Thomas Sonar

Von der Berechnung der Logarithmentafeln: Ein historischer Exkurs mit mathematischem Gehalt

Wird heute ein Logarithmus benötigt, dann bemühen wir kurz einen Taschenrechner oder ein Computerprogramm. Dabei steht der Logarithmus nur noch als Umkehrfunktion der Exponentialfunktionen im Mittelpunkt des schulischen Interesses, denn in unseren Zeiten brauchen wir die Rückführung der Multiplikation auf die Addition nicht mehr – heutige Mikroprozessoren berechnen ein Produkt in annähernd der gleichen Zeit wie eine Summe. Vor vierhundert Jahren war es für Astronomen und Navigatoren aber entscheidend, zeitraubende Rechnungen abkürzen zu können. Wir verfolgen die Entwicklung des Logarithmenbegriffs und zeigen, welche Menge an interessanter Mathematik dabei entstanden ist, die noch heute von großer Bedeutung ist.

1. Exponentialfunktionen und Logarithmen

Betrachtet man die Exponentialfunktionen $x=a^y$ für eine positive Basis a, dann ist $y=\log_a x$ **der Logarithmus von x zur Basis a**, d.h. die Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen. Für die Logarithmenfunktion gilt immer $\log_a 1=0$ und $\log_a a=1$. Wendet man auf $x=a^y$ einmal den Logarithmus zur Basis a und einmal den Logarithmus zur Basis $0<b\neq a$ an, dann erhält man

$$\begin{aligned}\log_a x &= y\cdot\log_a a=y\\ \log_b x &= y\cdot\log_b a\end{aligned}.$$

Setzt man nun y von der oberen Gleichung in die untere ein, dann folgt $\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a$. Kann man den Logarithmus zur Basis a berechnen, dann erhält man den Logarithmus zur Basis b durch

(1) $$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Die Zahl

(2) $$M:=\frac{1}{\log_a b}$$

ermöglicht also die Umrechnung eines Logarithmus' in einen anderen und wird auch häufig **Transformationsmodul** genannt. Besonders wichtig in den Anwendungen sind der Logarithmus zur Basis 10 (dekadischer oder Briggsscher Logarithmus) und der Logarithmus zur Basis e (Eulersche Zahl), (natürlicher Logarithmus, logarithmus naturalis); man schreibt

(3) $$\log x:=\log_{10} x$$

bzw.

(4) $$\ln x:=\log_e x.$$

Der Logarithmus ist monoton wachsend auf $(0,\infty)$ falls die Basis größer ist als 1. Liegt die Basis im Intervall $(0,1)$, dann ist der Logarithmus monoton fallend. Beispielhaft sind in den Abbildungen 1 und 2 die beiden Logarithmen zur Basis e bzw. ½ dargestellt, zusammen mit den zugehörigen Umkehrfunktionen.
Von größter Bedeutung ist die Funktionalgleichung des Logarithmus,

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a f(x)+\log_a g(x),$$

aus der auch die Beziehung $\log_a x^k=k\cdot\log_a x$ folgt. Die Logarithmusfunktion führt also die Multiplikation auf die Addition (und damit die Division auf die Subtraktion) und die Potenzierung auf die Multiplikation zurück. In der heutigen Zeit ist die Bedeutung der Logarithmen für die Rechentechnik gar nicht mehr zu erfassen. Schließlich brauchen wir nur irgend einen wissenschaftlichen Taschenrechner zu nehmen, eine positive Zahl einzugeben, und dann die Logarithmentaste zu drücken, um (in den wohl allermeisten Fällen) den dekadischen Logarithmus dieser Zahl angezeigt zu bekommen. Bessere Taschenrechner haben natürlich auch eine Taste für den natürlichen Logarithmus und wir können mit Hilfe des Transformationsmoduls (2) damit jeden beliebigen Logarithmus berechnen. Auch würde – wegen der Taschenrechner – ja niemand mehr auf die Idee kommen, ein Produkt wie $1657839.234\cdot 65387.3455=?$ mit Hilfe der Logarithmen in ein Additionsproblem zu verwandeln, etwa in der folgenden Art: Logarithmieren von

$$x:=1657839.234\cdot 65387.3455=1657839234\cdot 10^{-3}\cdot 653873455\cdot 10^{-4}=1657839234\cdot 653873455\cdot 10^{-7}$$

liefert

$$\log x=\log 1657839234+\log 653873455-7.$$

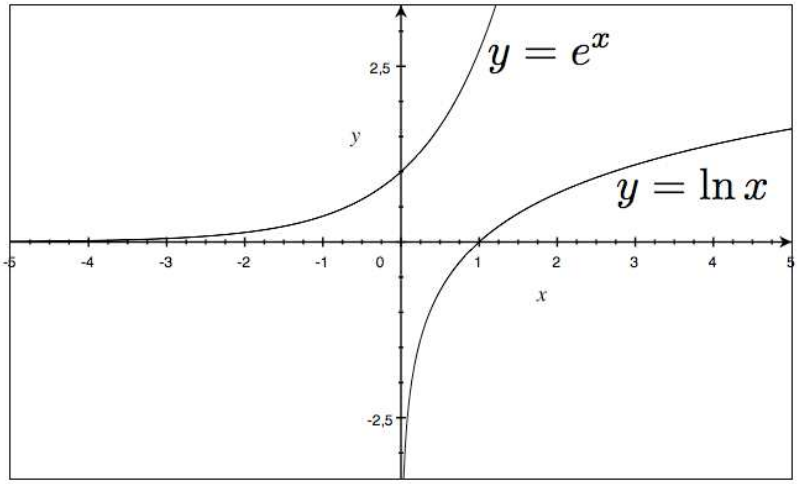


Abbildung 1: Der natürliche Logarithmus und die e-Funktion

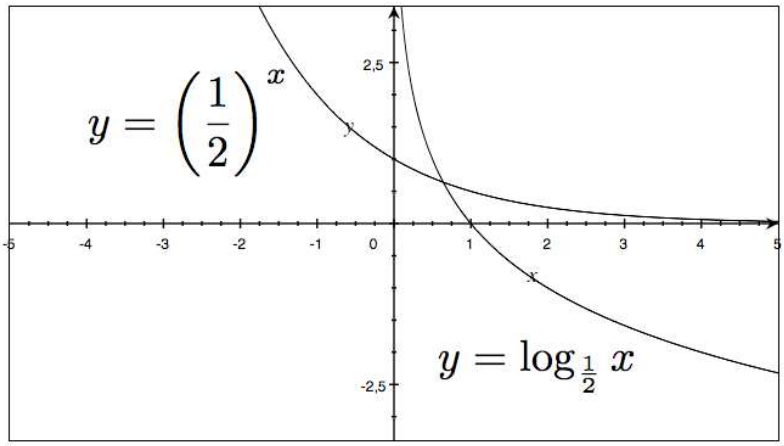


Abbildung 2: Logarithmus zur Basis ½ und Umkehrfunktion

Berechnung der Logarithmen (natürlich mit dem Taschenrechner, oder?) liefert

$$\log x = 9.219542413 + 8.815493707 - 7 = 11.035036120.$$

Damit bekommen wir als Resultat (wieder mit dem Taschenrechner!?)

$$x = 10^{11.035036120} = 108401706779.$$

So ein Unfug, werden Sie sagen, direkte Multipikation mit dem Taschenrechner gibt

$$x = 108401706777$$

und da liegt die umständliche Methode mit dem Logarithmus noch um 2 daneben! Sie haben recht, der Taschenrechner macht es uns heute sehr einfach.

Aber versetzen Sie sich in eine Zeit ohne Taschenrechner und Computer, sagen wir, ins 16te Jahrhundert. Sie arbeiten an der Front der Forschung, sagen wir, an astronomischen Tafeln, um den Seeleuten Ihres Landes die Navigation zu erleichtern. Sie haben Tausende von Daten zu verarbeiten – Positionen von Sternen, der Sonne (die Sie damals noch als einen Planeten bezeichnet hätten) oder des Mondes. Was Sie als Werkzeug unbedingt benötigen, ist eine Tabelle der Winkelfunktionen, aber die gibt es bereits seit dem Altertum. Nun geht es los: Ihre Aufgabe besteht im wesentlichen in der Anwendung der Trigonometrie, und das heisst: Sie müssen Tausende von Multiplikationen und Divisionen durchführen! Das alles wird noch komplizierter, weil Sie noch keinen Dezimalpunkt kennen. Wie würden Sie vorgehen, um Ihre Multiplikationen möglichst einfach zu berechnen?

2. Frühe Ideen

2.1 Die Prostapharaese

Die Mathematiker seit der Antike benutzten zum Multiplizieren häufig die Methode der **Prostapharaese**. Dabei benutzt man die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

deren Addition auf die Formel

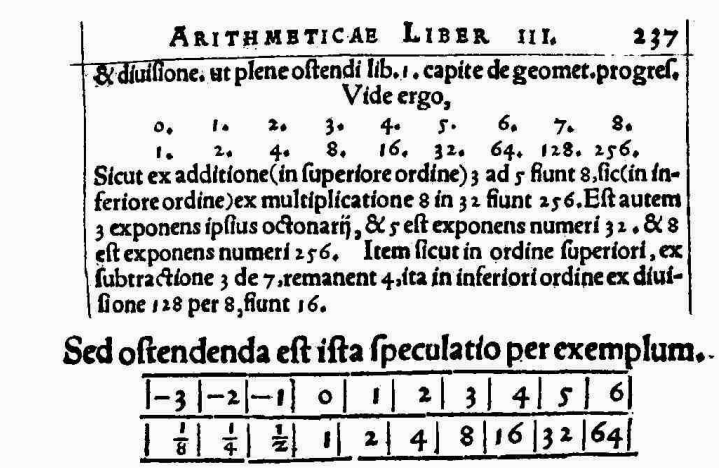
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right).$$

Will man A und B multiplizieren, dann sucht man in der Cosinus-Tabelle (über die jeder Wissenschaftler seit Ptolemäus natürlich verfügt) nach Werten x und y, so dass A=cos x und B=cos y. Diese Werte addiert man nun (x+y) und subtrahiert sie (x-y) und sucht in der gleichen Cosinus-Tabelle die jeweiligen Cosinus heraus. Diese muss man nur noch addieren und die Summe halbieren, und schon ist man fertig. Wenn Sie glauben, dass diese Methode etwas umständlich ist, dann finden Sie sich in guter Gesellschaft! Schon OTTO TOEPLITZ schrieb in [1]:

> *Für die Zwecke der Astronomie und Nautik, die an sich viel Sinus und Kosinus zu multiplizieren haben, eine gar nicht üble Methode; und doch umständlich.*

