.

Aufgabe 1.1.1: Welche Möglichkeit der gegenseitigen Lage haben 3 Ebenen im Raum?

1.1.8 Definition: Eine Ebene, die mit einer Geraden alle oder keinen Punkt gemeinsam hat, heißt zur Geraden parallel.

1.1.9 Folgerung: Eine Ebene, die zu einer Geraden nicht parallel ist, hat mit ihr genau einen Schnittpunkt.

Aufgabe 1.1.2: Weshalb kann es im dreidimensionalen Raum keine weiteren Parallelitäten geben? Sind die eingeführten Parallelitäten reflexiv, symmetrisch und transitiv, also jeweils eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 1.1.3: Finde zu den folgenden Sätzen passende Skizzen:
a) Eine Ebene ist zu einer Geraden parallel, wenn sie eine zur gegebenen Geraden parallele Gerade enthält.
b) Alle Ebenen, die zu zwei nicht parallelen Geraden parallel sind, sind untereinander parallel.
c) Alle Geraden, die zu zwei sich schneidenden Ebenen parallel sind, sind untereinander und zur Schnittgeraden der Ebenen parallel.

1.2 Winkel

Die Winkelmessung wird in der ebenen Geometrie eingeführt und auf den Raum übertragen. Im Raum gibt es z. B. zwischen zwei Ebenen viele Winkel (Text geändert 19. 4. 2015):

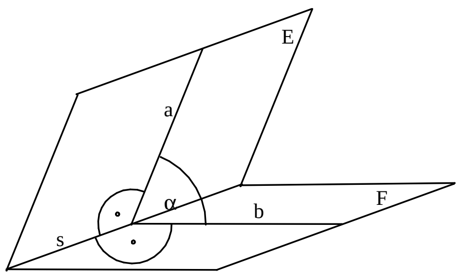
Aufgabe 1.2.1: Geht man nur von den Winkelkenntnissen der Planimetrie aus, so lassen sich die folgenden Behauptungen formulieren:
a) Zwei Geraden, die ein gemeinsames Lot haben, sind parallel.
b) Je zwei Ebenen stehen aufeinander senkrecht.
Widerlege diese Behauptungen durch geeignete Skizzen.

Wir setzen die Kenntnisse über Winkel und Lot in der Planimetrie voraus.

1.2.1 Definition: Gegeben sind zwei windschiefe Geraden a und b. b‘ sei parallel zu b und gehe durch einen Punkt von a. Die windschiefen Geraden a und b schließen dann den Winkel α ein, wenn dies a und b‘ tun.

Aufgaben 1.2.2: Was müsste man beweisen (schwer), damit 1.2.1 Definition wohldefiniert ist?

1.2.2 Definition: s sei die Schnittgerade der Ebenen E und F. a sei in E das Lot auf s und b sei in F das Lot auf s. Man definiert den Winkel zwischen E und F als den Winkel zwischen a und b.



1.2.3 Definition: Die Gerade l heißt Lot auf der Ebene E, wenn l auf mindestens zwei nicht parallelen Geraden von E senkrecht steht.

1.2.4 Folgerungen: Ist l ein Lot auf E, so steht l senkrecht auf allen Geraden von E. Alle Lote einer Ebene sind untereinander parallel. Durch jeden Punkt des Raums gibt es ein Lot auf eine Ebene.

Aufgabe 1.2.3: Beweise: Zwischen den Loten zweier Ebenen liegt der Winkel, den die Ebenen einschließen.

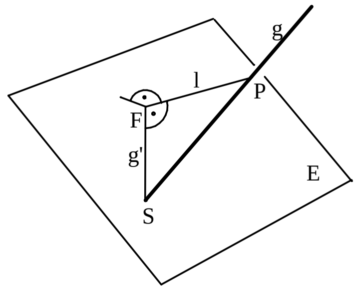
Aufgabe 1.2.4: Weshalb sind die folgenden Behauptungen falsch:
a) Stehen zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, so sind sie untereinander parallel.

b) Die Ebenen E und F stehen aufeinander senkrecht und die Gerade a ist zu E parallel; dann ist a auf F senkrecht.

c) Ist auch die folgende Behauptung falsch? Haben zwei Ebenen ein gemeinsames Lot, so sind sie parallel.

Aufgabe 1.2.5: Ist die Orthogonalität (Senkrechtstehen) eine Äquivalenzrelation?

1.2.5 Definition: Die Gerade g schneidet die Ebene E in genau einem Punkt S und g sei kein Lot auf E. l sei das Lot von P von g auf der Ebene E. l schneidet E in F. Man nennt dann die Gerade g‘ = SF die **Orthogonalprojektion** von g auf E. Die Gerade g schließt definitionsgemäß mit der Ebene E den Winkel zwischen g und g‘ ein.



Aufgabe 1.2.6: l sei ein Lot auf E. Was ist dann die Orthogonalprojektion von l auf E?

1.3 Abstände

Der Abstand zwischen zwei Punkten, die gleich sind, sei 0. Der Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten im Raum wird wie in der Planimetrie erklärt als die Länge der sie verbindenden Strecke. Was ist aber z. B. der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E, wenn der Punkt nicht zur Ebene gehört? Man nimmt irgendeinen Punkt Q der Ebene und betrachtet den Abstand PQ. Unter diesen Entfernungen gibt es sehr unterschiedliche Zahlenwerte. Als Abstand wird dann grundsätzlich die sich hierbei ergebende *kleinste Entfernung* genommen. Dieser Vorgang wird im Folgenden als *Minimalprinzip* angesprochen. Abstände sind also grundsätzlich minimale Entfernungen. Elementargeometrisch ist es i. Allg. schwer oder unmöglich dieses Problem der Analysis zu lösen. Man muss sich also irgendwie anders behelfen, wie in der folgenden Aufgabenreihe zunächst demonstriert wird:

Aufgabe 1.3.1: Gegeben ist ein Rotationszylinder vom festen Radius r und der variablen Höhe h mit der Achse a und eine Halbkugel vom selben Radius r, die den Zylinder „oben“ abschließt, d. h. deren Mittelpunkt auf der Achse a liegt. Darüber hinaus ist irgendeine Ebene E gegeben. Wo berührt das Gebilde die Ebene E bzw. wie groß ist dann h? Die Schnittlinie von E mit dem Grundkreis des Zylinders habe den Abstand b von der Zylinderachse a und die Neigung α gegen die Grundkreisebene des Zylinders.

a) Unterscheide den allgemeinen Fall von den Spezialfällen.
b) Löse die Spezialfälle.
c) Löse die Fälle, die keine speziellen sind.

Aufgabe 1.3.2: Abstände sind zunächst nur zwischen Punkten, Geraden und Ebenen definiert. Wie viele Fälle müssen definiert werden?

1.3.1 Definition: Der Abstand zwischen zwei Punkten wird auf der Verbindungsgeraden gemessen.
Der Abstand zwischen zwei nicht parallelen Ebenen wird als 0 definiert; sonst wird er auf dem gemeinsamen Lot zwischen den Fußpunkten gemessen.
Der Abstand zwischen einer Geraden und einer Ebene wird als 0 definiert, falls die Gerade die Ebene schneidet; sonst wird er auf dem gemeinsamen Lot zwischen den Fußpunkten gemessen.
Der Abstand zwischen zwei sich schneidenden Geraden wird als 0 definiert; sonst wird er auf dem gemeinsamen Lot zwischen den Fußpunkten gemessen.
Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden oder Ebene wird auf dem Lot zur Geraden bzw. Ebene durch den Punkt zwischen ihm und dem Lotfußpunkt gemessen.

