Peter Ullrich

Monotonie differenzierbarer Funktionen – ohne Mittelwertsatz, aber mit Hilfe eines Fahrstuhls

Um die für die Kurvendiskussion benötigten Aussagen zu erhalten, mittels derer aus dem Vorzeichen der Ableitung auf das Monotonieverhalten der untersuchten differenzierbaren Funktion geschlossen werden kann, verwendet man üblicherweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Zu diesem Satz gelangt man jedoch nur auf einem recht umständlichen Weg: Zunächst reduziert man die Situation mittels einer Scherung auf den Fall, dass die Funktionswerte an beiden Enden des Intervalls gleich sind. Zum Beweis der dann noch zu zeigenden Aussage, des Satzes von ROLLE, benötigt man wiederum das Kriterium von FERMAT, dass in einem lokalen Extremum einer differenzierbaren Funktion eine Nullstelle der Ableitung vorliegt, und den Satz über die Existenz von Maximum und Minimum einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen endlichen Intervall.

Bereits in [3] beweist aber PICKERT den Satz über die Konstanz einer Funktion bei Ableitung Null, indem er – ohne Verwendung des Mittelwertsatzes – zeigt, dass es zu jeder auf dem reellen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ differenzierbaren Funktion f mit $f(b) < f(a)$ ein $c \in [a,b]$ gibt mit $f'(c) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Er bemerkt an jener Stelle auch, dass die Voraussetzung $f(b) < f(a)$ verzichtbar ist und dass aus der so modifizierten Aussage der Schrankensatz über die Kontrolle des Funktionswachstums bei beschränkter Ableitung und das Kriterium für schwache Monotonie hinsichtlich des Vorzeichens der Ableitung folgen. (Detaillierte Formulierungen findet man in Abschnitt 2.)

Im folgenden wird eine Abschwächung der genannten Aussage diskutiert, bei der $f(b) \leqq f(a)$ vorausgesetzt und nur behauptet wird, dass es ein $c \in [a,b]$ gibt mit $f'(c) \leqq 0$.

Diesen Satz kann man im Unterricht leicht mit Hilfe eines Fahrstuhls als Modell veranschaulichen und dabei auch das Vorgehen bei der Suche nach c erläutern. Andererseits handelt es sich bei ihm im wesentlichen um die Kontraposition des hinreichenden Kriteriums für streng monotones Wachsen, so dass sich daraus die anderen Sätze aus diesem Kreis elementar gewinnen lassen, ebenso die Konstanz bei Ableitung Null und der Schrankensatz, Abschließend wird – immer noch ohne Verwendung des Mittelwertsatzes – ein Kriterium hergeleitet, welches mittels der Ableitung strenge Monotonie äquivalent charakterisiert.

1. Hinreichendes Kriterium für strenge Monotonie

Verläßt man einen Fahrstuhl auf einer Etage eines Hochhauses und stellt beim Wiederkommen fest, dass dieser immer noch bzw. wieder auf der gleichen Etage oder sogar weiter unten steht, so kann er in der Zwischenzeit nicht ständig nach oben gefahren sein, d.h., es gab einen Zeitpunkt, zu dem er stand oder nach unten fuhr.

Allerdings ist keinesfalls klar, wann genau dieser Zeitpunkt war: Der Fahrstuhl kann direkt nach unten gefahren sein oder auch erst nach oben und nur zum Schluss nach unten. Oder er kann erst nach unten gefahren sein und dann wieder etwas nach oben. Und natürlich kann es noch kompliziertere Änderungen der Fahrtrichtung in der verstrichenen Zeit gegeben haben.

Um einen Zeitpunkt, zu dem der Fahrstuhl stand oder nach unten fuhr, zu bestimmen, kann man aber wie folgt vorgehen: Falls der Fahrstuhl gleich zu Anfang der Zeitspanne stand oder nach unten fuhr, so ist man fertig. Fuhr er aber zu Anfang der Zeitspanne nach oben, so betrachte man den ersten Zeitpunkt, an dem er danach nicht höher stand als zu Anfang (solch einen Zeitpunkt muss es gegeben haben, da der Fahrstuhl ja zum Schluss nicht höher als zu Anfang steht). Und zu diesem Zeitpunkt muss der Fahrstuhl von oben gekommen sein, fuhr also nach unten oder kam gerade zum Stehen.

Übersetzt in die mathematische Formelsprache lesen sich diese Aussage und Begründung wie folgt:

Satz: *Zu jeder auf dem reellen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ differenzierbaren Funktion f mit $f(b) \leqq f(a)$ gibt es mindestens ein $c \in [a,b]$ mit $f'(c) \leqq 0$.*

Beweis: Setzt man

$$M := \{x \in (a,b] \mid f(x) \leqq f(a)\},$$

so gilt wegen $f(b) \leqq f(a)$, dass $b \in M$ ist, also M nicht leer. Wegen $M \subset [a,b]$ existiert mithin das Infimum c von M und liegt in $[a,b]$.