2.2 Stifelsche Skalen

Die eigentlichen Logarithmen, deren Entwicklung im Vergleich mit der Prostapharaese etwa der Entwicklung des Rennrades im Vergleich zum Tretroller entspricht, basieren auf einer Entdeckung des Augustinermönches MICHAEL STIFEL (1487?-1567). STIFEL war mit MARTIN LUTHER und PHILIPP MELANCHTHON befreundet. Er trat mit der Vorhersage des Weltuntergangs am 18.10.1533 hervor – ein Datum, das er mit Hilfe von pseudomathematischen Methoden aus der Bibel gewonnen haben wollte – und als der Weltuntergang nicht eintrat, wurde er in Wittenberg unter Hausarrest gestellt. Nur der Fürsprache seiner Freunde LUTHER und MELANCHTHON hatte er es zu verdanken, dass er wieder in Gnaden aufegnommen wurde und eine kleine Pfarre im Dörfchen Holzdorf erhielt [2]. Nach dieser einschneidenden Erfahrung wandte er sich der ernsthaften Mathematik zu und publizierte 1544 sein berühmtes Buch *Arithmetica Integra*. In diesem Buch, zu dem der große MELANCHTHON ein Vorwort schrieb, entdeckt Stifel das folgende Prinzip: Er schreibt eine arithmetische Folge (Skala A) auf (... -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...) und darunter eine geometrische Folge (Skala G), die den Zweierpotenzen der A-Skala entspricht. Will man das Produkt $4 \cdot 16$ berechnen, dann geht man von der G-Skala zur A-Skala und findet die Zahlen 2 (korrespondierend zu 4) und 4 (korrespondierend zu 16). Werden die beiden Zahlen der A-Skala addiert, ergibt sich 2+4=6 und nun muss man von der 6 auf der A-Skala wieder hinunter zur G-Skala und findet 64 als Resultat der ursprünglichen Multiplikation.



ARITHMETICAE LIBER III. 237

& diuiſione. ut plene oſtendi lib. 1. capite de geomet. progreſ.
Vide ergo,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Sicut ex additione (in ſuperiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, ſic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Eſt autem 3 exponens ipſius octonarij, & 5 eſt exponens numeri 32. & 8 eſt exponens numeri 256. Item ſicut in ordine ſuperiori, ex ſubtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuiſione 128 per 8, fiunt 16.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Abbildung 3: *Die Idee der A- und G-Skala in der Arithmetica Integra*

Das Verdienst, die Multiplikation zweier Zahlen auf die Addition zurückgeführt zu haben, gebührt also STIFEL. Gleichzeitig sind aber auch die Schwächen der STIFELschen Methode offensichtlich: Das Produkt $7 \cdot 52$ ist schon nicht berechenbar, denn beide Faktoren sind keine Zweierpotenzen.

2.3 Napiers Logarithmen

Der schottische Baron JOHN NAPIER (1550-1670) muss ein komischer Kauz gewesen sein. Er lebte zurückgezogen von allen anderen Wissenschaftlern auf seinem Anwesen in Merchiston (heute ein Teil der Stadt Edinburgh) und trat 1593 mit seinem Traktat *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of St John* (Eine einfache Entdeckung der ganzen Offenbarung des heiligen Johannes) in die Öffentlichkeit, in der er mit pseudomathematischen Methoden nachzuweisen glaubte, dass der Papst der in der Apokalypse beschriebene Antichrist sei. Neben solchem Unfug dachte er aber auch über eine Methode zur Erleichterung des Zahlenrechnens nach und kannte mit Sicherheit das STIFELsche Buch. Neben den Logarithmen, zu denen wir gleich etwas detailierter kommen, ist NAPIER durch Rechenstäbchen bekannt geworden, die „NAPIERsche Stäbe“ oder „NAPIERsche Knochen“ (rods, bones) genannt werden. Es handelt sich um quaderförmige Stäbe, auf deren Längsseiten die jeweiligen Vielfachen von 1,2,...9 aufgetragen sind. Durch ein geschicktes Verfahren des Nebenienanderlegens der Stäbchen kann man so sehr schnell multiplizieren, dividieren und sogar (näherungsweise!) Wurzeln ziehen, siehe NAPIER [5]. Bahnbrechend ist aber seine Arbeit zu den Logarithmen, denen er auch ihren Namen gab.

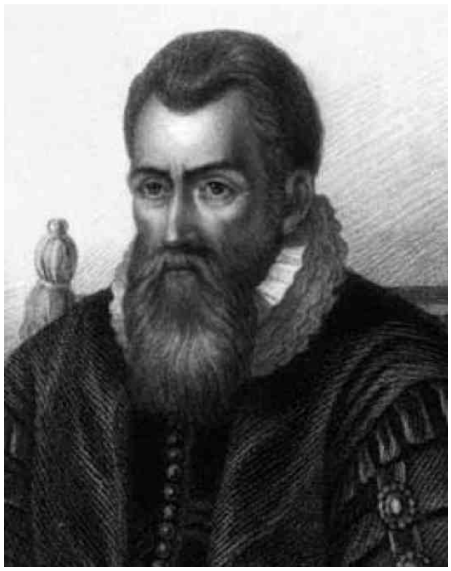


Abbildung 4: John Napier

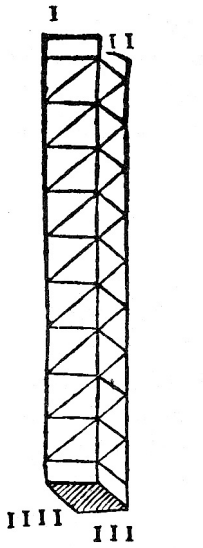


Abbildung 5: *Ein Rechenstäbchen*

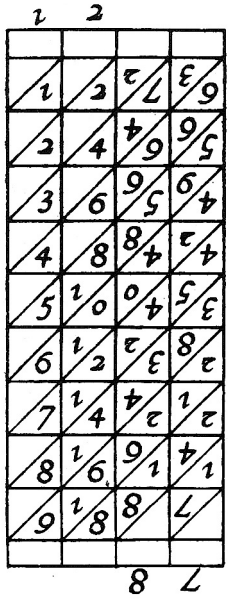


Abbildung 6: *Das Stäbchen mit den Eins-mal-Eins von 1,2,7 und 8 auf je einer Seite*

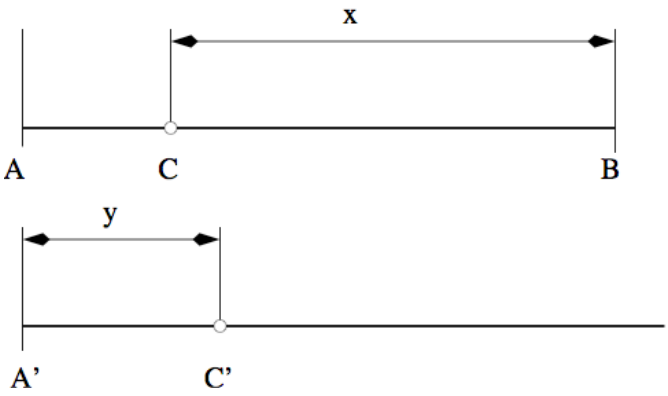


Abbildung 7: *Das kinematische Modell* NAPIERS

Er ersetzte die STIFELschen Skalen durch ein kinematisches Modell, bei dem sich ein Punkt auf einer Strecke von A' aus nach rechts bewegt, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit, deren Größe genau der Länge eines Streckenabschnitts $\overline{AB}$ entspricht. NAPIER legte $\overline{AB}=10^7$ fest. Gleichzeitig startet in A ein anderer Punkt, dessen Geschwindigkeit im Punkt A noch $\overline{AB}=10^7$ beträgt, der aber immer langsamer wird, je weiter er sich von A entfernt. Dabei ist seine Geschwindigkeit genau so groß wie sein Abstand zum Endpunkt B. Im Punkt C wäre damit seine Geschwindigkeit gerade $x=\overline{CB}$. Ist der Punkt auf dem Streckenabschnitt bei C angekommen und ist der korrespondierende Punkt auf der Strecke dann bei C', dann nennt NAPIER y den Logarithmus von x. Wir werden dafür

$$y=\mathrm{NapLog}\,x$$

schreiben. NAPIERS erste Tabelle seiner Logarithmen erschien 1614 unter dem Titel *Mirifici Logarithmorum Canonis: Descriptio* (Die Beschreibung der wunderbaren Tafeln der Logarithmen). Der große Astronom und Mathematiker JOHANNES KEPLER arbeitete zu dieser Zeit gerade an seinen *Rudolphinischen Tafeln* - ein großes astronomisches Tabellenwerk aus den Daten TYCHO BRAHES – als er in NAPIERS Buch plötzlich erkannte, wie er seine Arbeit erheblich erleichtern und sogar beschleunigen konnte. KEPLER war also ohne Zweifel der erste Anwender der NAPIERschen Logarithmen.

Auf die mühsame und fehleranfällige Art, wie NAPIER seine Logarithmentabelle tatsächlich berechnet hat, will ich hier nicht sehr detailiert eingehen und verweise statt dessen auf TOEPLITZ [1], EDWARDS [3] oder PHILLIPS [4]. Den Anwendern der *Descriptio* war es vielleicht gleichgültig (nur KEPLER nicht, denn er entwickelte sofort eigene Ideen zu den Logarithmen!) und die Beschreibung der Methode wurde erst nach NAPIERS Tod im Jahr 1619 von dessen Sohn veröffentlicht: *Mirifici Logarithmorum Canonis: Constructio* (Die Konstruktion der wunderbaren Tafeln der Logarithmen). Wir wollen statt dessen das kinematische Modell weiter ausbeuten.

Geschwindigkeit ist Wegänderung pro Zeitänderung. Für das kinematische Modell bedeutet das, dass wir sofort zwei Gleichungen hinschreiben können:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 10^7\\ \frac{d}{dt}(10^7-x) &= x\end{aligned}\quad .$$

Die erste Gleichung beschreibt die Geschwindigkeit des Punktes im unteren Bild von Abbildung 7. In der zweiten Gleichung ist die Geschwindigkeit des oberen Punktes beschrieben. Der zurückgelegte Weg ist gerade 10^7-x, die zeitliche Änderung dieses Weges ist die Geschwindigkeit, und die sollte gerade so groß sein wie der Abstand des Punktes zum Punkt B, also x. Die erste Gleichung lässt sich sofort Integrieren und wir erhalten $y=10^7t+K$ mit einer Integrationskonstanten K. Zur Zeit t=0 muss y=0 sein, denn dann ist der untere Punkt im Punkt A'. Also muss die Integrationskonstante Null sein. Es ergibt sich also

(5) $$y=10^7t\,.$$

Die zweite Gleichung ist auch nicht viel schwieriger. Ausführen der Ableitung liefert $\frac{dx}{dt}=-x$. Wir suchen also eine Funktion, die sich – bis auf das Vorzeichen – beim Differenzieren reproduziert. Es muss sich also um die e-Funktion handeln und der Wechsel des Vorzeichens kommt durch einen negativen Exponenten. Damit ergibt sich als Lösung $x=Ke^{-t}$, wobei K wieder eine Integrationskontante ist. Da zur Zeit t=0 der Wert $x=10^7$ sein muss, folgt als Lösung schließlich

(6) $$x=10^7e^{-t}.$$

Aufgabe 2.3.1: Beweisen Sie, dass für den NAPIERschen Logarithmus die Beziehung

(7) $$\mathrm{NapLog}\,x=10^7\ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$$

gilt.

