

Klaus Dürrschnabel

Die Analysis des Regenbogens

Der Regenbogen ist ein faszinierendes Naturphänomen. Das Zusammentreffen von Regen und Sonne führt zu einem Farbenspiel, welches die Welt schon seit der Antike beeindruckt und mit den verschiedensten Interpretationen verbunden ist. In dem Artikel wird die Entstehung des Naturschauspiels diskutiert. Die Frage nach der Farbzerlegung wird ebenso behandelt wie die Bogenform. Auch die Tatsache, dass man manchmal einen zweiten schwächeren Regenbogen mit umgekehrter Farbreihenfolge sieht, wird besprochen. Bei der Diskussion all dieser Phänomene spielen Raumgeometrie und insbesondere Inhalte der Analysis eine zentrale Rolle, woraus sich auch der Titel erklärt. Es werden aber nur solche Hilfsmittel benutzt, die auch ein interessierter Oberstufenschüler verstehen kann. Der Artikel ist ein Vorschlag für ein Mathematik und Physik verbindendes Projekt ab Beginn der Sekundarstufe II.

1. Einleitung

Der Regenbogen ist ein Phänomen, das die Menschheit seit alters her beeindruckt und vielerlei übertragene Bedeutungen bekommen hat. So taucht dieses Zeichen bereits im ersten Buch der Bibel, im Buch Genesis auf. Nach der Sintflut, welche fast die gesamte Menschheit ausgerottet hatte, setzte die Arche Noah nach vielen Wochen wieder auf der Erde auf. Es heißt dann, dass Gott versprach, künftig das Leben nicht mehr vernichten zu wollen und als Zeichen des Bundes zwischen Gott und den Menschen einen Bogen, gemeint ist ein Regenbogen, in die Wolken setzte.

Aber auch in anderen Zusammenhängen taucht immer wieder der Regenbogen als mystisches Zeichen auf. In der griechischen Sagenwelt war der Regenbogen das Kennzeichen der Götterbotin Iris, auf welchem sie zur Erde hernieder stieg – also auch hier die Versinnbildlichung des Bundes zwischen den Göttern und den Menschen.

Nicht nur im Abendland, auch in anderen Kulturkreisen wurde dem Regenbogen eine mystische Bedeutung zugemessen. So wurde bei den Inkas die Sonne als Gottheit verehrt, deren Ausstrahlung sich durch den Regenbogen äußerte. Mehr noch: Der Regenbogen wurde selbst als Gottheit verehrt, natürlich der Sonne untergeordnet. Und in der chinesischen Frühliteratur wurde der Regenbogen als „Regendrachen“ bezeichnet, d. h. auch hier wurde dem Regenbogen eine übertragene Bedeutung gegeben.

Auch heute werden dem Zeichen des Regenbogens übertragene Bedeutungen zugemessen. Zur Belegung dieser Behauptung seien hier folgende Beispiele stellvertretend für viele weitere genannt: Ein in der badischen Region sehr bekannter und viel gehörter Radiosender hat sich den Namen Regenbogen gegeben. Diverse Hilfsorganisationen stellen ihre Aktivitäten unter dieses Zeichen. Sogar politische Organisationen nehmen den Regenbogen als Namen und Zeichen für ihre gemeinsamen Aktivitäten. So gibt es die Regenbogenpartei in Hamburg und die Regenbogenfraktion innerhalb des Europäischen Parlaments in Straßburg.

Woher kommt diese Faszination des Regenbogens? Sein Ursprung liegt natürlich in der Naturerscheinung, die immer dann auftritt, wenn Sonne und Regen zusammentreffen und man mit der Sonne in die Richtung des Regens blickt. Der Ursache dieser Naturerscheinung, die jeder kennt und schon mehrfach gesehen hat, wollen wir jetzt genauer nachgehen.

Der Regenbogen erscheint immer in Form eines Bogens. Die Farbreihenfolge ergibt sich dabei von außen nach innen in der Reihenfolge rot-orange-gelbgrün-blau-indigo-violett. Bei deutlich sichtbaren Regenbögen erkennt man häufig noch einen schwächer ausgeprägten zweiten Regenbogen außerhalb des ersten Primärbogens. Dieser hat dann die umgekehrte Farbreihenfolge,



d. h. die Farbe rot findet man am inneren und die Farbe violett am äußern Rand.

