Markus Meiringer

Bemerkungen zu PYTHAGORÄischen Quadern

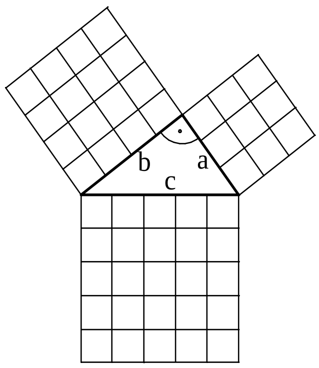
Ausgehend von PYTHAGORÄischen Tripeln und deren geometrischem Analogon, den PYTHAGORÄischen Dreiecken, wird eine Verallgemeinerung auf drei Dimensionen versucht. Dabei kommt man zu verschiedenen Möglichkeiten einer Definition PYTHAGORÄischer Quader. Die behandelten PYTHAGORÄischen Quader IV. Art sind auch als EULERsche Quader oder "primitive cuboids" (vgl. [4], [5]) bekannt. Die PYTHAGORÄischen Quader V. Art, deren Existenz fraglich ist (vgl. [3] S. 173 –181), nennt man oft "perfect boxes" oder "perfect cuboids". Von rein zahlentheoretischer Seite betrachtet handelt es sich um das Auffinden von Lösungen diophantischer Gleichungen, genauer um Fragen der Art: Gibt es drei Quadrate, deren paarweise Summen Quadrate sind (vgl. [2] S. 497 – 502)?

Es werden Volumen und Oberfläche dieser Quader untersucht. Insbesondere werden größte gemeinsame Teiler des Volumens bzw. der Oberfläche aller PYTHAGORÄischen Quader einer bestimmten Art gesucht. Dies könnte wiederum Rückschlüsse auf die Lösungen der zugehörigen diophantischen Gleichungen zulassen.

Die vorliegenden Inhalte wurden zum großen Teil in einer Arbeitsgemeinschaft mit Schülern erarbeitet. Der folgende Text wurde den Schülern vorgeführt oder besser mit ihnen durchdacht. Einiges hiervon durfte den Schülern auch schon in Eigenarbeit mit anschließender Besprechung überlassen werden. Die Aufgaben dienten vollständig diesem Zweck.

1. PYTHAGORÄische Dreiecke

Zuerst soll daran erinnert werden, was unter PYTHAGORÄischen Tripeln bzw. Dreiecken zu verstehen ist.



Definition 1.1: Unter einem PYTHAGORÄischen Dreieck versteht man ein Dreieck mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b und c für die gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (1)

> **Aufgabe 1:** Zeige, dass jedes Dreieck, bei dem die Seitenlängen die Gleichung (1) erfüllen, bereits rechtwinklig ist (Kehrsatz des Satzes von PYTHAGORAS).

Definition 1.2: Ein Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, das die Gleichung (1) erfüllt, nennt man ein **PYTHAGORÄisches Tripel**; gilt zusätzlich ggT(a, b, c) = 1, spricht man von einem primitiven PYTHAGORÄischen Tripel oder einem **primitiven PYTHAGORÄischen Dreieck**.

Lemma 1.3: In einem primitiven PYTHAGORÄischen Tripel (a, b, c) ist entweder a oder b gerade.

Beweis: Eine gerade Zahl z lässt sich stets in der Form $z = 2n$ schreiben. Also gilt für $z^2 = 4n^2$, was bei der Division durch 4 den Rest 0 lässt.
Andererseits lässt sich eine ungerade Zahl z in der Form $z = 2n + 1$ schreiben und somit ist $z^2 = 4n^2 + 4n + 1$, was bei der Division durch 4 den Rest 1 hat.
Somit ergibt das Quadrat einer Zahl bei der Division durch 4 nur die Reste 0 und 1. Die Reste 2 und 3 treten bei der Division einer Quadratzahl durch 4 nicht auf. Man sagt auch, dass die quadratischen Reste modulo 4 nur die Zahlen 0 und 1 sind.

Angenommen a und b wären nun beide ungerade, dann ließe sowohl a^2 als auch b^2 bei der Division durch 4 den Rest 1 und damit wäre der Rest von $a^2 + b^2$ bei der Division durch 4 die Summe der Reste 1 + 1 = 2. Damit kann $a^2 + b^2$ keine Quadratzahl sein, da 2 kein geeigneter quadratischer Rest ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $c^2 = a^2 + b^2$.

Schreibweise 1.4: Man sagt, dass eine natürliche Zahl eine andere natürliche Zahl b teilt, falls es eine natürliche Zahl x gibt, so dass $a \cdot x = b$. Man schreibt dann

$$a \mid b.$$

Anderenfalls gilt $a \nmid b$ und man sagt: a teilt nicht b.

Schreibweisen 1.5: Bei der Division ganzer Zahlen a und b mit $a \nmid b$ erhält man einen Rest (etwa 19 : 5 = 3 Rest 4). Man sagt dann auch 4 ist der Rest von 19 bei der Division durch 5 oder 19 ist **kongruent** zu 4 modulo 5. Für $a \mid b$ ist dieser Rest dann 0. Außerdem sagt man von 2 Zahlen mit dem gleichen Rest, dass sie kongruent sind. Beispielsweise sind 24 und 19 kongruent modulo 5, da sie beide den Rest 4 bei der Division durch 5 haben. Dafür schreibt man auch $24 \equiv 19 \mod 5$ oder $24 \equiv 4 \mod 5$ oder $19 \equiv 4 \mod 5$ oder $19 \equiv 24 \mod 5$.
Diese Reste kann man auch addieren. Beispielsweise ist $17 \equiv 3 \mod 7$ und $19 \equiv 5 \mod 7$ und somit $17 + 19 \equiv 3 + 5 \equiv 8 \equiv 1 \mod 7$.