Lösung: Wendet man den natürlichen Logarithmus auf (6) an, dann erhält man $\ln x=\ln 10^7-t\ln e=\ln 10^7-t$, also $t=\ln 10^7-\ln x=\ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$. Dieses Ergebnis wird in (5) eingesetzt und liefert $y=10^7\ln\left(\frac{10^7}{x}\right)$ und y ist ja gerade der NAPIERsche Logarithmus.

Der NAPIERsche Logarithmus unterscheidet sich also ganz erheblich vom natürlichen Logarithmus. Ältere Bücher bezeichnen den natürlichen Logarithmus zwar manchmal als NAPIERschen Logarithmus, aber dafür gibt es keinerlei Grund.

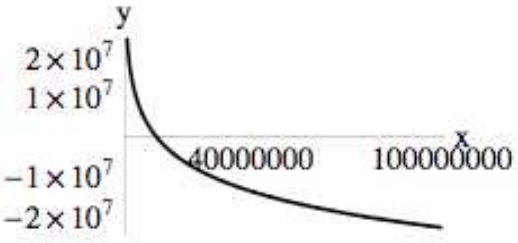


Abbildung 8: *Der NAPIERsche Logarithmus*

Bei all unseren heutigen Logarithmen gilt $\log_a 1 = 0$, weil ja $a^0 = 1$ ist. Beim NAPIERschen Logarithmus ist aber $\text{NapLog}\,10^7 = 0$. Wenn man nach der Basis des NAPIERschen Logarithmus fragt, dann fragt man nach der Zahl x, für die $y = \text{NapLog}\,x = 1$ gilt. Mit Hilfe von (7) können wir diese Basis nun berechnen. Aus $10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right) = 1$ folgt $\frac{10^7}{x} = e^{10^{-7}}$ und damit

$$x = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{0.0000001}.$$

Aufgabe 2.3.2: Man leite eine Funktionalgleichung für den NAPIERschen Logarithmus her.

Lösung: Mit Hilfe von (7) berechnen wir den Logarithmus eines Produkts:

$$\begin{aligned}
\text{NapLog}(x \cdot y) &= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x \cdot y}\right) \\
&= 10^7 \left(\ln 10^7 - \ln(x \cdot y)\right) \\
&\quad \ln 10^7 \text{ einschmuggeln} \\
&= 10^7 \left(\ln 10^7 - \ln x - \ln y + \ln 10^7 - \ln 10^7\right) \\
&= 10^7 \left(\ln 10^7 - \ln x + \ln 10^7 - \ln y - \ln 10^7\right) \\
&= 10^7 \left(\ln\left(\frac{10^7}{x}\right) + \ln\left(\frac{10^7}{y}\right) - \ln 10^7\right) \\
&= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right) + 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right) + 10^7 \ln 10^7 \\
&= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right) + 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right) + 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{1}\right) \\
&= \text{NapLog}\,x + \text{NapLog}\,y - \text{NapLog}\,1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Damit ist klar, dass der NAPIERsche Logarithmus eigentlich gar keine Logarithmusfunktion im heutigen Sinne ist.

Wir haben bei der Diskussion der STIFELschen Skalen bemerkt, dass die Abstände in der geometrischen Skala zu groß sind, um wirklich damit rechnen zu können. Bezeichnen wir die Zahlen in der geometrischen Skala mit g_i, dann gilt bei STIFEL: $\frac{g_{i+1}}{g_i} = 2$. Um praktisch brauchbare Logarithmentafel zu berechnen, muss offenbar $\frac{g_{i+1}}{g_i} \approx 1$ gelten. NAPIER wählte $\frac{g_{i+1}}{g_i} = 1 - 10^{-7}$. Er gewinnt seine Logarithmentafel nun durch die Berechnung von

$$10^7 (1 - 10^{-7})^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

und nennt n den Logarithmus der Zahl $10^7 (1 - 10^7)^n$, also

$$y = \text{NapLog}\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^7 (1 - 10^{-7})^y.$$

Sind $x_1 = 10^7 (1 - 10^{-7})^{y_1}, x_2 = 10^7 (1 - 10^{-7})^{y_2}$, dann gilt für den Quotienten

$$\frac{x_1}{x_2} = 10^7 (1 - 10^{-7})^{y_1 - y_2}.$$

Die Differenz zweier Logarithmen ist also nur abhängig vom Quotienten der zugehörigen Zahlen! „Logarithmus“ heisst in etwa „Quotientenzahl“ und nun ist klar, woher NAPIER diese Namensgebung genommen hat.

Abbildung 9: *Originalausgabe von 1614 (links) und die englische Übersetzung der Descriptio von 1619*

Aufgabe 2.3.3: Man entwickle eine Möglichkeit, die Zahlen $10^7(1-10^{-7})^n$ für viele n zu berechnen, *ohne* tatsächlich potenzieren zu müssen.

Lösung: Wir nehmen an, dass die Zahl $10^7(1-10^{-7})^k$ für ein k bereits berechnet sei. Dann ist

$$10^7(1-10^{-7})^{k+1} = 10^7(1-10^{-7})^k \cdot (1-10^{-7}) = 10^7(1-10^{-7})^k - 10^7(1-10^{-7})^k \cdot 10^{-7}.$$

Multiplikation mit 10^{-7} ist nur eine Stellenverschiebung um sieben Stellen nach links. Der neue Wert kann also durch Subtraktion des um sieben Stellen verschobenen vorhergehenden Wertes vom vorhergehenden Wert berechnet werden!

Aufgabe 2.3.4: Wieviel Schritte muss man rechnen, um die Startzahl 10^7 zu halbieren?

Lösung: Wir suchen die Zahl n, für die $(1-10^{-7})^n = \frac{1}{2}$ gilt. Wenden wir den dekadischen Logarithmus an, dann folgt $n \cdot \log\left(1-10^{-7}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$, also $n = -\frac{\log 2}{\log(1-10^{-7})} \approx 6931471$. Da wäre NAPIER heute noch nicht fertig mit seiner Logarithmentabelle! Tatsächlich hat er nur mit kleinen Tabellen gearbeitet und Zwischenwerte interpoliert. Wer sich für diese spannende Geschichte interessiert, der sei an GOLDSTINE [6] verwiesen.

Die Mängel der NAPIERschen Logarithmen blieben auch NAPIERs Zeitgenossen nicht verborgen. Es gilt keine echte Funktionalgleichung, sondern es muss stets eine Konstante subtrahiert werden (vergl. (8)). Weiterhin gilt $\mathrm{NapLog}10^7 = 0$. Der Mathematiker HENRY BRIGGS (1561-1630) war begeistert von der Idee der Logarithmen und besuchte NAPIER im Jahr 1615. Er hatte ein paar Verbesserungsvorschläge im Gepäck, nämlich den heutigen Logarithmus zur Basis 10.

3. Es werde Licht: Die Briggsschen Logarithmen

3.1 Henry Briggs

HENRY BRIGGS ist eine der interessantesten Figuren der Wissenschaftsgeschichte Englands, obwohl wir nur sehr wenig von ihm wissen. Er gehörte zu den Puritanern, einer religiösen Strömung, die auf einfache Lebensweise und Zurückhaltung großen Wert legte. Und seine Lebenszeit fällt in die spannende Zeit des ausgehenden Elisabethanischen Zeitalters. Wir kennen kein Portrait, das ihn zeigt, und es gab wohl nie eines. Sein Grabstein in der Kapelle des Merton College in Oxford ist von ergreifender Schlichtheit, wenn man es mit Grabsteinen seiner Zeitgenossen vergleicht. Er wurde 1561 in Yorkshire geboren, studierte in Cambridge und ging 1596 als erster Mathematikprofessor des Gresham College nach London, wo er Geometrie und Navigation lehrte. Seine Arbeiten in dieser Zeit sind aufregende Berechnungen zur Theorie der Navigation, siehe SONAR [7]. Im Jahr 1619 war er in England schon so berühmt, dass er als erster Savile professor for geometry *an die Universität Oxford berufen wurde. JOHN AUBREY, ein berühmter Biograph der Zeit, schrieb in AUBREY [8] über ihn: „Mr. William Oughtred nennt ihn den Englischen Archimedes". Als er 1614 NAPIERs* Descriptio *kennenlernt, wendet er sich für den Rest seines Lebens den Logarithmen zu. Er will einen Logarithmus, für den* $\log 10 = 1$ *gilt und NAPIER stimmt zu!*

Abbildung 10: *Die schlichte Grabplatte im Merton College*

Aber BRIGGS hat nicht nur eine Idee im Gepäck, sondern auch eine geniale Strategie zur Berechnung seiner Logarithmen. Durch die Wahl der Basis 10 ist

$$10^0 = 1 \quad \leftrightarrow \quad \log 1 = 0$$
$$10^1 = 10 \quad \leftrightarrow \quad \log 10 = 1$$
$$10^2 = 100 \quad \leftrightarrow \quad \log 100 = 2$$

usw. klar. Dann kann man aber auch mit gebrochenen Exponenten arbeiten:

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \quad \leftrightarrow \quad \log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$$
$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}} \quad \leftrightarrow \quad \log\sqrt{\sqrt{10}} = \frac{1}{4}$$
$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \quad \leftrightarrow \quad \log\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = \frac{1}{8}$$
$$10^{\frac{1}{16}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} \quad \leftrightarrow \quad \log\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} = \frac{1}{16}$$

.

Das bringt BRIGGS auf die Idee, seine Logarithmen durch **fortgesetztes Wurzelziehen** zu berechnen.

3.2 Die Berechnung der Briggsschen Logarithmen

Zieht man n Mal die Wurzel aus 10, $\sqrt{\cdots\sqrt{10}}$, dann ist das gleichbedeutend mit $10^{\frac{1}{2^n}}$. Für „große" n ist $10^{\frac{1}{2^n}}$ nahe bei 1, genauer: $\lim_{n\to\infty} 10^{\frac{1}{2^n}} = 1$. Bei Experimenten (er muss Tag und Nacht gerechnet, geschrieben und überlegt haben!) stellt er fest, dass der Logarithmus von 1+x, wenn er durch x dividiert wird, für „kleine" x konstant ist. Was heisst das? Er wird vermutlich die folgende Tabelle gemacht haben.