Nennt man die Punkte, Geraden und Ebenen die *Grundbausteine* der Geometrie, so kann man die Definition in die folgende Kurzform bringen, wenn man unterschlägt, dass jeweils Lotfußpunkte bzw. die gegebenen Punkte benutzt werden:

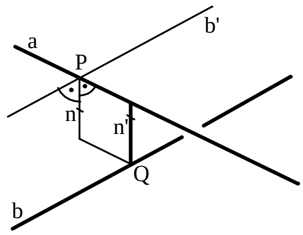
1.3.2 Definition: Der Abstand zwischen zwei Punkten wird auf der Verbindungsgeraden gemessen. Ansonsten gilt: Haben zwei Grundbausteine einen Punkt gemeinsam, so wird der Abstand als 0 definiert; sonst wird er auf dem gemeinsamen Lot gemessen.

Aufgabe 1.3.3: Prägen Sie sich diese Definiton anhand von Skizzen ein. Weshalb erfüllt diese Definition die oben genannte Minimalforderung?

Da in einem Dreieck jeweils der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, ist in allen Fällen offenbar die oben genannte Minimalforderung erfüllt. In allen Fällen findet man den Abstand dadurch, dass man das räumliche Problem in ein ebenes überführt, wenn man einmal von einigen Tricks der Vektorrechnung (z. B. Normalform von HESSE) absieht, die hier nicht genannt zu werden brauchen. Allerdings benötigt man beim Abstand windschiefer Geraden mehr:

Aufgabe 1.3.4: Überlege eine Strategie zum Auffinden des Abstandes windschiefer Geraden a und b.

Lösung:
Lege eine Gerade b‘ fest, die parallel zu b ist und durch einen Punkt P von a geht. a und b‘ bestimmen dann genau eine Ebene E. n sei ein Lot auf E durch P. Verschiebe n zu n‘ längs a so lange, bis n‘ die Gerade b in Q trifft.



Aufgabe 1.3.5: Weshalb existieren b‘, E, n und n‘ bzw. Q?

Abstände werden aber nicht nur zwischen den Grundbausteinen der Geometrie gemessen, so gibt es auch „Abstände“ z. B. auf der Oberfläche der Erde. Wie man hierbei vorgeht, lehrt die Disziplin Differentialgeometrie: Man sagt dort: Der Abstand zwischen zwei Punkten wird auf einer *geodätischen Linie* gemessen. Man kann sich solche Linien vorstellen, wenn man zwischen den Punkten auf der Fläche einen Faden spannt.

Aufgabe 1.3.6:
a) Begründe mit Physik (Mechanik), dass sich ein Faden auf der Kugel stets längs eines Großkreisbogens spannt.
b) Begründe mit Geometrie: Zwischen zwei Punkten auf der Kugel ist stets der Großkreisbogen kürzer als der längs eines Kleinkreises.

Es gibt aber auch Abstände zwischen gekrümmten Flächen und den Grundbausteinen oder überhaupt zwischen zwei gekrümmten Flächen. Allgemeine Fälle dieser Art untersucht das Fach Differentialgeometrie. Elementargeometrisch sind solche Probleme nur im Bereich von Kugeln, Rotationszylindern und –kegeln lösbar. Die folgende Definition ist nicht allgemein; sie bezieht sich nur auf die letzteren „Flächen“:

1.3.3 Definition: Eine Ebene, die mit einer „Fläche“ genau einen Punkt P oder genau eine Gerade e gemeinsam hat, heißt Tangentialebene E. P bzw. alle Punkte P von e heißen dann Berührpunkte. Das Lot n in P auf E heißt Flächennormale.

1.3.4 Satz: Im Punkt P einer Kugel ist die Ebene E genau dann eine Tangentialebene, wenn das Lot l auf E in P durch den Kugelmittelpunkt geht.

Aufgabe 1.3.7: Formuliere einen entsprechenden Satz für die Tangentialebenen an einem Rotationszylinder oder –kegel. Was ändert sich, wenn die Eigenschaft der Rotationssymmetrie nicht zutrifft?

Aufgabe 1.3.8: Wie definiert man den Abstand eines Punktes, einer Geraden oder einer Ebene von einer Kugel, von einem Zylinder oder einem Kegel?

1.3.5 Definition: Der Grundbaustein Punkt, Gerade oder Ebene habe keinen Punkt mit der „Fläche“ gemeinsam. Dann definiert man den Abstand des Grundbausteins zur „Fläche“ auf einer Flächennormalen, die Lot zum Grundbaustein ist oder durch den Grundbaustein geht, falls dieser ein Punkt ist.

Damit kommen wir zum Problem der Aufgabe 1.3.1 zurück: Das „Gebilde“ berührt die Ebene, wenn sein Abstand zur Ebene 0 ist.

Einfache Aufgaben:

Aufgabe 1.3.9:
a) Bestimme den Radius einer Inkugel in einem Würfel. Begründe, ob ein Quader eine Inkugel hat.
b) Bestimme den Radius einer Umkugel um einen Würfel. Begründe, ob ein Quader eine Umkugel hat.

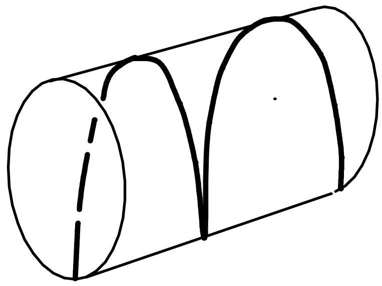
Aufgabe 1.3.10:
Bestimme die Radien der In- und Umkugeln der PLATONischen Körper.

2. Anwendungen

2.1 aus dem Bisherigen

Bei TIMSS findet man nach Aussagen von Professor Dr. Baumert, dem Organisator von TIMSS in Deutschland, das folgende Problem:

Die nebenstehende Zeichnung zeigt einen Zylinder, dessen Durchmesser a und dessen Länge b gegeben sind. Auf ihm ist ein Draht in angegebener Weise gewickelt. Sein Durchmesser ist zu vernachlässigen. Man gebe die Länge des Drahtes an.



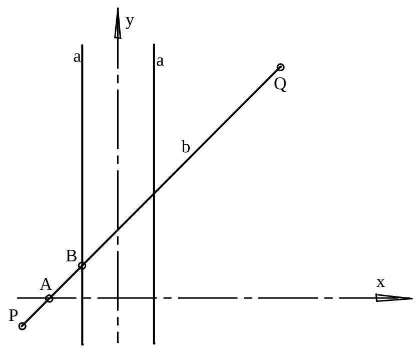
Aufgabe 2.1.1:
a) Was ist an der Zeichnung alles falsch?
b) Wie müsste die Skizze richtig aussehen und was ist vermutlich gemeint?
c) Löse das vermutlich gestellte Problem.

Aufgabe 2.1.2: Gegeben ist eine Ellipse und eine sie meidende Gerade. Gesucht wird der Abstand der Geraden zur Ellipse.
a) Finde die Spezialfälle, bei denen die Lösung trivial ist.
b) Löse zeichnerisch und rechnerisch einen nicht trivialen Fall.

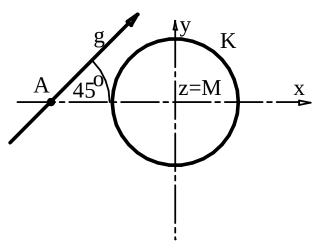
Aufgabe 2.1.3: Gegeben ist eine Hyperbel (Parabel) und eine sie meidende Gerade. Finde rechnerisch den Abstand zwischen beiden.

Aufgabe 2.1.4: Gegeben ist die Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 400$ und der Punkt $(23|23|23)$.
a) Welchen Abstand hat der Punkt von der Kugel?
b) Von dem Punkt werden alle Tangenten an die Kugel gelegt. Begründe, welche Art von Fläche die Gesamtheit all dieser Tangenten bildet.
c) Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die wahre Gestalt der Gesamtheit der Berührpunkte der Tangenten aus b).

