Pál Maus
Éva Vásárhelyi

Problemlösen mit Hilfe der Analogiebildung im Alltag und in der Mathematik

Zusammenfassung: In welchem Ausmaß Problemlösestrategien in der Mathematik auf Lebensweltprobleme anwendbar sind und auch tatsächlich angewendet werden, hängt von dem verwendeten Modell der Analogiebildung ab. Dieses muss dem menschlichen Wahrnehmen und Denken entsprechen, also Identifizierungsmöglichkeiten über Oberflächenmerkmale (Objekteigenschaften, Personbezüge, etc.) ermöglichen. Im Artikel zeigen wir Beispiele, wo dieses möglich zu sein scheint.

1. Hintergrundtheorien der Methode „Suche nach einem mathematischen Modell von Alltagsproblemen durch Analogiebildung“

Nach DUNCKER [1] entsteht ein *Problem* z.B. dann, wenn ein Lebewesen ein Ziel hat und nicht „weiß“, wie es dieses Ziel erreichen soll. Der *Problemlöseprozess* enthält Elemente wie das Charakterisieren des Ausgangszustandes bzw. des Zielzustandes und das Suchen, (Er-)Finden, Entwickeln, Durchführen von Operationen, mit denen die Differenz zwischen diesen beiden Zuständen überwunden wird. Bei Alltagsproblemen werden situationsbedingte Handlungen und Überlegungen, bei mathematischen Problemen werden Begriffe, Gesetzmäßigkeiten und mathematische Tätigkeiten eingesetzt. Der Problemcharakter einer Situation kann nur im speziellen Kontext identifiziert werden. Zur Lösung sind gewisse Grundbegriffe, Relationen und Routineverfahren (extensive Wissensmerkmale) und eine entsprechende Umstrukturierung des Wissens (intensive Wissensmerkmale) notwendig.

Analogiebildung bedeutet eine (zunächst relativ unbekannte) Targetstruktur (in der Zieldomäne) zu erkennen. Dies geschieht durch eine einfache oder zusammengesetzte, kombinierte Abbildung einer Basisdomäne auf die Zieldomäne. Durch diesen Prozess der Analogiebildung wird auch diese Basisdomäne verändert.
Analogiebildungsprozesse finden ihre theoretische Grundlegung in:

- neurophysiologischen Prozessen (Was können unsere Gehirnstrukturen und -funktionen leisten?);
- motorischen, ikonischen und/oder sprachlichen (symbolisch-repräsentativen) (BRUNER [1]);
- Zusammensetzungen solcher Abbildungen auf gleichem Niveau: Bekannte Elemente werden zu (neuen) Strukturen zusammengefügt (*extensive Systemerweiterung* – Assimilation, PIAGET [1]).
- *Intensive Systemerweiterung* (Akkomodation, PIAGET [1])) durch (teilweises) Auflösen von (bekannten) Strukturen, so dass sich (neue) Strukturen (z.B. durch Hinzunahme neuer Funktionen) ergeben.
- Durch *Gegensatzbildung* zu bekannten Strukturen können neue Strukturen gebildet bzw. erfasst werden.
- Es werden neue Abbildungsprozesse eingeleitet, die im Zielbereich (aber auch in der Basisdomäne) neue Elemente/Strukturen (Elemente lassen sich als Strukturen, Strukturen als Elemente beschreiben – eine Frage der dimensionalen Auflösung) erfassen lassen (HERBER [1]).

Mit der (Neu-)Strukturierung des Targetbereichs (der Zieldomäne) wird – durch rückkoppelnde Interaktion – auch der Basisbereich (Source, Base) restrukturiert (man erfährt damit Neues über ihn). Eine Reinterpretation des TOTE-Modells (Test-Operate-Test-Exit, MILLER et al. [1]) wäre dafür als Abbildungsprozess denkbar: In der Operate-Phase wird die Basisdomäne so lange verändert, bis in der Testphase dem Zielbereich problembezogen Genüge getan wird (bis aus der Vorgestalt der Lösung in Basis- und Zieldomäne eine gute Gestalt wird, ausreichende Prägnanz erreicht ist (HERBER [2], HERBER & VÁSÁRHELYI [1]).

Im ungarischen Mathematikunterricht spielt das Problemlösen traditionell eine besondere Rolle (PÓLYA [1]), was im Nationalen Grundlehrplan zum Ausdruck kommt: „Die Mathematik erzieht zu flexiblem, diszipliniertem Denken, zu entdeckendem Lernen und Suchen einfallsreicher Lösungen. So muss der Anforderungskanon der Mathematik neben einer Aufzählung des nötigen mathematischen Wissens, Könnens und der Fähigkeiten sowie oft benutzter Verfahren auch die Erfordernisse des Denkenlernens enthalten. Diesem Zweck dienen die Kapitel *Fundieren der Denkmethode* und *Denkmethode*. In den Denkprozessen spielen Heuristik, konstruktives Denken, Benutzung von Analogien eine Rolle. Die SchülerInnen sollen die Anwendbarkeit der Mathematik in der Praxis

und in Natur- und Geisteswissenschaften erfahren. Die Geschichte der Mathematik liefert Erfahrungen und Interessantes, was zur Motivation der SchülerInnen beitragen kann.
Das Interpretieren und Lösen von Textaufgaben, das Untersuchen einfacher, kurzer mathematischer Texte kann zur Entwicklung eigener Lernmethoden beitragen. Das Lernen von hinreichend verstandenen Begriffen und grundlegenden mathematischen Kenntnissen entwickelt das Gedächtnis, das Interesse und verstärkt die Ausdauer bei der Arbeit und beim Lernen.
Das Erwerben von mathematischen Erkenntnismethoden liefert den Anlass für das Entdecken elementarer Beziehungen der Mathematik zur außermathematischen Realität.
Der Mathematikunterricht darf nicht außer Acht lassen, dass

- manche Gegenstände relativ früh mathematische Kenntnisse anzuwenden gestatten;
- die Abstraktionsfähigkeit gleichaltriger SchülerInnen sehr unterschiedlich ist;
- das Reifenlassen mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und das Entwickeln der Denkmethode selbst den Spiral-Aufbau unterstützen.“

Der Grundlehrplan untersetzt die allgemeine Zielstellung des Mathematikunterrichts für jede Stufe in vier Gruppen:

1. Anwendung der gelernten mathematischen Begriffe,
2. Erfahrungen im Lösen mathematischer Probleme,
3. Anwendung von Erkenntnismethoden und Denkoperationen,
4. Richtige Lerngewohnheiten.

Bei der Interpretation des Lehrplans wird meistens die Problemlösefähigkeit innerhalb der Mathematik (mit eventuellen Anwendungen) betont. In diesem Artikel möchten wir eine andere Variante in den Vordergrund rücken: Durch Erfahrungen beim Lösen mehrerer Alltagsprobleme können Problemlösestrategien und mathematische Modelle mit Hilfe der Analogiebildung elaboriert werden. Dieses Vorgehen lässt sich didaktisch und lernpsychologisch verschiedenartig begründen (vgl. BRUNER [1], HERBER & VÁSÁRHELYI [1], MAUS [1]) und macht gewisse mathematische Inhalte für SchülerInnen mit bescheidenem Interesse an Mathematik zugänglich.
Die Beispiele (Problem 1 – Problem 26), die wir vorstellen, stammen aus der ungarischen Tradition der Begabtenförderung und zeigen, dass der mathematische Inhalt und Anspruch durch lebensweltbezogene Problemstellungen gar nicht eingeschränkt werden muss (vgl. HAJÓS, NEUKOMM & SURÁNYI [1]:).