1+x	log(1+x)	$\frac{\log(1+x)}{x}$
10	1	0.1
$\sqrt{10} \approx 3.162278$	$\frac{1}{2}$	0.231
$\sqrt{\sqrt{10}} \approx 1.778279$	$\frac{1}{4}$	0.321
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \approx 1.333521$	$\frac{1}{8}$	0.375
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} \approx 1.154782$	$\frac{1}{16}$	0.404
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}} \approx 1.074608$	$\frac{1}{32}$	0.419
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}} \approx 1.036633$	$\frac{1}{64}$	0.427
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}} \approx 1.018152$	$\frac{1}{128}$	0.430
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}}} \approx 1.009035$	$\frac{1}{256}$	0.432
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}}}} \approx 1.004507$	$\frac{1}{512}$	0.433
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}}}}} \approx 1.002251$	$\frac{1}{1024}$	0.434

Wir wollen erst später diskutieren, wie BRIGGS die vielen Wurzeln (ohne Computer!) gezogen hat! Interessant ist jedoch, dass wir gerade den ersten Teil der berühmten BRIGGSschen Logarithmentabelle *Arithmetica Logarithmica* berechnet haben, die erstmals in London im Jahr 1624 erschienen ist und zur Grundlage sämtlicher späterer Tabellen geworden ist. Diese Logarithmentabelle ist so berühmt, dass sie noch heute gedruckt wird (aber natürlich nur aus historischem Interesse), BRIGGS [10]. Die erste Seite ist in Abbildung 11 gezeigt und man erkennt unschwer unsere kleine Tabelle am Anfang wieder.
BRIGGS hat noch viel weiter gerechnet (und mit viel mehr Stellen, nämlich 30) und ist dabei auf folgendes Gesetz gestoßen. Er hat (bis auf 16 gültige Stellen!) ausgerechnet, dass, in heutiger Bezeichnungsweise,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = K \approx 0.4342944819032518 \tag{9}$$

gilt. Versuchen Sie doch einmal, wie weit Ihr Taschenrechner kommt!

Aufgabe 3.2.1: Wir kennen heute die Reihendarstellung des natürlichen Logarithmus' in der Form

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \ldots, \tag{10}$$

die für alle x mit |x|<1 gilt. Beweisen Sie: Die Reihe ist für x=-1 divergent, aber für x=1 konvergent.
Hinweis: Der Beweis für x=-1 ist trivial. Für x=1 ergibt sich formal die Reihe

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \ldots.$$

Die Reihenglieder 1, 1/2, 1/3, 1/4, usw. bilden eine monoton fallende Nullfolge. Man bezeichnet mit

$$S_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots \pm \frac{1}{n}$$

die n-te Partialsumme dieser Reihe. Gehen Sie wie folgt vor:
(a) Zeigen Sie, dass die Abschätzungen

$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_{2n} < S_{2n-1} < S_{2n-3} < \cdots < S_3 < S_1$$

gelten.
(b) Folgern Sie aus (a), dass die beiden Folgen $(S_{2n})_{n=1,2,3,\ldots}$ und $(S_{2n-1})_{n=1,2,3,\ldots}$ konvergieren.
(c) Zeigen Sie, dass die beiden Grenzwerte aus (b) identisch sind und die Gesamtreihe somit konvergiert.

Lösung: Für x=-1 ergibt sich formal die Reihe

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\ldots=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\right)$$

und das ist die negative harmonische Reihe, die divergiert.

(a) Wir schreiben

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

und

$$S_{2n+2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right).$$

Da die Folge der Reihenglieder eine monoton fallende Nullfolge bilden, sind alle Klammern positiv und daraus folgt sofort $S_{2n}<S_{2n+2}$ und damit ist $S_2<S_4<S_6<\cdots<S_{2n}$ bewiesen. Wegen

$$S_{2n-1}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2n-4}-\frac{1}{2n-3}\right)-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

und

$$S_{2n-3}=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\ldots-\left(\frac{1}{2n-4}-\frac{1}{2n-3}\right)$$

folgt auch sofort $S_{2n-1}<S_{2n-3}$, da wieder alle Klammern positiv sind. Damit ist $S_{2n-1}<S_{2n-3}<S_{2n-5}<\cdots<S_1$ bewiesen. Ein Blick auf S_{2n} und S_{2n-1} zeigt auch sofort $S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{2n}$, also $S_{2n}<S_{2n-1}$, was den Beweis abschließt.

(b) Die Folge $(S_{2n})_{n=1,2,3,\ldots}$ ist monoton wachsend und wegen (b) nach oben durch S_1 (und jeder anderen ungeraden Partialsumme) beschränkt. Damit konvergiert die Folge. Die Folge $(S_{2n-1})_{n=1,2,3,\ldots}$ ist monoton fallend und wegen (b) durch S_2 nach unten beschränkt, also ebenfalls konvergent.

(c) Die Differenzenfolge ist $S_{2n-1}-S_{2n}=\frac{1}{2n}$ und daher folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n-1}-S_{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$, also sind die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ identisch und damit konvergiert die Ausgangsreihe.

Aufgabe 3.2.1: Beweisen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung (10) und der Beziehung (1), dass

(11) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\log e$$

gilt.

Lösung: Mit (1) gilt $\log(1+x)=\log e\cdot\ln(1+x)$. Unter Verwendung der Reihendarstellung (10) ist dann

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\log e\cdot\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}\pm\ldots\right).$$

Für $x\to 0$ geht der geklammerte Ausdruck gegen 1 und damit sind wir fertig.

Warum war BRIGGS so sehr an der Konstanten K und der Beziehung (9) interessiert? Für kleine x ist er damit in der Lage, den Logarithmus von 1+x einfach durch

$$\log(1+x)\approx Kx$$

zu berechnen! Und damit liegt das BRIGGSsche Programm zur Berechnung der Logarithmen vor uns:

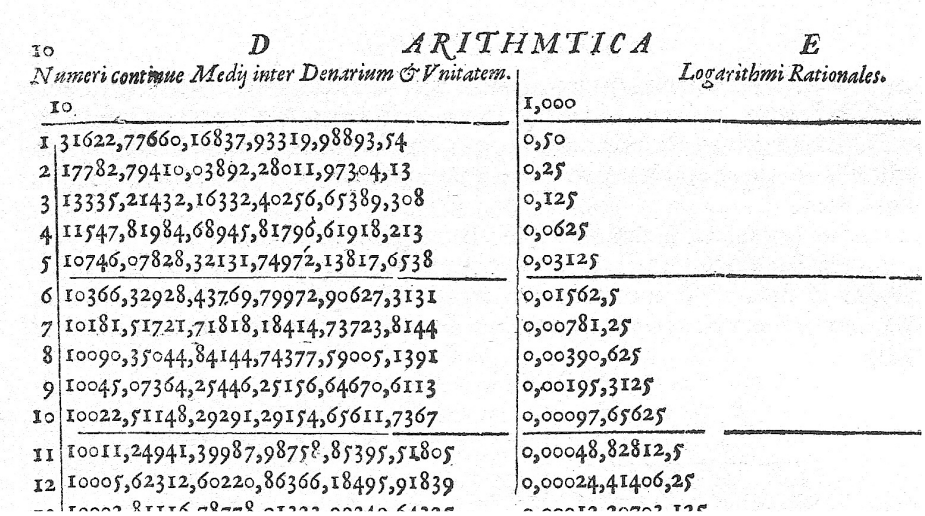
A). Man benötigt die Logarithmen nur von Primzahlen p, denn jede natürliche Zahl ist das eindeutige Produkt ihrer Primfaktoren.

B). Für jede Primzahl p ziehe so oft die Wurzel, bis $p^{\frac{1}{2^n}}=1+x$ mit einem $x\approx 10^{-16}$.

C). Dann folgt $\log\left(p^{\frac{1}{2^n}}\right)=\frac{1}{2^n}\log p=\log(1+x)\approx Kx$ und damit $\log p\approx 2^n Kx$.

Da BRIGGS mit 30 Stellen arbeitete, konnte er sicher sein, dass die ersten 16 Stellen wirklich stimmten. Die neue Berechnungsweise der Logarithmen durch fortgesetztes Wurzelziehen birgt einen enormen Vorteil vor der Methode von NAPIER: Während bei NAPIER jeder Logarithmus auf den vorher berechneten basiert und sich damit Rechenfehler durchziehen, haben Rechenfehler bei der BRIGGSchen Methode keinerlei Auswirkung auf weitere Logarithmen.

Nun müssen wir aber noch den „Flaschenhals“ der BRIGGSschen Methode diskutieren: Das fortgesetzte Wurzelziehen. Wie macht man das, so ganz ohne Computer? In der Schule lernt man das iterativ arbeitende Heron-Verfahren kennen, aber damit 50 Mal die Wurzel zu ziehen, und das für Tausende von Zahlen, ist einfach nicht praktikabel – so lange lebt kein Mensch! Haben wir den brillianten Geist von HENRY BRIGGS schon aufleuchten gesehen, so wird er jetzt strahlen: BRIGGS erfindet die *Differenzenrechnung* zum Wurzelziehen!



10 D ARITHMTICA E

Numeri continue Medij inter Denarium & Vnitatem. *Logarithmi Rationales.*

10		1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,39987,98758,85395,51805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25

Abbildung 11: *Der Beginn der ersten Seite der Tafeln in Arithemtica Logarithmica*

3.3 Das fortgesetzte Wurzelziehen

Ziehen wir fortgesetzt Wurzeln aus der Primzahl p=3, so erhalten wir die folgende Tabelle:

$$
\begin{aligned}
3^{1} &= 3.000000000\\
\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} &\approx 1.732050808\\
\sqrt{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{4}} &\approx 1.316074013\\
3^{\frac{1}{8}} &\approx 1.147202690\\
3^{\frac{1}{16}} &\approx 1.071075483\\
3^{\frac{1}{32}} &\approx 1.034927767\\
3^{\frac{1}{64}} &\approx 1.017313996\\
3^{\frac{1}{128}} &\approx 1.008619847
\end{aligned}
$$

BRIGGS erkennt in den Werten dieser Tabelle nun ein **Muster**! Die Vorkommastelle ist völlig unerheblich und hat nur etwas mit der Größenordnung der Zahlen zu tun. So ist $\log 5.1 = \log\left(\frac{51}{10}\right) = \log 51 - \log 10 = \log 51 - 1$.

Wir notieren also nur die Nachkommastellen und schreiben unsere obige Tabelle etwas um:

n	Wurzeln	Z(n)
0	3^{1}	0000000000
1	$3^{\frac{1}{2}}$	732050808
2	$3^{\frac{1}{4}}$	316074013
3	$3^{\frac{1}{8}}$	147202690
4	$3^{\frac{1}{16}}$	71075483
5	$3^{\frac{1}{32}}$	34927767
6	$3^{\frac{1}{64}}$	17313996

$$7 \qquad 3^{\frac{1}{128}} \qquad 8619847$$

Was ist nun BRIGGS daran aufgefallen? Er bemerkt, dass jeder Eintrag in der Spalte Z(n) etwa die Hälfte des vorhergehenden Eintrags ist. Das stimmt noch nicht gut am Anfang der Tabelle, denn (1.)000000000 ist ja noch weit vom Doppelten von (0.)732050808 entfernt, aber etwas weiter unten stimmt die Beobachtung schon ganz gut. Um seine Überlegung zu überprüfen, erfindet BRIGGS die **erste BRIGGSsche Differenz**

(12) $$B_1^n := \frac{1}{2} Z(n) - Z(n+1).$$

Aus unserer Tabelle berechnen wir

$$\begin{aligned} B_1^0 &= \frac{1}{2} Z(0) - Z(1) = 0000000000 - 732050808 = 267949192 \\ B_1^1 &= \frac{1}{2} Z(1) - Z(2) = \frac{732050808}{2} - 316074013 = 49951391 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

und tragen die Differenzen in unsere Tabelle ein.

n	Wurzeln	Z(n)	B_1^n
0	3^{1}	0000000000	
			267949192
1	$3^{\frac{1}{2}}$	732050808	
			49951391
2	$3^{\frac{1}{4}}$	316074013	
			10834317
3	$3^{\frac{1}{8}}$	147202690	
			2525862
4	$3^{\frac{1}{16}}$	71075483	
			609975
5	$3^{\frac{1}{32}}$	34927767	
			149888
6	$3^{\frac{1}{64}}$	17313996	
			37151
7	$3^{\frac{1}{128}}$	8619847	

Wieder blickt BRIGGS auf die Tabelle und nun fällt ihm auf, dass die Einträge in der Spalte der ersten BRIGGSschen Differenzen sich jeweils vierteln. Die **zweite BRIGGSsche Differenz** ist damit

(13) $$B_2^n := \frac{1}{4} B_1^n - B_1^{n+1},$$

die wir ebenfalls in die Tabelle eintragen:

n	Wurzeln	Z(n)	B_1^n	B_2^n
0	3^{1}	0000000000		
			267949192	
1	$3^{\frac{1}{2}}$	732050808		17035907
			49951391	
2	$3^{\frac{1}{4}}$	316074013		1653531
			10834317	
3	$3^{\frac{1}{8}}$	147202690		182717
			2525862	
4	$3^{\frac{1}{16}}$	71075483		21491
			609975	

5	$\frac{1}{3^{32}}$	34927767		2606
			149888	
6	$\frac{1}{3^{64}}$	17313996		321
			37151	
7	$\frac{1}{3^{128}}$	8619847		

Und wieder sieht BRIGGS ein Muster, denn die Zahlen der zweiten Differenzen achteln sich ungefähr. Also weiter mit der **dritten BRIGGSschen Differenz**

(14) $$B_3^n := \frac{1}{8} B_2^n - B_2^{n+1},$$

die wir wieder in der Tabelle notieren wollen.

n	Wurzeln	Z(n)	B_1^n	B_2^n	B_3^n
0	3^1	0000000000			
			267949192		
1	$\frac{1}{3^2}$	732050808		17035907	
			49951391		475957
2	$\frac{1}{3^4}$	316074013		1653531	
			10834317		23974
3	$\frac{1}{3^8}$	147202690		182717	
			2525862		1349
4	$\frac{1}{3^{16}}$	71075483		21491	
			609975		80
5	$\frac{1}{3^{32}}$	34927767		2606	
			149888		5
6	$\frac{1}{3^{64}}$	17313996		321	
			37151		
7	$\frac{1}{3^{128}}$	8619847			

Nun ist klar, wie es weitergeht, denn die Zahlen in der Spalte der dritten Differenz sind etwa ein Sechzehntel der vorhergehenden Zahl, was zur Definition der **vierten BRIGGSschen Differenz**

(15) $$B_4^n := \frac{1}{16} B_3^n - B_3^{n+1}$$

Anlass gibt:

n	Wurzeln	Z(n)	B_1^n	B_2^n	B_3^n	B_4^n
0	3^1	0000000000				
			267949192			
1	$\frac{1}{3^2}$	732050808		17035907		
			49951391		475957	
2	$\frac{1}{3^4}$	316074013		1653531		5773
			10834317		23974	
3	$\frac{1}{3^8}$	147202690		182717		149
			2525862		1349	
4	$\frac{1}{3^{16}}$	71075483		21491		4
			609975		80	
5	$\frac{1}{3^{32}}$	34927767		2606		**0**

			149888		5	
6	$\frac{1}{3^{64}}$	17313996		321		
			37151			
7	$\frac{1}{3^{128}}$	8619847				

Und nun sind wir an der entscheidenden Stelle angekommen: In der Spalte der vierten Differenzen ist eine 0 entstanden. Wir erleben jetzt die Entstehung der Differenzenrechnung. Weil $B_4^4 = 0$, werden alle weiteren vierten Differenzen ebenfalls Null, also auch $B_4^5 = 0$. Die Differenz zur Berechnung von B_4^5 wäre aber nach (15)

$$B_4^5 \coloneqq \frac{1}{16} B_3^5 - B_3^6$$

und daraus können wir – sozusagen „rückwärts“ – den noch fehlenden Wert B_3^6 in der Spalte der dritten Differenzen berechnen. Es ergibt sich

$$B_3^6 = \frac{1}{16} B_3^5 - B_4^5 = \frac{1}{16} 5 - 0 = 0,$$

weil das Ergebnis unsere darstellbare Genauigkeit unterschreitet (wir unterschreiten die Ziffer 1). Nun schauen wir in die Spalte der zweiten Differenzen. Dort fehlt der Wert B_2^6, den wir nun aber auch rückwärts aus (14) berechnen können:

$$B_2^7 = \frac{1}{8} B_2^6 - B_3^6 = \frac{1}{8} 321 - 0 = 40,$$

wobei die „Nachkommastellen“ bei 40.125 wieder aus unserem Darstellungsbereich herausfallen. Jetzt können wir aber auch den nächsten fehlenden Wert in der Spalte der ersten Differenzen, B_1^8, aus (13) berechnen:

$$B_1^8 = \frac{1}{4} B_1^7 - B_2^7 = \frac{1}{4} 37151 - 40 = 9248,$$

denn 37151/4-40=9247.75 und das ist in unserem Ziffernsystem gerade 9248. Nun kommt das eigentliche Ziel unserer Rückwärtsrechnung: Die Bestimmung der unbekannten Wurzel Z(8) aus (12):

$$Z(8) = \frac{1}{2} Z(7) - B_1^7 = \frac{1}{2} 8619847 - 9248 = 4300676.$$

Damit ist es BRIGGS gelungen, alle weiteren Wurzeln in der Tabelle durch Differenzenbildung innerhalb der BRIGGSschen Differenzen zu berechnen; er braucht also nicht mehr tatsächlich Wurzeln zu ziehen!

n	Wurzeln	Z(n)	B_1^n	B_2^n	B_3^n	B_4^n
0	3^1	0000000000				
			267949192			
1	$\frac{1}{3^2}$	732050808		17035907		
			49951391		475957	
2	$\frac{1}{3^4}$	316074013		1653531		5773
			10834317		23974	
3	$\frac{1}{3^8}$	147202690		182717		149
			2525862		1349	
4	$\frac{1}{3^{16}}$	71075483		21491		4
			609975		80	
5	$\frac{1}{3^{32}}$	34927767		2606		**0**
			149888		5	
6	$\frac{1}{3^{64}}$	17313996		321		**0**
			37151		**0**	
7	$\frac{1}{3^{128}}$	8619847		**40**		
			9248			
8	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^{256}}}$	**4300676**				

Diese Erfindung – die Differenzenrechnung – hat es nicht nur HENRY BRIGGS ermöglicht, seine Logarithmentabellen zu berechnen, sondern hat ihren Siegeszug quer durch die Mathematik angetreten, der noch heute anhält. In der numerischen Mathematik basieren zahllose Algorithmen auf der Differenzenrechnung; Biologen, Chemiker, Ingenieure und Ökonomen modellieren mit Hilfe von Differenzengleichungen und nicht zuletzt liegt das Rechnen mit Differenzen der Differenzialrechnung zugrunde, aber davon konnte BRIGGS noch nichts wissen.

Aufgabe 3.3.1: Als Strafarbeit ist eine Tabelle der ersten 100 Werte des Polynoms $p(n)=n^2+4n+6$, n=0,1,2,3,... zu erstellen. Schüler Joshua fertigt mühsam eine Tabelle der folgenden Form an:

n	p(n)
0	6
1	11
2	18
3	27
..	...

Und bricht dann bei n=20 entnervt ab, weil das Kopfrechnen immer schwieriger wird. Schülerin Sophie-Charlotte hingegen notiert die Differenzen $\Delta p(n) := p(n+1)-p(n)$, $\Delta^2 p(n) = \Delta\Delta p(n) = \Delta p(n+1)-\Delta p(n)$ und $\Delta^3 p(n)$ mit (Achtung! Das sind *keine* BRIGGSschen Differenzen, sondern einfache *Vorwärtsdifferenzen*) und erhält so die folgende Tabelle:

n	p(n)	Δp(n)	Δ^2p(n)	Δ^3p(n)
0	6			
		11-6=5		
1	11		7-5=2	
		18-11=7		2-2=0
2	18		9-7=2	
		27-18=9		2-2=0
3	27		11-9=2	
		38-27=11		2-2=0
4	38		13-11=2	
		51-38=13		
5	51			

Nun schnippt sie begeistert mit den Fingern, denn sie sieht jetzt auf einen Blick, dass sie die Tabelle ohne weitere Multiplikation ausfüllen kann. Wie kann das sein?

Lösung: Schreibt man die Tabelle weiter, dann kann man in die Spalte für die zweite Differenz immer die 2 eintragen. In der Spalte der ersten Differenz treten nur Zahlen auf, die in der Differenz 2 ergeben. Also ist der nächste Eintrag in dieser Spalte 13+2=15 und damit ist die Differenz zwischen p(6) und p(5) gleich 15, d.h. p(6)=p(5)+15.

n	p(n)	Δp(n)	Δ^2p(n)	Δ^3p(n)
4	38		2	
		13		**0**
5	51		**2**	
		13+2=15		**0**
6	**51+15=66**		**2**	
				0

Und so geht nun das Auffüllen dieser Tabelle von rechts nach links nur durch Additionen ganz einfach vor sich, so wie es HENRY BRIGGS vor 400 Jahren entdeckt hat.

3.4 Das Binomialtheorem

Jeder weiß, wie wichtig in der Mathematik die Binome $(a+b)^n$ sind. Kennt man die Definition der **Binomialkoeffizienten**

(16) $$\binom{n}{m} := \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}$$

(lies: „n über m“) für nichtnegative ganze Zahlen $n \geq m$, dann ist

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n .$$

Die Binomialkoeffizienten finden sich im PASCALschen Dreieck wieder, aus dem man sie auch gut berechnen kann.