Aufgabe 2.1.5: In der nebenstehenden Skizze findet man die 8,00 m breite geradlinige waagrechte Straße a und eine Pipeline b, die bis P waagrecht auf der Höhe der Straße verläuft und bei Q 30,00 m oberhalb des Straßenniveaus sein soll. Wo muss der Punkt P sein, damit auf der Straße in beiden Richtungen eine „lichte Höhe h“ erreicht wird? $A = (-8|0|?)$, $Q = (20|28|?)$ gemessen in Meter.
Berechne die Lage von P für h = 6,00 m.
Ist die Aufgabe lösbar, wenn P nicht mehr Abstand von der Straße als 20,00 m haben darf?



Aufgabe 2.1.6: Die nebenstehende, nicht maßstabsgerechte Skizze zeigt eine Kugel K, die einen Radius von 3000 mm hat und auf der Ebene z = 0 ruht. Die Gerade g steigt mit einem Winkel $\alpha = 30^o$ gegenüber z = 0 und geht durch $A = (-6{,}00\text{ m}|0|0)$. Berechne den Abstand der Geraden von der Kugel.



2.2 mit Bewegungen

Der Begriff der Bewegung wird heute anhand des Spiegelungsbegriffs definiert. Man unterscheidet allerdings verschiedene Spiegelungen:

2.2.1 Definition:

a) S_E heißt Spiegelung an der Ebene E oder kurz Ebenenspiegelung genau dann, wenn alle Punkte von E fix sind und für alle P, die nicht auf E liegen, das Bild P‘ auf dem Lot durch P zu E auf der anderen Seite des Durchstoßpunktes D liegt und die Abstände PD und P’D gleich lang sind.

b) S_g heißt Umwendung oder Geradenspiegelung an der Geraden g genau dann, wenn alle Punkte von g Fixpunkte sind und jeder andere Punkt P sein Bild P‘ auf der anderen Seite von g auf dem Lot l durch P zu g mit Fußpunkt D hat und die Abstände PD und P’D gleich lang sind.

c) S_P heißt Punktspiegelung an P, wenn P Fixpunkt ist und jeder andere Punkt W sein Bild W‘ auf der Verbindungsgeraden PW auf der anderen Seite von P hat und die Abstände WP und W’P gleich lang sind.

2.2.2 Definition: Das Produkt beliebig vieler Ebenenspiegelungen heißt Bewegung. Ändert sich der Drehsinn bei einer Bewegung nicht, so heißt die Bewegung gerade, sonst ungerade.

Offenbar sind alle Ebenen- und Punktspiegelungen ungerade und alle Umwendungen gerade.

Ohne Beweis werden die wichtigsten Sätze angegeben:

2.2.3 Sätze:

a) Das Produkt beliebig vieler Umwendungen ist eine gerade Bewegung.

b) Das Produkt einer Spiegelung mit sich selbst ist die identische Abbildung.

c) Das Produkt von drei Ebenenspiegelungen ist eine Ebenenspiegelung, falls die 3 Ebenen eine Gerade g gemeinsam haben oder ein gemeinsames Lot l besitzen (sog. *Dreispiegelungssatz)*. Die Produktspiegelung ist dann eine Spiegelung an einer Ebene durch g oder senkrecht zu l.

d) Jede gerade Bewegung kann als Produkt von Umwendungen dargestellt werden (*Satz von CHASLES*).

e) Ist das Produkt von drei Ebenenspiegelungen S_A, S_B und S_C eine Ebenenspiegelung S_D, so haben die Ebenen A, B, C und D eine Gerade oder ein Lot gemeinsam *(Umkehrung des Dreispiegelungssatzes*)

Vorsicht:
Die Grundlagenforschung hat gezeigt, dass die Sätze b) und c) in allen „vernünftigen“ Geometrien gelten. Dagegen sind für den Satz e) Gegenbeispiele gewisser Kreisgeometrien gefunden worden (siehe MEYER [2] und ZEITLER [1]).

2.2.4 Definition: Das Produkt zweier Ebenenspiegelungen heißt Drehung, wenn sich die beiden Ebenen schneiden bzw. Verschiebung (Translation), wenn die beiden Ebenen parallel sind.

Aufgabe 2.2.1:

a) Welche Folge hat der Dreispiegelungssatz für die Drehungen bzw. Translationen?

b) Weshalb kann man auf die Begriffe Punktspiegelung und Umwendung verzichten?

Aufgabe 2.2.2: Spiegle das Dreieck mit den Ecken A, B und C an der Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 0$. Es sei $A = (1|0|2)$, $B = (1|-1|0)$ und $C = (0{,}5|1{,}5|0)$. Löse das Problem rechnerisch und zeichnerisch für A. Hierzu ist ein geeigneter Maßstab zu finden.

Aufgabe 2.2.3: Die Kugel K um $M = (6|0|0)$ mit Radius $r = 2$ ist um $\alpha = 120^o$ um die Achse a zu drehen. Die Achse a geht durch den Ursprung und hat die Richtung $(1|1|1)$.

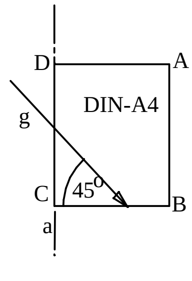
a) Berechne das Bild K‘ von K mit einer Methode, die von der Größe α unabhänig ist.

b) Konstruiere ein Bild der Kugel mit einer Methode, die von der Größe α unabhängig ist.

c) Begründe Mehrdeutigkeiten.

d) Für welche α treten hinsichtlich der Mehrdeutigkeit Besonderheiten auf?

e) Worin liegt die Besonderheit der oben gegebenen Daten?



Aufgabe 2.2.4: Die nebenstehende Skizze ist nicht maßstabsgerecht. Sie zeigt einen bei a zusammengelegten Kanzleibogen DIN-A4, dessen unterer Teil so liegen bleibt, wohingegen der obere Teil um a um 60^o aufgeklappt wird. In Richtung g trifft Sonnenlicht ein, wobei dieses gegenü-

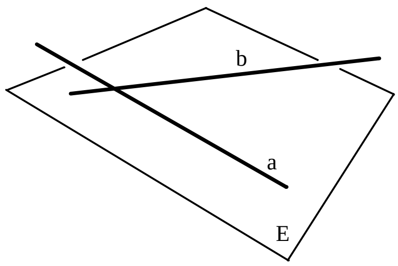
ber der zu g gehörigen Orthogonalprojektion g‘ (in der „unteren Ebene“ des Kanzleibogens) ebenfalls eine Neigung von 60^o hat. Man bestimme den Schatten des aufgeklappten Teils in der Ebene des nicht aufgeklappten Teils und berechne insbesondere den Schatten A‘ der Ecke A am aufgeklappten Teil.

3. Lösungen

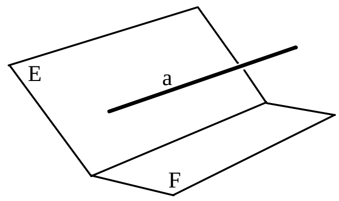
zu Aufgabe 1.1.1: Zwei Ebenen können entweder parallel sein (also u. U. auch identisch sein) oder schneiden sich in einer Geraden. Das hat zur Folge: Drei Ebenen können parallel sein (also u. U. auch identisch sein) oder zwei von ihnen sind parallel (auch identisch) und die dritte Ebene schneidet beide oder kein Paar ist parallel, d. h. je zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Wegen der Transitivität der Parallelität gilt Sind zwei dieser Geraden parallel, so auch die dritte hierzu. Unter letzterem Fall findet man den Sonderfall, dass die Schnittgeraden durch einen Punkt gehen, die drei Ebenen sich also so schneiden, dass sie genau einen Punkt gemeinsam haben.

zu Aufgabe 1.1.2: Mit Punkten gibt es keine Parallelität, da es diese nicht in der Ebene gibt. Der Begriff kann also nur zwischen Geraden und Ebenen gelten. Diese Fälle sind bereits alle behandelt. Zwischen Geraden und zwischen Ebenen gelten die drei Forderungen, wie bereits gezeigt worden ist. Hier handelt es sich also in jedem Fall um eine Äquivalenzrelation.
Anders ist dies bei der Parallelität zwischen Geraden und Ebenen, wie die folgenden Gegenbeispiele zur Transitivität zeigen:

a und b seien Geraden, E eine Ebene: Wie man am gezeichneten Beispiel sieht, folgt aus a und b parallel zu E nicht die Parallelität von a und b.