Aufgrund dieses Phänomens ergibt sich eine Reihe von Fragen, die im Folgenden beantwortet werden:

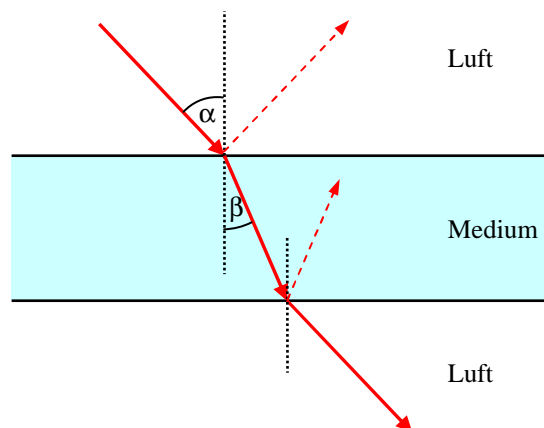
- Wie kommt es zu der Erscheinung des Regenbogens? Warum sieht man die Farben?
- Warum sieht man einen Bogen? Ist vielleicht dieser Bogen sogar ein Kreisstück? Die Erklärung, wie sie gerne im Physikunterricht gegeben wird (vgl. z. B. [1]), ist hier nicht ausreichend.
- Wieso sieht man bei einem ausgeprägten Regenbogen einen zweiten, blässeren oberhalb des ersten Bogens? Warum ist bei diesem zweiten Bogen die Farbreihenfolge umgedreht?

2. Die Farbzerlegung

Bekanntlich wird Licht beim Eintritt in ein durchsichtiges, optisch dichteres Medium zum Lot hin gebrochen. Nach dem Brechungsgesetz des SNELLIUS erfolgt die Brechung über die Beziehung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n = \text{const.}$$

Hierbei ist $n > 1$ eine Materialkonstante des optisch dichteren Mediums, der sog. Brechungsindex.¹ Die Winkel α und β werden jeweils zum Lot hin gemessen. Beim Austritt des Lichtstrahls aus dem Medium sind die Rollen von Ein- und Ausgangsstrahl gerade vertauscht, d. h. hier wird der Strahl vom Lot weg gebrochen. Der Vollständigkeit wegen soll bemerkt werden, dass an den Grenzflächen stets ein geringer Teil des Lichts reflektiert wird, dieser aber – sofern nichts anderes gesagt wird – im Folgenden immer vernachlässigt wird.



Untersucht man den Brechungsindex genauer, so stellt man fest, dass dieser Index n nicht so konstant ist, wie gerade behauptet wurde, sondern leicht von der Farbe und damit von der Wellenlänge λ des Lichts abhängt. So misst man im Fall von Wasser abhängig von der Farbe folgende Werte für den Brechungsindex:

Farbe (Wellenlänge)	Brechungsindex n
rot ($\lambda = 656 \text{ nm}$)	1,331
gelb ($\lambda = 589 \text{ nm}$)	1,333
grün ($\lambda = 502 \text{ nm}$)	1,335
blau ($\lambda = 431 \text{ nm}$)	1,341
violett ($\lambda = 397 \text{ nm}$)	1,344

Offensichtlich hat für das Medium Wasser das relativ langwellige Licht rot einen minimal geringeren Brechungsindex als die kurzwellige Farbe violett. Dementsprechend wird rot beim Eintritt ins Wasser nicht so stark zum Lot hin gebrochen wie violett.

¹ Eigentlich lautet das SNELLIUS-Brechungsgesetz

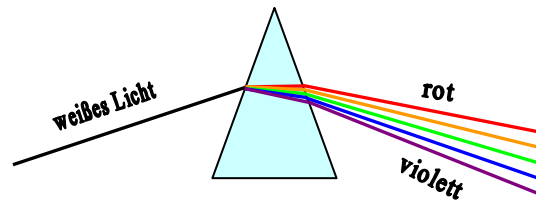
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_{\text{Medium}}}{n_{\text{Luft}}},$$

wobei n_{Medium} und n_{Luft} die Brechungsindizes gegenüber Vakuum sind. Allerdings unterscheidet sich der Brechungsindex von Luft nur unwesentlich von 1, sodass wir problemlos

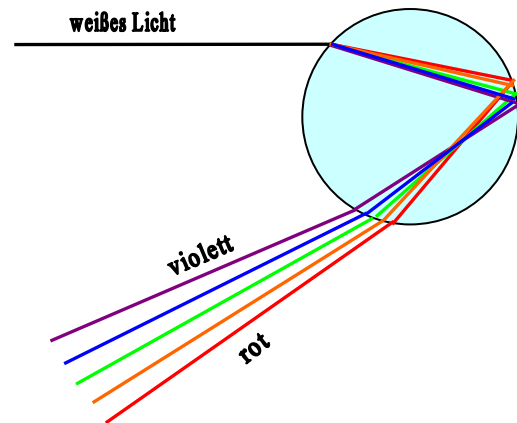
$$\frac{n_{\text{Medium}}}{n_{\text{Luft}}} = n_{\text{Medium}} =: n$$

setzen dürfen.