Aufgabe 3.4.1: Beweisen Sie, dass für nichtnegative ganze Zahlen $n \geq m$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

gilt, wenn n! die Fakultätsfunktion ist, die durch

$$n! := \begin{cases} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n & \text{für} \quad n = 1,2,3,\ldots \\ 1 & \text{für} \quad n = 0 \end{cases}$$

definiert ist.

Lösung: Man erweitert (16) mit (n-m)!.

Schon weniger bekannt ist die Tatsache, dass es auch im Fall von rationalen Koeffizienten eine analoge Darstellung gibt, die auf ISAAC NEWTON zurück geht. Dieses **Binomialtheorem** ist von kaum zu überschätzender Bedeutung für die Entwicklung der Analysis gewesen und lautet:

Binomialtheorem: Gilt $a < |b|$ und ist q rational, dann gilt

(17)
$$\begin{aligned} (a+b)^q &= a^q + qa^{q-1}b + \frac{q(q-1)}{2!}a^{q-2}b^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}a^{q-3}b^3 + \ldots \\ &= \binom{q}{0}a^q + \binom{q}{1}a^{q-1}b + \binom{q}{2}a^{q-2}b^2 + \binom{q}{3}a^{q-3}b^3 + \ldots \end{aligned} .$$

Warum könnte dieses Theorem im Zusammenhang mit den Logarithmen für uns interessant sein? Denken wir an BRIGGS' geniale Methode der Logarithmenberechnung. Dort zieht er wiederholt Wurzeln aus (1+x), wobei x sehr klein ist. Das Binomialtheorem für a=1, b=x und q=1/2 lautet

(18) $$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots .$$

Können wir diese Entwicklung vielleicht schon bei BRIGGS finden?

Zur Vervollständigung unserer Notation definieren wir die **nullte BRIGGSsche Differenz** $B_0^n := Z(n)$. Dann erhalten wir mit (12): $B_1^n = \frac{1}{2}Z(n) - Z(n+1) = \frac{1}{2}B_0^n - B_0^{n+1}$, also

(19) $$Z(n+1) = \frac{1}{2}Z(n) - B_1^n .$$

Diese Beziehung wollen wir weiter ausschlachten und versuchen, die erste Differenz zu ersetzen. Dazu betrachten wir die Definition der zweiten Differenz (13),

$$B_2^n = \frac{1}{2^2}B_1^n - B_1^{n+1}.$$

Wir nehmen nun eine Indexverschiebung vor, und zwar ersetzen wir n durch n-1 und erhalten $B_1^n = \frac{1}{2^2}B_1^{n-1} - B_2^{n-1}$, was wir in (19) einsetzen, um

(20) $$Z(n+1) = \frac{1}{2}Z(n) - \frac{1}{2^2}B_1^{n-1} + B_2^{n-1}$$

zu erhalten. Jetzt versuchen wir uns weiter an der zweiten Differenz. In (14): $B_3^n = \frac{1}{2^3}B_2^n - B_2^{n+1}$ nehmen wir eine doppelte Indexverschiebung vor, in dem wir n durch n-2 ersetzen und

$$B_2^{n-1} = \frac{1}{2^3}B_2^{n-2} - B_3^{n-2}$$

erhalten, was wir in (20) einsetzen:

(21) $$Z(n+1)=\frac{1}{2}Z(n)-\frac{1}{2^2}B_1^{n-1}+\frac{1}{2^3}B_2^{n-2}+B_3^{n-2}.$$

Im nächsten Schritt ersetzt man B_3^{n-2}, usw. und erhält schließlich eine unendliche Reihe der Form

(22) $$Z(n+1)=\frac{1}{2}Z(n)-\frac{1}{2^2}B_1^{n-1}+\frac{1}{2^3}B_2^{n-2}-\frac{1}{2^4}B_3^{n-3}\pm\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}B_k^{n-k}\pm\ldots.$$

Wir wissen bereits, dass die BRIGGSschen Differenzen irgendwann sehr klein werden. Es gibt also einen Index K, so dass

$$B_K^{n+1}=\frac{1}{2^K}B_{K-1}^{n+1}-B_{K-1}^{n+2}\approx\frac{1}{2^{K+1}}B_K^n$$

gilt. HENRY BRIGGS hat in der *Arithmentica Logarithmica* K=9 gewählt und die Reihe (22) kann bei k=K abgebrochen werden.

Kommen wir zurück zum fortgesetzten Wurzelziehen. In unserer Notation gilt immer

$$1+Z(n)=\sqrt{1+Z(n-1)}\,.$$

Wegen $B_1^{n-1}=\frac{1}{2}B_0^{n-1}-B_0^n=\frac{1}{2}Z(n-1)-Z(n)$ und wegen $(1+Z(n))^2=1+Z(n-1)$, also $Z(n-1)=2Z(n)+Z(n)^2$ folgt

(23) $$B_1^{n-1}=\frac{1}{2}(2Z(n)+Z(n)^2)-Z(n)=\frac{1}{2}Z(n)^2.$$

Die nächste Differenz in (22) ist B_2^{n-2},

(24) $$B_2^{n-2}=\frac{1}{2^2}B_1^{n-2}-B_1^{n-1}.$$

Die Differenz B_1^{n-1} haben wir gerade berechnet und B_1^{n-2} folgt aus einer einfachen Indexverschiebung in (23) zu $B_1^{n-2}=\frac{1}{2}Z(n-1)^2$.

Damit ergibt sich aus (24)

$$B_2^{n-2}=\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}Z(n-1)^2\right)-\frac{1}{2}Z(n)^2.$$

Nun ist aber wieder $1+Z(n)=\sqrt{1+Z(n-1)}$ und damit $Z(n-1)=2Z(n)+Z(n)^2$, was auf

(25) $$B_2^{n-2}=\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}(2Z(n)+Z(n)^2)^2\right)-\frac{1}{2}Z(n)^2=\frac{1}{2}Z(n)^3+\frac{1}{8}Z(n)^4$$

führt. Wir wollen an dieser Stelle innehalten. Genau wie oben ergibt sich für die nächste Differenz

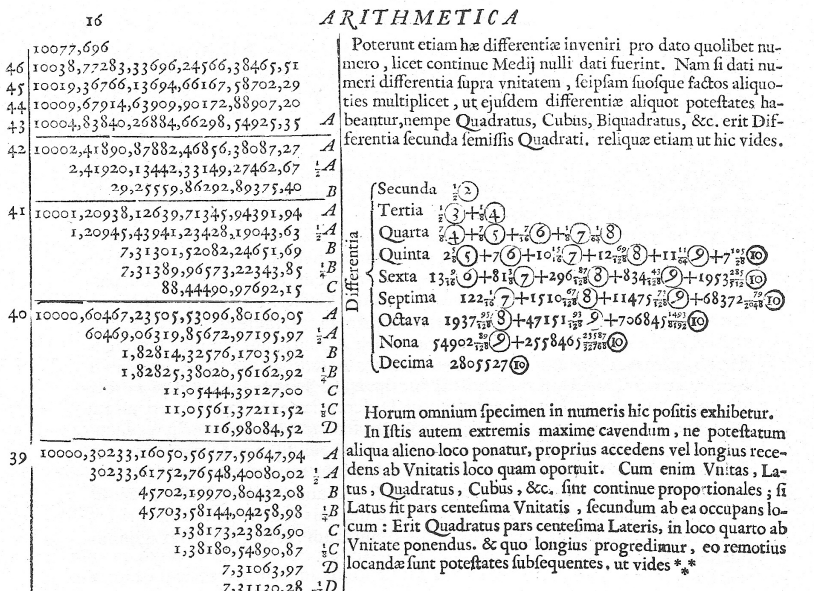
(26) $$B_3^{n-3}=\frac{7}{8}Z(n)^4+\frac{7}{8}Z(n)^5+\frac{7}{16}Z(n)^6+\frac{1}{8}Z(n)^7+\frac{1}{64}Z(n)^8$$

und so weiter, bis man schließlich auf

(27) $$B_9^{n-9}=2805527\cdot Z(n)^{10}$$

kommt.

Die soeben durchgeführten Berechnungen hat BRIGGS in BRIGGS [9] übrigens selbst durchgeführt, was Abbildung 12 beweist.



16 ARITHMETICA

10077,696
46 10038,77283,33696,24566,38465,51
45 10019,36766,13694,66167,58702,29
44 10009,67914,63909,90172,88907,20
43 10004,83840,26884,66298,54925,35 A
42 10002,41890,87882,46856,38087,27 A
2,41920,13442,33149,27462,67 ½A
29,25559,86292,89375,40 B
41 10001,20938,12639,71345,94391,94 A
1,20945,43941,23428,19043,63 ½A
7,31301,52082,24651,69 B
7,31389,96573,22343,85 ¼B
88,44490,97692,15 C
40 10000,60467,23505,53096,80160,05 A
60469,06319,85672,97195,97 ½A
1,82814,32576,17035,92 B
1,82825,38020,56162,92 ¼B
11,05444,39127,00 C
11,05561,37211,52 ⅛C
116,98084,52 D
39 10000,30233,16050,56577,59647,94 A
30233,61752,76548,40080,02 ½A
45702,19970,80432,08 B
45703,58144,04258,98 ¼B
1,38173,23826,90 C
1,38180,54890,87 ⅛C
7,31063,97 D
7,31130,28 ½D

Differentia
Secunda ½(2)
Tertia ½(3)+⅛(4)
Quarta ⅞(4)+7/16(5)+⅛(6)+1/64(7)+1/128(8)
Quinta 2⅝(5)+7(6)+10 15/16(7)+12 69/128(8)+11 11/64(9)+7 101/128(10)
Sexta 13 9/16(6)+81⅛(7)+296 89/128(8)+834 43/1128(9)+1953 285/512(10)
Septima 122 1/16(7)+1510 67/128(8)+11475 57/128(9)+68372 79/2048(10)
Octava 1937 97/128(8)+47151 93/128(9)+706845 1401/8192(10)
Nona 54902 89/128(9)+2558465 2375/32768(10)
Decima 2805527(10)

Poterunt etiam hæ differentiæ inveniri pro dato quolibet numero, licet continue Medij nulli dati fuerint. Nam si dati numeri differentia supra vnitatem, seipsam suosque factos aliquoties multiplicet, ut ejusdem differentiæ aliquot potestates habeantur, nempe Quadratus, Cubus, Biquadratus, &c. erit Differentia secunda semissis Quadrati. reliquæ etiam ut hic vides.