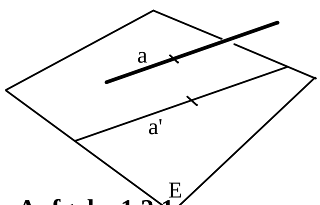
E und F seien Ebenen, a eine Gerade. Wie man am gezeichneten Bespiel sieht, folgt aus der Parallelität von E und F zu a nicht, dass E und F parallel sind.



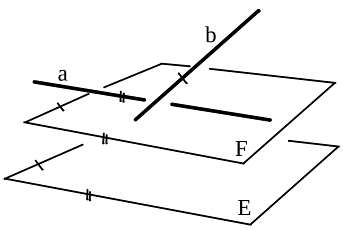
Die Reflexivität gilt in keinem Fall, da Geraden nicht gleich Ebenen und umgekehrt sein können.

zu Aufgabe 1.1.3:

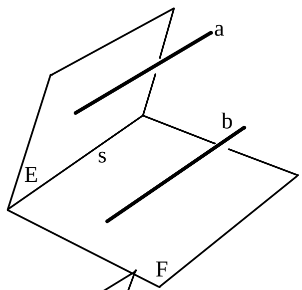
a)



b)

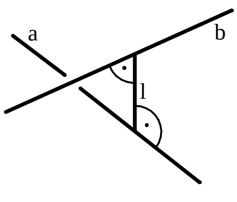


c)

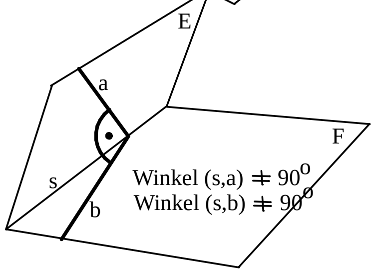


zu Aufgabe 1.2.1:

a)



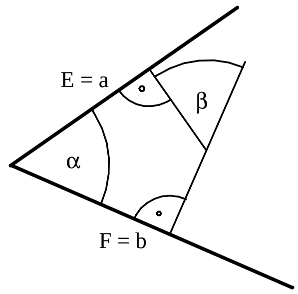
b)



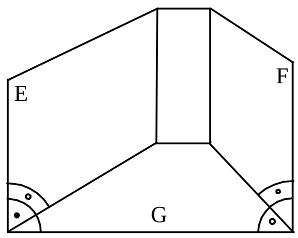
zu Aufgabe 1.2.2: Man müsste zeigen, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Geraden b‘ ist bzw. dass man die Bedeutung von a und b vertauschen kann.

zu Aufgabe 1.2.3:
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die beiden Ebenen E und F nicht parallel sind. Man kann von einem Punkt P aus die Lote l und n auf die Ebenen E bzw. F fällen. Diese beiden Lote bestimmen dann eine Ebene, die die beiden Ebenen in den Geraden a bzw. b schneidet.

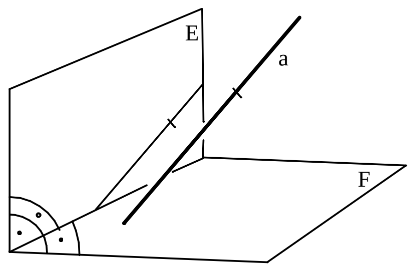
Da die Lote mit allen Geraden der Ebene, auf der sie senkrecht stehen, einen rechten Winkel einschließen, sind a und b Senkrechte auf der jeweiligen Schnittgeraden a bzw. b. Es ergibt sich die nebenstehende Figur, in der die Winkel α und β gleich groß sind. Oft kann man lesen, dass sich die beiden Winkel auch zu 180^o ergänzen können. Das stört uns nicht, da grundsätzlich der Winkel zwischen zwei Geraden und dann zwischen zwei Ebenen nur definiert ist, wenn man zulässt, dass er auch der Ergänzungswinkel zu 180^o sein kann.



zu Aufgabe 1.2.4:
a)



b)



c) Das gemeinsame Lot sei l und die beiden Ebenen E und F seien nicht parallel, haben also eine Gerade a gemeinsam. L ist Lot von E und F, wenn es mit allen Geraden aus E und F einen rechten Winkel einschließt, also auch mit a. Nehmen wir eine weitere Gerade b aus E, die also auf l senkrecht steht und die a in P schneidet. Dann bildet diese mit l zusammen eine Ebene H, die F in der Geraden c schneidet, weil F und H nicht parallel sein können. Denn nimmt man an, F und H wären parallel, so wäre das Lot l parallel zu F, was nicht sein kann. c kann aber dann keine Senkrechte auf l sein, was ein Widerspruch ist. Also sind E und F parallel.

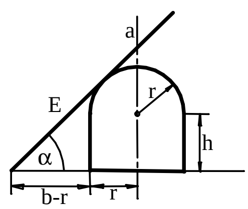
zu Aufgabe 1.2.5: Das Senkrechtstehen ist weder reflexiv noch transitiv.

zu Aufgabe 1.2.6: Die Orthogonalprojektion auf E eines Lotes ist per definitionem ein Punkt.

zu Aufgabe 1.3.1:

a) und b) Sind die Grundfläche des Zylinders und die gegebene Ebene E parallel (auch identisch) mit Abstand d, so liegt ein Spezialfall vor, der zu einer Berührung führt wenn d = r + h ist.
Ist die Ebene E parallel zur Achse a, so liegt genau dann eine Berührung mit dem Gebilde vor, wenn die Berührung längs einer Mantellinie des Zylinders geschieht.

b) Der allgemeine Fall liegt also vor, wenn die Ebene E weder parallel noch senkrecht zu a ist:
Es gibt in diesem Fall eine Ansicht des Gebildes, in der die Rissebene parallel zu a und gleichzeitig E projizierend ist. Den Neigungswinkel α der Ebene E gegen die Grundkreisebene des Zylinders sieht man dann in wahrer Größe. Aus Rotationsgründen des Gebildes entsteht der nebenstehende Riss, der genau dann eine Lösung hat, wenn E Tangentialebene an die Halbkugel ist. Als Zusammenhang zwischen den gegebenen Größen findet man $h = b \tan\alpha - \frac{r}{\cos\alpha}$.



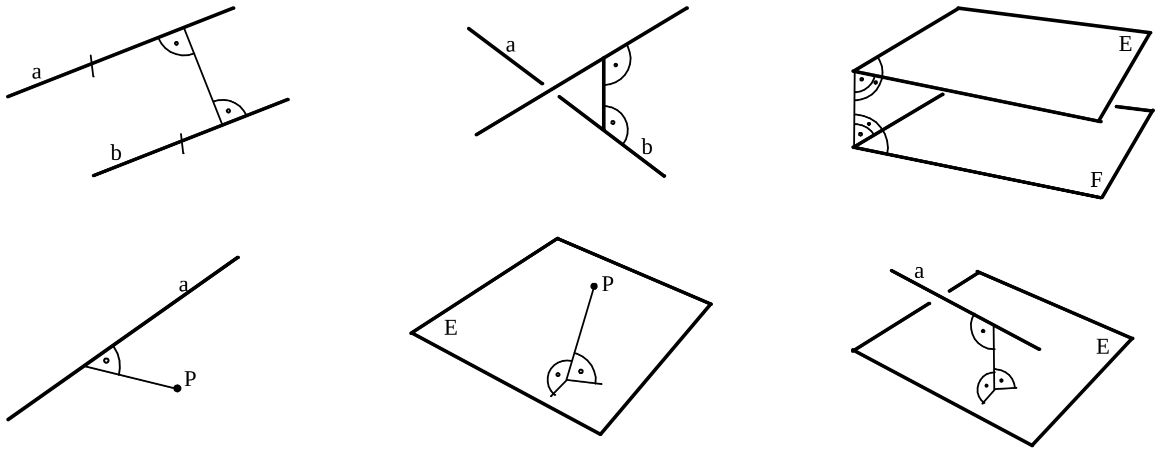
zu Aufgabe 1.3.2: Rein kombinatorisch sind auf einer dreielementigen Menge alle Paare zu bilden, wobei auch Paare aus gleichen Elementen zugelassen sind. Also gibt es 3 mal 3 Möglichkeiten, wobei bei den 6 Paaren aus verschiedenen Elementen wegen der Symmetrieforderung des Abstandes jeweils die Hälfte zu nehmen ist. Insgesamt ergeben sich so zunächst 6 Möglichkeiten für den Abstand:

1. Punkt – Punkt

2. Gerade – Gerade
3. Ebene – Ebene
4. Punkt – Gerade
5. Punkt – Ebene
6. Gerade – Ebene

Jetzt gibt es aber für die gegenseitige Lage zweier Grundbausteine noch recht unterschiedliche Möglichkeiten in den Fällen 2. bis 6. Gibt es für die beteiligten Grundbausteine nur zwei Möglichkeiten, je nachdem sie sich schneiden oder nicht schneiden, so bleibt es bei einem Fall, da der Abstand von zwei sich schneidenden Grundbausteine von vornherein als 0 definiert wird. Das ist so in den Fällen 3. bis 6. Anders liegen die Verhältnisse im Fall 2. wo man zwischen Sich-schneiden bzw. Parallel-sein und Windschief-sein unterscheiden muss. Es wird also zu 7 Definitionen kommen.

zu Aufgabe 1.3.3:



Die Minimalforderung an den Abstand ist offenbar erfüllt, da nach der Dreiecksungleichung jede weitere Entfernung länger als die skizzierte ist.

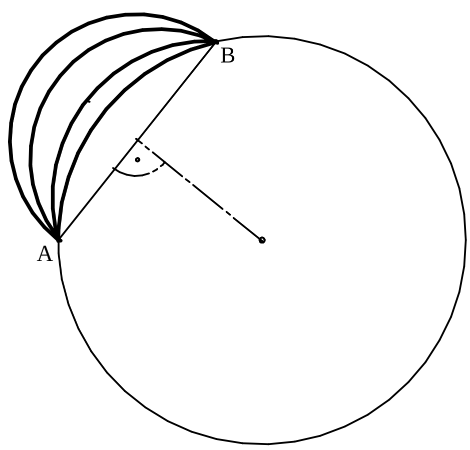
zu Aufgabe 1.3.4: siehe Kapitel 1.3.

zu Aufgabe 1.3.5: b‘ schneidet a, weil b nicht parallel zu a ist. Aus diesem Grund spannen a und b‘ eine Ebene auf. Jede Ebene hat ein Lot n durch jeden Punkt der Ebene, also auch durch einen Punkt von a. Die von l und a aufgespannte Ebene ist nicht parallel zu b, weil a und b nicht parallel sind. Also schneidet diese Ebene b in Q und dort nennt man das verschobene Lot n‘.

zu Aufgabe 1.3.6:

a) Soll ein Faden in einem Kugelpunkt A so gespannt werden, dass er die Kugel berührt, so muss er in einer Tangentialebene gespannt werden. Will man einen Faden zwischen zwei Kugelpunkten A und B so in den Tangentialebenen in A bzw. B spannen, so wird der Faden auf den Tangentialebenen dank seitlicher Kräfte so lange „abrutschen“, bis er die Schnittkante der Tangentialebenen senkrecht passiert. Verbindet man die Berührpunkte A und B mit dem Kugelmittelpunkt, so wird eine Ebene definiert, die auf dieser Schnittkante senkrecht steht und in der der gespannte Faden liegt. Verfeinert man die Situation dahingehend, dass man jetzt in dieser Ebene Kugelpunkte als Zwischenpunkte wählt, wird sich nichts daran ändern, dass der gespannte Faden in dieser Ebene liegt. Also wird seine Lage durch einen Großkreis definiert.

b) Verglichen wird ein Großkreisbogen zwischen A und B mit einem dazugehörigen Kleinkreisbogen auf der Kugel. Hierzu wird der Großkreis so gelegt, dass man ihn in wahrer Größe sieht. Der Kleinkreisbogen wird um die Sehne AB in die Zeichenebene geklappt. Es können die Längen der Bogen berechnet werden. Man sieht aber bereits in der folgenden Figur, dass der Kleinkreisbogen deutlich länger als der Großkreisbogen ist, weil er einen „Umweg“ macht.



zu Aufgabe 1.3.7: Eine Ebene ist genau dann eine Tangentialebene an einen Rotationszylinder, wenn sie eine Mantellinie mit dem Zylinder gemeinsam hat und ihr Lot in einem Mantellinienpunkt durch die Zylinderachse geht.
Eine Ebene ist genau dann eine Tangentialebene an einen Rotationskegel, wenn sie eine Mantellinie mit dem Kegel gemeinsam hat und in einem Mantellinienpunkt ihr Lot durch die Kegelachse geht.
Liegt keine Rotationssymmetrie vor, so gilt noch immer:
Eine Ebene ist an einem Kegel oder Zylinder Tangentialebene, wenn sie mit dem Kegel oder Zylinder genau eine Gerade (Mantellinie) gemeinsam hat. Die Überprüfung dieses Sachverhalts wird i. Allg. nicht mehr elementar geometrisch so ohne weiteres möglich sein.

zu Aufgabe 1.3.8: Man wird als Abstand das Minimum aller Abstände zwischen dem Punkt und den Berührpunkten aller Tangentialebenen definieren. Das ist im Fall der Kugel einfach: Man erreicht dieses Minimum an dem Berührpunkt, der auf der Verbindungslinie zwischen dem Punkt und dem Kugelmittelpunkt liegt. Bei Rotationskegel und –zylinder ist das auch einfach. Der Punkt definiert mit der Rotationsachse eine Ebene, die in einer Mantellinie die Fläche schneidet. In diesem Schnitt kann man mittels eines Lotes den Berührpunkt mit minimaler Entfernung finden. Im allgemeinen Fall von Nichtrotationsflächen wird man wohl die Analysis benötigen.

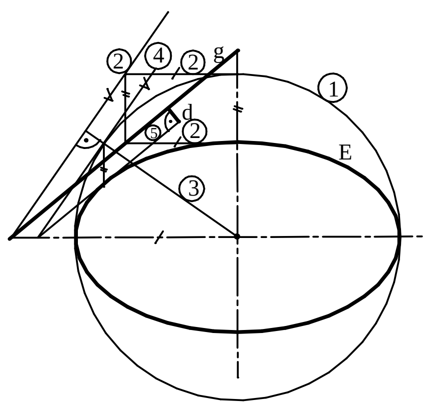
zu Aufgabe 1.3.9:
a) Der Schnittpunkt der Raumdiagonalen ist der Mittelpunkt, die halbe Kantenlänge der Radius. Ein Quader, der kein Würfel ist, hat keine Inkugel, weil es keinen Punkt gibt, der von mehr als 5 Seiten denselben Abstand hat (führe einen Widerspruchsbeweis):
b) Der Satz ist falsch: Der Mittelpunkt der Umkugel ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen des Quaders; der Radius der Abstand dieses Punktes von den Ecken.

zu Aufgabe 1.3.10: Zwei Ecken heißen diametral, wenn um den dazugehörigen Mittelpunkt eine Punktspiegelung gehört, die das Polyeder in sich überführt. Es kann aber auch, z. B. beim Tetraeder, zu einer Ecke eine Seitenfläche gegenüber liegen. Im ersten Fall ist die Mitte M Mittelpunkt der In- und Umkugel. Im zweiten Fall nimmt man die Ausgangsecke und fällt das Lot auf die gegenüber liegende Seite. Dies macht man für zwei Ecken und erhält einen Schnittpunkt M als Mittelpunkt der In- und Umkugel. Die Inkugel hat als Radius den Abstand von M zu einer Seitenfläche und die Umkugel die Entfernung von M zu einer beliebigen Ecke. Diese Abstände sind wegen der Regularität der PLATONischen Körper für alle Seiten bzw. Ecken gleich groß.

