Wolfgang Moldenhauer

Ene mene muh und raus bist du!

Bei diesem Abzählreim erinnert sich jeder gerne an seine Kinderzeit. Ein Abzählreim (Französisch: comptine) ist ein Reim, der in Kinderspielen benutzt wird, um zufällig ein Kind aus einer Gruppe auszuwählen, dem eine bestimmte Rolle in einem Spiel (zum Beispiel Räuber und Gendarm) zugewiesen wird. Daher ist ein Abzählreim auch eine Art "diskreter Zufallsgenerator". Beim Abzählreim wird bei jedem Wort oder bei jeder Silbe oder auch nur bei jeder betonten Silbe der Reihe nach auf eines der in einem Kreis stehenden Kinder gezeigt. Das Kind, auf das bei der letzten Silbe des Reims gewiesen wird, ist ausgewählt. Die Anzahl der Silben übersteigt in der Regel das intuitive Rechenvermögen der teilnehmenden Kinder, so dass, egal mit welchem Kind auch der Reim begonnen wird, für die Kinder das Ergebnis unvorhersagbar und somit einem Zufallsgenerator gleich erscheint. Da sich die Anzahl der Wörter oder Silben leicht abzählen lässt, ist in Wirklichkeit die Wahl schon durch den Beginn des Reims erfolgt. Weil manche älteren Kinder schon gut rechnen können, enthalten einige Abzählreime daher Erweiterungen, die die Wörter- oder Silbenzahl um eine weitere Zufallszahl erhöhen (z. B. um das Alter dessen, auf den zuletzt gedeutet wurde, z. B. bei Ene mene muh).

1. Abzählreime

Der didaktische Wert von Spielen, speziell hier Abzählreimen, ist unumstritten. Der Vorzug solcher Abzählreime besteht darin, dass man sie in jeder Alterstufe einsetzen kann, nachdem man zuvor die Daten und ggf. die Spielregeln altersgerecht modifiziert hat. Ferner kann man durch eben diese Modifikationen die Schwierigkeit des Problems geeignet erhöhen, so dass sich derartige Probleme zur Begabungsförderung eignen. Dabei geht fast unmerklich das spielerische Element in Modellformulierungen über, die dann in der Sprache der Mathematik ausgedrückt und gelöst werden.

Abzählreime scheinen eine lange Tradition zu haben und sich auch über größere Strecken verbreitet zu haben, was man z. B. an französischen Elementen in Abzählreimen sehen kann, die in mehr als 150 km von der historischen deutsch-französischen Sprachgrenze gebraucht werden (siehe z. B. Ene dene dorz). Ferner gibt es eine Vielzahl weiterer Modifikationen, die man im Internet mit einer Suchmaschine finden kann. Man sehe z. B.

Ene mene muh

- und tot bist du (Film 2001 und Komödie 2000 aus Österreich),
- gib mir deine Kuh! (Spiel des Jahres 2005),
- jetzt zählst du,
- der Papa, der bist du,
- ins Netzgehege gehst auch du,
- die blinde Kuh bist du...!!,
- was denkst du?,
- Deutschland das bist du,
- und Präsident bist du,
- (und) mit wem spielst du?,
- (und) du bist eine Kuh!,
- und drin bist du,
- was spricht die Kuh,
- Müllers Kuh, Müllers Esel, das bist du!,
- und der Held bist du,
- und fit bist du,
- hilf der Kuh,
- betroffen bist auch Du,
- und schlau bist Du?,
- sagt die fette Kuh,
- Lesespaß im Nu,
- wie viel Rahm hast du?,

- ... und korrupt bist... du,
- rauchen sollst auch du,
- und rein gehst du,
- aus dem Markt musst du,
- glücklich ist die Kuh,
- wie heißt denn du?,
- und was kannst du?,
- der Pulli passt zum Schuh,
- und müd´ bist du,
- der Papst bist du,
- schließ nicht das Tor mir zu,
- ich bin so doof wie du,
- und wie wohnst du?,
- gesund bist du,
- unter welchen Stein isser denn nu?,
- und blind bist du,
- und Schuld bist du,
- was für ein Individuum bist Du?,
- und mit wem spielst du?,
- so lebt die kleine lovely Kuh,
- Lesespaß im Nu,
- und Terrorist bist du.

Die Abzählreime sind als JOSEPHUS-Problem in die Geschichte der Mathematik eingegangen.

2. Geschichten

JOSEPHUS wurde als JOSEPH BEN MATHITJAHU ca. 37/38 n. Chr. in Jerusalem als Sohn einer angesehenen priesterlich-königlichen Familie geboren. JOSEPHUS war Militärkommandeur in Galiläa während des Jüdischen Aufstands gegen Rom in den Jahren 66 - 70 n. Chr., der als erster jüdischer Krieg (aus Sicht der Römer) in die Geschichte eingegangen ist. 67 n. Chr. wird er von den Truppen des Generals Vespasian gefangen genommen, wechselt aber die Seiten und wird zum Berater der Römer bei der Besetzung Jerusalems. Um die Stadt und den Herodianischen Tempel zu schonen, versucht er vergeblich zwischen den verfeindeten Parteien zu vermitteln. JOSEPHUS erhält bei der Freilassung durch den Kaiser den Namen FLAVIUS. Letztlich fällt Jerusalem im Jahre 70 n. Chr. und JOSEPHUS geht mit Titus, der nach der Wahl seines Vaters Vespasian zum Kaiser das Oberkommando übernommen hat, nach Rom. Dort erhält er das römische Bürgerrecht und verbringt den Rest seines Lebens in Rom. Er bekommt vom Kaiser eine Villa und eine stattliche Pension (im Sinne einer jährlichen Summe, nicht eine Ruhestandspension), von der er gut leben kann. Er stirbt etwa um 100 n. Chr.

Durch JOSEPHUS ist folgende Geschichte überliefert:
Während des jüdischen Aufstands gegen Rom wurden 40 Juden in einer Höhle eingeschlossen. Um der Skaverei zu entgehen, vereinbarten sie einen Algorithmus[1] (Dieser Begriff war zu diesem Zeitpunkt noch nicht vorhanden, vgl. [10].) zur gegenseitigen Vernichtung. Sie wollten sich im Kreis aufstellen und von 1 bis 40 nummerieren. Dann sollte jeder Siebente niedergemacht werden, bis nur noch einer übrig blieb, der Selbstmord begehen sollte.

[1] Das Wort Algorithmus ist eine Abwandlung oder Verballhornung des Namens von MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHWARIZMI (* ca. 783, † ca. 850), dessen Lehrbuch über das Rechnen mit indischen Ziffern (um 825) in der mittelalterlichen lateinischen Übersetzung mit den Worten "Dixit Algorismi" begann. Im Mittelalter wurde daraus lat. algorismus (mit lat. Varianten wie alchorismus, algoarismus, Altfranzösisch algorisme, argorisme, Mittelenglisch augrim, augrym) als Bezeichnung für die Kunst des Rechnens mit den arabischen Ziffern und als Titel für Schriften über diese Kunst. Die lateinischen Autoren pflegten zu erklären, dass das Wort 'algorismus' aus dem Namen des Erfinders dieser Kunst, einem Philosophen namens Algus, und dem griechischen Wort rismos (rhysmós) für 'Zahl' zusammengesetzt sei. Dabei wurde Algus von einigen als Araber, von anderen als Grieche oder zumindest griechisch schreibender Autor, oder gelegentlich auch als 'König von Kastilien' (Johannes von Norfolk) betrachtet. In der volkssprachlichen Tradition erscheint dieser 'Meister Algus' dann zuweilen in einer Reihe mit großen antiken Schriftstellern wie PLATON, ARISTOTELES und EUKLID, so im altfranzösischen Roman de la Rose, während das altitalienische Gedicht Il Fiore ihn sogar als Erbauer des Schiffes Argo ausgibt, mit dem Jason sich auf die Suche nach dem Goldenen Vlies begab. Durch Latinisierung der Schreibweise des angenommen griechischen Wortbestandteiles rismos hat sich dann in der lateinischen Wissenschaftssprache die Schreibung 'algorithmus' ergeben, und in dieser Form hat sich das Wort später als Fachterminus für geregelte Prozeduren zur Lösung definierter Probleme eingebürgert.

Der Geschichtsschreiber FLAVIUS JOSEPHUS hat sich so aufgestellt, dass er übrig blieb. Den letzten Schritt hat er allerdings nicht getan, denn anderenfalls wäre die Geschichte nicht bekannt geworden.

Diese Geschichte wird in verschiedenen Literaturquellen unterschiedlich erzählt. So findet man z. B. bei KORDEMSKI ([6], S. 37):

> "**Aufgabe** 82: Der Kater und die Mäuse
> Der Kater hatte soeben seiner jungen Herrin bei den Rechenaufgaben "geholfen". Nun schläft er süß und träumt von 13 Mäusen, die im Kreis um ihn herumtanzen. Zwölf Mäuse sind grau, und eine ist weiß. Da hört der Kater, wie ihm eine vertraute Stimme spricht: "Lieber Kater, du sollst jede 13. Maus fressen, wobei du sie in einer Richtung im Kreis herum abzählen musst, aber so, dass als letzte Maus die weiße zum Fressen bleibt."
> Mit welcher Maus muss er anfangen, um die Aufgabe richtig zu lösen? Helft dem Kater!"

Zur Lösung: Man zählt z. B. im Uhrzeigersinn von der weißen Maus aus (diese nicht mitgerechnet) die fünfte Maus ab. Die im Buch angegebene Lösung lautet fälschlicherweise die sechste.

> "**Aufgabe** 83: Das Los fiel auf den Zeisig und das Rotkehlchen
> Am Ende ihres Aufenthaltes im Ferienlager beschlossen die Jungen Pioniere, die von den jungen Vogelstellern eingefangenen gefiederten Bewohner aus Wald und Feld wieder in Freiheit zu lassen. Insgesamt waren es 20 Vögel, jeder in einem besonderen Bauer. Der Lagerleiter schlug folgende Reihenfolge vor: "Stellt alle Bauer mit den Vögeln in eine Reihe und öffnet von links nach rechts jeden fünften Käfig. Wenn ihr mit der Zählung an das Ende der Reihe kommt, dann fangt wieder an ihrem Anfang an; aber die geöffneten Käfige dürft ihr nicht mehr mitzählen. Das macht so lange, bis alle Käfige bis auf zwei geöffnet sind. Die Vögel, die sich in diesen Käfigen befinden, dürft ihr mit in die Stadt nehmen." Sie nahmen den Vorschlag an. Den meisten Kindern war es gleich, welche beiden Vögel sie mitnahmen (wenn sie schon nicht alle mitnehmen durften); aber zwei Junge Pioniere wünschten, dass das Los unbedingt auf den Zeisig und das Rotkehlchen fiel. Sie berechneten schnell, an welchen Platz man die Käfige mit dem Zeisig und dem Rotkehlchen stellen muss, damit gerade diese ungeöffnet bleiben. So stellten sie die beiden Käfige an ....
> Eigentlich könnt ihr selbst feststellen, an welchen Platz die beiden die Käfige stellten."

Zur Lösung: Wenn die 20 Käfige in einer Reihe stehen und jeder fünfte geöffnet wird, dann bleiben als die beiden letzten Käfige diejenigen ungeöffnet, die auf dem 7. und dem 14. Platz stehen, wobei man von links nach rechts zählen muss.

In der Handreichung "Heureka" haben KIEßWETTER et. al. [5] im Rahmen eines Forschungsprojekts "Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern" das Thema "Wer bleibt übrig?" für Schüler aufbereitet. Als Computerknobelei stellt BAUMANN [1] weitere Varianten vor. Natürlich sind weitere Modifikationen des Abzählens möglich. So geben z. B. LOVÁSZOVA und HVORECKÝ [7] folgende weitere Möglichkeiten an:
"The detainees standing in a line, the third detainee is executed."
"The detainess standing in a row, the first detainee is executed."

Der inhaltliche Kern aller dieser Geschichten ist das Folgende:

3. JOSEPHUS-Problem

> **Problem:** Es werden n Objekte entlang eines Kreises angeordnet und von 1 bis n (durch)nummeriert. Dann wird jedes k-te Objekt entfernt, wobei sich der Kreis sofort wieder schließt. Welches ist die Nummer $f(n, k)$ des letzten Objekts?

Im Weiteren wird zunächst der Fall $k = 2$ untersucht und die Abkürzung $f(n)$ für $f(n, 2)$ verwendet.

1. Lösung:
Es wird eine Fallunterscheidung bzgl. n durchgeführt.

Fall 1: Es wird $f(2n)$ durch $f(n)$ ausgedrückt. Dazu werden von den Zahlen $1, 2, 3, 4, ..., 2n – 1, 2n$ genau die Zahlen $2, 4, ..., 2n$ entfernt. Die verbliebenen n Zahlen $1, 3, ..., 2n – 1$ werden mit $1, 2, ..., n$ neu durchnummeriert. Man liest $f(2n) = 2f(n) – 1$ ab.

Fall 2: Nun wird f(2n + 1) durch f(n) ausgedrückt. Dazu werden von den Zahlen 1, 2, 3, ..., 2n, 2n + 1 genau die Zahlen 2, 4, ..., 2n entfernt. Es bleiben die n + 1 Zahlen 1, 3, ..., 2n – 1, 2n + 1 übrig, die durch 1, 2, ..., n neu nummeriert werden. Man erhält f(2n + 1) = 2f(n) + 1.
Zusammen mit f(1) = 1 ist f durch die beiden Rekursionsformeln vollständig bestimmt.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f(2006) &= 2\,f(1003) - 1 \\
&= 2\,[2\,f(501) + 1] - 1 && = 4\,f(501) + 1 \\
&= 4\,[2\,f(250) + 1] + 1 && = 8\,f(250) + 5 \\
&= 8\,[2\,f(125) - 1] + 5 && = 16\,f(125) - 3 \\
&= 16\,[2\,f(62) + 1] - 3 && = 32\,f(62) + 13 \\
&= 32\,[\,2\,f(31) - 1] + 13 && = 64\,f(31) - 19 \\
&= 64\,[2\,f(15) + 1] - 19 && = 128\,f(15) + 45 \\
&= 128\,[2\,f(7) + 1] + 45 && = 256\,f(7) + 173 \\
&= 256\,[2\,f(3) + 1] + 173 && = 512\,f(3) + 429 \\
&= 512\,[2\,f(1) + 1] + 429 && = 1024\,f(1) + 941 \\
&= 1965
\end{aligned}
$$

Beschreibt man das Abspulen dieser Rekursion durch einen (Rekursions)-Baum, so ist seine Tiefe proportional zu log n. Unter Tiefe wird hier die Anzahl der rekursiven Aufrufe der Funktion f verstanden, um f(n) auf f(1) zurückzuführen, wobei f(n) und f(1) mitgezählt werden. Diese Anzahl ist dann $\lfloor \mathrm{lb}(n) \rfloor + 1$ für $2^{\lfloor \mathrm{lb}(n) \rfloor} \le n < 2^{\lfloor \mathrm{lb}(n) \rfloor + 1}$.
Für die Zeitkomplexität muss man neben dem Algorithmus zunächst festlegen, welche Operationen man zählt. Im vorliegenden Programm sind dies die Operationen 2·f(n div 2) + 1 bzw. 2·f(n div 2) – 1. Die Anzahl dieser Aufrufe ist aber die soeben bestimmte Tiefe. Unter Verwendung des LANDAU-Symbols ergibt sich damit für die Zeitkomplexität O(log n). In der Sprache der Informatik heißt dies: Die Zeitkomplexität ist O(log n) (siehe DUDEN INFORMATIK [3]).

Übersetzung der Rekursionsformeln für f in ein rekursives Programm:

```
PROGRAM josephus;
VAR n: integer;

FUNCTION f(n: integer): integer;
BEGIN
     IF n < 3 THEN f: = 1
     ELSE IF odd(n) THEN f: = 2*f(n div 2)+1
     ELSE f: = 2*f(n div 2)-1
END;

BEGIN write(´n=´); readln(n);
     writeln(f(n))
END.
```

Kommentar: Die größte ganze Zahl ist bei Turbo Pascal maxint = 32767 = $2^{15} - 1$. Will man mit mehr Objekten spielen, kann man n als real deklarieren. So ist z. B.
$f(8 \cdot 10^9) = 7.410.065.409$. Dies reicht für Menschen aus, weil die Weltbevölkerung zurzeit etwa $6{,}6 \cdot 10^9$ beträgt (vgl. [2]).

2. Lösung:

Es ist f(n) = 1 für $n = 2^m$. Es sei m die größte natürliche Zahl mit $2^m \le n$. Damit ist n darstellbar als
$n = 2^m + (n - 2^m)$.
Es werden die Objekte mit den Nummern 2, 4, 6, ..., $2(n - 2^m)$ entfernt. Es verbleiben 2^m Objekte im Kreis. Das erste dieser 2^m Objekte wird "überleben". Seine Platznummer ist $2(n - 2^m) + 1$. Daher ist

$$f(n) = 2(n - 2^m) + 1. \qquad (1)$$

Beispiel:
n = 2006 = 1024 + 982, also f(2006) = 2·982 + 1 = 1965.

3. Lösung:
Man stelle n im Dualsystem dar und bringe die erste Ziffer an das Ende. Das Resultat ist f(n).

Beweis:
Zunächst wird n in das Dualsystem überführt. Es ist $n = 1z_m...z_2z_1 = 2^m + (n - 2^m)$. Nun wird die erste Ziffer, also die 1, an das Ende geschrieben. Dann entsteht die Zahl $z_m...z_2z_11$.
Nun gilt $z_m...z_2z_11 = z_m...z_2z_10 + 1 = 2(n - 2^m) + 1 = f(n)$, weil die Multiplikation mit 2 eine Verschiebung der Ziffern um eine Stelle nach links bewirkt.

Beispiel:
$n = 2006 = 11111010110_2$ ergibt $f(n) = 11110101101_2 = 1965$.
Zur Erzeugung der Dualdarstellung kann man den Euklidischen Algorithmus verwenden.

Definition: Für reelle x ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, also
$\lfloor x \rfloor := k \in Z \text{ mit } 0 \le x - k < 1$.
Für reelle x ist $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist, also
$\lceil x \rceil := k \in Z \text{ mit } 0 \le k - x < 1$.

Damit erhält man eine

4. Lösung:
Es gilt $f(n) = 1 + 2n - 2^{\lfloor \mathrm{lb}\, n \rfloor + 1}$.

Beweis:
Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus (1).

Eine Lösung kann man auch informatisch mit Listen erzielen. Man sehe nach unter „Listen verändern“ und „in Listen suchen“ ([12], [13]):

Um den Kreis zu simulieren, lesen wir die Anzahl n der Objekte ein und speichern die Zahlen 0 bis n – 1 in einer Liste. Mit einem Zeiger pos laufen wir in einer Schleife im Kreis herum; wir nennen ihn den aktuellen Zeiger. Diesen lassen wir zu Beginn auf das erste Element der Liste verweisen. Wir besorgen uns einen Zeiger new_pos, der für k = 2 auf das überübernächste Element verweist; dieses Element wird in der nächsten Iteration gelöscht werden. Wir löschen das zum aktuellen Zeiger zugehörige Element aus der Liste. Dann wird der Zeiger new_pos zum aktuellen Zeiger. Die Schleife läuft so lange, bis nur noch ein Objekt (Zahl, Element) in der Liste enthalten ist. Dieses geben wir dann aus.

Möglich ist auch die Verwendung dynamischer Datenstrukturen (vgl. ([4])). Und schließlich wurde das JOSEPHUS-Problem als Versteckspiel in der schriftlichen Abiturprüfung im Leistungsfach Informatik in Thüringen 2003 thematisiert (siehe ([9]).

4. Eigene Erfahrungen

Die Aufgabe wurde für k = 2 Schülern im Mathematik-Spezialisten-Camp Ilmenau zur Bearbeitung vorgelegt. Dabei haben fast alle Schüler zunächst nacheinander die Fälle n = 1, 2, 3, 4, ... untersucht. Ein Schüler sammelte die Ergebnisse an der Tafel. Schnell wurde festgestellt und begründet, dass f(n) = 1 für $n = 2^m$ ist. Das weitere Datenmaterial führte dann auf die Rekursionsformeln der 1. Lösung, die nicht immer explizit angegeben werden konnten. Häufig traten richtige verbale Formulierungen an die Stelle einer Formel. Diese verbalen Formulierungen bereiteten dann aber erhebliche Schwierigkeiten bei der Berechnung von f(n) für größeres n.

Bei der Lösungsnotation wurde häufig eine Schreibweise gewählt, die nacheinander die Nummern der zu streichenden Zahlen angab.

Beispiele:

n = 2: 2, 1 (Beginnend bei 1 wurde zuerst die 2 gestrichen, die 1 blieb übrig.)
n = 3: 2, 1, 3 (Beginnend bei 1 wurde zunächst die 2, dann die 1 gestrichen, die 3 blieb übrig.)
n = 4: 2, 4, 3, 1
n = 5: 2, 4, 1, 5, 3
n = 6: 2, 4, 6, 3, 1, 5
n = 7: 2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
n = 8: 2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
n = 9: 2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3 usw.

Einige Schüler haben bemerkt, dass es sich bei dieser Notation um eine Permutation der ersten n natürlichen Zahlen handelt, ohne diese JOSEPHUS-Permutation allerdings mathematisch fassen zu können. Ansonsten wurde die Folge der übrig gebliebenen Ziffern betrachtet:
1, 3, 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 1, 3, ..., 31, 1, 3, ...
Nachdem durch die Schüler die 1. Lösung erarbeitet war, die 2. ansatzweise erkennbar war, wurde die 3. Lösung mitgeteilt. Der Versuch eine Lösung für beliebiges k zu erzielen, gelang den Schülern nicht. Über diese Mathematik-Spezialisten-Camps wurde regelmäßig in der Zeitschrift Wurzel ([11]) berichtet.

5. Allgemeine Lösung

Zum Schluss wird für beliebiges k die allgemeine Lösung für f(n, k) gegeben.
Es sei P ein fest gewähltes Objekt mit der Nummer x_1 bei der 1. Zählung. Bei der i-ten Zählung sei seine Nummer x_i. Wird es nicht gestrichen, dann ist auch x_{i+1} definiert und es ist $x_{i+1} = x_i + n - \left\lfloor \frac{x_i}{k} \right\rfloor$. (2)

Begründung:

Die Anzahl der Objekte, die bei der i-ten Zählung eliminiert wurden, beträgt $\left\lfloor \frac{x_i}{k} \right\rfloor$. Damit verbleiben $n - \left\lfloor \frac{x_i}{k} \right\rfloor$ Objekte. Nach dem Abzählen dieser Objekte ist man wiederum bei P angekommen.
Nun bildet man die Folge x_1, x_2, ... bis man ein durch k teilbares x erreicht. Damit ist das $\frac{x_j}{k}$-te eliminierte Objekt erreicht. Um das s-te eliminierte Objekt zu bestimmen, löst man (2) nach x_i auf. Es ist
$\frac{x_i}{k} = \left\lfloor \frac{x_i}{k} \right\rfloor + r$, wobei für den Rest r gilt $\frac{1}{k} \le r \le \frac{k-1}{k}$. (3)
Der Fall r = 0 ist unmöglich, weil sonst x_i ein Vielfaches von k wäre und das Objekt in der nächsten Runde nicht mehr gezählt würde. Aus (2) und (3) folgt

$$x_i = (x_{i+1} - n)\frac{k}{k-1} - \frac{kr}{k-1} = \frac{(x_{i+1} - n)k - 1}{k-1} - \frac{kr-1}{k-1} \text{ mit } \frac{1}{k-1} \le \frac{kr}{k-1} \le 1 .$$

Da x_i eine ganze Zahl ist, folgt

$$x_i = \left\lfloor \frac{(x_{i+1} - n)k - 1}{k-1} \right\rfloor = x_{i+1} - n + \left\lfloor \frac{x_{i+1} - n - 1}{k-1} \right\rfloor. \quad (4)$$

Durch Benutzung von Formel (4) kann man das s-te eliminierte Objekt berechnen. Für dies gilt x_{i+1} = ks für ein geeignetes i. Die Formel (4) wird so lange wiederholt angewendet, bis man eine Zahl $\le n$ findet. Dies ist die gesuchte Zahl f(n,k).

Man überprüfe diese Herleitung für k = 2. Ferner erzeuge man für ein selbst gewähltes Zahlenbeispiel die Folge x_1, x_2, ... und die umgekehrte Folge mittels (4).

Eine andere Darstellung des allgemeinen Falles haben ODLYZKO und WILF ([8]) gegeben.
Dazu wird zunächst eine Hilfsfolge D(n,k) durch D(0,k) = 1 und $D(n,k) = \left\lceil \frac{k}{k-1} D(n-1,k) \right\rceil$ für $n \ge 1$ definiert.
Dann bestimmt man das kleinste j mit D(j,k) > (k – 1)n. Man erhält f(n,k) = kn + 1 – D(j,k).

Für die Hilfsfolge D gilt folgender

Satz: Für jedes $k \geq 2$ gibt es eine reelle Zahl K(k), so dass $D(n,k) = K(k)\left(\frac{k}{k-1}\right)^n + \varepsilon_{n,k}$ gilt. Dabei ist $\varepsilon_{n,2} = 0$ und für $k \geq 3,\ n \geq 0$ gilt $-(k-2) < \varepsilon_{n,k} \leq 0$.

Der Beweis dieses Satzes basiert auf dem Studium der Folge $f_0 = 1,\ f_{n+1} = \lceil af_n \rceil,\ n \geq 0$, für ein festes a > 1. Der Beweis ist für Schüler der gymnasialen Oberstufe nachvollziehbar. Er beruht im Wesentlichen auf dem Verständnis von $\lfloor\ \rfloor$ und $\lceil\ \rceil$.

Für k = 2 und k = 3 lässt sich dieses Ergebnis weiter spezifizieren. Trivial ist K(2) = 1, so dass sich aus dem Satz die Darstellung der 4. Lösung ergibt.

Für k = 3 gilt folgendes

Lemma:

Es ist $D(n,3) = \left\lfloor K(3)\left(\frac{3}{2}\right)^n \right\rfloor$, n = 0, 1, ... und folglich

$f(n,3) = 3n + 1 - \left\lfloor K(3)\left(\frac{3}{2}\right)^{\left\lceil \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2n+1}{K(3)}\right)\right\rceil} \right\rfloor$, n = 0, 1, ... mit K(3) = 1,622...

Literatur

Verwendete Literatur:

Baumann, Rüdeger	[1]:	Computerknobelei. In: LOG IN 122/123 (2003), Seiten 117-119
Deutsche Stiftung	[2]:	http://www.weltbevoelkerung.de/info-service/weltbevoelkerungsuhr.php?navid=3
Duden Informatik	[3]:	Dudenverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 3. Aufl., 2003
Gierhardt, Horst	[4]:	http://www.oberstufeninformatik.de/info12/Josephus.pdf
Kießwetter et. al.	[5]:	Heureka, Heft 2, Norddruck Hamburg, 1983
Kordemski, B. A.	[6]:	Köpfchen, Köpfchen. Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin, (Übersetzung aus dem Russischen) 1. Aufl. 1963, S. 37 (Mathematische Schülerbücherei Nr. 78)
Lovászova, Gabriela; Hvorecký, Jozef	[7]:	On Problems and their Interpretations. In Tagungsband: Matematiikan Ja Luonnontieteiden Opetuksen Tutkimuspäivät Oulussa, 25.–26.11.2004, Oulun Yliopisto, Oulu 2005 (siehe: http://herkules.oulu.fi/isbn9514278879/isbn9514278879.pdf)
Odlyzko, Andrew M.; Wilf, Herbert S.	[8]:	Functional Iteration and the Josephus Problem. Glasgow Math. J. 33, Seiten 235-240, 1991
Thüringer Kultusministerium	[9]:	http://www.thueringen.de/de/tkm/schule/schuleonline/pruefung/?sf=Abitur&year=2003
Wikipedia	[10]:	http://de.wikipedia.org/wiki/Algorithmus
Wurzel, Zeitschrift für Ma-	[11]:	http://www.wurzel-ev.de/

thematik

Ziegler, Joachim [12]: http://www.leda-tutorial.org/de/offiziell/ch02s03s03.html

Zlotowski, Oliver [13]: http://www.informatik.uni-trier.de/~naeher/Professur/courses/ss2003/praktikum/ueb04.pdf

Stand der Internet-Adressen: April 2007

Weiterführende Literatur:

Ahrens, Wilhelm E. M. G. — Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Teubner Leipzig 1918, Seiten 118-169

Aulicino D. J.; Goldfield, Morris — A new relation between primitive roots and permutations, Amer. Math. Monthly 76 (1969), Seiten 664-666

Errol L. L. — An O(n log m) algorithm for the Josephus problem, J. Algorithms 4 (1983), Seiten 262-270

Graham R. L.; Knuth D. E.; Patashnik O. — Concrete Mathematics, Addison-Wesley New York 1989

Herstein I. N.; Kaplansky I. — Matters mathematical, Chelsea New York 1978, 121-128

Jakobczyk F. — On the generalized Josephus problem, Glasgow Math. J. 14 (1973), Seiten 168-173

Knuth D. E. — The Art of Computer Programming, Addison-Wesley New York Vol. I, 2nd Ed. (1973), Ex. 1.3.2.22, Vol. III (1975), Ex. 5.1.1.2

Robinson W. J. — The Josephus problem, Math. Gaz. 44 (1960), Seiten 47-52

Woodhouse D. — The extended Josephus problem, Rev. Mat. Hisp.-Amer. Ser. 4 31 (1973), 207-218

Anschrift des Autors:

Dr. Wolfgang Moldenhauer
Thüringer Institut für Lehrerfortbildung,
Lehrplanentwicklung und Medien
Heinrich-Heine-Allee 2-4
99438 Bad Berka
WMoldenhauer@thillm.thueringen.de