Definition 1.6: Es seien a, b und k ganze Zahlen. Dann ist definitionsgemäß $a \equiv b \mod k$ genau dann, wenn es eine ganze Zahl u mit $a = b + uk$ gibt. Hierzu gehören die **Restklassen** $\overline{a}_k = \{b \text{ ganz mit } b \equiv a \mod k\}$. Handelt es sich bei einer Überlegung stets um denselben Modul k, so schreibt man für $\overline{a}_k$ nur $\overline{a}$.

Sätze 1.7:
a) $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.
b) $a \equiv b \mod k$ gilt genau dann, wenn $\overline{a} = \overline{b}$ ist.
   Also kann man ggf. statt $24 \equiv 19 \mod 5$ kurz $\overline{24} = \overline{19}$ schreiben.
c) Man kann mit Kongruenzen rechnen; d. h. bezüglich eines festen Moduls k ist die Menge der Restklassen $\overline{a}$ bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen.

Besonders bemerkenswert sind die Reste von Quadratzahlen. Vielleicht ist schon einmal aufgefallen, dass bei Quadratzahlen nicht jede Einerziffer möglich ist.

Aufgabe 2: Welche Einerziffern sind bei Quadratzahlen möglich?

Aufgabe 2 bestimmt die so genannten quadratischen Reste modulo 10, da eine Berechnung modulo 10 stets die Einerziffer der Zahl liefert. Man kann nun auch die quadratischen Reste modulo anderer Zahlen betrachten. Oben wurden ja schon die quadratischen Reste modulo 4 bestimmt.

Aufgabe 3: Bestimme die quadratischen Reste modulo 5.

Schon EUKLID fand, dass es unendlich viele primitive PYTHAGORÄische Tripel gibt und formulierte in seinen Elementen den folgenden Satz, der alle primitiven PYTHAGORÄischen Tripel charakterisiert, wenn man bedenkt, dass bei ungeradem a nach Lemma 1.3 die Zahl b gerade sein muss und dann Satz 1.8 für (b, a, c) gilt.

Satz (EUKLID) 1.8: Seien a, b, c aus **N**. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
a) (a, b, c) bilden ein primitives PYTHAGORÄisches Tripel mit $2 \mid a$.
b) Es gibt x, y aus **N** mit $ggT(x, y) = 1$, $x + y$ ungerade und $x > y$, so dass $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$, $c = x^2 + y^2$ ist.

Beweis: Dieser Beweis muss nicht notwendig in einem Kurs mit Schülern besprochen werden. Sollte Interesse bestehen und die Gruppe leistungsfähig sein, ist eine gemeinsame Besprechung des Beweises anzuraten. Auch könnten einzelne Schritte den Schülern als kleine Übungsaufgaben gegeben werden.

a) $\Rightarrow$ b)
Da a gerade ist, gibt es ein u aus **N** mit $a = 2u$. Nun sind die Zahlen b und c ungerade, denn wäre eine gerade, würde im Widerspruch zur Primitivität folgen, dass die andere ebenfalls gerade ist ($2 \mid c \Rightarrow 2 \mid c^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow 2 \mid b$ und ebenso im anderen Fall).
Es gibt also v, w aus **N** mit $b = 2v + 1$ und $c = 2w + 1$.
Somit ist $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = (2w + 2v + 2)(2w - 2v) = 4(w + v + 1)(w - v) = 4rs$.
Dabei ist $r := w + v + 1$ und $s := w - v$.
Weiter gilt $ggT(r,s) = 1$, denn würde eine Primzahl p sowohl r als auch s teilen, würde gelten
$p \mid r + s = 2w + 1 = c$ und $p \mid r - s = 2v + 1 = b$,
somit auch $p \mid a$ und es wäre $ggT(a, b, c) \neq 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Zahlen r und s müssen sogar Quadrate sein. Denn für eine Primzahl $p > 2$ gilt z. B.:
$p \mid a \Rightarrow p^2 \mid a^2 \Rightarrow p^2 \mid 4rs \Rightarrow p^2 \mid r$ oder $p^2 \mid s$ (sonst $p \mid r$ und $p \mid s$ im Widerspruch zu $ggT(r, s) = 1$).
Für die Primzahl 2 beachte man, dass, falls $2 \mid r$ (ohne Einschränkung, sonst ist eben s gerade) folgt: $8 \mid a^2$ und somit $4 \mid a \Rightarrow 16 \mid a^2 = 4rs \Rightarrow 4 \mid rs \Rightarrow 4 \mid r$ sonst wäre $ggT(r, s) > 1$.
Es gibt also x, y aus **N** mit $x^2 = r$ und $y^2 = s$. Somit ist

$$b = r - s = x^2 - y^2 \qquad a = 2xy \quad \text{und} \quad c = r + s = x^2 + y^2$$

Es ist $b > 0$ und somit $0 < b = x^2 - y^2 \Rightarrow y^2 < x^2 \Rightarrow x > y$, da $x, y > 0$.
Da $ggT(r, s) = 1$ muss auch $ggT(x, y) = 1$ gelten.
Es muss weiter $x + y$ ungerade sein. Wäre $x + y$ gerade, so wären entweder x und y gerade oder beide ungerade. Sind beide gerade, so sind auch x^2 und y^2 gerade und somit $c = x^2 + y^2$ gerade (was nicht möglich ist, da sonst wieder $ggT(a, b, c) \neq 1$ gelten würde). Sind beide ungerade, so sind auch x^2 und y^2 ungerade und es ist $c = x^2 + y^2$ wieder gerade, was ja nicht sein kann.

b) $\Rightarrow$ a)
Offensichtlich ist 2 ein Teiler von $a = 2xy$.
Es können nicht alle drei Zahlen a, b und c gerade sein, denn aus $2 \mid c = x^2 + y^2$ und $2 \mid x$ (entweder x oder y muss ja gerade sein, da $x + y$ ungerade ist) folgt $2 \mid y$ und somit $ggT(x, y) > 1$.
Der größte gemeinsame Teiler von a, b und c ist also 1, denn falls für $p > 2$

$$p \mid a = 2xy \qquad p \mid b = x^2 - y^2 \qquad p \mid c = x^2 + y^2$$

gilt, folgt $p \mid c + b = 2x^2$ und $p \mid c - b = 2y^2$. Somit teilt p sowohl x als auch y; und es ist $ggT(x, y) \neq 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Weiter gilt:

$$a^2 + b^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = c^2$$

Also ist (a, b, c) ein primitives PYTHAGORÄisches Tripel.

Leicht erhält man daraus eine Charakterisierung aller PYTHAGORÄischen Tripel:

Korollar 1.9: Seien a, b, c aus **N**. Äquivalent sind dann:
a) (a, b, c) bilden ein PYTHAGORÄisches Tripel mit $2 \mid a$.
b) Es gibt x, y, t aus **N** mit $ggT(x, y) = 1$ und $x > y$, so dass gilt: $a = 2xyt$, $b = (x^2 - y^2)t$, $c = (x^2 + y^2)t$

Beweis:
Der Beweis ist sofort nach Satz 1.8 einsichtig, da es zu jedem PYTHAGORÄischen Tripel ein solches $t := ggT(a, b, c)$ gibt, so dass $\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}, \frac{c}{t}\right)$ ein primitives PYTHAGORÄisches Tripel ist.

Vor allem der Satz von EUKLID wird im Weiteren häufig Verwendung finden – insbesondere bei PYTHAGORÄische Dreiecken, die viele interessante Eigenschaften haben, was nachstehender Satz genauer erläutert.

Satz 1.10: Sei (a, b, c) ein primitives PYTHAGORÄisches Dreieck. Es gilt dann:
a) Entweder a oder b ist durch 4 teilbar.
b) Entweder a oder b ist durch 3 teilbar.
c) Entweder a, b oder c ist durch 5 teilbar.
d) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist ganzzahlig und durch 6 teilbar.
e) Der Umfang des Dreiecks ist ganzzahlig und durch 2 teilbar.
f) Der Inkreisradius des Dreiecks ist stets ganzzahlig.
g) Die Seite c ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar.
h) Die Höhe ($h = h_c$) des Dreiecks ist nie ganzzahlig.
Die Aussagen a) bis f) gelten nicht nur für primitive sondern für alle PYTHAGORÄischen Dreiecke.

Beweis:
a) Ohne Einschränkung (nach Lemma 1.3) sei a gerade, dann gibt es nach dem Satz 1.8 (EUKLID) x und y mit $a = 2xy$ und $x + y$ ungerade.
Angenommen a ist nicht durch 4 teilbar, dann darf xy nicht durch 2 teilbar sein, also müssen x und y ungerade sein. Dies liefert, dass $x + y$ gerade ist und somit einen Widerspruch.

b) Angenommen a und b sind nicht durch drei teilbar, dann sind a und b entweder kongruent 1 oder 2 modulo 3. Somit ist sowohl a^2 als auch b^2 kongruent 1 modulo 3, da das Quadrat einer natürlichen Zahl z bei der Division durch 3 nur die Reste 0 oder 1 liefert:

z	z^2	Rest bei der Division durch 3
3n + 0	$9n^2$	0
3n + 1	$9n^2 + 6n + 1$	1
3n + 2	$9n^2 + 12n + 4$	1

Damit ist $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \mod 3 \equiv 2 \mod 3$. Also kann $a^2 + b^2$ kein Quadrat sein.

c) vgl. Aufgabe 4.
d) vgl. Aufgabe 5.
e) vgl. Aufgabe 6.
f) Für den Inkreisradius ρ und den Dreiecksumfang U gilt:
$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}U\rho$ und somit gilt mit Satz 1.8

$$\rho = \frac{ab}{U} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{2xy(x^2 - y^2)}{2xy + x^2 - y^2 + x^2 + y^2} = \frac{2xy(x-y)(x+y)}{2xy + 2x^2} = \frac{2xy(x-y)(x+y)}{2x(x+y)} = y(x-y)$$

Dies zeigt, dass ρ aus **N** ist.

g) Nach a) ist entweder a oder b gerade, das sei ohne Einschränkung a. Angenommen es gilt $2 \mid c$, dann ist sowohl c^2 als auch a^2 durch 4 teilbar und wegen $b^2 = c^2 - a^2$ folgt, dass auch $4 \mid b^2$ und somit $2 \mid b$ gilt. Das ist ein Widerspruch zur Primitivität des Tripels.
Ebenso ist nach b) ohne Einschränkung a durch 3 teilbar. Angenommen es gilt auch $3 \mid c$, dann folgt wegen $b^2 = c^2 - a^2$, dass auch $3 \mid b$ gilt, was wiederum ein Widerspruch zur Primitivität des Tripels ist.

h) Wegen $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc$ gilt auch ab = hc. Angenommen es ist h aus **N.**
Weil für jede Primzahl p mit $p \mid a$ aus $p \mid c$ wegen $b^2 = c^2 - a^2$ auch $p \mid b$ gilt, folgt somit ggT(a, b, c) > 1 im Widerspruch zur Primitivität. Deshalb gilt $a \mid h$.
Es gibt also ein u aus **N** mit a = uh. Damit ist hc = ab = uhb. Wegen c = ub gilt $b \mid c$. Das ist wegen $a^2 = c^2 - b^2$ ein Widerspruch zur Primitivität. Also kann h keine natürliche Zahl sein.

Aufgabe 4: Gegeben ist ein primitives PYTHAGORäisches Dreieck. Zeige, dass entweder a, b oder c durch 5 teilbar ist. Betrachte dazu die quadratischen Reste bei der Division durch 5.

Aufgabe 5: Folgere aus 1.10a) und b), dass der Flächeninhalt eines primitiven PYTHAGORäischen Dreieckes ganzzahlig und durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 6: Folgere aus 1.8, dass der Umfang eines primitiven PYTHAGORäischen Dreieckes ganzzahlig und durch 2 teilbar ist.

Die folgende Frage kommt in abgewandelter Form in dieser Arbeit mehrfach vor: Sind die gefundenen Teiler der Flächen und der Umfänge von betrachteten PYTHAGORäischen Dreiecken maximal?

Korollar 1.11: Der Flächeninhalt eines PYTHAGORäischen Dreiecks ist stets durch 6 teilbar; der Umfang durch 2. D. h.: Der größte gemeinsame Teiler der Flächeninhalte aller PYTHAGORäischen Dreiecke ist 6 und der größte gemeinsame Teiler der Umfänge aller PYTHAGORäischen Dreiecke ist 2.

Beweis: Die Teilbarkeit folgt sofort aus Satz 1.10d) und e).
Der Flächeninhalt des Dreiecks mit Seiten a = 3; b = 4 und c = 5 beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.
Der Umfang eines Dreiecks mit den Seiten $a_1 = 5$; $b_1 = 12$ und $c_1 = 13$ ist $U_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, eines Dreiecks mit den Seiten $a_2 = 7$; $b_2 = 24$ und $c_2 = 25$ jedoch $U_2 = 56 = 2^3 \cdot 7$.
Damit ist $ggT(U_1, U_2) = 2$.

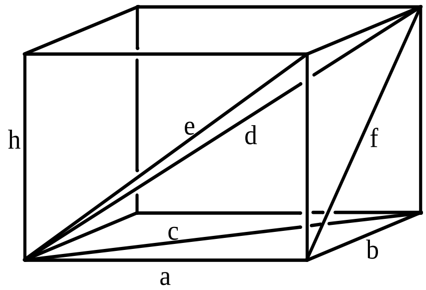
Definition 1.12: Unter einem PYTHAGORäischen Rechteck versteht man ein Rechteck mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b und der ganzzahligen Diagonalenlänge c. Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Zunächst liefert Definition 1.12 nichts Neues, aber sie bietet die Möglichkeit zur Verallgemeinerung zum Quader. Zuvor noch eine einfache Aufgabe:

Aufgabe 7: Der Flächeninhalt eines PYTHAGORÄischen Rechtecks ist stets durch 12 teilbar; der Umfang ist durch 2 teilbar. Das sind die größten gemeinsamen Teiler der Flächen und Umfänge aller PYTHAGORÄischen Rechtecke.

2. PYTHAGORÄische Quader

Man kann in einem Quader, dessen Seitenlängen a, b und h ganzzahlig sind, für die Diagonalen fordern, dass auch sie alle oder teilweise ganzzahlig sein sollen.



Es wird zunächst eine abstrakte Klassifikation für die eben genannten Bedingungen angegeben und keine Rücksicht darauf genommen, welche Klassen existieren bzw. welche Klassen zu mathematischen Erkenntnissen führen.

Aufgabe 8: Wie viele Möglichkeiten gibt es für eine Auswahl der Diagonalen c, e, f und d? Berechne zuerst die Anzahl und gib dann alle Möglichkeiten einer Auswahl der Diagonalen (c, e, f und d) an.

Aufgabe 9: Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler für das Volumen und die Oberfläche aller Quader mit ganzzahligen Seitenlängen und einer ganzzahligen Seitendiagonalen (etwa) c. Benutze hierzu die Erkenntnisse über PYTHAGORÄische Rechtecke.

Mit Definition 2.1 sind die Grundlagen für den nächsten Paragraphen geschaffen und wir können uns – von der Flächen- und Umfangbetrachtung bei PYTHAGORÄischen Dreiecken inspiriert – für die Volumina und die Oberflächen folgender Quader interessieren:

Definition 2.1:
PYTHAGORÄische Quader 0. Art:
Unter einem PYTHAGORÄischen Quader 0. Art versteht man einen Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h und der ganzzahligen Raumdiagonalen d; es ist also ganzzahlig lösbar:

$$a^2 + b^2 + h^2 = d^2$$

PYTHAGORÄische Quader I. Art:
Unter einem PYTHAGORÄischen Quader I. Art versteht man einen Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h, der ganzzahligen Raumdiagonalen d und einer ganzzahligen Seitendiagonalen (etwa) c; es ist also ganzzahlig lösbar:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + b^2 + h^2 = d^2$$

PYTHAGORÄische Quader II. Art:
Unter einem PYTHAGORÄischen Quader II. Art versteht man einen Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h und zwei ganzzahligen Seitendiagonalen (etwa) c und e; es ist also ganzzahlig lösbar:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + h^2 = e^2$$

PYTHAGORÄische Quader III. Art (vgl. [3] S. 173 –179):
Unter einem PYTHAGORÄischen Quader III. Art versteht man einen Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h, der ganzzahligen Raumdiagonalen d und zwei ganzzahligen Seitendiagonalen (etwa) c und e; es ist also ganzzahlig lösbar:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 + h^2 = e^2$$
$$a^2 + b^2 + h^2 = d^2$$

PYTHAGORÄische Quader IV. Art: Diese Quader werden oft auch EULERsche Quader oder "primitive cuboids" genannt (vgl. [4],[5] und [3] S. 173 –179).

Unter einem PYTHAGORÄischen Quader IV. Art versteht man einen Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h und den drei ganzzahligen Seitendiagonalen c, e und f; es ist also ganzzahlig lösbar:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + h^2 &= e^2 \\ b^2 + h^2 &= f^2 \end{aligned}$$

PYTHAGORÄische Quader V. Art

Unter einem PYTHAGORÄischen Quader V. Art versteht man einen Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h, der ganzzahligen Raumdiagonalen d und den drei ganzzahligen Seitendiagonalen c, e, und f; es ist also ganzzahlig lösbar:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + h^2 &= e^2 \\ b^2 + h^2 &= f^2 \\ a^2 + b^2 + h^2 &= d^2 \end{aligned}$$

Diese Quader sind auch als "perfect cuboid" oder "perfect box" bekannt (vgl. [3] S. 173 –179), deren Existenz aber nicht geklärt ist.

Die hier angegebenen Arten von Quadern berücksichtigen jede mögliche Auswahl an Diagonalen, an die die Forderung der Ganzzahligkeit gestellt werden kann. Beispielsweise gehört ein Quader mit den ganzzahligen Seitenlängen a, b, h und den zwei ganzzahligen Seitendiagonalen e und f, für den dann $a^2 + h^2 = e^2$ und $b^2 + h^2 = f^2$ gilt, auch zu den Quadern II. Art. Es könnten ja die Bezeichnungen der Seiten umgeändert werden.

Aufgabe 10: Warum ist die Klassifikation der Definition 2.1 vollständig? Weshalb kann es keine weiteren PYTHAGORÄischen Quader geben? Ordne die in Aufgabe 8 gefundenen Möglichkeiten den verschiedenen Arten von Quadern zu.

Aufgabe 11: Zeige dass bei PYTHAGORÄischen Quadern 0. Art mindestens zwei Seitenlängen gerade sein müssen und folgere daraus, dass das Volumen durch 4 teilbar ist. Finde überdies einen möglichst kleinen PYTHAGORÄischen Quader 0. Art, der erkennen lässt, dass es keinen größeren gemeinsamen Teiler für das Volumen geben kann.

3. Über das Volumen PYTHAGORÄischer Quader

Nach Aufgabe 11 ist bekannt, dass das Volumen V = abh jedes PYTHAGORÄischen Quaders 0. Art durch 4 teilbar ist. Bei allen anderen Arten von PYTHAGORÄischen Quadern sind die Volumina nach Aufgabe 7 sogar durch 12 teilbar. Vielleicht finden sich bei den verschiedenen Arten von Quadern noch größere Teiler als 12?

Es wird sich im Folgenden zeigen: Die hier angegebenen Teiler sind nicht mehr zu verbessern, d. h. diese Teiler sind bei den Arten I bis IV die größten gemeinsamen Teiler aller PYTHAGORÄischen Quader einer Art. Bei den Quadern V. Art kann nur ein gemeinsamer Teiler angegeben werden, über dessen Maximalität nichts ausgesagt werden kann, da ja die Existenz dieser Quader fraglich ist.

3.1 PYTHAGORÄische Quader I. Art

Satz 3.1: Der größte gemeinsame Teiler aller Volumina von PYTHAGORÄischen Quadern der I. Art ist 144.

Beweis:
a) Zuerst wird $9 \mid V$ gezeigt:
Man kann nach 1.10b) ohne Einschränkung annehmen, dass $3 \mid a$.
1.Fall $3 \mid h$: Somit gilt $9 \mid abh = V$.
2.Fall $3 \nmid h$: Da (c, h, d) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist, muss nach 1.10b) nun c durch 3 teilbar sein. Also sind a und c durch 3 teilbar und somit gilt $9 \mid b^2 = c^2 - a^2$, was $3 \mid b$ und somit $9 \mid abh = V$ zeigt.

b) Man zeigt noch $16 \mid V$:
Man kann nach 1.10a) ohne Einschränkung annehmen, dass $4 \mid a$.
1.Fall $4 \mid h$: Somit gilt $16 \mid abh = V$.

2.Fall 4 □ h: Da (c, h, d) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist, schließt man wie oben, dass b durch 4 teilbar ist; somit $16 \mid abh = V$.

c) Insgesamt folgt somit $9 \cdot 16 = 144 \mid V$.
Da für den PYTHAGORÄischen Quader mit a = 3, b = 4 und h = 12 das Volumen 144 ist, kann es keinen größeren Teiler aller derartigen Quader geben.

3.2 PYTHAGORÄische Quader II. Art

Satz 3.2: Der größte gemeinsame Teiler aller Volumina von PYTHAGORÄischen Quadern der II. Art ist 12.

Aufgabe 12: Beweise den Satz 3.2. Dazu muss man sich kurz überlegen, dass 12 auch ein Teiler der Volumina aller Quader dieser Art ist. Außerdem müssen zwei Beispiele für Quader II. Art gefunden werden, so dass der größte gemeinsame Teiler der Volumina dieser beiden Quader 12 ist.

3.3 PYTHAGORÄische Quader III. Art

PYTHAGORÄische Quader III. Art sind auch solche I. Art und somit sind ihre Volumina jedenfalls durch 144 teilbar. Man kann diesen gemeinsamen Teiler nur um den Faktor 7 erweitern und erhält den Satz:

Satz 3.3: Der größte gemeinsame Teiler aller Volumina von PYTHAGORÄischen Quadern der III. Art ist 1008.

Beweis:
Für die Teilbarkeit durch $1008 = 144 \cdot 7$ genügt es nach 3.1 zu zeigen $7 \mid V$.
1.Fall $7 \mid a$ oder $7 \mid b$ oder $7 \mid h$: Dies zeigt $7 \mid abh = V$.
2.Fall $7 \nmid a$ und $7 \nmid b$ und $7 \nmid h$: Da a und b nicht durch 7 teilbar sind, ergeben sich für a² und b² nur folgende Kombinationen (in nachstehender Additionstafel steht als Eintrag stets die Summe aus dem Wert für $\overline{a^2}$ aus der obersten Zeile und dem Wert für $\overline{b^2}$ aus der Spalte ganz links):

+	$\overline{a^2} = \overline{1}$	$\overline{a^2} = \overline{2}$	$\overline{a^2} = \overline{4}$
$\overline{b^2} = \overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{b^2} = \overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$

Von den neun Einträgen in der Tabelle können sechs nicht auftreten, da die Summe $a^2 + b^2 = c^2$ ein Quadrat sein muss. Da die Einträge 3, 5 und 6 aber keine quadratischen Reste modulo 7 sind (vgl. Aufgabe 13),
verbleiben nur nachstehende drei Fälle:

1. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{1}$ und $\overline{b^2} = \overline{1}$
2. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{2}$ und $\overline{b^2} = \overline{2}$
3. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{4}$ und $\overline{b^2} = \overline{4}$

Da $a^2 + h^2 = e^2$ ist, erhält man entsprechend für a und h:

1. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{1}$ und $\overline{h^2} = \overline{1}$
2. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{2}$ und $\overline{h^2} = \overline{2}$
3. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{4}$ und $\overline{h^2} = \overline{4}$

Also ergeben sich insgesamt nur mehr drei zu betrachtende Fälle:

1. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{1}$ und $\overline{b^2} = \overline{1}$ und $\overline{h^2} = \overline{1}$
2. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{2}$ und $\overline{b^2} = \overline{2}$ und $\overline{h^2} = \overline{2}$
3. Möglichkeit: $\overline{a^2} = \overline{4}$ und $\overline{b^2} = \overline{4}$ und $\overline{h^2} = \overline{4}$

Diese müssten die Gleichung $a^2 + b^2 + h^2 = d^2$ ganzzahlig erfüllen, was auf Grund von

1. Möglichkeit: $\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{h^2} = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{3}$
2. Möglichkeit: $\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{h^2} = \overline{2} + \overline{2} + \overline{2} = \overline{6}$
3. Möglichkeit: $\overline{a^2} + \overline{b^2} + \overline{h^2} = \overline{4} + \overline{4} + \overline{4} = \overline{5}$

nicht möglich ist, da 3; 5 und 6 keine quadratischen Reste modulo 7 sind; man hat also einen Widerspruch gefunden. Es gilt also $144 \cdot 7 = 1008 \mid V$.

Dies ist aber auch die größte Möglichkeit, wie das folgende Beispiel zeigt:
$a_1 = 104$; $b_1 = 153$; $h_1 = 672$
somit $V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = (2^3 \cdot 13) \cdot (3^2 \cdot 17) \cdot (2^5 \cdot 3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$
$a_2 = 1364$; $b_2 = 14973$; $h_2 = 21120$
somit $V_2 = a_2 \cdot b_2 \cdot h_2 = (2^2 \cdot 11 \cdot 31) \cdot (3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 31) \cdot (2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)$
$= 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 23 \cdot 31^2$
$a_3 = 13167$; $b_3 = 10780$; $h_3 = 7644$
somit $V_3 = a_3 \cdot b_3 \cdot h_3 = (3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19) \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 19$
Also gilt $\mathrm{ggT}(V_1, V_2, V_3) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$.

Je nach Lust, Laune und Zeit kann man zum Auffinden obiger Beispiele auch kleine Computerprogramme schreiben.

Aufgabe 13: Zeige, dass sich als quadratische Reste modulo 7 lediglich 0; 1; 2 und 4 ergeben.

3.4 PYTHAGORÄische Quader IV. Art

Allein am gemeinsamen Teiler merkt man, dass die Volumina PYTHAGORÄischer Quader IV. Art sehr groß sind, denn 95040 teilt ihr Volumen. Bemerkenswert ist, dass 7 ein Teiler PYTHAGORÄischer Quader III. Art sein muss, nicht notwendig aber von PYTHAGORÄischen Quadern IV. Art.

Das nachstehende Resultat folgt auch aus [5] S. 318, 319.

Satz 3.4: Der größte gemeinsame Teiler aller Volumina von PYTHAGORÄischen Quadern der IV. Art ist 95040.

Beweis:
a) Es gilt $2^6 \mid V$, wie man durch folgende Fallunterscheidung zeigen kann:
1. Fall $4 \mid a$ und $4 \mid b$ und $4 \mid h$: Dies zeigt $2^6 \mid a\,b\,h = V$.
2. Fall $4 \nmid a$ oder $4 \nmid b$ oder $4 \nmid h$: Wegen der Symmetrie der Angaben kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $4 \nmid a$. Da (a, b, c) und (a, h, e) PYTHAGORÄische Tripel sind folgt nach Satz 1.10a), dass b und h durch 4 teilbar sind. Aus $f^2 = b^2 + h^2$ folgt, dass f durch 4 teilbar ist. Es gibt somit b', h', f' aus $\mathbf{N}$ mit $(b, h, f) = (4b', 4h', 4f')$.
Da nun (b', h', f') ebenfalls ein PYTHAGORÄisches Tripel ist, folgt dass $4 \mid b'$ oder $4 \mid h'$.
Insgesamt folgt: $2^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \mid a \cdot 4b' \cdot 4h' = abh = V$.

b) Analog zum Teil a) kann man auch zeigen, dass $3^3 \mid V$ (vgl. Aufgabe 14).

c) Ebenfalls kann man $5 \mid V$ zeigen. Dabei ist die Fallunterscheidung anders zu organisieren (vgl. Aufgabe 15).

d) Nachstehende Fallunterscheidung liefert: $11 \mid V$.
1. Fall $11 \mid a$ oder $11 \mid b$ oder $11 \mid h$: Hieraus folgt sofort $11 \mid V = abh$.
2. Fall $11 \nmid a$ und $11 \nmid b$ und $11 \nmid h$: Im vorliegenden Fall können für a und b als quadratische Reste nur 1, 3, 4, 5 und 9 auftreten (vgl. Aufgabe 16). Es verbleiben also nur die folgenden 10 Fälle, sonst wäre $a^2 + b^2$ kein Quadrat (vgl. Aufgabe 17). Diese Fälle müssen noch einzeln abgehandelt werden:

$\overline{a^2} = \overline{1};\ \overline{b^2} = \overline{3}$	$\overline{a^2} = \overline{1};\ \overline{b^2} = \overline{4}$	$\overline{a^2} = \overline{3};\ \overline{b^2} = \overline{9}$	$\overline{a^2} = \overline{4};\ \overline{b^2} = \overline{5}$	$\overline{a^2} = \overline{5};\ \overline{b^2} = \overline{9}$
$\overline{a^2} = \overline{3};\ \overline{b^2} = \overline{1}$	$\overline{a^2} = \overline{4};\ \overline{b^2} = \overline{1}$	$\overline{a^2} = \overline{9};\ \overline{b^2} = \overline{3}$	$\overline{a^2} = \overline{5};\ \overline{b^2} = \overline{4}$	$\overline{a^2} = \overline{9};\ \overline{b^2} = \overline{5}$

Aus Symmetriegründen (in a und b) kann man sich auf 5 Fälle beschränken, nämlich auf die obere Zeile.

Um zum Ziel zu gelangen (Jede Möglichkeit führt zu einem Widerspruch; Fall 2 tritt nicht auf.), muss sich in jedem der Fälle für jede Wahl eines $\overline{h^2} \in \{\bar{1};\ \bar{3};\ \bar{4};\ \bar{5};\ \bar{9}\}$ zeigen, dass $\overline{e^2} = \overline{a^2+h^2}$ und $\overline{f^2} = \overline{b^2+h^2}$ keine quadratischen Reste sind im Widerspruch zur Voraussetzung. Dies erkennt man mittels nachstehender Tabelle; das Nicht-Auftreten bzw. der Widerspruch wird mit Klammern gekennzeichnet.

$\overline{a^2} = \bar{1};\ \overline{b^2} = \bar{3}$	$\overline{h^2} = \bar{1}$	$\overline{h^2} = \bar{3}$	$\overline{h^2} = \bar{4}$	$\overline{h^2} = \bar{5}$	$\overline{h^2} = \bar{9}$
$\overline{e^2} = \overline{a^2} + \overline{h^2}$	$(\bar{2})$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$(\bar{6})$	$(\overline{10})$
$\overline{f^2} = \overline{b^2} + \overline{h^2}$	$\bar{4}$	$(\bar{6})$	$(\bar{7})$	$(\bar{8})$	$\bar{1}$

In den verbleibenden Fällen kann man entsprechende Tabellen aufstellen, so dass man erkennen kann, welche Summen nicht auftreten können (vgl. Aufgabe 18). Somit tritt der 2. Fall gar nicht auf und die Behauptung d) ist gezeigt.

Insgesamt gilt nun $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 95040 \mid V$. Das folgende Zahlenbeispiel zeigt, dass dies der größte gemeinsame Teiler alle PYTHAGORÄischen Quader IV. Art ist.

$a_1 = 240$; $b_1 = 44$; $h_1 = 117$
somit $V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = (2^4 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 11) \cdot (3^2 \cdot 13) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$

$a_2 = 1008$; $b_2 = 1100$; $h_2 = 1155$
somit $V = a_2 \cdot b_2 \cdot h_2 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 5^2 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^2$

Also gilt $\mathrm{ggT}(V_1, V_2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 95040$. Damit ist Satz 3.4 bewiesen.