Horum omnium specimen in numeris hic positis exhibetur.
In Istis autem extremis maxime cavendum, ne potestatum aliqua alieno loco ponatur, proprius accedens vel longius recedens ab Vnitatis loco quam oportuit. Cum enim Vnitas, Latus, Quadratus, Cubus, &c. sint continue proportionales; si Latus fit pars centesima Vnitatis, secundum ab ea occupans locum: Erit Quadratus pars centesima Lateris, in loco quarto ab Vnitate ponendus. & quo longius progrediamur, eo remotius locandæ sunt potestates subsequentes, ut vides *.*

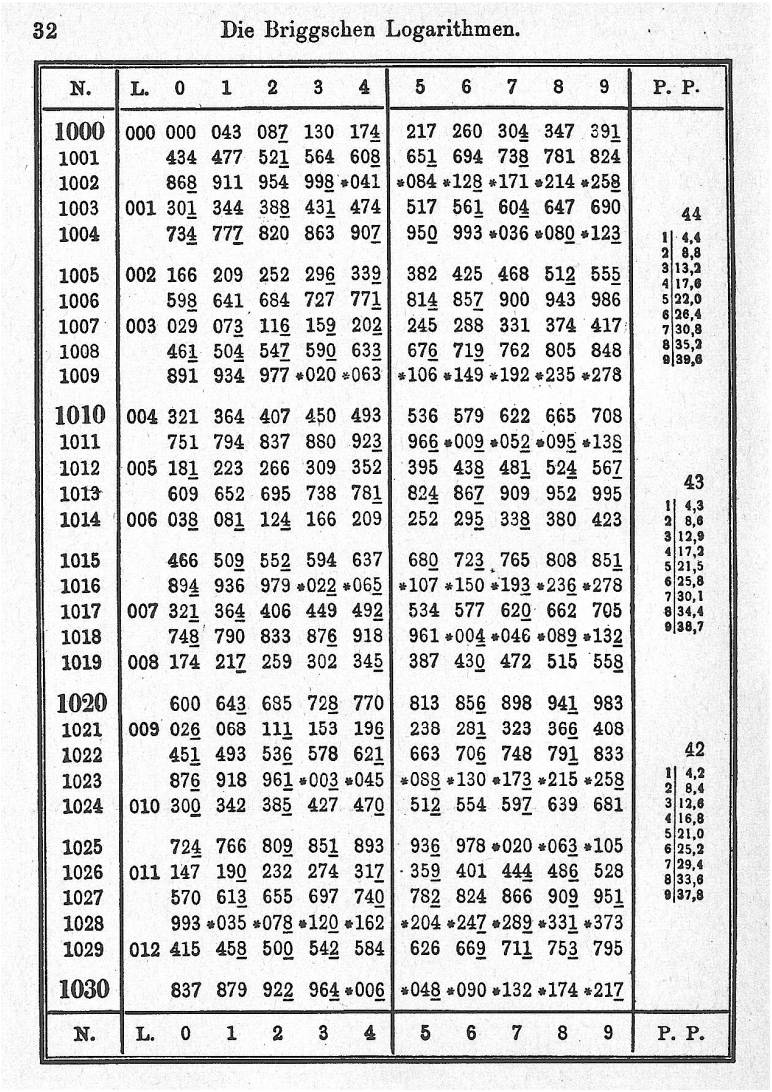
Abbildung 12: Die BRIGGSschen Berechnungen, die zum Binomialtheorem führen

BRIGGS kennt noch nicht die Exponentenschreibweise a^b, sondern schreibt $Z(n)^2$ als (2). In der Zeile *Decima* erkennen wir unschwer unsere Differenz (27), 2805527 (10) $= 2805527 \cdot Z(n)^{10}$.
Jetzt setzen wir nur noch (23)-(27) in (22) ein und erhalten

(28) $$(1+Z(n))^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}Z(n)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}Z(n)^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}Z(n)^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}Z(n)^4\pm\ldots.$$

Das ist aber nichts anderes als das Binomialtheorem für den Spezialfall q=1/2. HENRY BRIGGS kannte also das Binomialtheorem zumindest für „seinen“ Spezialfall des Wurzelziehens. Es ist sicher, dass NEWTON die *Arithmetica Integra* in seiner Bibliothek hatte; ob er die Idee für sein Binomialtheorem aber bei der Lektüre bekommen hat, ist nicht nachweisbar.

3.4 „Moderne“ Logarithmentabellen



32 Die Briggschen Logarithmen.

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
1000	000	000	043	087	130	174	217	260	304	347	391	
1001		434	477	521	564	608	651	694	738	781	824	
1002		868	911	954	998	*041	*084	*128	*171	*214	*258	
1003	001	301	344	388	431	474	517	561	604	647	690	44
1004		734	777	820	863	907	950	993	*036	*080	*123	1 4,4 2 8,8 3 13,2 4 17,6 5 22,0 6 26,4 7 30,8 8 35,2 9 39,6
1005	002	166	209	252	296	339	382	425	468	512	555	
1006		598	641	684	727	771	814	857	900	943	986	
1007	003	029	073	116	159	202	245	288	331	374	417	
1008		461	504	547	590	633	676	719	762	805	848	
1009		891	934	977	*020	*063	*106	*149	*192	*235	*278	
1010	004	321	364	407	450	493	536	579	622	665	708	
1011		751	794	837	880	923	966	*009	*052	*095	*138	
1012	005	181	223	266	309	352	395	438	481	524	567	
1013		609	652	695	738	781	824	867	909	952	995	43
1014	006	038	081	124	166	209	252	295	338	380	423	1 4,3 2 8,6 3 12,9 4 17,2 5 21,5 6 25,8 7 30,1 8 34,4 9 38,7
1015		466	509	552	594	637	680	723	765	808	851	
1016		894	936	979	*022	*065	*107	*150	*193	*236	*278	
1017	007	321	364	406	449	492	534	577	620	662	705	
1018		748	790	833	876	918	961	*004	*046	*089	*132	
1019	008	174	217	259	302	345	387	430	472	515	558	
1020		600	643	685	728	770	813	856	898	941	983	
1021	009	026	068	111	153	196	238	281	323	366	408	
1022		451	493	536	578	621	663	706	748	791	833	42
1023		876	918	961	*003	*045	*088	*130	*173	*215	*258	1 4,2 2 8,4 3 12,6 4 16,8 5 21,0 6 25,2 7 29,4 8 33,6 9 37,8
1024	010	300	342	385	427	470	512	554	597	639	681	
1025		724	766	809	851	893	936	978	*020	*063	*105	
1026	011	147	190	232	274	317	359	401	444	486	528	
1027		570	613	655	697	740	782	824	866	909	951	
1028		993	*035	*078	*120	*162	*204	*247	*289	*331	*373	
1029	012	415	458	500	542	584	626	669	711	753	795	
1030		837	879	922	964	*006	*048	*090	*132	*174	*217	
N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.

Abbildung 13 zeigt eine Seite aus einer fünfstelligen Logarithmentafel meiner Schulzeit, mit deren Hilfe wir die einfache Aufgabe $1021.8 \cdot 100.45$ lösen wollen. Da Kommastellen keine Rolle spielen, müssen wir die Logarithmen von 10218 und 10045 finden. Ein Blick in die Tafel liefert log 10218=009 366 und log 10045=001 950. Addition der Logarithmen liefert 011 316. Wir finden in der Tabelle den Logarithmus 011 317, zu dem die Zahl 10264 gehört. Man könnte hier innerhalb der Tabelle noch interpolieren, wozu die jeweils Sparte „P.P.“ (partes proportionales) dient, aber uns soll die Genauigkeit hier reichen. Da unsere Faktoren vier- bzw. dreistellig waren, muss das Ergebnis mindestens fünfstellig sein. Wir erhalten also

$$1021.8 \cdot 100.45 = 102640,$$

im Vergleich zu 102639.81 auf dem Taschenrechner.

Solche Logarithmentabellen waren bis in die 1970er Jahre hinein unentbehrlich für alle „rechnenden“ Berufe – Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure. Auch der Rechenschieber war ein „logarithmisches“ Rechenhilfsmittel, bei dem direkt mit STIFELschen Skalen (in viel feinerer Unterteilung) gerechnet wurden.

Abbildung 13: *Eine Seite aus meiner alten Schullogarithmentafel*

Abbildung 14: *Rechenschieber*

4. Der Verlierer: Jost Bürgi

4.1 Ein Uhrmacher aus der Schweiz

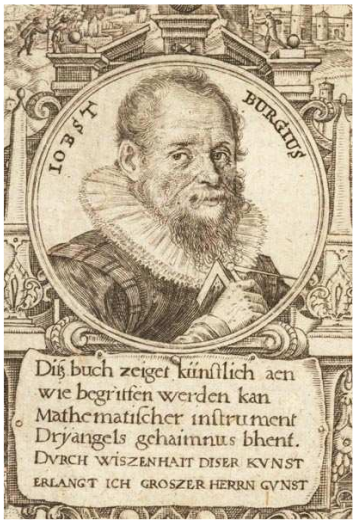


Abbildung 15: *Jost Bürgi*

Der 1552 in St. Gallen geborene Schweizer JOST BÜRGI war ein Uhr- und Instrumentenmacher von Rang und auch als Astronom tätig und wurde von KEPLER als Himmelsbeobachter hoch geschätzt. Im Jahr 1620 veröffentlicht er

> *Aritmetische vnd Geometrische Progreß Tabulen / sambt gründlichem vnterricht / wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen / vnd verstanden werden sol.*

und publiziert damit eine von NAPIER und BRIGGS unabhängige Logarithmentafel.
Wie man bei TROPFKE [10] und auch in LUTSTORF [11] lesen kann, berichtete RAIMARUS URSUS DITHMARSUS, ein Zeitgenosse BÜRGIs, in *Fundamentum astronomicum* (Straßburg 1588), dass dieser sogar bereits 1588 über Möglichkeiten verfügte, seine Berechnungen zu vereinfachen. Dies mögen bereits die Logarithmen gewesen sein, denn der Schüler und Schwager BÜRGIs, BENJAMIN BRAMER, schreibt, siehe TROPFKE [10]:

> *[...] Auff diesem Fundament hat mein lieber Schwager und Präceptor Jobst Bürgi vor zwantzig vnd mehr Jahren eine schöne progreß-tabul mit ihren Differentzen von 10 zu 10 in 9 Ziffern calculiert auch zu Prag ohne Bericht in Anno 1620 drucken lassen. Vnd ist also die Invention der Logarithmen nicht dess Nepereri, sondern von gedachtem Bürgi (wie solches vielen wissend vnd ihm auch herr Keplerus zeugniss giebt) lange zuvor erfunden} [...]*

BÜRGI, der sich einige Zeit in Diensten von RUDOLPH II. in Prag befand, traf dort auch JOHANNES KEPLER. Obwohl sich beide Männer kannten und sogar befreundet waren, schwieg BÜRGI über seine Logarithmen, so dass KEPLER im Vorwort seiner *Rudolphinischen Tafeln* tadelnde Worte fand:

> *Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen.*

Diese übermäßige Zurückhaltung BÜRGIs ist sicher einer der Gründe dafür, dass sich die BÜRGIschen Logarithmen nicht durchgesetzt haben.