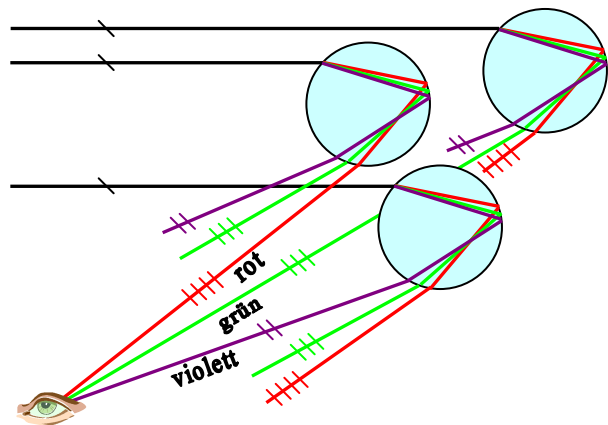
Nun ist weißes Licht keine eigenständige Farbe, sondern setzt sich aus allen Farben des Spektrums zusammen. Dieses Phänomen kann mit Hilfe des berühmten Prismenversuchs demonstriert werden. Beim Eintritt des weißen Lichtstrahls in ein Glasprisma werden die unterschiedlichen Wellenlängen und damit die unterschiedlichen Farben verschieden stark gebrochen. Beim Austritt aus dem Prisma werden die unterschiedlichen Ablenkungen durch die zweite Brechung noch verstärkt und man kann auf einem Schirm am Ende das Ganze in die einzelnen Wellenlängen zerlegte Farbspektrum auffangen.



Genau das gleiche Phänomen tritt – wenngleich in etwas abgewandelter Form – in einem kugelförmigen Regentropfen auf.² Das weiße Sonnenlicht tritt in den Wassertropfen ein und wird zum Lot hin gebrochen. Aufgrund des farbabhängigen Brechungsindex wird hierbei das weiße Licht in die einzelnen Farben aufgefächert. Am Ende des Regentropfens verlässt unter Brechung ein großer Teil der Strahlen wieder den Wassertropfen, ein Teil wird aber auch an der Grenzfläche reflektiert. Wir betrachten hier nur den reflektierten Anteil, weil nur dieser Anteil ins Auge umgelenkt werden kann. Diese reflektierten Strahlen treffen an einer weiteren Stelle wieder auf die Begrenzung des Tropfens und werden dort beim Austritt aus dem Wasser abhängig von der Farbe vom Lot weg gebrochen. Dabei verstärkt sich die Auffächerung des Lichts. Es entsteht ebenso wie beim Prisma das ganze Farbspektrum.

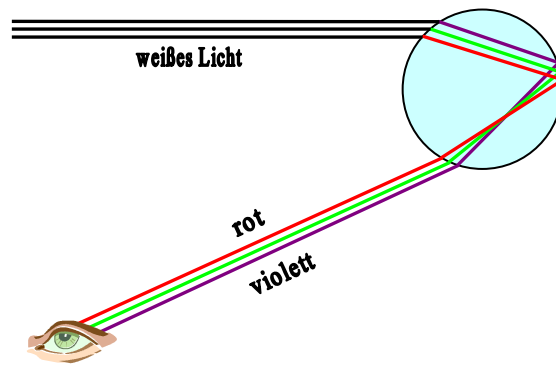


Treffen nun die Sonnenstrahlen auf viele Regentropfen, die in Form von Regen aus den Wolken fallen, so entsteht diese Farbzerlegung in jedem Tropfen. Diese Farbzerlegung wird dann häufig im Rahmen des Physikunterrichts als Ursache für die Regenbogenerscheinung zitiert (vgl. z. B. [1]): Die roten Strahlen werden gegenüber den übrigen Farben nicht so stark gebrochen und fallen daher unter einem höheren Winkel ins Auge. Die grünen Strahlen fallen wegen der stärkeren Brechung unter einem geringeren Winkel ins Auge und die violetten unter einem noch geringeren. Aus diesem Grund nimmt man rot unter einem höheren Winkel gegenüber grün und violett wahr.



² Eigentlich haben die Regentropfen keine Kugel-, sondern eine Tropfenform. Allerdings stimmt die Tropfenform zu einem großen Teil mit der Kugelgestalt überein. Insbesondere spielt der Bereich am oberen Ende, der wesentlich von der Kugelgestalt abweicht, bei unseren Überlegungen nur eine untergeordnete Rolle, weil von dort nur eine geringe Lichtintensität ins Auge umgelenkt wird. Aus diesem Grund werden wir uns bei der nachfolgenden Argumentation stets auf die einfacher zu behandelnde Kugelgestalt zurückziehen.