Falls c – als die größte untere Schranke von M – echt kleiner als b ist, gibt es in jeder Umgebung von c ein $y \in [c,b]$ mit $y \in M$, also $y > a$ und $f(y) \leqq f(a)$. Als differenzierbare Funktion ist f auch stetig in c, so dass damit folgt $f(c) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \leqq f(a)$.

Da die Abschätzung $f(c) \leqq f(a)$ nach Voraussetzung auch im Falle $c = b$ gilt, hat man also stets $c \in M \cup \{a\}$.

Im Falle $c = a$ gibt es nach dem Obigen in jeder Umgebung von c ein $y \in [c,b]$ mit $y > a$ und $f(y) \leqq f(a) = f(c)$, also $\frac{f(y)-f(c)}{y-c} \leqq 0$. Damit folgt

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0.$$

Ist hingegen $c \in M$, so gilt $c > a$. Da c eine untere Schranke von M ist, gilt für jedes $x \in (a,c)$ dann $x \notin M$, also $f(x) > f(a)$. Wegen $f(a) \geqq f(c)$ ist für diese x daher $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$, so dass wiederum folgt

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0. \qquad \square$$

Durch Kontraposition erhält man aus diesem Satz das

Hinreichende Kriterium für streng monotones Wachsen: *Eine jede auf dem Intervall I definierte reelle differenzierbare Funktion f mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist auf I streng monoton wachsend.*

> Im Fahrstuhl-Modell besagt dies gerade, dass ein Fahrstuhl, der eine gewisse Zeitspanne stets nach oben gefahren ist, zum Schluß höher steht als zu Anfang.
>
> Auch wenn diese Aussage logisch äquivalent zu der oben gemachten über das „Nach-unten-Fahren“ ist, hat man bei der letzteren doch das Gefühl – zumindest werden es viele Schülerinnen und Schüler haben –, dass gar nichts zu zeigen ist. Bei der ersten hingegen wird nach einem Zeitpunkt gefragt, an dem der Aufzug nach unten fährt oder zumindest steht, und dessen Angabe kann in der Tat ein Problem sein.
>
> Logische Äquivalenz besagt eben nicht, dass die betrachteten Aussagen (auf den ersten Blick) gleich schwierig erscheinen!

Aufgabe: Aus dem hinreichenden Kriterium für streng monotones Wachsen folgere man das

Hinreichende Kriterium für streng monotones Fallen: *Eine jede auf dem Intervall I definierte reelle differenzierbare Funktion f mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ ist auf I streng monoton fallend.*

Lösung: Ist die reelle Funktion f auf dem Intervall I differenzierbar mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist die Funktion g mit $g(x) := -f(x)$ ebenfalls reellwertig, auf I definiert und dort differenzierbar, wobei $g'(x) = -f'(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Mithin ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Somit erfüllt g die Voraussetzungen des hinreichenden Kriteriums für streng monontones Wachsen.

Für $x,y \in I$ mit $x < y$ beliebig gilt mithin $-f(x) = g(x) < g(y) = -f(y)$ und daher $f(x) < f(y)$. Also ist f streng monoton fallend auf I. $\square$

Anmerkung 1

Im obigen Beweis wird die Tatsache benutzt, dass die differenzierbare Funktion f auch stetig ist. Will man den Begriff der Stetigkeit umgehen, so kann man stattdessen benutzen, dass die Aussage über die „Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigungen“ auch in der Situation gilt, dass die Sekanten nicht durch den betrachteten Punkt gehen:

Aufgabe: Man zeige:

Die auf dem reellen Intervall $[a,b]$ definierte reelle Funktion f sei an der Stelle $c \in (a,b)$ differenzierbar. Dann gilt

$$f'(c) = \lim_{\substack{x,y \to c \\ x<c<y}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Hinweis: Man zeige zunächst, dass für $a \leqq x < c < y \leqq b$ gilt

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lambda \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \mu \cdot \frac{f(y)-f(c)}{y-c},$$

wenn man $\lambda := \frac{c-x}{y-x}$ und $\mu := \frac{y-c}{y-x}$ setzt, und dass $\lambda + \mu = 1$ ist.