Diese Aufgabe kommt häufig als Facharbeitsthema vor. Die Aufgabenstellung wird äußerst umfangreich, wenn man die Absicht hat, In- bzw. Umkugel z. B. aus der Kantenlänge eines PLATONischen Körpers zu bestimmen, was hier nicht geschehen soll.

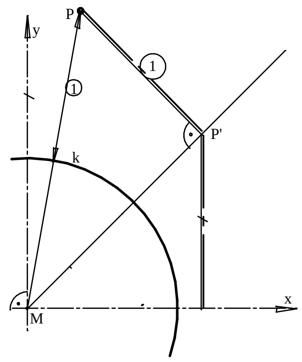
zu Aufgabe 2.1.1 siehe MEYER [3]

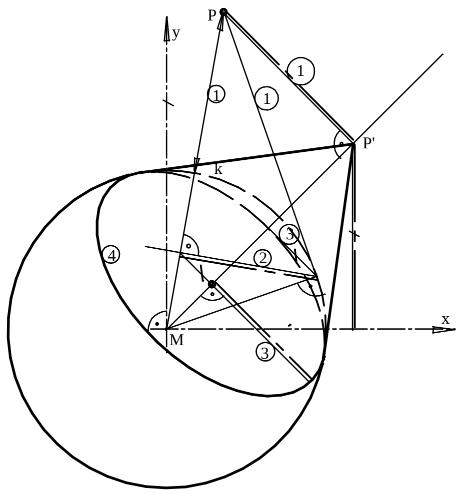
zu Aufgabe 2.1.2:
a) Steht die Gerade auf einer der Achsen der Ellipse senkrecht, so kann man den Abstand sofort angeben.
b) In allen anderen Fällen muss man zur gegebenen Geraden parallele Tangenten finden, wobei dann der Berührpunkt der einen den gesuchten Abstand liefert.
Zur rechnerischen Lösung: Man stellt die Steigung der Ellipsentangenten in Abhängigkeit eines Parameters fest und findet dessen Wert dadurch, dass man die Steigung der der Geraden gleichsetzt (im Allg. gibt es dann 2 Lösungen für den Parameter; man wählt den „richtigen“ (Begründung der Wahl!)). Man erhält so den Berührpunkt der Tangente und damit die Normale durch ihn. Berechne den Schnittpunkt der Normalen mit der gegebenen Geraden. Die Abstandsformel für 2 Punkte liefert dann die Lösung.
Zeichnerische Lösung: Die Ellipse ist das affine Bild des Kreises (1). In diesem Zusammenhang findet man das Urbild g‘ der gegebenen Geraden (2). Man fällt von diesem das Lot l auf den Ellipsenmittelpunkt (3) und sucht eine zu g‘ parallele Gerade, die den Kreis berührt (4). Das affine Bild der Tangente ist eine Ellipsentangente, die zu g den gesuchten Abstand (5) hat.



zu Aufgabe 2.1.3: Siehe die rechnerische Lösung von 2.1.2; hier muss nur eine andere Funktion abgeleitet werden.

zu Aufgabe 2.1.4: *Zeichnerische Lösung:*
Es handelt sich um eine Kugel mit Radius r = 12, die im Ursprung ihren Mittelpunkt hat.





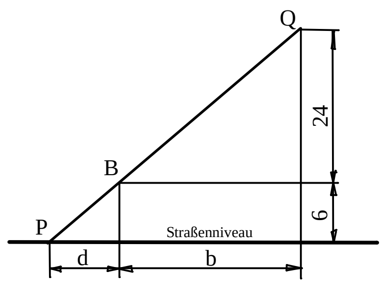
a) Wie in nebenstehendem Bild ausgeführt wird, legen wir durch die Gerade x = y eine auf der x-y-Ebene senkrecht stehende Ebene, die dann den Kugelmittelpunkt (0|0|0) und den gegebenen Punkt P enthält. Diese Ebene schneidet die Kugel im Großkreis k. P und k klappen wir in die x-y-Ebene um und „sehen“ den gesuchten Abstand s auf der Geraden PM. Diese Überlegung führt auch zur Berechnung des Abstandes: Da P 20 über der Klappachse liegt und der Fußpunkt P‘ von P bei der Klappung den Abstand P’M hat, liefert dann die zweimalige Anwendung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS: Der gesuchte Abstand ist

$$s = \sqrt{23^2 + 23^2 + 23^2} - 12 \approx 17{,}3$$

b) Die Gesamtfigur ist rotationssymmetrisch zu MP, d. h. die Gesamtheit aller Tangenten bilden einen Rotationskegel.
c) Dieser Kegel berührt die Kugel in einem Kleinkreis mit Radius a. Im umgeklappten Schnitt von a) erkennt man a. Nach dem Lehrsatz des PYTHAGORAS bzw. dem Satz des
d) EUKLID gilt:

$$a = \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{\overline{MP}^2}} = \sqrt{400 - \frac{400^2}{3 \cdot 23^2}} \approx 17{,}3$$

zu Aufgabe 2.1.5: Da A tiefer als Q liegt, ist der kritische Punkt B auf der linken Straßenseite. B muss die Höhe h haben. Nach den gegebenen Maßen hat Q die Koordinaten Q(20|28|30) und die Gerade PQ schneidet die x-Achse unter 45°. Es geht zunächst um die Länge b der Orthogonalprojektion B’Q‘ von BQ auf die x-y-Ebene auf Straßenniveau. b ermittelt sich zu $b := \overline{B'Q'} = \sqrt{24^2 + 24^2} = 24\sqrt{2}$. Man betrachtet eine Ebene durch PQ, die auf der x-y-Ebene senkrecht steht (siehe die folgende Zeichnung):

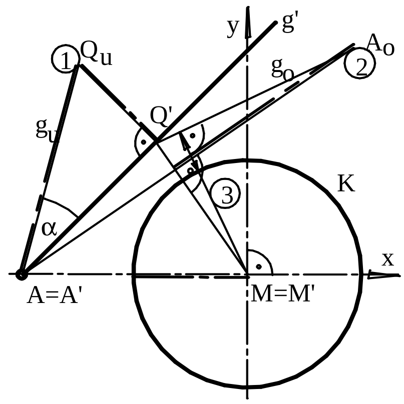


P habe die Koordinaten (p|q); die Größe d entnehme man der Zeichnung. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{d}{d+b} = \frac{1}{5}$, d. h. $d = \frac{1}{4}b = 6\sqrt{2}$.
Damit hat P die Koordinaten

$$p = -\frac{d}{\sqrt{2}} - 4 = -10 \text{ und } q = -2.$$

Der gesuchte Abstand von der Straße beträgt 6,00 m und ist damit kleienr als 20,00 m. Das Problem ist also lösbar.

zu Aufgabe 2.1.6: Mit Absicht gehen wir hier für die Jahrgangsstufe 11 einen Weg ohne Vektorrechnung:



Zeichnerische Lösung, auch wenn diese nicht verlangt ist: A liegt in der x-y-Ebene, M liegt um den Radius 3m höher. Deshalb suchen wir uns einen Punkt Q auf g in der Höhe von M:
Wegen der gegebenen Geradensteigung von 30° findet man einen solchen Punkt Q auf g in einer Entfernung von 6m von A (1). Das Dreieck QMA klappen wir um QM parallel zur x-y-Ebene. Aus A

wird A_o; g geht hierbei über zu g_o (2). Fälle von M
aus auf g_o ein Lot l, das den Kugelumriss in R_o und g_o in S_o schneidet. $\overline{R_o S_o}$ ist der gesuchte Abstand (3).