Allerdings stellt man bei genauerem Überlegen fest, dass diese Begründung nicht stichhaltig ist. Die Sonnenstrahlen treffen nämlich die Tropfen nicht nur an einer Stelle, sondern in verschiedenen Höhen. Aufgrund der daraus resultierenden unterschiedlichen Einfallswinkel α wird in einem Tropfen nicht nur eine Farbe ins Auge umgelenkt, sondern jede Farbe des Spektrums. So wird in einer gewissen Höhe die Farbe rot ins Auge umgelenkt, während in etwas größerer Höhe aufgrund des größeren Einfallswinkels α und der stärkeren Brechung die Farbe grün und noch etwas höher die Farbe violett ins Auge umgelenkt werden.

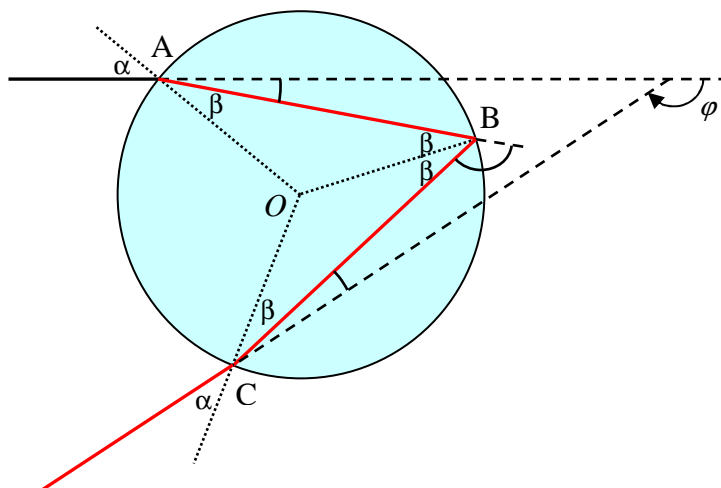


Damit ergeben sich Fragen, die durch die bisherigen Argumente nicht erklärt werden können:

- Es überlappen sich die ins Auge einfallenden Farben. Durch diese Überlagerung der Farben müsste eigentlich im Auge wieder die aus allen Farben vereinigte Farbe weiß oder etwas Ähnliches entstehen. Warum nimmt man also die Farbauffächerung wahr?
- Absolut unerklärt bleibt durch diese naive Argumentation die Bogenbildung. Warum entsteht am Himmel ein Bogen und warum ist der Regenbogen nicht eine am Horizont erscheinende gerade Linie?

3. Warum ist der Regenbogen ein Bogen?

Die Erklärungsversuche aus dem klassischen Physikunterricht sind offensichtlich nicht ausreichend für das Phänomen der Regenbogenbildung. Aus diesem Grund betrachten wir den Strahlengang innerhalb eines Tropfens nochmals genauer, wobei wir uns zunächst auf den Strahlengang im vertikalen Querschnitt des Tropfens und damit in einer Ebene beschränken.



Weißes Sonnenlicht trifft an einer Stelle A auf einen Wassertropfen. Der Großteil des Lichts wird gemäß dem Brechungsgesetz zum Lot hin gebrochen, wobei im Fall eines kugelförmigen Wassertropfens das Lot mit dem entsprechenden Radius übereinstimmt. Wir betrachten jetzt nur noch einen Farbanteil, z. B. den roten Farbstrahl. Dieser wird am rechten Ende B des Tropfens teilweise reflektiert. Wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks AOB tritt der Ausfallswinkel β an der Stelle A auch an der Reflexionsstelle B zum Lot bzw. Radius hin auf und wegen des Reflexionsgesetzes auch als Reflexionswinkel des zurückgeworfenen Strahls. Aufgrund der Gleichschenkligkeit des Dreiecks BOC tritt dieser Winkel β nochmals als Einfallswinkel beim Austritt aus dem Wasser an der Stelle C auf. Dies bedeutet wiederum, dass sich beim Austritt als Ausfallswinkel wieder der ursprüngliche Winkel α ergibt.

Nun betrachten wir die gesamte Umlenkung φ des Lichtstrahls im mathematisch negativen Sinn, also im Uhrzeigersinn. Beim Eintritt in den Tropfen an der Stelle A wird der Lichtstrahl um $\alpha - \beta$, an der Reflexionsstelle B um $\pi - 2\beta$ und beim Austritt an der Stelle C nochmals um $\alpha - \beta$ umgelenkt. Insgesamt ergibt sich als Umlenkungswinkel

$$\begin{aligned}\varphi &= (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) \\ &= \pi + 2\alpha - 4\beta.\end{aligned}$$

Dabei sind die Winkel α und β nicht voneinander unabhängig. Mit dem SNELLIUS-Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

ergibt sich nämlich der Zusammenhang

$$\beta = \arcsin \frac{\sin \alpha}{n}.$$

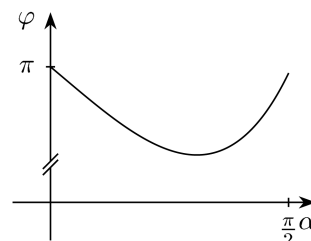
Damit können wir den Umlenkungswinkel φ folgendermaßen ausdrücken:

$$\varphi = \pi + 2\alpha - 4 \arcsin \frac{\sin \alpha}{n}$$

Offensichtlich ist der Umlenkungswinkel φ nur vom Einfallswinkel α abhängig, also eine Funktion mit der unabhängigen Variablen α .

Lässt man sich den Graphen dieser Funktion $\varphi(\alpha)$ im interessanten Bereich

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ von einem Computeralgebrasystem zeichnen, so erhält man das nebenstehende Bild. Bei einem Einfallswinkel $\alpha = 0$, also einem zentralen Auftreffen auf den Regentropfen, wird der Lichtstrahl exakt um den Winkel π umgelenkt. Mit wachsender Höhe und damit wachsendem Einfallswinkel α sinkt dieser Umlenkungswinkel zunächst etwas ab, bevor er wieder ansteigt.



Besonders viele Strahlen werden in die Richtung des Minimums von φ umgelenkt. In der dortigen Umgebung ändert sich die Umlenkungsrichtung φ wenig, d. h. es gilt näherungsweise

$$\varphi(\alpha) \approx \text{const.}$$

Diese Richtung bestimmt man dadurch, dass man die Ableitung der Funktion $\varphi(\alpha)$ null setzt. Es ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 2 - 4 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} = 0$$

Daraus erhält man durch elementares Umformen

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} = \frac{1}{2}$$

bzw. unter zusätzlicher Ausnutzung der Identität $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \alpha}.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \left(n^2 - 1 + \cos^2 \alpha \right).$$

Daraus ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\frac{3}{4} \cos^2 \alpha = \frac{n^2 - 1}{4}$$

für $\cos \alpha$. Wegen $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\cos \alpha \geq 0$ und daher

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}.$$

Wir haben also nur einen Winkel α im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, an welchem die Ableitung $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ verschwindet, nämlich

$$\alpha_0 = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}.$$

Man könnte jetzt durch nochmaliges Differenzieren nachweisen, dass an dieser stationären Stelle α_0 die zweite Ableitung positiv ist und damit tatsächlich ein lokales Minimum des Umlenkungswinkels φ vorliegt. Doch wollen wir auf diesen Schritt verzichten, da er zum einen sehr rechenaufwändig und zum anderen aufgrund unserer Argumentation auch überflüssig ist. Wichtig ist nur, dass in der Umgebung der stationären Stelle der Umlenkungswinkel φ näherungsweise konstant ist und daher besonders viele Strahlen um den gefundenen Winkel

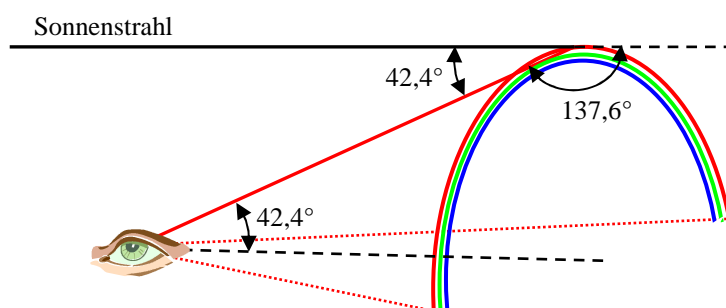
$$\varphi_0 = \varphi(\alpha_0) = \pi + 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} - 4 \arcsin \frac{\sin \left(\arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \right)}{n}$$

umgelenkt werden.

Da der Brechungsindex n von der Wellenlänge und damit von der Farbe des Lichts abhängt, bedeutet dies, dass es für jede Farbe einen anderen bevorzugten Umlenkungswinkel gibt. Für die Farbe rot beträgt der Brechungsindex $n_{\text{rot}} = 1,331$ und damit der bevorzugte Umlenkungswinkel

$$\begin{aligned} \varphi_{0,\text{rot}} &= \pi + 2 \arccos \sqrt{\frac{1,331^2 - 1}{3}} - 4 \arcsin \frac{\sin \left(\arccos \sqrt{\frac{1,331^2 - 1}{3}} \right)}{1,331} \\ &\approx 2,402 \hat{=} 137,6^\circ. \end{aligned}$$

Was bedeutet dieser bevorzugte Umlenkungswinkel für den Beobachter am Boden? Dies ist in der unten stehenden Skizze demonstriert. Der rote Anteil des Sonnenstrahls wird bevorzugt um einen Winkel von $137,6^\circ$ im Uhrzeigersinn umgelenkt. Das bedeutet, dass dem zurückgeworfenen Strahl $42,4^\circ$ zur vollständigen Umkehr fehlen. Dieser Winkel tritt als Stufenwinkel auch beim Beobachter als Exzentrizitätswinkel zur Lichteinfallrichtung auf.



Da die Regentropfen näherungsweise kugelförmig sind, tritt diese bevorzugte Umkehrrichtung nicht nur in der betrachteten vertikalen Richtung sondern in jeder Ebenenrichtung durch das Kugelzentrum bis hin zur Horizontalen und darüber hinaus auf. In jeder Richtung wird der Sonnenstrahl bevorzugt in einer Blickrichtung von

$42,4^\circ$ zur Sonneneinstrahlrichtung zurückgeworfen. Die rote Farbe fällt also ins Auge hauptsächlich auf einem Drehkegel mit dem Öffnungswinkel $42,4^\circ$ und der Achsenrichtung der Sonneneinstrahlrichtung. Dementsprechend erscheint die rote Farbe bevorzugt auf einem Kreis. Dieser Kreis wird erst durch die Erdoberfläche begrenzt.

Für die übrigen Farben ergeben sich andere bevorzugte Richtungen. So ergibt sich im Fall von violett mit dem Brechungsindex $n_{\text{violett}} = 1,344$ ein bevorzugter Umlenkungswinkel von

$$\varphi_{0, \text{violett}} = \pi + 2 \arccos \sqrt{\frac{1,344^2 - 1}{3}} - 4 \arcsin \frac{\sin \left(\arccos \sqrt{\frac{1,344^2 - 1}{3}} \right)}{1,344}$$

$$\approx 2,435 \hat{=} 139,5^\circ,$$

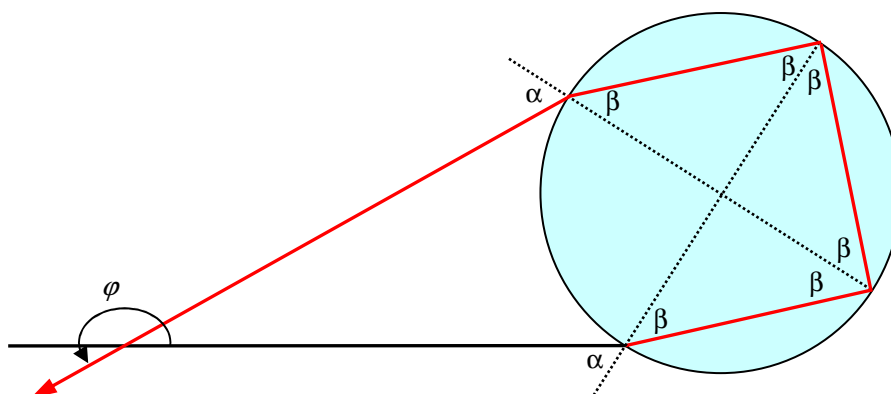
d. h. diese Farbe wird vom Betrachter hauptsächlich unter einem Öffnungswinkel von $180^\circ - 139,5^\circ = 40,5^\circ$ zur Lichteinfallrichtung wahrgenommen.

Insgesamt ergeben sich als Öffnungswinkel gerade die Ergänzungswinkel der bevorzugten Umlenkungen $\varphi(\alpha)$ zu 180° , also Winkel von $42,4^\circ$ im Fall von rot bis herunter zu $40,5^\circ$ im Fall von violett. Der entstehende bunte Kreisbogen ist lediglich durch die Erde begrenzt. Wäre der Boden als Begrenzung nicht vorhanden, würde man einen ganzen Kreis sehen. Im Flugzeug oder auf einem Berggipfel mit freier Sicht nach unten sieht man dementsprechend auch keinen Regenbogen, sondern einen vollrunden bunten Regenkreis.

4. Wie kommt es zum zweiten Regenbogen?

Es bleibt noch die Frage nach dem zweiten gegenüber dem ersten blässeren Regenbogen, welcher bei guter Sicht oberhalb des ersten Regenbogens entsteht. Schaut man sich diesen zweiten Regenbogen genauer an, stellt man zudem fest, dass die Farbreihenfolge gegenüber dem ersten Regenbogen vertauscht ist. Während man beim primären Regenbogen außen zunächst die Farbe rot sieht und nach innen dann die Farben orange-gelb-grün-blau-indigo-violett folgen, beobachtet man beim äußeren Bogen innen die Farbe rot gefolgt von den weiteren Farben bis hin zu violett ganz außen.

Dieses Phänomen des zweiten Regenbogens entsteht durch doppelte Reflexion, also durch den Strahlengang, der zunächst gebrochen, dann zweimal im Innern des Tropfens reflektiert und schließlich beim Austritt nochmals gebrochen wird, bevor er ins Auge trifft.



Aufgrund des Intensitätsverlustes durch die jetzt zweimalige Reflexion – der größere Teil des Lichtstrahls verlässt ja wieder den Tropfen – ist einsichtig, dass der zweite Regenbogen gegenüber dem ersten schwächer erscheint. Die Argumentation für die Entstehung des Bogens erfolgt ganz analog zu der beim ersten Bogen. Als

Umlenkungswinkel φ ergibt sich hier ein Winkel in mathematisch positiver Richtung, also entgegen dem Uhrzeigersinn. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\varphi &= (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) \\ &= 2\pi + 2\alpha - 6\beta\end{aligned}$$

bzw. unter Ausnutzung des SNELLIUS- Brechungsgesetzes $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$

$$\varphi = 2\pi + 2\alpha - 6 \arcsin \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Der bevorzugte Umlenkungswinkel ergibt sich wieder aus der Bedingung

$$\varphi(\alpha) \approx \text{const.}$$

Den zugehörigen stationären Einfallswinkel α erhält man mit Hilfe der Differenziation:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 2 - 6 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} = 0$$

Mit analogen Umformungen wie im vorangegangenen Abschnitt erhält man daraus den stationären Einfallswinkel

$$\alpha_0 = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}}.$$

Als bevorzugter Umlenkungswinkel ergibt sich somit

$$\varphi_0 = \varphi(\alpha_0) = \pi + 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} - 6 \arcsin \frac{\sin \left(\arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} \right)}{n}.$$

Nebenbei sei bemerkt, dass man durch nochmaliges Differenzieren nachweisen kann, dass sich in diesem Fall der bevorzugte Umlenkungswinkel als ein lokales Maximum der möglichen Ablenkungen erweist.

Nach wie vor hängt der Brechungsindex n von der Wellenlänge des Lichts und damit von der Farbe ab. Rot hat den kleinsten Brechungsindex $n_{\text{rot}} = 1,331$, während violett am anderen Ende den größten Brechungsindex

$n_{\text{violett}} = 1,344$ besitzt. Damit ergeben sich farbabhängig als stationäre Einfallswinkel $\alpha_{\text{rot}} = 71,9^\circ$ bis hin zu $\alpha_{\text{violett}} = 71,5^\circ$. Die zugehörigen bevorzugten Umlenkungswinkel sind dann bei der Farbe rot

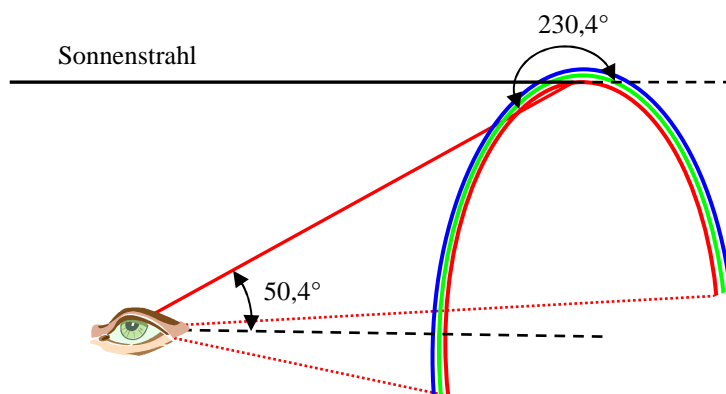
$$\varphi_{0, \text{rot}} = 230,4^\circ$$

und bei der Farbe violett

$$\varphi_{0, \text{violett}} = 233,7^\circ.$$

Es soll nochmals bemerkt werden, dass in diesem Fall die Umlenkung im mathematisch positiven Sinn und damit gegenüber der Umlenkung beim ersten Regenbogen mit umgekehrter Orientierung erfolgt.

Wie wirken sich diese bevorzugten Richtungen auf den Betrachter auf der Erde aus? Die Sonnenstrahlen werden bevorzugt für das rote Spektrum um $230,4^\circ$ umgelenkt, d. h. dass der Betrachter am Boden die rote Farbe hauptsächlich unter einem Blickwinkel von $230,4^\circ - 180^\circ = 50,4^\circ$ zur Sonneneinfallrichtung beobachten kann.

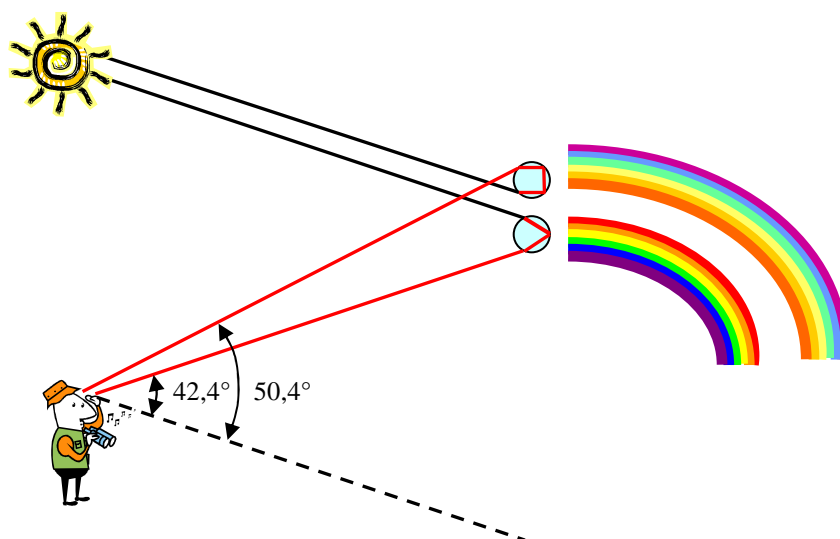


Da die Strahlen aufgrund der kugelförmig angenommenen Form der Regentropfen nicht nur vertikal in der skizzierten Weise abgelenkt werden, sondern die Ablenkung in jeder Richtung erfolgt, ergibt sich wieder ein Drehkegel mit dem entsprechenden Öffnungswinkel zur Sonneneinstrahlrichtung. Die Farbe rot erscheint also wieder auf einem Kreis. Die weiteren Farben ergeben sich entsprechend, wobei aber dieses Mal die Winkel mit der Farbreihenfolge rot-orange-gelb-grün bis hin zu blau-indigo-violett anwachsen. Bei der Farbe violett ergibt sich ein bevorzugter Öffnungswinkel von $233,7^\circ - 180^\circ = 53,7^\circ$ zur Sonneneinstrahlrichtung.

Natürlich gilt auch bei dem zweiten Regenbogen die Bemerkung, dass der Regenbogenkreis nur aufgrund der Begrenzung durch die Erde als halbrunder Bogen erscheint, in einem Flugzeug in entsprechender Höhe aber durchaus als Vollkreis beobachtet werden kann.

5. Zusammenfassung

Der erste Regenbogen entsteht durch Brechung, einmalige Reflexion und nochmalige Brechung, wobei sich hier aufgrund des farbabhängigen Brechungsindex n für die einzelnen Farben verschiedene bevorzugte Richtungen zur Sonneneinstrahlrichtung ausbilden. So fallen im Fall von rot die Strahlen bevorzugt auf einem Drehkegel mit einem Öffnungswinkel von $42,4^\circ$ ins Auge. Im Fall von violett beträgt der Öffnungswinkel lediglich $40,5^\circ$ zur Sonneneinstrahlrichtung. Der zweite Regenbogen entsteht durch zwei Reflexionen, wobei jeweils ein Großteil der Lichtintensität durch direkten Austritt in die Luft verloren geht. Aus diesem Grund muss dieser Regenbogen gegenüber dem ersten schwächer ausgeprägt sein. Als bevorzugte Winkel ergeben sich hier Öffnungswinkel zur Lichteinstrahlrichtung von $50,4^\circ$ im Fall von rot bis hin zu $53,7^\circ$ im Fall von violett.



Die Farbreihenfolge rot-orange-gelb-grün-blau-indigo-violett ist beim äußeren Regenbogen gegenüber dem inneren umgekehrt. Dies ist darauf zurückzuführen ist, dass beim zweiten äußeren Regenbogen die Ablenkung der einfallenden Lichtstrahlen in umgekehrter Richtung erfolgt.

Zum Schluss soll noch erwähnt werden, dass die geschilderten Erklärungen für die Entstehung des Regenbogens nicht neu sind. Bereits René Descartes [2] und Isaac Newton [4] konnten im 17. Jahrhundert bzw. zu Beginn des 18. Jahrhunderts das Phänomen Regenbogen mit der vorgestellten Theorie erklären. Trotzdem sind auch heute noch viele Effekte nicht vollständig geklärt, so z. B. die Frage, warum ein Regenbogen nicht in jede Richtung gleich stark ausgebildet ist und warum die Farben meist unterschiedlich hell bzw. klar sichtbar sind. Diese Effekte können mit obiger Theorie nicht erklärt werden. Auch Modifikationen dieser Theorie mit Hilfe von Interferenzen erklären dieses Phänomen nur unzureichend.

Literatur

- Bredthauer, Wilhelm u. a. [1]: Impulse Physik 1 für die Mittelstufe der Gymnasien Klett, Stuttgart 1996, Seite 33
- Descartes, René [2]: Les Météores 1637
- Dürschnabel, Klaus [3]: Mathematik für Ingenieure Teubner, Wiesbaden 2004, Seiten 306 – 311
- Newton, Isaac [4]: Optics or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light 1704
- Stewart, James [5]: Calculus, Thomson Learning 5th edition 2003, Seiten 232 – 233

Anschrift des Autors

Prof. Dr. Klaus Dürschnabel
 Hochschule Karlsruhe
 Technik und Wirtschaft
 Moltkestraße 30
 76133 Karlsruhe
 klaus.duerschnabel@hs-karlsruhe.de