Lösung: Sei im folgenden stets $a \leqq x < c < y \leqq b$. Mit λ und μ wie oben definiert gilt

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \mu \cdot \frac{f(y)-f(c)}{y-c} &= \frac{c-x}{y-x} \cdot \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \frac{y-c}{y-x} \cdot \frac{f(y)-f(c)}{y-c} \\ &= -\frac{f(x)-f(c)}{y-x} + \frac{f(y)-f(c)}{y-x} = \frac{\big(f(y)-f(c)\big)-\big(f(x)-f(c)\big)}{y-x} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\lambda + \mu = \frac{c-x}{y-x} + \frac{y-c}{y-x} = \frac{c-x+y-c}{y-x} = \frac{y-x}{y-x} = 1.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(c) = \lambda \cdot \Big(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\Big) + \mu \cdot \Big(\frac{f(y)-f(c)}{y-c} - f'(c)\Big).$$

Da f in c differenzierbar ist, gilt $\lim\limits_{x \to c}\Big(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\Big) = 0$, wegen $0 \leqq \lambda \leqq 1$ daher auch $\lim\limits_{x,y \to c} \lambda \cdot \Big(\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\Big) = 0$. Analog sieht man auch $\lim\limits_{x,y \to c} \mu \cdot \Big(\frac{f(y)-f(c)}{y-c} - f'(c)\Big) = 0$, so dass folgt $\lim\limits_{x,y \to c}\Big(\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - f'(c)\Big) = 0$, also die Behauptung. □

In der Situation des Satzes folgt im Falle $c \in (a,b)$ mit $x \in (a,c)$ und y wie im Beweis des Satzes wegen $f(x) \leqq f(a) \leqq f(y)$ auch ohne jegliche Kenntnis über $f(c)$ aus dem Lemma, dass $f'(c) \leqq 0$ ist. (Im Falle $c = a$ oder $c = b$ braucht man nur Steigungen von Sekanten zu betrachten, die durch den Punkt $\big(c|f(c)\big)$ gehen.)

Anmerkung 2

Das Konzept des Infimums als Verallgemeinerung des Minimums einer Menge kommt im obigen Beweis voll zum Tragen, da die Fälle verschieden behandelt werden müssen, dass $c = \inf M$ nicht zu M gehört ($c = a$) oder doch ($c > a$). Diese beiden Fälle erscheinen auch aufgrund der gewählten Einkleidung des Problems plausibel („Zu Anfang steht der Fahrstuhl oder fährt nach unten.“ vs. „Der Fahrstuhl fährt zu Anfang nach oben.“). Zudem läßt sich die Existenz des Infimums für nicht leere nach unten beschränkte Teilmengen problemlos aus dem Prinzip der Intervallschachtelung herleiten, siehe etwa [3, S. 104].

Will man dennoch dieses Konzept vermeiden, so kann man den Beweis des Satzes direkt auf das Prinzip der Intervallschachtelung zurückführen, wobei sich auch diese Beweisidee aus der Einkleidung in die Situation mit dem Fahrstuhl entwickeln läßt:

> Um den Zeitpunkt genauer einzugrenzen, zu dem der Fahrstuhl stand oder nach unten fuhr, kann man die Situation in einem Moment innerhalb der verstrichenen Zeitspanne berücksichtigen, etwa genau in deren Mitte: Stand der Fahrstuhl in der Mitte des Zeitintervalls mindestens so hoch wie zu dessen Anfang, so hat er sich in der zweiten Hälfte der Zeit zumindest um so viel nach unten bewegt wie in der Gesamtzeit; man wird also in dieser Hälfte nach dem Zeitpunkt suchen, zu dem der nicht nach oben fuhr. Stand der Fahrstuhl in der Mitte der Zeitspanne jedoch tiefer als zu Anfang, so wird man stattdessen in der ersten Hälfte des Zeitintervalls nach jenem Zeitpunkt suchen.

Offenbar kann man durch Wiederholung dieses Halbierens von Zeitintervallen den gesuchten Zeitpunkt mit beliebiger Genauigkeit festmachen.

Aufgabe: Man formalisiere den eben skizzierten Beweis mittels einer Intervallschachtelung.

Lösung (siehe auch [2, S. 219–220], [4]): Man bestimme c durch eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(b_n) \leqq f(a_n)$ wie folgt:

– Man setze $a_0 := a$ und $b_0 := b$, was $f(b_0) = f(b) \leqq f(a) = f(a_0)$ gewährleistet.

– Ist $[a_n, b_n]$ bereits definiert, so setze man $d := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

  - Im Falle $f(d) \geqq f(a_n)$ setze man $a_{n+1} := d$, $b_{n+1} := b_n$. Wegen $f(b_n) \leqq f(a_n)$ gilt dann $f(b_{n+1}) = f(b_n) \leqq f(a_n) \leqq f(d) = f(a_{n+1})$.

  - Im Falle $f(d) < f(a_n)$ setze man $a_{n+1} := a_n$, $b_{n+1} := d$. Dann gilt $f(b_{n+1}) = f(d) < f(a_n) = f(a_{n+1})$.

Da $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ stets eine Hälfte des Intervalls $[a_n, b_n]$ ist, bildet $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat eine Intervallschachtelung, definiert also (genau) ein $c \in [a_0, b_0] = [a, b]$, für welches $a_n \leqq c \leqq b_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man $c_n \in \{a_n, b_n\}$ wie folgt:

- Ist $f(a_n) \leqq f(c)$ und $b_n \neq c$, so setze man $c_n := b_n$. Wegen $c < b_n$ und $f(b_n) \leqq f(a_n) \leqq f(c)$ ist dann der Differenzenquotient
$$\frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} = \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$$
definiert und nicht positiv.