Rechnerische Lösung: Die zeichnerische Lösung liefert die Berechnung:
$\overline{QA} = \overline{Q_u A} = \frac{3}{\sin 30^o} = 6$, $\overline{A'Q'} = 3\sqrt{3}$. Die Koordinaten
von Q sind
$(-6 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mid \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mid 3)$; damit folgt:

$$\overline{QM} = \sqrt{(-6+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2} = 3\sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$$

Nun muss man in dem Dreieck aus diesen drei Seitenlängen die Höhe h von M auf g_o berechnen:
Nach dem Cosinussatz folgt für den Winkel QAM = :β:
$\cos\beta = \frac{\overline{AQ}^2 + \overline{AM}^2 - \overline{Q'M}^2}{2\overline{AQ}\cdot\overline{AM}} = \frac{36+45-9(7-2\sqrt{6})}{12\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{18+18\sqrt{6}}{36\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$. Daraus ergibt sich die gesuchte Höhe h zu $h = \overline{AM}\cdot\sin\beta = 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{13-2\sqrt{6}}$. Der Abstand der Geraden von der Kugel beträgt also

$$\frac{3}{2}\sqrt{13-2\sqrt{6}}\,\mathrm{m} - 3\mathrm{m} \approx 1{,}27\ \mathrm{m}$$

zu Aufgabe 2.2.1:

a) Aus $S_E S_F S_G = S_H$ folgt mit Satz 2.1.4 b) $S_E S_F = S_H S_G$. Das heißt, die Spiegelungsdarstellung z. B. von Drehungen und Translationen ist nicht eindeutig. Das ist aber bereits aus dem ebenen Fall bekannt.

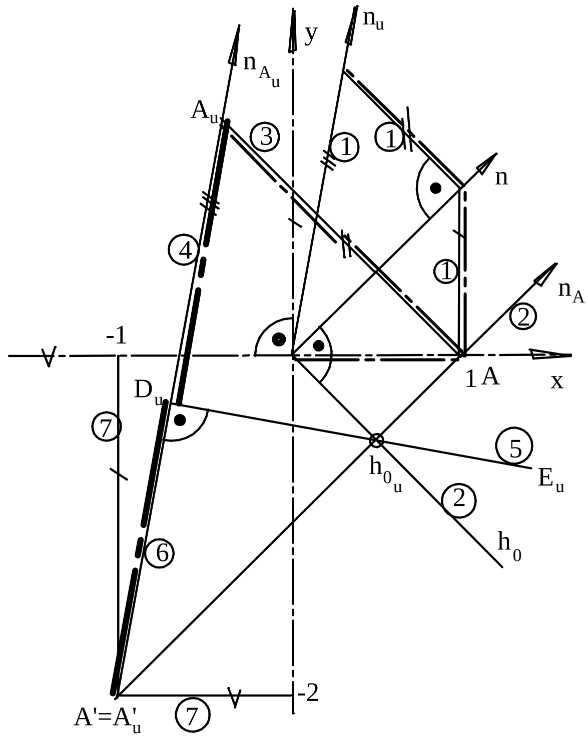
b) Jede Umwendung ist durch das Produkt von 2 Ebenenspiegelungen darstellbar, wenn deren Spiegelungsebenen aufeinander senkrecht stehen.
Jede Punktspiegelung im Raum lässt sich als Produkt von drei Ebenenspiegelungen darstellen, wenn deren Ebenen paarweise aufeinander senkrecht stehen. Also unterscheidet sich hier die räumliche Geometrie von der ebenen.

zu Aufgabe 2.2.2:
Rechnerische Lösung: Man legt durch jeden Punkt eine Gerade mit dem Normalvektor der Ebene als Richtungsvektor:
Durch A gehe a mit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und setze dies in die Ebenengleichung ein: 3 + 3λ = 0 oder λ = -1; das liefert den Schnittpunkt der Normalen durch A mit der Ebene. Also wird das doppelte λ den Spiegelpunkt A‘ ergeben: $\overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

Da B auf der Ebene liegt, ist B = B‘. Bei C verfährt man wie bei A und findet $\overrightarrow{C'} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$.

Zeichnerische Lösung:
Zunächst zeichnet man die Orthogonalprojektion n der Ebenennormalen in die x-y-Ebene und klappt um diese die Ebenennormale in die x-y-Ebene; Ergebnis n_u (1).
Man zeichnet von der Ebene die Höhenlinie h_0 zum Niveau z = 0. Sie steht auf der Orthogonalprojektion von n senkrecht (2).

Parallel zu n legt man durch A eine Hilfsebene, die um die Höhenlinie zu z = 0 in die x-y-Ebene umgeklappt wird. Man zeichnet den umgeklappten Punkt A_u (3) samt der umgeklappten Ebenennormalen n_{Au} durch A_u, die parallel zu n_u ist (4). Man möge beachten, dass die Umklappung der Höhenlinie jetzt ein Punkt h_{0u} ist.
In der umgeklappten Ansicht schaut man längs der Höhenlinien die Ebene an, also ist diese projizierend; d. h. man kann die umgeklappte Ebene E_u als Lot zu n_{Au} durch h_{0u} zeichnen (5).
Damit hat man den Durchstoßpunkt D in seiner Umklappung D_u und den Abstand von A zur Ebene (siehe den Farbsaum längs n_{Au}).
Trägt man diesen nochmals auf der anderen Seite der Ebene längs n_{Au} ab, so erhält man den Spiegelpunkt in seiner Umklappung A'_u (6). Da dieser Punkt aber auf n_A liegt, ist A'_u=A‘, d. h. die z-Koordinate von A‘ ist 0. Parallele zu den Koordinatenachsen liefern die restlichen Koordinaten (7).



zu Aufgabe 2.2.3:

a) Man legt durch M eine Ebene E, die auf der Achse senkrecht steht. Es gilt dann $\vec{a}\cdot(\vec{x}-\vec{M})=0$; d. h.
E: x – 6 + y + z = 0.
Man bestimmt den Durchstoßpunkt D dieser Ebene mit der Achse a dadurch, dass man die Geradengleichung von a in die Ebene einsetzt: λ - 6 + λ + λ = 0, also ist λ = 2. Hieraus ergeben sich die Koordinaten von D = (2|2|2). Die Überlegung geht jetzt von einem Kreis durch M um D senkrecht zu a aus, auf dem der Punkt M um 120° gedreht wird. Der Radius dieses Kreises ist u = $\overline{DM}=\sqrt{(2-6)^2+2^2+2^2}=2\sqrt{6}$.

Hieraus berechnet sich der Vektor $\overrightarrow{MD}=\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$. Gesucht wird

1. ein Einheitsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, der
2. auf a senkrecht steht und
3. mit $\overrightarrow{DM}$ 120⁰ einschließt. Das ergibt das folgende Gleichungssystem, das es zu lösen gilt:

(1) $a^2+b^2+c^2=1$
(2) $a+b+c=0$
(3) $-4a+2b+2c=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 1=-\sqrt{6}$
(3) – 2(2) $-6a=-\sqrt{6}$ oder
(4) $a=\frac{1}{\sqrt{6}}$. Aus (2) bzw. (1) folgt dann $b=-\frac{1}{\sqrt{6}}-c$ und $b^2+c^2=\frac{5}{6}$. Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so erhält man nach einer einfachen Umformung die quadratische Gleichung $2c^2+\frac{2}{\sqrt{6}}c-\frac{2}{3}=0$ mit der Lösung $c=\frac{(-1\pm 3)}{12}\sqrt{6}$. Hieraus findet man mit Obigem

$b = -\frac{\sqrt{6}(-\frac{1}{3}\pm 1)}{4} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{-1\mp 3}{12}\sqrt{6}$ .. Für den gesuchten Einheitsvektor ergibt sich: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-1\mp 3}{12}\sqrt{6} \\ \frac{-1\pm 3}{12}\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Damit kann man nun den Bildpunkt N des Punktes M berechnen:

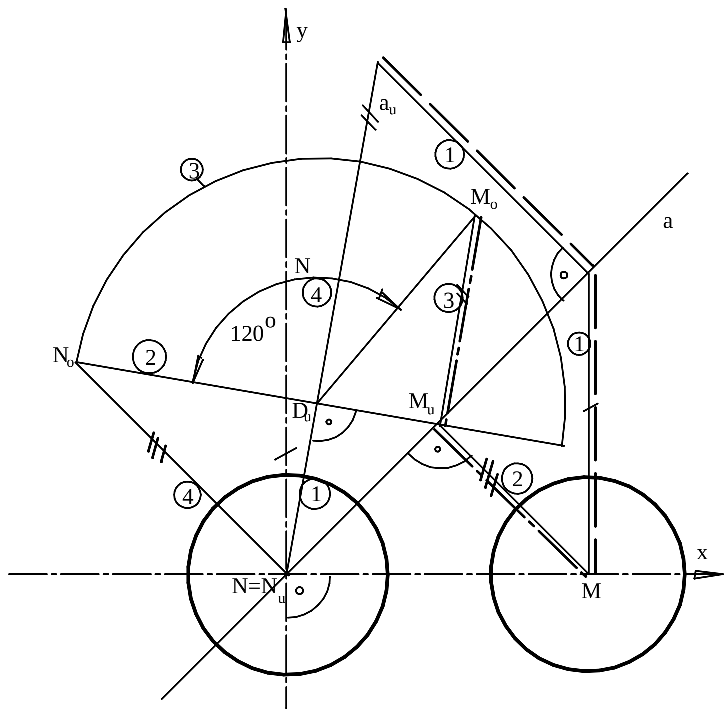
$$\vec{N} = \vec{D} - u\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\sqrt{6}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-1\mp 3}{12}\sqrt{6} \\ \frac{-1\pm 3}{12}\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\pm 3 \\ 3\mp 3 \end{pmatrix}$$

Es gibt also zwei Bildkugeln mit den Gleichungen:

$x^2 + (y-3\mp 3)^2 + (z-3\pm 3)^2 = 4$

Interessiert man sich nur für den unter b) gezeichneten Fall, so hat man die 2. Vorzeichen zu betrachten und erhält: N = (0|0|6) und die Kugelgleichung

$x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 4$



b) Die geometrische Lösung findet sich in diesem Fall leichter als die rechnerische:

Man legt durch die Achse eine Ebene senkrecht zur x-y-Ebene und klappt diese um in die x-y-Ebene. Ergebnis a_u. Diese Umklappung kann man als einen neuen Riss interpretieren, in den man den Punkt M als M_u einträgt (1).

In diesem neuen Riss ist die Achse a parallel zur Risstafel, also ist ein Kreis, der senkrecht zu a liegt, projizierend, also als Strecke senkrecht zu a_u sichtbar. Man will einen Kreis durch M_u, dessen Ebene man also zeichnen kann (2).

Diese Ebene klappt man parallel zur x-y-Ebene. Aus M_u wird M_o nach der Regel: Der Abstand von der wegfallenden Rissebene ist gleich dem Abstand zur neuen Risskante.

Man erhält so den Kreisradius und damit den Kreis (3).

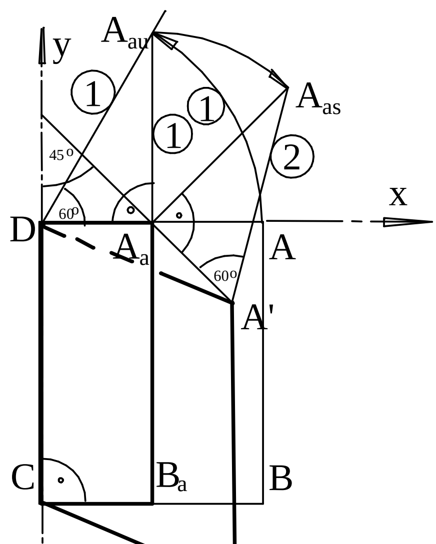
Jetzt wird M_o um 120^o gedreht zu N_o, das zufällig auf der Risskante liegt und deshalb das dazugehörige N_u auf a zu liegen kommt (4).

NN_o hat die Länge der z-Koordinate von N. Da das Orthogonalbild einer Kugel vom Radius r stets ein Kreis mit Radius r ist, kann man das Bild der gedrehten Kugel zeichnen.

c) Die Angabe ist mehrdeutig; denn es ist nicht klar, ob rechts- oder linksherum gedreht wird. Deshalb gibt es zwei Lösungen.

d) Die beiden Lösungen fallen für $\alpha = 180^o$ zusammen.

e) Da die Drehachse mindestens zwei verschiedene Punkte der Form (c|c|c) hat, liegt das Koordinatensystem zu der Achse zum Winkel 120^o drehsymmetrisch; also werden bei solchen Drehungen die Koordinatenachsen ineinander übergeführt.



zu Aufgabe 2.2.4: Klappt man die obere Seite des Kanzleibogens auf, so bleiben die Punkte C und D fix, wohin-

gegen die A zu A_a und B zu B_a übergeht.
Bei der Schattenbildung sind die Punkte C und D Fixpunkte, wohingegen die Punkte A_a und B_a des aufgeklappten Papiers die „neuen" Bildpunkte A‘ und B‘ haben. Da Geraden in Geraden übergeführt werden, ist der Schatten ein Parallelogramm A'B'CD. Man muss also nur die Punkte A‘ und B‘ finden.
Man legt durch die Kante DA eine erstprojizierende Ebene und klappt diese in die x-y-Ebene. Hierbei kann man den Winkel von 60^0 antragen, erhält den Punkt A_{au}. Klappt man zurück, so erhält man A_a (1).
Die Sonneneinfallsrichtung zeichnet man durch A_a in der
x-y-Ebene ein und klappt um diese Linie abermals eine erstprojizierende Ebene in die x-y-Ebene um. In dieser Ebene sieht man dann den 60^0-Winkel der Sonnenstrahlen in wahrer Größe, was dann zum Bildpunkt A‘ führt (2). Aus dem Bisherigen ergibt sich das Parallelogramm (3).

Die gewünschte Berechnung ergibt sich dann aus der Konstruktion:

Wir benutzen vorübergehend ein Koordinatensystem mit Ursprung D. Dann gilt $A_a = (105 \mid 0 \mid \frac{\sqrt{3}}{2} 210)$. Hieraus folgt nach der Konstruktion $\overline{A_a A'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} 210}{\sqrt{3}} = 105$. Da der Grundriss des Sonnenstrahls die x-Achse unter 45^0 schneidet, hat man dadurch die Koordinaten von A‘ gefunden zu $\left(105\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \middle| -\frac{105}{\sqrt{2}}\right)$.

Literaturverzeichnis

Lange Stefan, Seybold Hans, Baier Othmar u. a. [1]: Skriptum zur Konstruktiven Geometrie, Institut für Geometrie der Technischen Universität München 1970, vergrifffen

Meyer Karlhorst u. a. [1]: Brennpunkt Mathematik, ab 1985 Schroedel-Schulbuchverlag mbH, eingestellt 1992

Meyer Karlhorst [2]: Zur spiegelungstheoretischen Kennzeichnung von MIQUELebenen mit Berührbüschelsatz, aus Beiträge zur Geometrischen Algebra, Herausgeber Arnold, Benz und Wefelscheid, Birkhäuser Basel, Stuttgart 1977

Meyer Karlhorst [3]: War das TIMSS? in diesem Heft auf den Seiten 73 - 75

Singer Wolf [1]: Was kann der Mensch wann lernen, CD der Reihe McKinsey bildet, bzw. www.mckinsey-bildet.de

Zeitler Herbert [1]: Über (K,L)-Ebenen, Inaugural-Dissertation Kassel 1977

Anschrift des Autors:

D. Karlhorst Meyxer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg