Attila Furdek

Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung – und was in der Schule meist verschwiegen wird.

Sowohl in der Schulpraxis als auch in den Lehrplänen spielt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung eine zentrale Rolle. Dies ist an und für sich sinnvoll und gut so. Mit diesem Satz können wir aber nicht jedes Integral berechnen. Wenn die Schüler also mit keinen Aufgaben und Beispielen konfrontiert werden, bei denen der obige Satz *nicht* anwendbar ist, gehen wichtige Erkenntnisse verloren. Die Grenzen eines Satzes auszuloten ist nämlich eine notwendige Voraussetzung dafür, ihn gründlich zu verstehen. Dieser Beitrag ist eine Entdeckungsreise rund um den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Die meisten Aufgaben und Beispiele sind im Unterricht problemlos anwendbar. Einige wenige Aufgaben sind eher für die Förderung begabter Schüler geeignet und können auch in Mathematik-Arbeitsgemeinschaften verwendet werden. Diese Aufgaben wurden mit einem * gekennzeichnet.

1. Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz 1: Es sei f eine stetige Funktion im Intervall $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung: Da f stetig ist, ist f integrierbar und besitzt Stammfunktionen. Was passiert aber, wenn f *nicht stetig* ist? Diese Frage bleibt zunächst völlig unbeantwortet.

2. Stammfunktionen mit Hilfe des Integrals

Aufgabe 2.1: Es sei $f(x) = 4x^3$.
a) Ermittle eine Stammfunktion von f.
b) Berechne $\int_0^x f(t)dt$.
c) Vergleiche die Ergebnisse von a) und b). Was kannst du feststellen?

Lösung:

a) $F(x) = x^4$

b) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 4t^3 dt = \left[t^4\right]_0^x = x^4$

c) Die zwei Ergebnisse sind gleich.

Satz 2.1: Es sei f eine stetige Funktion auf $[a, b]$. Es gilt: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f.

Bemerkung: Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung zeigt uns, wie man ein Integral mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen kann. Der Satz 2.1 zeigt uns, wie man eine Stammfunktion mit Hilfe des Integrals darstellen kann.

Aufgabe 2.2: Warum schreibt man $\int_0^x f(t)dt$ und nicht einfach $\int_0^x f(x)dx$?
Versuche mehrere Begründungen zu finden.

3. Stammfunktionen bei abschnittsweise definierten Funktionen

3.1 Beispiele und Anregungen

Aufgabe 3. 1: Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 3x^2, & x \le 0 \\ 3x^2 + 4x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 4x + 2, & x \le 1 \\ 2x + 4, & x > 1 \end{cases}$ und

$h(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \le 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$ Berechne: a) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ b) $\int_0^2 g(x)$ c) $\int_{-1}^{1} h(x)dx$.

Wir empfehlen folgenden didaktischen Ansatz:
In einer *ersten Phase* versuchen die Schüler die Aufgabe ganz allein zu lösen.
In der *zweiten Phase* erhalten sie ein Blatt mit je zwei Lösungswegen. Bei b) führen die zwei Lösungswege zu unterschiedlichen Ergebnissen. Die Schüler sollen selbst entscheiden, was richtig ist, was falsch und warum.
In der *dritten Phase* wird mit der ganzen Klasse Klarheit geschaffen.

Lösung:
a) **1. Lösungsweg:**

Eine Stammfunktion von f ist $F(x) = \begin{cases} x^4 + x^3, & x \le 0 \\ x^3 + 2x^2, & x > 0 \end{cases}$. Somit ist $\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = 3 - 0 = \mathbf{3}$

2. Lösungsweg:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = [x^4 + x^3]_{-1}^{0} + [x^3 + 2x^2]_0^1 = 0 + 3 = \mathbf{3}$$

b) **1. Lösungsweg:**

Eine Stammfunktion von g ist $G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x, & x \le 1 \\ x^2 + 4x, & x > 1 \end{cases}$. Somit ist $\int_0^2 g(x)dx = G(2) - G(0) = 12 - 0 = \mathbf{12}$

2. Lösungsweg:

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = [2x^2 + 2x]_0^1 + [x^2 + 4x]_1^2 = 4 + 7 = \mathbf{11}$$

c) **1. Lösungsweg:**

Eine Stammfunktion von h ist $H(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$. Somit ist $\int_{-1}^{1} h(x)dx = H(1) - H(-1) = 0 - (-1) = \mathbf{1}$

2. Lösungsweg:

$$\int_{-1}^{1} h(x)dx = \int_{-1}^{0} h(x)dx + \int_0^1 h(x)dx = [x^3]_{-1}^{0} + [x^2 - x]_0^1 = 1 + 0 = \mathbf{1}$$

Bei Punkt b) haben die zwei Lösungswege zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt. Das ist ein Widerspruch.

Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

3.2. Integrierbare Funktionen, die keine Stammfunktionen besitzen

Wir besprechen den obigen Widerspruch mit der ganzen Klasse. Bei b) gilt:

Der 1. Lösungsweg ist *falsch*. Der Fehler: $G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x\ , & x \le 1 \\ x^2 + 4x\ , & x > 1 \end{cases}$ ist *keine* Stammfunktion von g .

Begründung: $\lim_{x \to 1-} G(x) = \lim_{x \to 1-} (2x^2 + 2x) = 4$ aber $\lim_{x \to 1+} G(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 + 4x) = 5$. Wegen $4 \ne 5$ ist G an der Stelle $x = 1$ nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar, Widerspruch zur Definition der Stammfunktion.

Wir schildern nun einen Ansatz, mit dessen Hilfe eine korrekte Stammfunktion G ermittelt werden kann:

1. Schritt: Für die zwei Terme führen wir zwei unterschiedliche Konstanten ein.

$$G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + c_1, & x \le 1 \\ x^2 + 4x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

2. Schritt: Wir stellen die Bedingung für die Stetigkeit.
Aus $\lim_{x \to 1-} G(x) = \lim_{x \to 1+} G(x)$ folgt $4 + c_1 = 5 + c_2$, d. h. $c_1 = 1 + c_2$. Damit ist

$$G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 + c_2, & x \le 1 \\ x^2 + 4x + c_2, & x > 1 \end{cases} \quad \text{oder einfach } G(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1\ , & x \le 1 \\ x^2 + 4x\ , & x > 1 \end{cases}.$$

3. Schritt: Wir prüfen die Differenzierbarkeit von G an der Stelle 1 und ggf. , ob noch G'(1) = g(1) gilt.

$$x < 1: \quad \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \frac{2x^2 + 2x + 1 - 5}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2 + 2x - 2}{x - 1} = \frac{2(x-1)(x+1) + 2(x-1)}{x - 1} = 2x + 4 \xrightarrow[x < 1]{x \to 1} 6$$

$$x > 1: \quad \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x - 1} = x + 5 \xrightarrow[x > 1]{x \to 1} 6$$

G ist an der Stelle $x = 1$ differenzierbar mit $G'(1) = 6 = g(1)$. Damit ist G eine Stammfunktion von g. Es gilt:

$\int_0^2 g(x)dx = G(2) - G(0) = 12 - 1 = \mathbf{11}$. Dies ist das richtige Ergebnis.

Der 2. Lösungsweg ist richtig. Das Ergebnis wurde durch den korrigierten 1. Lösungsweg bestätigt.

Spätestens jetzt wird aber klar: Weder bei a) noch bei c) wurde untersucht, ob F bzw. H tatsächlich Stammfunktionen von f bzw. h darstellen. Dies ist ein Fehler grundsätzlicher Art. Bei a) gehen wir nun nach dem obigen Schema vor:

1. Schritt: Für die zwei Terme führen wir zwei unterschiedliche Konstanten ein.

$$F(x) = \begin{cases} x^4 + x^3 + c_1, & x \le 0 \\ x^3 + 2x^2 + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

2. Schritt: Wir stellen die Bedingung für die Stetigkeit.
Aus $\lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x)$ folgt $c_1 = c_2$, d. h. die Konstanten können weggelassen werden. Damit ist

$$F(x) = \begin{cases} x^4 + x^3, & x \le 0 \\ x^3 + 2x^2, & x > 0 \end{cases}$$

3. Schritt: Wir prüfen die Differenzierbarkeit von F an der Stelle $x = 0$.

$$x < 0: \quad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x^4 + x^3 - 0}{x} = x^3 + x^2 \xrightarrow[x < 0]{x \to 0} 0$$

$x > 0$: $\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \dfrac{x^3+2x^2-0}{x-0} = x^2+2x \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$

Dies bedeutet: F ist differenzierbar an der Stelle $x = 0$ und $F'(0) = 0 = f(0)$. F erweist sich somit nachträglich als Stammfunktion von f. Der 1. Lösungsweg ist damit korrekt und vollständig.

Auch bei c) gehen wir nach demselben Schema vor:
1. Schritt: Für die zwei Terme führen wir zwei unterschiedliche Konstanten ein.

$$H(x) = \begin{cases} x^3 + c_1, & x \le 0 \\ x^2 - x + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

2. Schritt: Wir stellen die Bedingung für die Stetigkeit.
Aus $\lim_{x\to 0-} H(x) = \lim_{x\to 0+} H(x)$ folgt $c_1 = c_2$, d. h. die Konstanten können weggelassen werden. Damit ist

$$H(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$$

3. Schritt: Wir prüfen die Differenzierbarkeit von H an der Stelle $x = 0$.

$x < 0$: $\dfrac{H(x)-H(0)}{x-0} = \dfrac{x^3-0}{x} = x^2 \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0$

$x > 0$: $\dfrac{H(x)-H(0)}{x-0} = \dfrac{x^2-x-0}{x-0} = x-1 \xrightarrow[x>0]{x\to 0} -1$

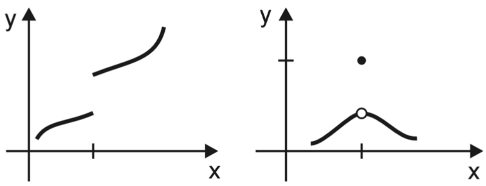
Die zwei Grenzwerte sind aber ungleich. Dies bedeutet: H ist an der Stelle $x = 0$ *nicht* differenzierbar. Aus dem Gedankengang folgt, dass h gar keine Stammfunktionen besitzt.

Bemerkung: Der Schritt $\int_{-1}^{1} h(x)dx = H(1) - H(-1)$ ist also falsch. Den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechung können wir in diesem Fall nicht anwenden. Obwohl h keine Stammfunktionen besitzt, ist es aber trotzdem integrierbar. Das Integral können wir wie im 2. Lösungsweg ermitteln.

Anmerkung: Dass der sinnlose 1. Lösungsweg das richtige Ergebnis liefert, ist reiner Zufall.

Es stellt sich die Frage, wie man einfacher feststellen kann, ob eine Funktion keine Stammfunktionen besitzt. Der folgende Satz beantwortet diese Frage für zwei wichtige Sonderfälle.

Satz 3.2.1: Nicht stetige Funktionen mit einem Sprung (Figur 1) oder einem herausgehobenen Punkt (Figur 2) besitzen keine Stammfunktionen.
Anmerkung: Dieser Satz ist wegen $F'(x) = f(x)$ eine direkte Folgerung des Zwischenwertsatzes für Ableitungen.



Figur 1 *Figur 2*

Bemerkungen:
1) Da h einen Sprung hat, besitzt sie also keine Stammfunktionen.
2) Aus didaktischer Sicht halten wir es aber für sinnvoll, mindestens ein Beispiel mit dem geschilderten Schema im Unterricht ausführlich zu besprechen.
3) Das Beispiel aus c) zeigt uns: Kein Widerspruch ist keine Garantie dafür, dass die Lösung richtig und vollständig ist.

3.3. Nicht integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen

Aufgabe 3.3.1 Es sei f: $[-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Untersuche f auf a) Stammfunktionen b) Integrierbarkeit.

Lösung.

a) Wir können feststellen: $\left(x^2 \sin\frac{1}{x^2}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x^2} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$.

Damit ist $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$. Wenn wir nun zusätzlich F(0) = 0 definieren, so gilt:

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = x\sin\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0 \text{ (wegen } -1 \le \sin\frac{1}{x^2} \le 1\text{), d. h. } F'(0) = 0 = f(0)\,.$$

f hat also Stammfunktionen; $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ist eine Stammfunktion.

b) Für eine auf einem kompakten Intervall [a, b] definierte Funktion gelten folgende Sätze:

Satz 3.3.1: Jede integrierbare Funktion ist beschränkt.

Satz 3.3.2: Eine nicht beschränkte Funktion ist nicht integrierbar.

Anmerkung: Satz 3.3.2 ist eine direkte Folgerung des Satzes 3.3.1.

Die Funktion f ist in der Umgebung des Ursprungs nicht beschränkt. Tatsächlich, es sei $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

$$f(x_n) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\cdot\sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi}\cdot\cos 2n\pi = 0 - 2\sqrt{2n\pi}\cdot 1 \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

f ist also nicht beschränkt. Aus dem Satz 3.3.2 folgt, dass f dann nicht integrierbar ist.

Bemerkungen:
1) f ist im Ursprung nicht stetig.
2) Obwohl f Stammfunktionen hat, können wir den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung nicht anwenden.

Aufgabe 3.3.2 Es seien $g(x) = \begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}\cos\frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ und

$h(x) = \begin{cases} 4x^3\sin\frac{1}{x^2} - 2x\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Untersuche g und h auf a) Stammfunktionen b) Integrierbarkeit im Bereich $1 \le x \le 1$.

Lösungshinweise:

g hat Stammfunktionen: $G(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; g ist aber nicht beschränkt und daher nicht integrierbar.

h hat Stammfunktionen: $H(x) = \begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; h ist wegen $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ stetig und integrierbar.

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt $\int_{-1}^{1} h(x)dx = H(1) - H(-1) = 0$.

3.4. Nicht stetige aber integrierbare Funktionen, die Stammfunktionen besitzen.

Aufgabe 3.4.1 Es sei $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

Untersuche f auf a) Stammfunktionen b) Integrierbarkeit im Bereich $-\frac{2}{\pi} \leq x \leq \frac{2}{\pi}$.

Lösung:

a) Wir können feststellen: $\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

Damit ist $F(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. Definieren wir nun $F(0) = 0$, dann gilt:

$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$ (wegen $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$), d. h. $F'(0) = 0 = f(0)$.

Eine Stammfunktion von f ist also $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$.

b) Wir greifen auf die folgenden Sätze zurück:

Satz 3.4.1: Wenn eine im geschlossenen Intervall [a, b] definierte Funktion f beschränkt ist und nur an endlich vielen Stellen nicht stetig ist, dann ist f integrierbar.

Satz 3.4.2: Wenn eine im geschlossenen Intervall [a, b] definierte nicht stetige Funktion f integrierbar ist und Stammfunktionen besitzt, dann gilt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Anmerkung: Satz 3.4.2 ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Wegen $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ und $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$ ist f auf jedem kompakten Intervall beschränkt. Außer in $x_o = 0$ ist f überall stetig. Aus dem Satz 3.4.1 folgt, dass f integrierbar ist. Mit Hilfe des Satzes 3.4.2 berechnen wir nun das Integral: $\int_{-\frac{2}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f(x)dx = F(\frac{2}{\pi}) - F(-\frac{2}{\pi}) = \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{4}{(-\pi)^2}\sin(\frac{-\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$

Aufgabe 3.4.2 Es sei $g(x) = \begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x^2} - 2\cos\frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

Untersuche g auf a) Stammfunktionen b) Integrierbarkeit im Bereich $-\frac{4}{\sqrt{\pi}} \leq x \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}}$.

Lösungshinweis: $G(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^2} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$ stellt eine Stammfunktion dar.

Aufgabe* 3.4.3 Es sei $g(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

Untersuche g auf a) Stammfunktionen b) Integrierbarkeit im Bereich $-1 \leq x \leq 2$.

Lösung:

a) Es sei $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Wegen $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0) = 0$ ist die Hilfsfunktion h stetig. Sie besitzt also Stammfunktionen. Es sei H eine Stammfunktion von h : $H'(x) = h(x)$, für jedes x. Wir werden nun zeigen:

$G(x) = \begin{cases} -x^2\sin\frac{1}{x} + 2H(x)\,, & x \neq 0 \\ 2H(0)\,, & x = 0 \end{cases}$ ist eine Stammfunktion der Funktion g. Tatsächlich:

$$\left(-x^2\sin\frac{1}{x} + 2H(x)\right)' = -2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2H'(x) = -2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} + 2x\sin\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{x} = g(x)$$

für $x \neq 0$. Außerdem gilt:

$$G'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\sin\frac{1}{x} + 2H(x) - 2H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(-x\sin\frac{1}{x}\right) + 2H'(0) = 0 + 2h(0) = 0 = g(0).$$

Damit ist bewiesen: g besitzt Stammfunktionen.

b) g ist beschränkt $(-1 \leq g(x) \leq 1)$ und ist an einer einzigen Stelle (im Ursprung) nicht stetig. Aus dem Satz 3.4.1 folgt, dass g integrierbar ist. Wir wenden nun den Satz 3.4.2 an.

$$\int_{-1}^{2} g(x)dx = G(2) - G(-1) = \left(-4\sin\frac{1}{2} + 2H(2)\right) - \left(-\sin(-1) + 2H(-1)\right) = -4\sin 0{,}5 - \sin 1 + 2H(2) - 2H(-1)$$

Der verallgemeinerte Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung hat aber nicht zum Ziel geführt: Das Integral konnten wir doch nicht ausrechnen. Dieses ungewöhnliche Phänomen hat folgenden Hintergrund:
Obwohl g Stammfunktionen besitzt, wurde eine solche nicht direkt angegeben. Der Term von G verweist auf eine Stammfunktion H von h, die ihrerseits ebenfalls nicht hingeschrieben wurde. Diese Umwege haben einen tieferen Grund, und zwar: Weder bei G noch bei H können wir den Funktionsterm mit Hilfe der üblichen, sogenannten „Elementarfunktionen“ in endlich vielen Schritten ausdrücken.

Aufgabe 3.4.4 Es sei $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ c & , x = 0 \end{cases}$. Zeige, dass f genau dann Stammfunktionen hat, wenn $c = 0$ ist.

Anmerkung: Dieses Ergebnis ist eine direkte Folgerung des Gedankenganges von der Aufgabe 3.4.3.

Aufgabe* 3.4.5 Es sei $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Untersuche g auf Stammfunktionen.

Lösungshinweis:

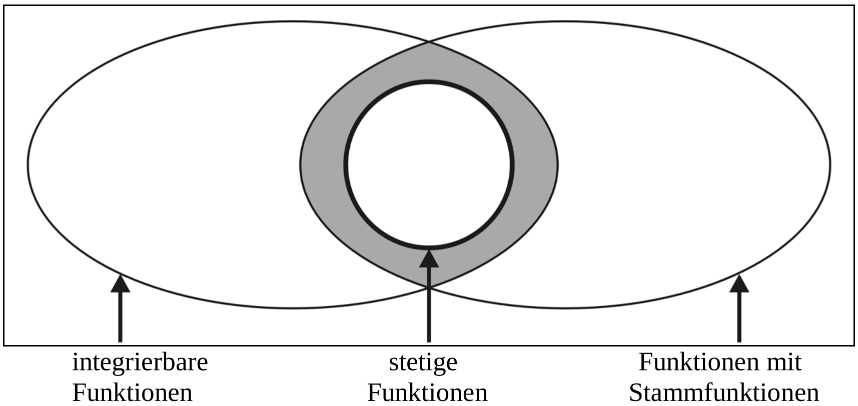
Es sei H eine Stammfunktion der stetigen Funktion $h(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Dann gilt:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} - 2H(x)\ ,\ x \neq 0 \\ -2H(0)\ ,\ x = 0 \end{cases}$$ ist eine Stammfunktion von g .

4. Zusammenfassung und Ausblick

4.1. Zusammenfassung

Anhand einer Veranschaulichung fassen wir einige Ergebnisse zusammen.



- Stetige Funktionen sind integrierbar und besitzen Stammfunktionen.
- Es gibt Funktionen, die zwar integrierbar sind aber keine Stammfunktionen besitzen.
- Es gibt Funktionen, die zwar Stammfunktionen besitzen aber nicht integrierbar sind.
- Es gibt auch *nicht* stetige Funktionen, die integrierbar sind und Stammfunktionen besitzen.

Es reichen einige wenige Beispiele von nicht stetigen Funktionen, um den Schülern die obigen Erkenntnisse erfolgreich zu vermitteln. Dies halten wir u. a. aus folgenden Gründen für sinnvoll:

- Die Begriffe „integrierbare Funktion“ und „Stammfunktion“ gewinnen an Klarheit und Schärfe.
- Andere wichtige Begriffe der Analysis – wie Differenzierbarkeit und Stetigkeit – werden an ausgewählten Beispielen wiederholt und vertieft.

Bemerkungen:
1) Wenn man im Unterricht ausschließlich stetige Funktionen behandelt, werden interessante Erkenntnisse ausgeklammert. So läuft man außerdem Gefahr, dass viele Schüler „alles in einen Topf werfen“.
2) Die Vertiefung von nicht stetigen Funktionen kann z. B. in einer Begabtenförderungs-AG erfolgen.

4.2. Der Hauptsatz kann auch bei stetigen Funktionen unbrauchbar sein.

Aufgabe 4.2.1 Berechne $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

Der Versuch, eine Stammfunktion von $f(x) = e^{x^2}$ zu finden ist zum Scheitern verurteilt. Die Behauptung „wir können keinen Term für eine Stammfunktion finden“ kann zunächst verblüffen. Da f stetig ist, besitzt es Stammfunktionen. Sie sind aber mit den gelernten Methoden nicht zugänglich. Genauer: Wir können einen Funktionsterm für F mit Hilfe der üblichen, sogenannten „Elementarfunktionen“ in endlich vielen Schritten nicht ausdrücken. $\int_0^1 e^{x^2}dx = F(1) - F(0)$ ist zwar gültig, führt aber trotzdem nicht zum Ziel.

Bemerkungen:
1) Ohne die Wichtigkeit des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung schmälern zu wollen, halten wir sachlich fest, dass dieser selbst bei stetigen Funktionen keine „Universalmethode“ darstellt.

2) Das Phänomen „nicht zugänglich“ ist den Schülern bei den bekannten transzendenten Zahlen π und e (mehr oder weniger) bekannt. Eine gezielte Parallele halten wir aus didaktischer Sicht für sinnvoll.
3) Für das Integral können wir mit dem Rechner einen guten Näherungswert ermitteln – wie bei π oder e.
4) Die Darstellung von F als unendliche Summe könnten wir in einer Arbeitsgemeinschaft thematisieren.

Aufgabe 4.2.2 Berechne $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{\ln t}}dt$.

Lösungshinweis: $\int_0^1 e^{x^2}dx$ führt durch die Substitution $x = \sqrt{\ln t}$ zum Integral $\int_1^e \frac{1}{2\sqrt{\ln t}}dt$.

4.3. Funktionen, die an unendlich vielen Stellen nicht stetig sind.

Aufgabe* 4.3.1 Es sei $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \notin \left\{\frac{1}{n} \text{ mit der natürlichen Zahl } n \geq 2\right\} \\ n & \text{für } x \in \left\{\frac{1}{n} \text{ mit der natürlichen Zahl } n \geq 2\right\} \end{cases}$

Untersuche f auf Integrierbarkeit und berechne gegebenenfalls das Integral $\int_0^1 f(x)dx$.

Wir empfehlen folgenden didaktischen Ansatz:
In einer *ersten Phase* versuchen die Schüler die Aufgabe ganz allein zu lösen.
In der *zweiten Phase* erhalten sie ein Blatt mit je zwei Lösungswegen. Bei b) führen die zwei Lösungswege zu unterschiedlichen Ergebnissen. Die Schüler sollen selbst entscheiden, was richtig ist, was falsch und warum.
In der *dritten Phase* wird mit der ganzen Klasse Klarheit geschaffen.

1. Lösungsweg:

Aus ihrer Definition folgt, dass f genau an den Stellen der Form $x = \frac{1}{n}$ mit $n \in \{2, 3, 4, ...\}$ nicht stetig ist. Wir prüfen diese ziemlich offensichtliche Eigenschaft an zwei Beispielen.

Beispiel 1: $x_o = \frac{1}{3}$. $f(x_o) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ und $f(x) = x^2 \xrightarrow[x\neq\frac{1}{3}]{x\to\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Wegen $3 \neq \frac{1}{9}$ ist f an der Stelle $x_o = \frac{1}{3}$ nicht stetig.

Beispiel 2: $x_o = \frac{2}{3}$. $f(x_o) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ und $f(x) = x^2 \xrightarrow[x\neq\frac{2}{3}]{x\to\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Es ist also

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right)$, denn $\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$. Dies bedeutet, dass f an der Stelle $x_o = \frac{2}{3}$ stetig ist.

1. Schritt: Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir berechnen $\int_\varepsilon^1 f(x)dx$.

Bemerkung: f ist im Intervall $[\varepsilon, 1]$ bis auf *endlich* viele Stellen stetig. Z. B. für $\varepsilon = 0{,}08$ gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5$. In diesem Beispiel ist f genau an $[12{,}5] - 1 = 11$ Stellen des Intervalls [0,08, 1] nicht stetig. Allgemein gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon}$, und somit ist f an genau $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1$ Stellen des Intervalls $[\varepsilon, 1]$ nicht stetig.

Jede stetige Funktion ist integrierbar. Nun wenden wir folgenden Satz an:

Satz 4.3.1 Wenn zwei Funktionen bis auf endlich viele Stellen gleich sind und die eine Funktion stetig ist, dann sind beide Funktionen auch integrierbar und die zwei Integrale sind gleich.

Betrachten wir folgende stetige Hilfsfunktion: $g: [0, 1] \to \mathsf{R}$, $g(x) = x^2$. Im Intervall $[\varepsilon, 1]$ gilt: $f(x) = g(x)$ bis auf die angesprochenen $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1$ endlich vielen Stellen. Wegen des Satzes 4.3.1 ist f integrierbar in diesem Intervall und $\int_\varepsilon^1 f(x)dx = \int_\varepsilon^1 g(x)dx = \int_\varepsilon^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{3} - \frac{\varepsilon^3}{3}$.

2. Schritt: $\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx$. Wir untersuchen den Grenzwert.

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon^3}{3}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$. Daraus folgt:

Antwort: f ist integrierbar und $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

2. Lösungsweg:

Wir arbeiten mit RIEMANN-Summen der Form $\sigma(\Delta_n, \xi_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Es sei $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Damit ist $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ für jedes i.

Es seien noch $\xi_1 = \frac{1}{n^2}$ und $\xi_i = \frac{i}{n}$ für $i \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$. Eingesetzt in die RIEMANN-Summe erhalten wir:

$$\sigma(\Delta_n, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = n^2\cdot\frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}_{\uparrow\text{ wegen } f(x) > 0} > n + 0 = n$$

Zusammengefasst: $\sigma(\Delta_n, \xi_i) > n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\Delta_n, \xi_i) = \infty$ (1)

Laut Definition ist $\int_0^1 f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\Delta_n, \xi_i)$. (2)

Aus (1) und (2) folgt die *Antwort:* Die Funktion f ist nicht integrierbar.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt. **Das ist ein Widerspruch.**

Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

Lösungshinweise zur Aufgabe 4.3.1:

Wir Betrachten die Funktion an den "interessanteren Stellen" $x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$: $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ und ermitteln den Grenzwert: $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ (3)

(3) bedeutet, dass die Funktion f *nicht beschränkt* ist. Die Beschränktheit ist aber eine notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit (siehe Satz 3.3.1). Es folgt also, dass f *nicht integrierbar ist*. Daher ist der 1. Lösungsweg falsch. Der Fehler im 1. Lösungsweg ist an dieser Stelle:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 f(x)dx \qquad (4)$$

Obwohl sowohl $\int_\varepsilon^1 f(x)dx$ als auch dessen Grenzwert existieren, ist f trotzdem nicht integrierbar.

Bemerkungen:

1) Für stetige Funktionen f stellt (4) eine wahre Aussage dar.
2) Die im 1. Lösungsweg angewandte Rechentechnik ist von den uneigentlichen Integralen im Unterricht gut bekannt.
   Als Problemlöser versucht man, eine neue Aufgabe mit Hilfe bekannter Schemata zu packen – auch dann, wenn dies letztendlich nicht geht. Dies ist der psychologische Hintergrund vieler falscher Analogien.
3) Aus dem Satz 3.2.1 folgt, dass f keine Stammfunktionen besitzt.
4) Der 2. Lösungsweg ist richtig.

Aufgabe* 4.3.2 Es sei $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \notin \left\{\frac{1}{p} \text{ mit p Primzahl}\right\} \\ 1 & \text{für } x \in \left\{\frac{1}{p} \text{ mit p Primzahl}\right\} \end{cases}$

Untersuche f auf Integrierbarkeit und berechne gegebenenfalls das Integral $\int_0^1 f(x)dx$.

Lösungshinweise:

f ist an unendlich vielen Stellen nicht stetig. Diese Stellen sind *abzählbar*, denn sie bilden eine Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{p}, \dots$. Wir greifen auf folgenden Satz zurück:

Satz 4.3.2: Wenn zwei beschränkte Funktionen bis auf abzählbar viele Stellen gleich sind und die eine Funktion stetig ist, dann sind beide Funktionen integrierbar und die zwei Integrale sind gleich.

Betrachten wir nun folgende stetige Hilfsfunktion: $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Es gilt: $f(x) = g(x)$ bis auf die abzählbar vielen Stellen $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{p}, \dots$ Wegen der Beschränktheit von f ergibt Satz 4.3.2: f ist integrierbar in diesem Intervall und $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.

Bemerkung: Aus dem Satz 3.2.1 folgt, dass f keine Stammfunktionen besitzt.

Literatur:

[1] Furdek, Attila: Fehler-Beschwörer. Typische Fehler beim Lösen von Mathematikaufgaben. Books on Demand, 2002 (2. Auflage)

[2] Lexikon der Mathematik in sechs Bändern, Spektrum Verlag (2002), Band 5, Seite 478

[3] Meyer, Karlhorst: Zur Einführung des Integralbegriffs in K12 , Mathematikinformation Nr. 1 (1981)

[4] Siretchi, Gh.: Calcul diferential si integral (1985)

Anschrift des Autors:
Attila Furdek
Plaukelmatte 14
77855 Achern
e-mail: a@furdek.de

Hinweise für weitere Änderungen vor dem Druck entfernen:

Es ist unbekannt, wie der Autor seine Formeln geschrieben hat.
Ich habe die Änderungen mit dem Formeleditor von msword vorgenommen.

Die Sonderzeichen ℕ und ℝ sind dem Zeichensatz Lucida Sans Unicode entnommen.

Meyer