- Ist hingegen $f(a_n) > f(c)$ oder $b_n = c$ – und daher $c \neq a_n$ –, so setze man $c_n := a_n$. Wegen $c > a_n$ und $f(a_n) > f(c)$ ist dann der Differenzenquotient
$$\frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} = \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c}$$
definiert und negativ.

Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ gilt und $c_n \in \{a_n, b_n\}$ ist für $n \in \mathbb{N}$, gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Daher folgt
$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} \leqq 0. \qquad \square$$

Auf das Betrachten der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im zweiten Teil dieses Beweises kann übrigens verzichtet werden, wenn die unter Anmerkung 1 als Aufgabe gestellte Aussage über die Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigungen zur Verfügung steht: Wegen $f(b_n) \leqq f(a_n)$ folgt dann unmittelbar im Anschluss an die Konstruktion von c, dass $f'(c) \leqq 0$ ist (wobei im Falle $c = a_n$ oder $c = b_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sogar die Betrachtung üblicher Sekantensteigungen ausreicht).

2. Folgerungen

Aus dem hinreichenden Kriterium für strenge Monotonie erhält man durch elementare algebraische Operationen und, teilweise, Rückgriff auf die Definition der Ableitung eine Vielzahl von weiteren Resultaten.

Aufgabe: Man beweise folgende

Charakterisierung schwach monotonen Wachsens: *Eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion f ist genau dann schwach monoton wachsend auf I, wenn $f'(x) \geqq 0$ gilt für alle $x \in I$.*

Hinweis: Ist $f'(x) \geqq 0$ für alle $x \in I$, so betrachte man für $\varepsilon > 0$ beliebig die Funktion $x \mapsto f(x) + \varepsilon x$.

Lösung (siehe auch [2, S. 218]): Sei f eine auf I differenzierbare Funktion.

Zunächst sei vorausgesetzt, dass f schwach monoton wachsend auf I ist. Sei $x \in I$ beliebig, aber fest. Für $y \in I$ mit $y > x$ beliebig gilt dann $f(y) \geqq f(x)$, also $f(y) - f(x) \geqq 0$ und wegen $y - x > 0$ daher $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqq 0$. Für $y \in I$

mit $y < x$ gilt hingegen $f(y) \leqq f(x)$, also $f(y) - f(x) \leqq 0$ und somit wegen $y - x < 0$ wiederum $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqq 0$. Damit folgt

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqq 0.$$

Nun sei umgekehrt vorausgesetzt, dass für alle $x \in I$ gilt $f'(x) \geqq 0$. Für $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest definiere man $f_\varepsilon: I \to \mathbb{R}$ durch $f_\varepsilon(x) := f(x) + \varepsilon x$. Dann ist f_ε ebenfalls auf I differenzierbar, wobei für $x \in I$ gilt

$$f'_\varepsilon(x) = f'(x) + \varepsilon \geqq \varepsilon > 0.$$

Aufgrund des hinreichenden Kriteriums für streng monotones Wachsen ist f_ε demnach streng monoton wachsend auf I. Für $x, y \in I$ mit $x < y$ beliebig gilt somit

$$f(x) + \varepsilon x = f_\varepsilon(x) < f_\varepsilon(y) = f(y) + \varepsilon y, \quad \text{also} \quad f(x) < f(y) + \varepsilon(y - x).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$, dass $f(x) \leqq f(y)$ ist. Somit ist das schwach monotone Wachsen von f auf I nachgewiesen. □

Aufgabe: Aus der Charakterisierung schwach monotonen Wachsens folgere man die

Charakterisierung schwach monotonen Fallens: *Eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion f ist genau dann schwach monoton fallend auf I, wenn $f'(x) \leqq 0$ gilt für alle $x \in I$.*

Lösung: Wie in der Herleitung des hinreichenden Kriteriums für streng monotones Fallen aus demjenigen für streng monotones Wachsen in Abschnitt 1. betrachte man zu der gegebenen differenzierbaren Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ die Funktion $g: I \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := -f(x)$ für $x \in I$. Diese ist dann ebenfalls differenzierbar auf I, und es gilt

$$g'(x) = -f'(x) \quad \text{für alle } x \in I. \tag{1}$$

Weiterhin gilt:

$$\text{Für } x, y \in I \text{ gilt genau dann } f(x) \leqq f(y), \text{ wenn } g(x) \geqq g(y) \text{ ist.} \tag{2}$$

Wegen (2) ist die Funktion f genau dann schwach monoton fallend auf I, wenn die Funktion g schwach monoton wachsend auf I ist. Aufgrund der Charakterisierung schwach monotonen Wachsens ist letzteres aber dazu äquivalent, dass für alle $x \in I$ gilt $g'(x) \geqq 0$. Wegen (1) ist dies aber wiederum genau dann der Fall, wenn für alle $x \in I$ gilt $f'(x) \leqq 0$. □