2. Analogie zwischen Problemlösen im Alltag und in der Mathematik – Reisebüro versus Teile der Ebene

Sowohl die Lösungsprozesse bei einem Alltagsproblem als auch die Lösungsprozesse bei einem mathematischen Problem lassen gewisse (gleichartige) Grundphasen erkennen: z.B. Problembegegnung, Suche nach einer Problemlösestrategie, strategiebezogene Untersuchung des Problems, Sammeln und Zusammenfügen der zielgerichteten Teiltätigkeiten, Rückblick – Analyse der Lösung, …
Am Beispiel eines Reisebüro- und eines Geometrieproblems behandeln wir diese Phasen und eine mögliche Wechselwirkung der beiden Lösungsprozesse.

Problem 1: *Ein Reisebüro disponiert über n Reiseziele so, dass jeder Ort von jedem anderen Ort aus direkt erreichbar ist. Wie viele unmittelbare Verbindungen sind dazu nötig?*
Lösungsschritte:
- *Wahl der Strategie („Finding a pattern”):* Entweder betrachten wir eine kleine Anzahl von Reisezielen und nehmen immer wieder einen Ort dazu, oder wir untersuchen den vollständigen Graphen mit n Knoten.
- *Strategiebezogene Untersuchung des Problems:* Die Situation mit einer kleinen Anzahl von Orten ist überschaubar. Die Anzahl ergibt sich automatisch durch die Ergänzung um einen Ort – aus dem neuen Ort führen neue Verbindungen zu jedem alten Ort (die untereinander bereits verbunden sind).
- *Zusammensetzung der Lösungsschritte:* $0 + 1 + 2 + \ldots + n-1$.
- *Analyse der Lösung:* Wir kontrollieren das durch Ergänzung erhaltene Ergebnis für eine konkrete Anzahl (z.B. für n=10) und erhalten die zweite Lösung für den konkreten Fall. Die Ergänzung ist einfacher als die lokale und globale Untersuchung des Graphen (in jedem Knoten treffen sich (n-1) Kanten und jede Kante wird doppelt aufgezählt). Die zweite Methode liefert unmittelbar die Formel $\frac{n(n-1)}{2}$.

Problem 2: *In wie viele Teilgebiete kann die Ebene durch n Geraden zerlegt werden?*

Lösungsschritte:
- *Wahl der Strategie:* Die erfolgreiche Strategie kann hier ausprobiert werden. Wie erhöhen die Anzahl der Geraden um 1 und beobachten die Änderung der Anzahl der Bereiche.
- *Strategiebezogene Untersuchung des Problems:* Die Anzahl der Bereiche ist von der Lage der Geraden abhängig. Wir vermuten, dass der ideale Fall entsteht, wenn sich die Geraden einander paarweise in unterschiedlichen Punkten schneiden.
- *Suche nach Regelmäßigkeiten:* Die erste Gerade halbiert die Ebene. Die zweite Gerade kann die zwei Halbebenen teilen. Die n-te Gerade zerlegt n Bereiche von den vorherigen Bereichen in zwei Teile. (Im Idealfall schneidet die n-te Gerade alle (n-1)- alten Geraden und wird dadurch in n Stücke geteilt. Jeder Teil (2 Halbgeraden und (n-2) Strecken) zerlegen je einen von den vorherigen Bereichen in zwei Teile.)
- *Zusammensetzung der Lösungsschritte:* 2 + 2 + 3 + … + n = 1 + (1 + 2 + 3 + … + n)
- *Analyse der Lösung:* Die intuitive Übertragung der Ergänzungsmethode ist einfach und führt problemlos zur Lösung. Der Vergleich der fertigen Konfigurationen kann (wegen des notwendigen Standpunktwechsels Ort – Gerade; Verbindung – Bereich) allerdings verwirrend wirken.

3. Suche nach mathematischen Modellen zu Alltagsproblemen durch Analogiebildung

3.1 Wassergießen und die diophantischen Gleichungen – Problemlösen durch konkrete Tätigkeit

Problem 3a: *Bei einem Ausflug wollen wir aus dem Bach für eine Suppe genau 5 Liter Wasser holen. Wir haben aber nur einen 4-Liter-Eimer und einen 7-Liter-Eimer ohne jegliche Markierungen. Wie können wir das Problem lösen?*
Lösungsidee: Zuerst füllen wir mit Hilfe des 4-Liter-Eimers den 7-Liter-Eimer voll. Dazu muss man den 4-Liter-Eimer zweimal auffüllen und umschütten. Im 4-Liter-Eimer bleibt dabei ein Rest von 1 Liter übrig. Danach leeren wir den 7-Liter-Eimer aus und schütten den Rest aus dem 4-Liter Eimer hinein. Schließlich füllen wir den 4-Liter-Eimer nochmals voll und schütten diese Menge Wasser in den 7-Liter Eimer. Wird der Vorgang durch eine Gleichung beschrieben, gilt 4 + 4 – 7 + 4 = 5.

Problem 3b: *Welche Litermengen können mit Hilfe eines 4-Liter- und eines 7-Liter-Eimers abgemessen werden?*
Lösungsidee: Die Übertragung der Lösungsidee von 3a lässt die „Arithmetik des Umfüllens“ folgendermaßen zusammenfassen:

	Im 4-Liter-Eimer	Im 7-Liter-Eimer
1 Liter	4 + 4 – 7	
2 Liter	4 + 4 – 7 + 4 + 4 –7	
3 Liter		7 – 4
4 Liter	4	
5 Liter		4 + 4 – 7 + 4
6 Liter		4 + 4 – 7 + 4 –7 + 4 + 4
7 Liter		7

Problem 3c: *Welche Litermengen können mit Hilfe eines 3-Liter- und eines 9-Liter-Eimers abgemessen werden?*
Lösungsidee: Betrachtet man die Fragestellung aus der Sicht der Analogie 4, 7 zu 3, 9, fällt auf, dass die Tabelle die Summen bzw. Unterschiede von 4 und 7 enthält. Durch die Übertragung dieser Entdeckung vermuten wir, dass sich 3 Liter, 6 Liter und 9 Liter abmessen lassen.

Problem 3d: *Wie viele Liter Wasser können mit Hilfe eines a-Liter- und eines b-Liter-Eimers abgemessen werden?*
Lösungsidee: Durch die Analogie vermuten wir, dass sich die Summen und Differenzen (also die Vielfachen des größten gemeinsamen Teilers) abmessen lassen.

Problem 4: *Wie viele Gäste können mit einem 4-sitzigen und mit einem 7-sitzigen Fahrzeug transportiert werden, wenn die Fahrzeuge immer voll sein müssen?*
Lösungsidee: Durch systematisches Probieren erhalten wir die folgenden Werte

4, 4 + 4 = 8, 4 + 4 + 4 = 12, 4 + 4 + 4 + 4 = 16, …

$7,\ 7 + 7 = 14,\ 7 + 7 + 7 = 21, \dots$
$4 + 7 = 11,\ 4 + 2\cdot 7 = 18,\ 4 + 3\cdot 7 = 25, \dots$
$2\cdot 4 + 7 = 15,\ 2\cdot 4 + 2\cdot 7 = 22,\ 2\cdot 4 + 3\cdot 7 = 29, \dots$

und daraus können wir die Struktur der Lösung 4m + 7n herauslesen.

Problem 5: *Gesucht werden die ganzzahligen Lösungen der Gleichung 4x + 7y = 5.*
Lösungsidee: Eine Lösung haben wir schon: „5 Liter sollen mit Hilfe eines 4-Liter- und eines 7-Liter-Eimers in der Form 4 + 4 – 7 + 4 abgemessen werden“, also x = 3 und y = –1. Auf der Suche nach anderen Lösungen können wir das Verfahren z.B. folgendermaßen fortsetzen (der vorherige Schritt steht in der Klammer):

5 Liter	4 + 4 + 4 – 7
2 Liter	(4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7
3 Liter	((4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + 4 + 4 – 7
0 Liter	(((4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + 4 + 4 – 7) + 4 – 7
0 + 5 Liter	((((4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + (4 + 4 – 7 + 4)
…	
k·0 + 5 Liter	4(3 + 7k) + 7(–1 – 4k)

Wir haben unendlich viele Lösungen der Form x = 3 + 7k und y = –1 – 4k gefunden, wobei k eine positive ganze Zahl ist. Die Lösung des Problems 3.a ist die Realisierung des Falles k=0. Bei negativem k lässt sich die Lösung durch Einsetzen kontrollieren.
Wir haben also die folgenden Lösungen gefunden: x = 3 + 7k und y = –1 – 4k, wobei k eine ganze Zahl ist.
Um zu zeigen, dass jede Lösung aufgezählt wurde, setzen wir eine beliebige Lösung x*, y* und eine gefundene Lösung x = 3, y = –1 (bei k = 0) in die Gleichung 4x + 7y – 5 = 0 ein. Durch Gleichsetzen und Umformen erhalten wir 4(x* – 3) = 7(–1 – y*).

Problem 6: *Wann ist die diophantische Gleichung ax + by = c lösbar?*
Lösungsidee: Durch die Analogie zu 3d ergibt sich die Vermutung, dass die Gleichung genau dann lösbar ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b ein Teiler von c ist.

Problem 7: *Ein 8-Liter-Eimer ist vollständig mit Wasser gefüllt. Wie kann man die Wassermenge mit Hilfe eines 3-Liter-Eimers und eines 5-Liter-Eimers halbieren?*
Lösungsidee: Das Problem kann auch so aufgefasst werden, dass die Menge von 4 Liter Wasser mit Hilfe eines 3-Liter-Eimers und eines 5-Liter-Eimers bestimmt werden muss.

Bemerkungen:
Das Umfüllen mit konkreten Angaben ist einfach durchführbar und verspricht Lösungserfolg. Auch Teillösungen sind möglich.
Das Transportproblem verlangt eine systematische Untersuchung, man muss aber nur wenige Fälle wirklich durchdenken.
Analogieüberlegungen führen einerseits zu einem mathematischen Modell (diophantische Gleichungen), andererseits ermöglichen sie eine exemplarische Untersuchung der Modell-Realität-Beziehung (z.B. negative Lösungen).
Auf der Ebene der Sachsituation und der Tätigkeit lässt sich die *Oberflächenanalogie* zwischen den Problemen 3a-3d und 7 leicht entdecken. Doch ist die *tiefere, inhaltliche Analogie* zwischen 3a-3d und 4 viel wichtiger, um die jeweiligen konkreten Lösungswege und das gemeinsame mathematische Modell zu finden.

3.2 Vom Rundwettkampf zum gerichteten Graphen – situationsbezogene (verallgemeinerbare) Lösungen

In Ungarn findet seit 1894 für frisch Maturierte ein Mathematikwettbewerb statt, der so genannte EÖTVÖS-, heute KÜRSCHAK-Wettbewerb. Bei diesem Wettbewerb werden jeweils 3 Probleme formuliert. Die Teilnehmer haben 4 Stunden Arbeitszeit und dürfen Hilfsmittel verwenden. Mehrere der folgenden Probleme sind mit einem Wettbewerbsproblem analog, die Jahreszahl und die Nummer der Aufgabe geben wir in Klammern an (vgl. HAJÓS, NEUKOMM & SURÁNYI J. [1]:).

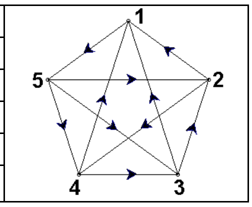
Problem 8 (1954/3**):** *Bei einem „Rundwettkampf“ hat jeder gegen jeden einmal gespielt. Kein Spiel ist unentschieden ausgegangen. Gibt es einen Teilnehmer, der jeden anderen Teilnehmer nennen kann, indem er aufzählt, wen er besiegt hat und wen die von ihm Besiegten besiegt haben.*
Lösungsidee I (Alltagsargument): Alle Spieler sitzen in einem Raum. Ein Spieler verlässt den Raum und alle Spieler, die er besiegt hat (eventuell niemand), begleiten ihn. Falls noch Spieler im Raum geblieben sind, ver-

lässt jemand von denen den Raum und mit ihm alle, die er besiegt hat. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis der Letzte den Raum verlässt. Dieser besiegte alle, die mit ihm hinausgegangen sind und diejenigen, die schon früher weggegangen sind (denn sonst hätte er nicht im Raum bleiben dürfen). Der letzte Verbliebende kann damit alle anderen Teilnehmer nennen, indem er die von ihm und die von den Besiegten besiegten Spieler aufzählt.

Lösungsidee II (indirektes Argument): Wir wählen den Spieler A so aus, dass niemand mehr Siege hat als er. Wenn A die Vorschriften der Aufgabe nicht erfüllen würde, dann gäbe es einen Spieler B, den weder A noch die von A besiegten Spieler besiegt haben. B hätte also mindestens einen Sieg mehr als A, was unmöglich ist, denn niemand hat mehr Siege als A. A kann alle anderen Teilnehmer nennen, indem er die von ihm und die von den Besiegten besiegten Spieler aufzählt.

Analyse der Lösungswege:
a) Der Sieger oder einer von den Siegern erfüllen die Vorschriften der Aufgabe.
b) Umgekehrt kann man nicht behaupten, dass nur die Sieger diese Eigenschaft besitzen. Es kann sogar sein, dass der Verlierer oder jeder Spieler geeignet ist (vgl. Tabelle und Graph).

	1	2	3	4	5
1		+	+	+	–
2	–		+	–	+
3	–	–		+	+
4	–	+	–		+
5	+	–	–	–	



c) Das Problem lässt sich mit Hilfe von Graphen formulieren. Die Spieler werden durch Eckpunkte und die Ergebnisse durch gerichtete Kanten (Pfeile) dargestellt. Das Ergebnis eines Rundwettkampfes kann als vollständiger gerichteter Graph dargestellt werden. Das Problem 8 kann bezüglich dieser Darstellung wie folgt formuliert werden:

Problem 9: *Es ist zu beweisen, dass in einem endlichen, gerichteten, vollständigen Graphen immer ein Eckpunkt existiert, von dem aus man jeden Eckpunkt (der Richtung entsprechend) über einen Weg der maximalen Länge 2 erreichen kann.*

Bemerkung: Die Aussage gilt nicht für unendliche Graphen. Seien nämlich z.B. P_1, P_2, P_3, . . . die Eckpunkte eines unendlichen Graphen und wir richten jede Kante in die Richtung des Eckpunktes mit kleinerem Index, kann man nur endlich viele Punkte im Sinne der Richtung erreichen.

3.3 Arithmetik – Bibliothek und Graphen

Problem 10 (1952/2): *Wir wählen (n+2) Zahlen aus den ganzen Zahlen von 1 bis 3n aus. Es ist zu beweisen, dass es zwei Zahlen unter den ausgewählten Zahlen gibt, deren Differenz zwischen n und 2n liegt.*

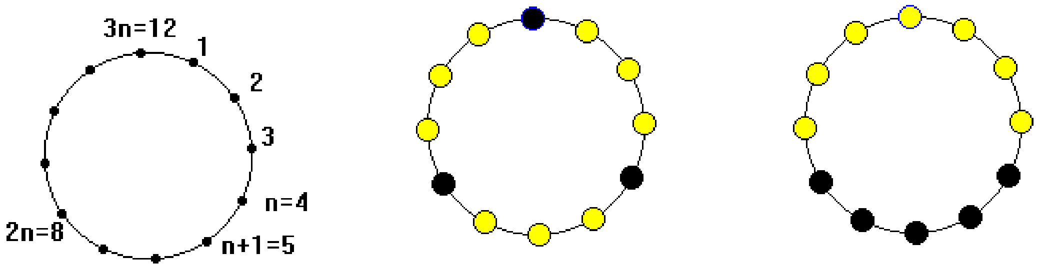
Lösungsidee I: Falls die Zahl 3n nicht ausgewählt wurde, vergrößern wir jede Zahl gleichmäßig so, dass die größte ausgewählte Zahl 3n wird. Dabei ändern sich die Differenzen nicht, folglich können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass die Zahl 3n ausgewählt wurde.

a) Kommt eine der Zahlen n+1, n+2, . . ., 2n-1 unter den ausgewählten Zahlen vor, so ist die Differenz zwischen dieser und 3n größer als n und kleiner als 2n.
b) Falls keine der Zahlen n+1, n+2, . . ., 2n-1 ausgewählt wurde, ordnen wir die zur Verfügung stehenden Zahlen in n Paare, bei denen die Distanz 2n–1 ist: 1, 2n; 2, 2n+1; 3, 2n+2; . . . ; n, 3n–1. Die Zahl 3n wurde bereits ausgewählt, die weiteren (n+1) Zahlen können wir nur so auswählen, indem wir mindestens einmal beide Glieder eines Paares nehmen. Für n > 1 liegt die Distanz 2n-1 zwischen n und 2n.

Lösungsidee II: Siehe die Verallgemeinerung der Lösung von Problem 12

Lösungsidee III: Wir schreiben die 3n natürlichen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge, äquidistant auf einer Kreislinie angeordnet, auf. Das Ziffernblatt einer Uhr veranschaulicht den Fall n=4.

Zwei Zahlen genügen der Behauptung, wenn diese durch einen Kreisbogen verbunden sind, dessen Länge zwischen einem und zwei Dritteln des Kreisumfanges (entsprechend der aufsteigenden Richtung) verbunden sind. Der ergänzende Bogen muss dann entsprechend zwischen zwei Dritteln und einem Drittel des Umfangs lang sein. Betrachten wir die zwei sich ergänzenden Bögen gleichzeitig, so müssen ihre Längen beide größer als ein Drittel sein, um der Behauptung zu genügen.



Damit haben wir das Problem auf das (im Folgenden beschriebene) Problem 11 zurückgeführt:

Problem 11: *Auf einer Kreislinie liegen 3n Punkte äquidistant. Wir wählen n+2 Punkte aus. Es ist zu beweisen, dass es unter den ausgewählten Punkten ein Paar gibt, das die Kreislinie in zwei Bögen teilt, deren Längen größer als ein Drittel des Kreisumfanges sind.*
Lösungsidee: Wir untersuchen, wie man einige Punkte auswählen kann ohne dabei einen Bogen der Länge größer als ein Drittel zu erhalten. Diese Voraussetzung impliziert, dass der Partnerpunkt zu einem ausgewählten Punkt nicht in dem gegenüberliegenden Kreisdrittel liegen darf.
Wir nennen einen Bogen „frei“, wenn er von ausgewählten Punkten begrenzt ist und keinen weiteren Punkt enthält. Im Sinne unserer Voraussetzung muss ein freier Bogen existieren, der mindestens ein Drittel lang ist. Wegen dieser Voraussetzung darf auch kein freier Bogen existieren, dessen Länge zwischen einem Drittel und zwei Dritteln liegt. Folglich ist die Länge des maximalen freien Bogens bei einer erlaubten Auswahl entweder ein Drittel oder mindestens zwei Drittel.
a) Wenn der größte freie Kreisbogen ein Drittelkreis ist, kann nur der Mittelpunkt des ergänzenden Zweidrittelbogens (wegen der Endpunkte) ausgewählt werden. Dieser Punkt muss auch unter den ausgewählten Punkten vorkommen, sonst wäre der Ausgangsbogen nicht der längste freie Bogen (vgl. Abb.).
b) Wenn aber der größte freie Kreisbogen zwei Drittel lang (oder noch größer) ist, liegen die ausgewählten Punkte entlang eines Bogens, dessen Länge (einschließlich der Endpunkte) höchstens ein Drittel ist. Nachdem auf einem Drittelbogen (mit den Endpunkten) n+1 Punkte liegen, können einige (sogar alle) aus diesen n+1 Punkten ausgewählt werden (vgl. Abb.). Da n+2 größer als (n+1) und bei n>1 auch als 3 ist, können nicht n+2 Punkte ausgewählt werden, ohne unserer Voraussetzung zu widersprechen.

Für n = 60 betrachten wir nun die folgende „lustige“ Formulierung von Problem 10.
Problem 12: *Eine Bibliothek wird mittags um 12 Uhr geöffnet und um 3 Uhr nachmittags geschlossen. Eintreten darf man nur einzeln und auf die Minute genau, das erste Mal um 12 Uhr und das letzte Mal um 2 Uhr 59 Minuten. Jeder Bibliotheksbesucher schläft genau nach einer Stunde seines Eintretens ein und schläft genau eine Stunde, wenn das Schließen der Bibliothek es nicht verhindert. Es ist verboten jemanden im Schlaf durch Eintreten zu stören. Es ist zu beweisen, dass 62 oder mehrere Personen wegen dieser merkwürdigen Regelung die Bibliothek an einem Tag nicht besuchen können.*
Lösungsidee:
Für die obere Abschätzung der Besucherzahl ist es günstig, wenn wir davon ausgehen, dass der Portier der Bibliothek beim Eintreten des ersten Besuchers die Uhr auf 12 Uhr zurückstellt. Damit schränken wir uns auf den Fall ein, dass der erste Besucher um 12 Uhr kommt. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:
a) Um 1 Uhr und um 2 Uhr kommt je ein Besucher. Wenn noch jemand zwischen 12 und 1 käme, würde er um 2 Uhr noch schlafen und das würde Eintrittverbot für 2 Uhr bedeuten. Der 12 Uhr-Besucher schläft zwischen 1 und 2, der 1 Uhr-Besucher zwischen 2 und 3. Deswegen darf niemand zusätzlich eintreten. In diesem Fall können keine weiteren Besucher in die Bibliothek.
b) Um 1 kommt ein Besucher und um 2 Uhr kommt niemand. Nach 1 darf niemand eintreten, denn der 12 Uhr-Besucher schläft zwischen 1 und 2, und der 1 Uhr-Besucher zwischen 2 und 3. Alle möglichen Besucher müssen ab 12 Uhr bis 1 Uhr eintreten, das bedeutet höchstens 61 Besucher.
c) Um 1 Uhr kommt kein Besucher. Wir wählen den Besucher aus, der als letzter vor 1 Uhr gekommen ist (eventuell ist es der 12 Uhr-Besucher). Niemand kommt zwei Stunden lang nach dem ausgewählten Besucher. Es wäre nämlich nur vor dem Schlafen möglich bzw. nach ihm bis 1 Uhr und um 1 Uhr ist niemand gekommen. Von 1 Uhr an bis zum Zeitpunkt des Einschlafens des ausgewählten Besuchers darf niemand kommen, denn der erste Besucher schläft (wenn nicht der erste Besucher ausgewählt wurde). In diesem 2-stündigen Intervall bleiben 119 Eintrittsmöglichkeiten ungenutzt. Von den 180 Möglichkeiten können also höchstens 61 benützt werden.
Zusammenfassend können wir feststellen, dass höchstens 61 Besucher an einem Tag die Bibliothek besuchen können.