BÜRGIs Logarithmen basieren ebenso wie die NAPIERschen auf STIFELs Idee der A- und G-Skalen. Die Logarithmen heißen bei BÜRGI die *roten Zahlen*, die Argumente die SCHWARZEN ZAHLEN (Äußerst bemerkenswert: Die *Progreß Tabulen* wurden auch tatsächlich zweifarbig gedruckt).

4.2 Bürgis Logarithmen

Im Gegensatz zu NAPIER verwendet BÜRGI den Quotienten

(29) $$\frac{g_{i+1}}{g_i} = 1.0001$$

und bildet die Folge $g_i = (1+10^{-4})^i$ der schwarzen Zahlen. Die roten Zahlen bilden dagegen eine arithmetische Folge mit $a_i = 10 \cdot i$, d.h. der BÜRGIsche Logarithmus erfüllt die Beziehung

(30) $$\text{BürgiLog}(g_i) = \text{BürgiLog}((1+10^{-4})^i) = 10 \cdot i$$

und damit erhält man die BÜRGIschen Skalen:

0	10	20	30	40	50	...
1	$1+10^{-4}$	$(1+10^{-4})^2$	$(1+10^{-4})^3$	$(1+10^{-4})^4$	$(1+10^{-4})^5$	...
1	1.0001	1.00020001	1.00030003	1.00040006	1.00050010001	...

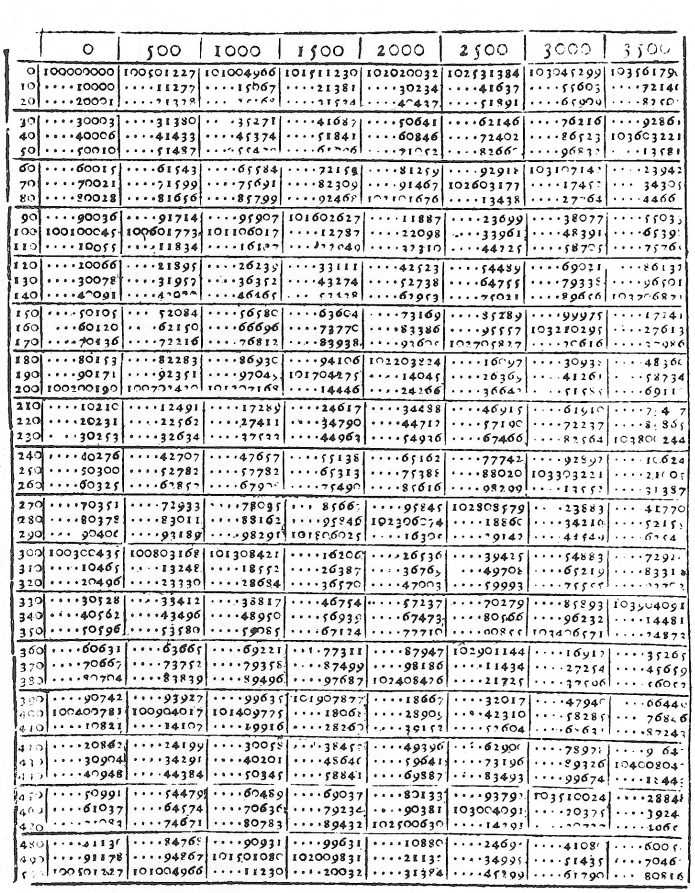


Abbildung 16: *Eine Seite der Progreß Tabulen*

Abbildung 17: *Bürgis Progreß Tabulen*

In Abbildung 16 ist eine Seite aus BÜRGIs *Progreß Tabulen* zu sehen. Die roten Zahlen stehen in der Kopfzeile und - zur feineren Unterteilung - in der ersten Spalte. Alle weiteren Werte sind schwarze Zahlen, so dass man eigentlich von einer Antilogarithmentafel sprechen müsste. Wenn wir den Logarithmus (d.h. die rote Zahl) 4000 suchen, dann schauen wir in der Spalte 3500 und in der Zeile 500, denn 4000=3500+500. Dort finden wir den Eintrag ....80816. Die Punkte ersetzt man durch die Ziffern 1040, die man etwas höher als ersten vollständigen Eintrag in der Spalte 3500 findet. Damit haben wir aus der Tafel abgelesen:

$$\text{BürgiLog}\,1.04080816 = 4000\,.$$

Woher stammt das Dezimalkomma? Bei GOLDSTINE [6] und ebenso bei TROPFKE [10] findet man die Annahme, dass BÜRGIs Tafel mit $\text{BürgiLog}\,10^8 = 1$ beginnt, vergl. Abbildung 15. Diese Annahme stammt aus der Verwendung eines Kommasymbols bei BÜRGI; er schreibt für 230270.022

$$2\ 3\ 0\ 2\ 7\ 0\ 0\ 2\ \overset{\text{o}}{2}$$

was man bereits auf dem Titelblatt in Abbildung 16 erkennen kann. Da der erste Eintrag in der Tafel die Zahl 100000000 ist, liegt die Annahme also nahe. Allerdings unterscheidet nach LUTSTORF [11] BÜRGI zwei Fälle von Zahldarstellungen und das diakritische Zeichen für das Komma wird nur für Zahlen größer als 10 verwendet. Ganze Zahlen zwischen 0 und 10 werden ohne Kommazeichen geschrieben. Daher darf man den ersten Eintrag in der Tafel aus Abbildung 15 als $\text{BürgiLog}\,1 = 0$ lesen.

Da der BÜRGIsche Logarithmus wegen (29) zudem eine monoton wachsende Funktion ist, sieht schon alles nach einem im Vergleich zu NAPIER sehr modernen Logarithmusbegriff aus.

Sucht man in den BÜRGIschen Tabellen diejenige Zahl, für die der Logarithmus 1 ist, dann findet man 2.71814593 und das ist natürlich die Basis des BÜRGIschen Logarithmus. Hätte BÜRGI etwas genauer gerechnet und an Stelle von $1+10^{-4}$ besser $1+10^{-6}$ verwendet, wäre die Basis 2.71828047 gewesen, was bereits in den ersten fünf Nachkommastellen mit der Eulerschen Zahl e übereinstimmt. Aus (30) sieht man sofort, dass tatsächlich die Folge

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

hinter der Basis steckt. BÜRGI hat also Logarithmen zur Basis e entwickelt.

Damit ist BÜRGI der Entdecker des natürlichen Logarithmus. Trotzdem ist er der eigentliche Verlierer um die Entdeckung der Logarithmen. Zum Einen war er selbst wohl etwas zurückhaltend; nicht einmal KEPLER gegenüber hat er seine Logarithmen erwähnt. Zum Anderen war er aber „nur“ ein Handwerker und seine *Progreß Tabulen* wurden wohl deshalb nicht gelesen. Hätte KEPLER zuerst die BÜRGIschen Logarithmen gekannt, wäre die Geschichte vielleicht anders verlaufen.

5. Epilog

Die Bedeutung der Logarithmen in den vergangenen Jahrhunderten von ihrer Entdeckung zu Beginn des 17ten Jahrhunderts bis zum Beginn des Siegeszuges der Taschenrechner und Computer ist heute kaum noch zu erfassen. Neben einem Einblick in ein historisch faszinierendes Gebiet bietet die Beschäftigung mit den Logarithmen aber auch viel gehaltvolle Mathematik, denn man vertieft nicht nur das Rechnen mit Exponenialfunktionen, sondern erlebt auch die Geburtsstunde der Differenzenrechnung, die leider bis heute in der Schule nur stiefmütterlich behandelt wird. Geht man der BRIGGSschen Idee nach, dann stößt man auf das Binomialtheorem und von dort aus eröffnet sich dem Neugierigen ein Zugang zur Analysis. Auch 400 Jahre nach den ersten Logarithmen bleibt die Beschäftigung mit den Logarithmen eines der Kraftzentren unserer modernen Mathematik und verdient allein deshalb Aufmerksamkeit.

Literatur

TOEPLITZ, O. [1]: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Erster Band (mehr nicht erschienen). Springer Verlag 1949.

HOFMANN, J.E. [2]: Michael Stifel (1487?-1567) Leben, Wirken und Bedeutung für die Mathematik seiner Zeit. Sudhoffs Archiv, Beiheft 9, Franz Steiner Verlag GmbH, 1968.

EDWARDS, C.H. [3]: The Historical Development of the Calculus. Springer Verlag 1979.

PHILLIPS, G.M. [4]: Two Millennia of Mathematics: From Archimedes to Gauss. Springer Verlag 2000.

NAPIER, J. [5]: Rabdology. MIT Press and Tomash Publishers, 1990. (Englische Übersetzung der *Rabdologiae* von 1617).

GOLDSTINE, H.H. [6]: A History of Numerical Analysis from the 16th Through the 19th Century. Springer Verlag 1977.

SONAR, TH. [7]: Der fromme Tafelmacher: Die frühen Arbeiten des Henry Briggs. Logos Verlag 2002.

AUBREY, J. [8]: Lebens-Entwürfe. Eichborn Verlag1994.

BRIGGS, H. [9]: Arithmetica Logarithmica. Georg Olms Verlag 1976.

TROPFKE, J.[10] Geschichte der Elementarmathematik, Band I, 4te Auflage. W. De Gruyter 1980.

LUTSTORF, H.; WALTER, M. [11] Jost Bürgis „Progeß Tabulen“. Schriftenreihe der ETHZ-Bibliothek Nr.28, Bibliothek der ETH, 1992.

Abbildungsnachweis

Abb. 1, 2, 7, 8 und 10: selbstgemacht
Abb. 3: (Skalen aus der Arithmetica Integra) aus Hairer/Wanner-Analysis by ist history (Springer)
Abb. 4: aus Wikipedia
Abb. 5, 6: aus John Napiers Buch zu den Rechenstäben (Übersetzung ind Englische ca. von 1980)
Abb. 9: aus dem Internet (Early English Books On Line)
Abb. 11,12: aus dem Nachdruck der Arithmetica Logarithmica, Olms Verlag
Abb. 13: aus (m)einer alten Logarithmentafel (50er Jahre)
Abb. 15: aus Wikipedia
Abb. 16,17: aus Goldstine – A History of Numerical Analysis from the 16th to the 19th century (Springer 1977)

Besonderer Dank gilt Herrn Jan Meyer (Rosenheim) für die Freigabe des Fotos von Abb. 14.

PROF. DR. THOMAS SONAR
Lehrerfortbildungszentrum „Mathe-Lok“
c/o Computational Mathematics
TU Braunschweig
Pockelsstrasse 14
D-38112 Braunschweig t.sonar@tu-bs.de