Aufgabe: Beweisen Sie den

Satz über die Konstanz bei Ableitung Null: *Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion, deren Ableitung dort stets gleich Null ist, ist auf diesem Intervall konstant.*

Lösung: Sei f eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Aufgrund der Charakterisierung schwach monotonen Wachsens bzw. Fallens ist f dann sowohl schwach monoton wachsend als auch schwach monoton fallend auf I. Mithin gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ sowohl $f(x) \leqq f(y)$ als auch $f(x) \geqq f(y)$ und somit $f(x) = f(y)$. Daher ist f auf I konstant. □

Aufgabe: Beweisen Sie den

Schrankensatz: *Sei f eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion, und seien $s, S \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $x \in I$ gilt $s \leqq f'(x) \leqq S$.*

Dann gilt $s \cdot (b - a) \leqq f(b) - f(a) \leqq S \cdot (b - a)$ für alle $a, b \in I$ mit $a \leqq b$.

Hinweis: Man betrachte die Funktionen $x \mapsto f(x) - s \cdot x$ und $x \mapsto S \cdot x - f(x)$.

Beweis: Man definiere die Funktionen $g: I \to \mathbb{R}$ und $h: I \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - s \cdot x \quad \text{und} \quad h(x) := S \cdot x - f(x) \qquad \text{für } x \in I.$$

Dann sind g und h differenzierbar auf I; es gilt

$$g'(x) = f'(x) - s \geqq 0 \quad \text{und} \quad h'(x) = S - f'(x) \geqq 0 \qquad \text{für } x \in I,$$

wobei die beiden Ungleichungen aus der Voraussetzung über f' folgen.

Aufgrund der Charakterisierung des schwach monotonen Wachsens sind mithin sowohl g als auch h schwach monoton wachsend auf I.

Seien nun $a,b \in I$ mit $a \leqq b$ beliebig. Dann gilt also $g(a) \leqq g(b)$ und $h(a) \leqq h(b)$. Somit ergibt sich

$$f(a) - s\cdot a = g(a) \leqq g(b) = f(b) - s\cdot b \quad \text{und} \quad S\cdot a - f(a) = h(a) \leqq h(b) = S\cdot b - f(b),$$

also

$$s\cdot b - s\cdot a \leqq f(b) - f(a) \quad \text{und} \quad f(b) - f(a) \leqq S\cdot b - S\cdot a$$

und daher

$$s\cdot(b-a) \leqq f(b) - f(a) \leqq S\cdot(b-a).$$

□

3. Charakterisierung der strengen Monotonie

Für das schwach monotone Wachsen differenzierbarer Funktionen ist die Nichtnegativität der Ableitung nicht nur eine hinreichende, sondern auch eine notwendige Bedingung. Hingegen ist die echte Positivität der Ableitung nur *hinreichend* für das streng monotone Wachsen, wie das (Standard)Beispiel $x \mapsto x^3$ belegt.

In der Regel beläßt man es im Unterricht beim Hinweis auf dieses Phänomen; nur selten finden sich in Schulbüchern Verallgemeinerungen des hinreichenden Kriteriums wie etwa in [1, S. 80] die Bemerkung, dass ein nichtkonstantes schwach monoton wachsendes Polynom bereits streng monoton wachsend ist.

Aufgabe: Beweisen Sie:

Sei p ein nicht konstantes Polynom mit $p'(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dann ist p streng monoton wachsend.

Lösung (nach [1, S. 191]): Die Ableitung p' von p ist ebenfalls ein Polynom. Da p nicht konstant ist, handelt es sich aufgrund des Satzes über die Konstanz bei Ableitung Null aus Abschnitt 2. dabei nicht um das Nullpolynom.

Mithin besitzt p' nur endliche viele Nullstellen. Diese seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, wobei ohne Einschränkung $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ angenommen werden kann. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ gilt dann $p'(x) > 0$, so dass aufgrund des hinreichenden Kriteriums für streng monotones Wachsen folgt, dass p streng monoton wächst, wenn man es jeweils auf eine der Mengen $\{t \in \mathbb{R} : t < a_1\}$, (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{n-1}, a_n), $\{t \in \mathbb{R} : t > a_n\}$ einschränkt.

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig folgt nun aus dieser Monotonieaussage und der Stetigkeit von p in a_i, dass $p(x) < p(a_i) < p(y)$ ist für alle $x \in (a_{i-1}, a_i)$ und alle $y \in (a_i, a_{i+1})$. (Dabei ist unter (a_0, a_1) die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x < a_1\}$ zu verstehen und unter (a_n, a_{n+1}) die Menge $\{t \in \mathbb{R} : t > a_n\}$.) Somit ist p streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.

□

Man kann nun leicht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für strenge Monotonie bei beliebigen differenzierbaren Funktionen herleiten, welches nur auf die Ableitung Bezug nimmt. Neben der Charakterisierung der schwachen Monotonie braucht man dazu nur noch die

Lokale Trennungseigenschaft I: *Ist die auf I definierte Funktion f an der Stelle $c \in I$ differenzierbar mit $f'(c) > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$f(x) < f(c) \quad \textit{für alle } x \in [c-\delta, c) \cap I \quad \textit{und} \quad f(c) < f(x) \quad \textit{für alle } x \in (c, c+\delta] \cap I.$$

Aufgabe: Beweisen Sie die lokale Trennungseigenschaft I.

Lösung: Man zeigt zunächst durch Widerspruch, dass es ein $\delta_1 > 0$ gibt mit

$$f(x) < f(c) \quad \text{für alle } x \in [c-\delta_1, c) \cap I.$$

Gäbe es nämlich kein solches δ_1, so könnte man zu jeder natürlichen Zahl n mit $n \geqq 1$ ein $x_n \in [c - \frac{1}{n}, c) \cap I$ finden mit $f(x_n) \geqq f(c)$. Dann wäre $x_n - c < 0$, also

$$\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \leqq 0 \quad \text{und daher wegen } \lim_{n\to\infty} x_n = c \text{ auch} \quad f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \leqq 0,$$

was im Widerspruch zu der Voraussetzung steht.

Also gibt es doch ein derartiges δ_1. Analog sieht man ein, dass es auch ein $\delta_2 > 0$ gibt mit

$$f(c) < f(x) \quad \text{für alle } x \in (c, c + \delta_2] \cap I.$$

Setzt man nun δ gleich dem Minimum von δ_1 und δ_2, so erfüllt dieses die gewünschte Bedingung. □

Durch Übergang von f zu $-f$ ergibt sich sofort die analoge Version für den Fall $f'(c) < 0$:

Lokale Trennungseigenschaft II: *Ist die auf I definierte Funktion f an der Stelle $c \in I$ differenzierbar mit $f'(c) < 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$f(x) > f(c) \quad \textit{für alle } x \in [c - \delta, c) \cap I \quad \textit{und} \quad f(c) < f(x) \quad \textit{für alle } x \in (c, c + \delta] \cap I.$$

Aufgabe: Folgern Sie aus den Versionen I und II der lokalen Trennungseigenschaft das

Kriterium von FERMAT: *Besitzt die auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion f in $c \in I$ ein Extremum, so gilt $f'(c) = 0$.*

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, dass in c ein lokales Maximum von f vorliegt, d. h., dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ gilt $f(x) \leqq f(c)$. (Im Falle eines lokalen Minimums betrachte man statt f wieder die Funktion $-f$.)

Betrachtet man zunächst diejenigen x mit $x \in (c, c + \varepsilon)$, so ergibt sich aus der lokalen Trennungseigenschaft I, dass $f'(c) \leqq 0$ sein muss. Betrachtet man jedoch diejenigen x mit $x \in (c - \varepsilon, c)$, so ergibt sich aus der lokalen Trennungseigenschaft II, dass $f'(c) \geqq 0$ sein muss.

Insgesamt folgt somit $f'(c) = 0$. □

Charakterisierung streng monotonen Wachsens: *Eine jede auf dem Intervall I definierte reelle differenzierbare Funktion f ist genau dann streng monoton wachsend auf I, wenn*

1. *für alle $x \in I$ gilt $f'(x) \geqq 0$ und*
2. *die Menge der $x \in I$ mit $f'(x) > 0$ dicht in I liegt, d.h., es zu je zwei Stellen $a, b \in I$ mit $a < b$ ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) > 0$ gibt.*

Anmerkung: Falls die Ableitung f' von f auf I nicht nur existiert, sondern sogar stetig ist, impliziert die Eigenschaft 2. bereits die Eigenschaft 1., da es dann zu jedem $x \in I$ eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(c_n) > 0$ gibt, die gegen x konvergiert, so dass wegen der Stetigkeit von f' die Folge $\big(f'(c_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f'(x)$ konvergiert.

Beweis der Charakterisierung streng monotonen Wachsens: Sei zunächst f als streng monoton wachsend auf I vorausgesetzt. Dann ist f auch schwach monoton wachsend, so dass die Eigenschaft 1. folgt. Wäre nun die Eigenschaft 2. nicht erfüllt, so gäbe es ein Teilintervall (a, b) von I mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Aufgrund des Satzes über die Konstanz bei Ableitung Null wäre dann die Einschränkung von f auf (a, b) konstant, also nicht streng monoton wachsend. Letzteres träfe dann auch auf f selbst zu. Mithin muss auch die Eigenschaft 2. erfüllt sein.

Seien nun die Eigenschaften 1. und 2. für f erfüllt. Zum Nachweis des streng monotonen Wachsens von f auf I seien $a, b \in I$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Nach Eigenschaft 2. gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) > 0$. Aufgrund der lokalen Trennungseigenschaft gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$f(x) < f(c) \quad \text{für alle } x \in [c - \delta, c) \cap I \quad \text{und} \quad f(c) < f(x) \quad \text{für alle } x \in (c, c + \delta] \cap I.$$

Indem man δ gegebenenfalls verkleinert, kann man dabei annehmen, dass $a < c-\delta$ und $c+\delta < b$ ist und man daher insbesondere hat

$$f(c-\delta) < f(c) < f(c+\delta).$$

Auf den Intervallen $[a, c-\delta] \subset I$ und $[c+\delta, b] \subset I$ ist nach Eigenschaft 1. die Ableitung von f nicht negativ, also f jeweils schwach monoton wachsend. Mithin gilt speziell

$$f(a) \leqq f(c-\delta) \quad \text{und} \quad f(c+\delta) \leqq f(b).$$

Insgesamt ergibt sich damit $f(a) < f(b)$. □

Bereits erwähnt wurde das Standardbeispiel $x \mapsto x^3$ einer auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsenden Funktion, deren Ableitung dennoch in 0 verschwindet. Generell haben die Ableitungen nichtkonstanter Polynome nur endlich viele Nullstellen, so dass aus der obigen Charakterisierung zum einen unmittelbar die Aussage aus [1, S. 80, S. 191] folgt, zum anderen aber auch, dass man unter Polynomen nur solche Beispiele streng monoton wachsender Funktionen finden kann, bei denen die Ableitung an nur endlich vielen Stellen verschwindet.

Aufgabe: Man gebe Beispiele für auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Polynome an, deren Ableitung an genau 2 (3, ...) Stellen verschwindet.

Lösung: Das Polynom

$$p_2(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

besitzt die Ableitung

$$p_2'(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = x^2 \cdot (x-1)^2.$$

Diese nimmt auf ganz $\mathbb{R}$ nur nicht negative Werte an und besitzt die genau die beiden Nullstellen 0 und 1. Aufgrund der obigen Charakterisierung streng monotonen Wachsens ist p_2 daher streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Das Polynom

$$p_3(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^6 + \frac{13}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3$$

besitzt die Ableitung

$$p_3'(x) = x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 12x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 4x + 4) = x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^2.$$

Diese nimmt auf ganz $\mathbb{R}$ nur nicht negative Werte an und besitzt die genau die drei Nullstellen 0, 1 und 2. Aufgrund der obigen Charakterisierung streng monotonen Wachsens ist p_3 daher streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Allgemein ist jede Stammfunktion von $x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot \ldots \cdot \big(x-(n-1)\big)^2$ ein Polynom, dessen Ableitung auf $\mathbb{R}$ nur nicht negative Werte annimmt und genau die n Nullstellen 0, 1, ..., $n-1$ besitzt und daher aufgrund der Charakterisierung streng monotonen Wachsens auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst. □

Die Funktion $x \mapsto x + \sin x$ besitzt die Ableitung $1 + \cos x$, die auf $\mathbb{R}$ nur nicht negative Werte annimmt und genau die Zahlen der Gestalt $(2n+1)\cdot\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ als Nullstellen besitzt. Mithin ist die ursprüngliche Funktion streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, und ihre Ableitung hat immerhin unendlich viele Nullstellen, die allerdings diskret liegen. – Mehr kann man aufgrund des Identitätssatzes für analytische Funktionen jedoch auch nicht erwarten. –

Aufgabe: Man zeige, dass die Stammfunktion von

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad g(x) = |x| + x\cos\frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0, \qquad g(0) = 0$$

auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst, die Nullstellen ihrer Ableitung, also von g, sich aber in 0 häufen.

Lösung: Da $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ gilt, ist g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und besitzt daher eine Stammfunktion. Aufgrund der obigen Charakterisierung streng monotonen Wachsens ist daher nur noch zu zeigen, dass g auf $\mathbb{R}$ nur nicht negative Werte annimmt, die Menge seiner Nicht-Nullstellen dicht liegt und die Menge seiner Nullstellen sich in 0 häuft.

Für $x \neq 0$ gilt $\left|\cos \frac{1}{x}\right| \leqq 1$, also $\left|x \cos \frac{1}{x}\right| \leqq |x|$ und daher

$$g(x) = |x| + x \cos \frac{1}{x} \geqq |x| - \left|x \cos \frac{1}{x}\right| \geqq 0.$$

Wegen $g(0) = 0$ gilt also $g(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $x > 0$ gilt weiterhin $g(x) = 0$ genau dann, wenn $0 = x + x \cos \frac{1}{x}$, also wenn $\cos \frac{1}{x} = -1$ ist, d. h., wenn $x = \frac{1}{(2n+1)\cdot\pi}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

Für $x < 0$ gilt dagegen $g(x) = 0$ genau dann, wenn $0 = -x + x \cos \frac{1}{x}$, also wenn $\cos \frac{1}{x} = 1$ ist, d. h., wenn $x = -\frac{1}{2n\cdot\pi}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot\pi} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2n\cdot\pi}\right)$ häuft sich also die Nullstellenmenge von g in 0.

Andererseits liegt die Menge der Nicht-Nullstellen von g aber immer noch dicht in $\mathbb{R}$: Wegen der Stetigkeit von g gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ eine Folge von Nicht-Nullstellen von g, die sich gegen x häuft. Ist jedoch $x > 0$ eine Nullstelle von g, etwa $x = \frac{1}{2n+1}$, so besitzt g auf den Intervallen $\left(\frac{1}{(2n+3)\cdot\pi}, \frac{1}{(2n+1)\cdot\pi}\right)$ und $\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot\pi}, \frac{1}{(2n-1)\cdot\pi}\right)$ keine weiteren Nullstellen. (Dabei ist im Falle $n = 0$ das zweite Intervall zu interpretieren als $\{t \in \mathbb{R}: t > \frac{1}{\pi}\}$.) Entsprechend besitzt g keine weiteren Nullstellen auf den Intervallen $\left(-\frac{1}{(2n-2)\cdot\pi}, -\frac{1}{2n\cdot\pi}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2n\cdot\pi}, -\frac{1}{(2n+2)\cdot\pi}\right)$, wenn $x = -\frac{1}{2n\cdot\pi}$ eine negative Nullstelle von g ist. Für $x = 0$ gilt zu guter Letzt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n\cdot\pi} = 0$ mit $g\left(\frac{1}{2n\cdot\pi}\right) = \left|\frac{1}{2n\cdot\pi}\right| + \frac{1}{2n\cdot\pi} \cos(2n\cdot\pi) = \frac{1}{n\pi} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq 1$. □

Aufgrund der Charakterisierung wäre als Extrembeispiel theoretisch eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion möglich, deren Ableitung nur an den Punkten einer abzählbaren dichten Menge (zum Beispiel den rationalen Zahlen) positive Werte annimmt und sonst verschwindet. Allerdings sollte man seine Zeit nicht mit der Suche nach solch einem Beispiel verschwenden:

Üblicherweise treten im Schulunterricht ja nur Funktionen auf, die stetig differenzierbar sind. Ist aber die Ableitung einer Funktion stetig, so nimmt sie aufgrund des Zwischenwertsatzes mit zwei verschiedenen Werten – etwa 0 und einer einzigen von 0 verschiedenen Zahl – auch alle dazwischenliegenden reellen Zahlen als Wert an, also überabzählbar viele.

Diese Zwischenwerteigenschaft gilt dabei sogar, wenn man auf die Stetigkeit der Ableitung verzichtet. Zum Beweis dieser Aussage braucht neben den bislang verwendeten Tatsachen nur noch benutzt zu werden, dass eine stetige – es reicht sogar: eine differenzierbare – Funktion auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

Zwischenwerteigenschaft für Ableitungen: *Sei I ein Intervall und $g: I \to \mathbb{R}$ eine Ableitung, d. h., $g = f'$ mit einer auf I differenzierbaren Funktion f. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Die reelle Zahl d liege zwischen $g(a)$ und $g(b)$.*

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $g(c) = d$.

Beweis: Indem man, falls nötig, f und g jeweils durch ihr Negatives ersetzt, kann man $g(a) < g(b)$ annehmen. Weiterhin kann man f durch $x \mapsto f(x) - dx$ und g durch $x \mapsto g(x) - d$ ersetzen und somit ohne Einschränkung $d = 0$ annehmen.

Dann ist

$$f'(a) = g(a) < d = 0 < g(b) = f'(b).$$

Aufgrund der lokalen Trennungseigenschaft gibt es somit Stellen in (a, b), in denen f kleinere Werte als in a bzw. b annimmt. Somit kann auf dem Rand des Intervalls $[a, b]$ keine Minimalstelle von f liegen. Da es aber eine Minimalstelle c von f in $[a, b]$ gibt, muss diese in (a, b) liegen. Aufgrund des Kriteriums von FERMAT gilt dann aber

$$g(c) = f'(c) = 0 = d.$$ □

Literatur

[1] Marianne Baierlein, Friedrich Barth, Ulrich Greifenegger, Gert Krumbacher: *Anschauliche Analysis 1*. Ehrenwirth: München 12. Auflage 1985 ff.

[2] Norbert Knoche, Heinrich Wippermann: *Vorlesungen zur Methodik und Didaktik der Analysis*. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik **4**. B. I.-Wissenschaftsverlag: Mannheim et al. 1986.

[3] Günter Pickert: Konstanz bei Ableitung Null. *Praxis der Mathematik* **39** (1997), 103–105.

[4] Donald E. Richmond: An elementary proof of a theorem in calculus. *The American Mathematical Monthly* **92** (1985), 589–590.

Peter Ullrich
Universität Koblenz · Landau, Campus Koblenz, Mathematisches Institut,
Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz, Deutschland