Verallgemeinerung: Unsere Argumente bleiben gültig, wenn wir die Stunde statt 60 Minuten in n Teile zerlegen. Statt 61 Besucher haben wir dann n+1, und diese Zahl darf nicht kleiner als 3 sein. Also muss n > 1 gelten.

Die Probleme 10 – 12 lassen sich in der Sprache der Graphen folgendermaßen formulieren:

Problem 13: *Es sei n eine gegebene natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Es gibt einen Graphen mit 3n Eckpunkten, in dem zwei von drei ausgewählten Eckpunkten bei jeder Auswahl verbunden sind und der keinen vollständigen Teilgraphen mit n+2 Eckpunkten enthält.*

Bemerkungen:

a) Einen solchen Graphen kann man wie folgt konstruieren. Wir wählen auf einer Kreislinie 3n Punkte aus und nummerieren diese von 1 bis 3n. Wir verbinden jeden Punkt mit den vorherigen und mit den nachfolgenden n Punkten. Zwei Punkte sind also nicht verbunden, wenn die Differenz ihrer Nummer zwischen n und 2n liegt. Die Behauptung ist, dass es bei jeder Auswahl von n+2 Eckpunkten ein Paar gibt, das nicht verbunden ist.
b) Unter drei ausgewählten Eckpunkten existieren immer zwei, die verbunden sind (bei der Anordnung $a > b > c$ und $c – a < 2n$ ist entweder $b – a$ oder $c – b$ kleiner als n).

3.4 Der Stundenplan und die bedrohungslose Türmeanordnung

Schüler, Lehrer und Schuldirektoren wünschen sich einen „richtigen" Stundenplan. Die i Fachräume unter k Klassen für 1, 2, 3, 4, 5 Tage (eventuell mit gegebenen Tages- bzw. Wochenstunden) zu verteilen ist so ein anspruchsvolles Problem, dass wir es allgemein nicht lösen können. Die Suche nach speziellen Lösungen führt zu einer Fülle von schönen analogen Aufgaben und interessanten Lösungen.

Problem 14: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, in den 8 Klassen einer Schule die 8 Fachräume (Physiksaal, Turnhalle, Sprachlabor, etc.) für eine Unterrichtsstunde zuzuordnen?*
Lösungsidee: Bei der Analogie Fachraum –Zeile, Klasse - Spalte eines 8×8-Schachbrettes ist die Zuweisung eines Fachraumes zu einer Klasse analog zum Aufstellen eines Turmes auf einem Schachbrett. Die vollständige Fachraumverteilung ist analog zu einer bedrohungslosen Anordnung von 8 Türmen auf einem Schachbrett.

Problem 15: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme so auf ein 8×8-Schachbrett zu setzen, dass kein Turm einen anderen schlagen kann.*
Lösungsidee I: Ein aufgestellter Turm besetzt eine Spalte und eine Zeile. Daraus erfahren wir, dass es beim Aufstellen auf ein 8×8-Schachbrett 8-mal so viele Möglichkeiten gibt wie auf einem 7×7-Schachbrett.
Bei einem 1×1-Schachbrett gibt es genau eine Möglichkeit. Daraus erhalten wir $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 8!$ Möglichkeiten.
Lösungsidee II: In jeder Spalte muss ein Turm aufgestellt werden. Das Aufstellen eines Turmes in der ersten Spalte ist auf 8 Arten, in der zweite Spalte auf 7 Arten, in der dritte Spalte auf 6 Arten usw. möglich. Jedes Mal, wenn wir irgendwo ein anderes Feld wählen, erhalten wir eine andere Anordnung. Es gibt also $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot56\cdot7\cdot8 = 8! = 40320$ Arten, die Türme bedrohungslos auf das Schachbrett zu stellen.

Problem 16: *Wir nummerieren die Felder eines 8×8-Schachbrettes von 1 bis 64 zeilenweise stetig und stellen 8 Türme auf das Schachbrett. Wir bestimmen dann zu einer Anordnung der Türme die Summe der Werte der Felder, auf denen die Türme stehen. Wie groß ist das Minimum der Summe bei den bedrohungslosen Anordnungen?*
Lösungsidee: Der Wert eines Feldes lässt sich in der Form 8a+b schreiben, wobei a zwischen 0 und 7, und b zwischen 1 und 8 ganze Zahlen darstellen. Eine bedrohungslose Anordnung kann dadurch charakterisiert werden, dass a und b jeden möglichen Wert genau einmal annehmen. Die Summe der 8 Werte ist somit bei jeder bedrohungslosen Anordnung gleich $8\cdot(0+1+2+3+4+5+6+7) + (1+2+3+4+5+6+7+8) = 8\cdot28 + 36 = 260$.

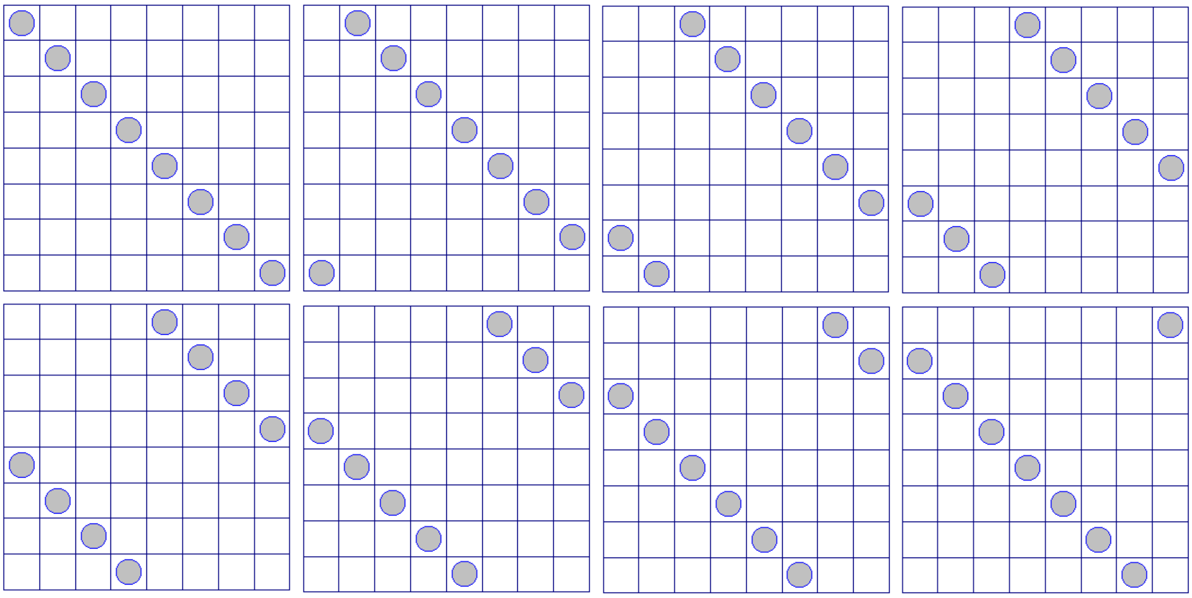
Problem 17: *Wie viele Möglichkeiten gibt es, die m Klassen einer Schule den n Fachräumen für eine Unterrichtsstunde zuzuordnen (n ist mindestens so groß wie m)?*
Lösungsidee: Vergleiche die Lösung des analogen Schachbrettproblems.

Problem 18: *Wie viele Türme kann man so auf ein n×m-Schachbrett ($n \geq m$) setzen, dass kein Turm einen anderen schlagen kann? Wie viele Möglichkeiten gibt es für solche Anordnungen?*
Lösungsidee: Die maximale Anzahl der Türme ist m. Die Anzahl der Möglichkeiten können wir nach der zweiten Lösungsidee des Problems 15 bestimmen: $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))$.

Problem 19: *Wie kann man in einer Schule die 8 Klassen in den 8 Fachräumen den ganzen Tag lang unterbringen, wenn jede Klasse 8 Stunden Unterricht (in verschiedenen Fächern) hat?*

Losungsidee: Wir betrachten die Fachräume als Zeilen, die Klassen als Spalten eines Schachbretts. Für jede Stunde am Tag betrachten wir ferner je ein Schachbrett. Das Anfertigen eines Tagesplans bedeutet, eine (in drei Richtungen) bedrohungslose Anordnung von 64 Türmen auf dem räumlichen Schachbrett zu finden (vgl. Problem 20). Die Anzahl der Anordnungen ist 108776032459082956800 (vgl. auch WELLS, M. B. [1] und http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html).

Problem 20: *Wie viele Türme kann man so auf ein 8×8×8-Schachbrett setzen, dass kein Turm einen anderen schlagen kann?*
Lösungsidee: Die maximale Anzahl der Türme ist 64, denn maximal darf ein Turm in jeder Säule stehen. Eine mögliche Anordnung erhalten wir, indem wir auf der ersten Ebene eine bedrohungslose Anordnung von 8 Türmen betrachten und bei jedem Übergang in die nächste Ebene jede Spalte zyklisch um eins nach rechts verschieben (vgl. Abb.).



Bemerkung: Betrachten wir eine beliebige bedrohungslose Anordnung von 64 Türmen auf einem dreidimensionalen Schachbrett. Wenn wir die Türme in der ersten Ebene durch 1, in der zweiten Ebene durch 2, … in der 8-ten Ebene durch 8 ersetzen und diese (durchsichtigen) Ebenen aufeinander legen, so erhalten wir ein 8×8-Quadrat, dessen Felder durch die Zahlen 1, 2, …, 8 so belegt sind, dass jede Zahl in jeder Zeile und in jeder Spalte jeweils genau einmal auftritt, also ein lateinisches Quadrat der Ordnung 8. Auch die Umkehrung gilt: Aus einem lateinischen Quadrat 8-ter Ordnung lassen sicht die Schichten des 8×8×8-Schachbrettes (abgesehen von der Reihenfolge eindeutig) rekonstruieren.
Durch diese Umformulierung des dreidimensionalen Schachbrett-Problems sind wir in einem aktuellen Forschungs- und Anwendungsfeld der Kombinatorik, Graphentheorie und der Informatik gelandet (Geheimschrift, elektronische Unterschrift, Permutationsmatrix, etc.).

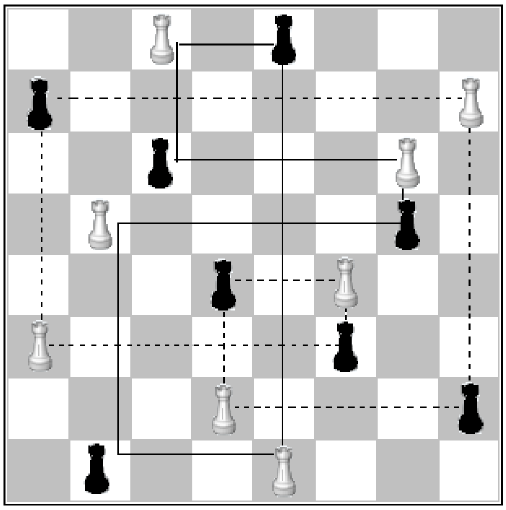
4. Weg in die höhere Mathematik – Modellbildung durch Analogie

Durch die folgenden Beispiele möchten wir demonstrieren, wie die Analogiebildung das Entstehen eines gemeinsamen mathematischen Modells für verschiedene Probleme unterstützen kann.

Problem 21 (Tanzpartnersuche): *An einem Tanzkurs nehmen 8 Damen und 8 Herren teil. Jede Dame kennt 2 Herren und jeder Herr kennt 2 Damen. Der Tanzlehrer möchte 8 gemischte Paare bilden und zwar so, dass jede Person mit einer ihr bekannten Person tanzt. Ist das möglich?*
Lösungsidee: Die Teilnehmer sollen einen Kreis (oder mehreren Kreise) so bilden, dass jede Person beide Nachbarn kennt: Ein (beliebiger) Herr wählt eine bekannte Dame aus, die Dame ihren zweiten Bekannten, der ausgewählte Herr seine zweite bekannte Dame, usw. so lange, bis entweder jeder Teilnehmer ausgewählt wurde, oder der zweite Bekannte einer Dame eben der Herr ist, der den Kreis angefangen hat. In dem zweiten Fall beginnen wir einen zweiten Kreis. Die Kreisbildung setzen wir so lange fort, bis jeder in einem Kreis steht.
Die Paare bilden wir innerhalb eines Kreises (ausgehend von einer beliebig ausgewählten Dame) so, dass jede Dame z.B. den links stehenden Nachbarn wählt.

Problem 22 (Das Dilemma des Redakteurs): *In der ungarischen mathematischen Wettbewerbszeitschrift (KÖMAL) wurden 8 Probleme gestellt. Der Redakteur hat für jedes Problem je 2 mitteilungswürdige Lösungen gefunden und hat gemerkt, dass die 16 Lösungen von 8 Schülern stammen und dass 2 ausgewählte Lösungen von derselben Person stammen. Der Redakteur möchte für jedes Problem je eine Lösung veröffentlichen, so dass von jedem Löser je eine Lösung erscheint. Geht das?*
Lösungsidee: Wir ordnen die Nummern der Aufgaben und die Namen der Löser in (eventuell mehrere) Kreise so ein, dass jede Nummer zwischen den Namen liegt, die diese Aufgabe gelöst haben, und jeder Name zwischen den Nummern der Aufgaben liegt, die diese Person gelöst hat: Wir starten mit einer beliebigen Aufgabennummer und legen den Namen einer Person daneben, die diese Aufgabe gelöst hat. Dann legen wir die Nummer der zweiten von ihr gelösten Aufgabe, dann den Namen des zweiten Lösers, usw., solange jede Nummer und jeder Name im Kreis liegt, oder die zweite Lösung eines Lösers die Lösung ist, mit der der Kreis begonnen wurde. In diesem Fall schließt sich der Kreis. Wir beginnen einen neuen Kreis und setzen das Einordnen so lange fort, bis alle Nummern und Namen verwendet wurden.
Die Lösungen zur Veröffentlichung wählen wir innerhalb der einzelnen Kreise aus. Von jedem Löser wird die Lösung jener Aufgabe veröffentlicht, deren Nummer (z.B.) links von seinem Namen liegt.

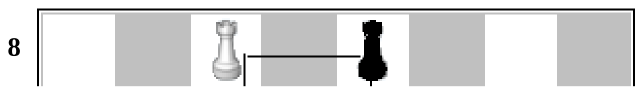
Problem 23 (1933/2)**:** *Von den 64 Feldern eines Schachbrettes sind 16 so ausgewählt, dass jede Zeile und jede Spalte 2 ausgewählte Felder enthält. Es ist zu beweisen, dass auf die ausgewählten Felder 8 weiße und 8 schwarze Figuren so gestellt werden können, dass jede Zeile und jede Spalte je eine weiße und schwarze Figur enthalten.*

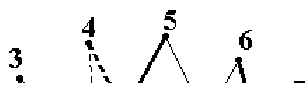


Lösungsidee: Wir starten von einem ausgewählten Feld und gehen waagerecht bis zum anderen ausgewählten Feld in derselben Zeile. Wir setzen den Weg senkrecht bis zum zweiten ausgewählten Feld in derselben Spalte fort, usw., abwechselnd waagerecht und senkrecht. Auf diese Weise kommen wir irgendwann zum Ausgangsfeld zurück, wobei die Anzahl der benutzten Felder eine gerade Zahl ist, denn der Weg besteht abwechselnd aus horizontalen und vertikalen Strecken. Stellen wir auf jedes zweite Feld eine weiße Figur und auf die anderen schwarze, so erreichen wir, dass die besuchten Spalten und Zeilen der Vorschift entsprechend ausgefüllt sind.
Wenn noch nicht alle Zeilen und Spalten belegt, also einige der ausgewählten Felder noch leer sind, wiederholen wir das obige Verfahren ausgehend von einem freien Feld so lange, bis alle ausgewählten Felder besetzt werden (vgl. Abb.).

Die Probleme 21 bis 23 sind zueinander analog und diese Analogie können wir am leichtesten durch eine gemeinsame Darstellung für alle drei Probleme zeigen.

Problem 24 (Das mathematische Modell der Probleme 21-23):
Wir zeichnen 8 Punkte und nummerieren diese von 1 bis 8. Diese Punkte repräsentieren die Männer, die Aufgaben bzw. die Zeilen des Schachbrettes. Wir zeichnen weitere 8 Punkte und bezeichnen diese durch Großbuchstaben des Alphabets. Diese Punkte symbolisieren die Damen, die Schülernamen bzw. die Spalten des Schachbrettes. Wir verbinden durch eine Kante die Punkte, die einander bekannte Herren und Damen, die Aufgaben und deren Löser bzw. die Zeile und Spalte eines ausgewählten Feldes repräsentieren. Aus jedem numerierten Punkt gehen zwei Kanten zu je einem mit einem Buchstaben bezeichneten Punkt und umgekehrt. Es ist zu beweisen, dass man aus den 16 Kanten 8 so auswählen kann, dass alle 16 Punkte als Endpunkte der ausgewählten Kanten vorkommen.
Lösungsidee: Wir zerlegen den (geraden) Graphen in disjunkte Kreise. Die Anzahl der Eckpunkte ist in jedem Kreis eine gerade Zahl. Daher finden wir die geeigneten Kanten, indem wir in jedem Kreis jede zweite Kante nehmen. Bei Problem 23 erhalten wir dadurch die Felder, die gleichfarbige Figuren enthalten.
In dem ausgeführten Beispiel (vgl. die folgenden Abbildungen) besteht der Graph aus zwei Kreisen: E-8-C-6-G-5-B-1-E und A-7-H-2-D-4-F-3-A. Die Paare (veröffentlichte Lösungen, durch weiße Figuren besetzte Felder), also die ausgewählten Kanten sind z.B. E1, B5, G6, C8 und A3, F4, D2, H7.





7

6

5

4

3

2

1

A B C D E F G H

die zwei Kreise die ausgewählten 8 Kanten

Bemerkung: Die Probleme lassen sich für n Paare, n Aufgaben, n Felder, n + n Punkte verallgemeinern. Die Lösung bleibt im Wesentlichen unverändert.

5. Die Grenzen des Problemlösens durch Analogie - Bäume und Würfelnetze

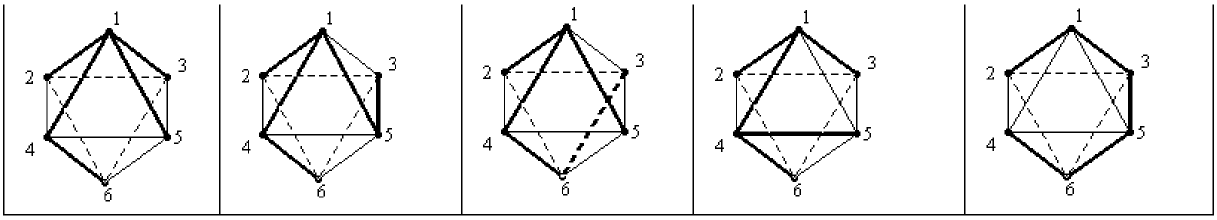
Mit den folgenden Ausführungen soll der Leser zunächst auf die Thematik der Probeme 25 und 26 eingestimmt werden. Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels bilden ein Oktaeder. Zwei Eckpunkte des Oktaeders sind durch eine Kante genau dann verbunden, wenn die Quadrate (um deren Mittelpunkt es sich handelt) benachbart sind. Deswegen lässt sich das Kantenmodell eines Oktaeders als ein Graph betrachten, bei dem die Knoten die Seitenflächen eines Würfels repräsentieren und die Kanten benachbarte Seitenflächen verbinden. Das Weglassen einer Kante am Oktaeder bedeutet das Aufschneiden des Würfels entlang einer Kante. Jeder zusammenhängende Oktaedergraph mit minimaler Kantenzahl repräsentiert so ein Würfelnetz, bei dem sich die Quadrate mit vollständigen Kanten treffen.

Problem 25: a) *Wie viele Kanten sind am Kantenmodell des regulären Oktaeders nötig, damit das Modell nicht zerfällt?*
b) *Wie viele Möglichkeiten gibt es, um so ein Modell anzufertigen?*

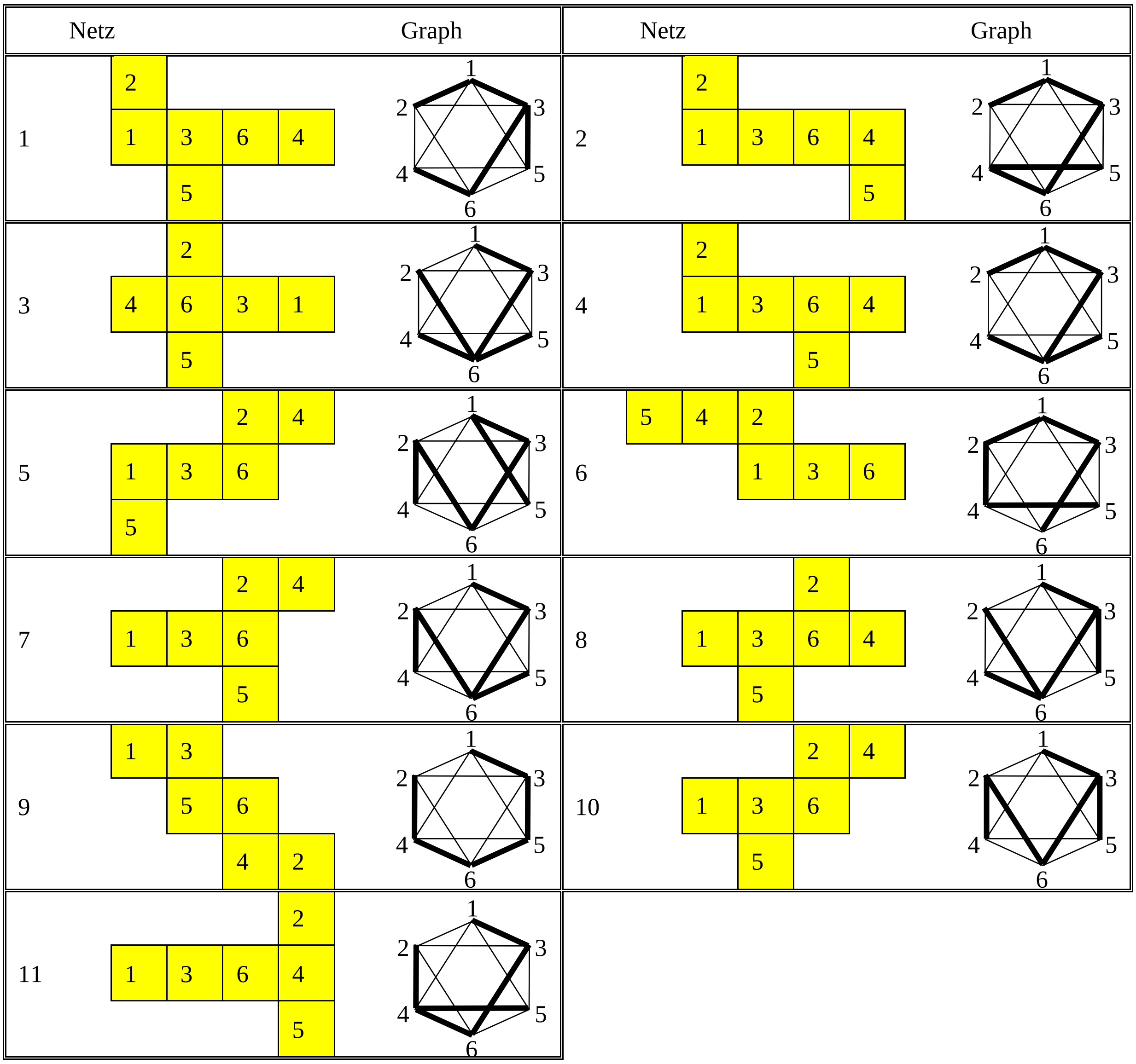
Problem 26: a) *Wie groß ist der Umfang des Würfelnetzes, falls sich die Quadrate mit vollständiger Kante treffen müssen?*
b) *Wie viele Würfelnetze existieren, falls sich die Quadrate mit vollständiger Kante treffen müssen?*

Lösungsidee: Die oben angeführte Analogie ist nützlich bei der Lösung von Problem 25a und Problem 26a. Um einen Baum mit minimaler Kantenzahl (einen Spannbaum) zu bekommen, müssen wir 7 Kanten löschen, das entspricht einem Umfang von 14 Kantenlängen am Würfelnetz. Dieses Ergebnis erleichtert das Finden aller deckungsverschiedenen Würfelnetze (11 Stück).
Die Annahme, dass man die 5 Spannbäume (vgl. Abb.) schneller finden kann (die Struktur ist einfacher, die Anzahl der Möglichkeiten ist kleiner), bringt uns aber nicht zur Lösung des Problems 26b.

maximaler Grad der Knoten		
4	3	2



die Spannbäume des Oktaeders



die Würfelnetze und die Spannbäume

Das Problem ist dabei, dass die Spannbäume bei mehreren Würfelnetzen isomorph sind. Z.B. gehören die Netze 1 und 7 zu demselben Baum (2, 5, 6 und 9; bzw. gehören 4, 10 und 11 auch zu je einem gemeinsamen Baum). Die Spiegelung des Würfels an der winkelhalbierenden Ebene zu den Seitenflächen 3 und 6 bringt die Graphen 1 und 7 ineinander, die zwei Netze sind jedoch keine symmetrischen Bilder voneinander (vgl. Abb.). Dies zeigt die Grenzen dieser Analogie.

Literatur

Bruner, J. S. [1]: Studies in cognitive growth. New York: Wiley (1966)

Duncker, K. [1]: Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Springer (Neudruck 1963)

Hajós, Gy., Neukomm, Gy. & Surányi J. [1]: Mathematische Wettbewersbaufgaben (Ungarisch, Matematikai versenytételek.) Tankönyvkiadó (1957)

Herber, H.-J. [1]: Das Unterrichtsmodell ”Innere Differenzierung”. Die Bedeutung von Analogiebildungs- und Motivationsprozessen. In: Lenz, W. (Hg.), Bildungswege. Innsbruck: StudienVerlag, 59-71 (1998)

Herber, H.-J. [2]: Behaviorismus, Gestaltpsychologie und Kognitive Psychologie im Vergleich. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 4, Nr. 1, 80-95 (2000)

Herber, H.-J.&Vásárhelyi, É. [1]: Das Unterrichtsmodell „Innere Differenzierung einschließlich Analogiebildung“ – Aspekte einer empirisch veranlassten Modellentwicklung. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 6, Nr. 2, 5-19 (2002)

Maus, P. [1]: Problem solving in mathematics and in everyday life. In: Parisot, K. J. & Vásárhelyi, É.: Positionen - Mathematikdidaktik in Entwicklung, Salzburg: Abakus Verlag (2005, im Druck)

Miller, G.A., Galanter, E.& Pribram, K.H. [1]: Plans and the Structure of Behavior. New York: Holt, Rinehart & Winston (1960)

Művelődési és Közoktatási Minisztérium, Budapest [1]: Nationaler Grundlehrplan (Ungarisch: Nemzeti Alaptanterv – NAT, Művelődési és Közoktatási Minisztérium, Budapest Korona Kiadó (1995)

Piaget, J. [1]: Psychologie der Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta (1980)

Pólya, G. [1]: Schule des Denkens, Bern: A. Franke AG. Verlag (1949)

Somfai, Zs. & Urbán, J. [1]: Nationaler Grundlehrplan, In: Parisot, K. J. & Vásárhelyi, É.: Integrativer Unterricht in Mathematik, Salzburg: Abakus Verlag, S. 97-103 (1997)

Wells, M. B. [1]: The number of Latin squares of order 8, J. Combin. Theory, 3, 98-99 (1967)

http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html

PÁL MAUS & DOZ. DR. ÉVA VÁSÁRHELYI
Eötvös Loránd Universität,
Naturwissenschaftliche Fakultät, Mathematisches Institut
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C E-mail: vasar@ludens.elte.hu

Dank gilt Herrn Prof. Dr. Torsten Fritzlar (Leuphana Universität Lüneburg) für die Überarbeitung des Manuskripts.