Aufgabe 14: In einem PYTHAGORÄischen Quader IV. Art mit dem Volumen V gilt stets $3^3 \mid V$.

Aufgabe 15: In einem PYTHAGORÄischen Quader IV. Art mit dem Volumen V gilt stets $5 \mid V$.

Aufgabe 16: Bestimme die quadratischen Reste modulo 11.

Aufgabe 17: Gilt $c^2 = a^2 + b^2$, so sind nicht alle Kombinationen quadratischer Reste modulo 11 möglich. Stelle eine Additionstafel auf, in der alle möglichen Kombinationen quadratischer Reste für a^2 und b^2 abgehandelt werden und untersuche, ob das Ergebnis der Addition ein Quadrat sein kann.

Aufgabe 18: Im Beweis von Satz 3.4 zeigt man für jede Wahl eines $\overline{h^2} \in \{\bar{1};\ \bar{3};\ \bar{4};\ \bar{5};\ \bar{9}\}$, dass entweder $\overline{a^2+h^2}$ oder $\overline{b^2+h^2}$ keine quadratischen Reste sind. Stelle in den verbleibenden Fällen jeweils entsprechende Tabellen auf, so dass zu erkennen ist, welche Summen nicht auftreten können.

3.5 PYTHAGORÄische Quader V. Art

Die Existenz solcher PYTHAGORÄischer Quader ist bislang noch nicht geklärt (vgl. [3] S. 173 – 181). Sie werden hier auch nur sehr stiefmütterlich behandelt.
Aus den Sätzen 3.3 und 3.4 ergibt sich $95040 \cdot 7 = 665280 \mid V$.

Solche Überlegungen könnten vielleicht zum Auffinden PYTHAGORÄischer Quader V. Art – der "perfect box" – führen oder deren Nicht-Existenz zeigen.

4. Über die Oberfläche PYTHAGORÄischer Quader

Es wird sich zeigen, dass beim Betrachten der Oberfläche PYTHAGORÄischer Quader keine solch großen Zahlen wie beim Volumen als gemeinsame Teiler gefunden werden können. Sofort einsichtig ist nur, dass die Oberfläche geradzahlig sein muss. Das ist nichts Besonderes, denn dies gilt bei jedem Quader mit ganzzahligen Seitenlängen: $O = 2\,(a\,b + a\,h + b\,h)$

Die Aussagen für die verschiedenen Arten PYTHAGORÄischer Quader können leicht als Aufgaben überlassen werden. Es muss jeweils gezeigt werden, dass die angegebene Zahl ein Teiler der Oberfläche ist und anschließend ist durch ein Beispiel zu belegen, dass es keinen größeren gemeinsamen Teiler aller Oberflächen der PYTHAGORÄischen Quader der entsprechenden Art gibt.

4.1 PYTHAGORÄische Quader 0. Art

Satz 4.1: Der größte gemeinsame Teiler aller Oberflächen von PYTHAGORÄischen Quadern der 0. Art ist 8.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass $ab + ah + bh$ durch 4 teilbar ist.
1. Fall $2 \mid a$ und $2 \mid b$ und $2 \mid h$: Damit ist die Teilbarkeit durch 4 klar und somit $8 \mid O$.
2. Fall 2 □ a oder 2 □ b oder 2 □ h: Betrachtet man die Reste von Quadratzahlen modulo 8, so stellt man fest, dass für ungerade Zahlen der Rest stets 1 ist. Durch 4 teilbare Zahlen haben den Rest 0, während die restlichen geraden Zahlen den Rest 4 liefern (Aufgabe 19).

Ist eine der Zahlen, etwa ohne Einschränkung h nicht gerade, so ist ihr quadratischer Rest 1. Da $a^2 + b^2 + h^2$ ein Quadrat sein muss, können weder a noch b einen quadratischen Rest 1 haben, müssen also beide durch 2 teilbar sein.
Nun können a und b entweder beide den Rest 0 oder beide den Rest 4 haben. Hätten sie unterschiedliche Reste, also 0 und 4, müsste $a^2 + b^2 + h^2$ den Rest 5 haben und könnte somit wieder kein Quadrat sein.
Haben a und b den quadratischen Rest 0, so sind schon a und b durch 4 teilbar und somit ist auch $a + b$ durch 4 teilbar.
Haben andererseits a und b den quadratischen Rest 4, so lassen sie bei der Division durch 8 entweder den Rest 2 oder 6, in der Summe ist also $a + b$ wiederum wenigstens durch 4 teilbar.
Somit gilt $4 \mid a\,b + (a + b)\,h = a\,b + a\,h + b\,h$.
Dies zeigt die Behauptung $8 \mid 2\,(a\,b + a\,h + b\,h) = O$.

Für einen Quader mit $a_1 = 2$; $b_1 = 2$ und $h_1 = 1$ sind die Voraussetzungen erfüllt und es ist
$O_1 = 2\,(a_1 b_1 + a_1 h_1 + b_1 h_1) = 16 = 2^4$.
Bei einem Quader mit $a_2 = 2$; $b_2 = 3$ und $h_2 = 6$ ist die Diagonale $d = 7$ und
$O_2 = 2\,(a_2 b_2 + a_2 h_2 + b_2 h_2) = 2\,(6 + 12 + 18) = 72 = 2^3 \cdot 3^2$.
Somit ist $ggT(O_1, O_2) = 8$.

> **Aufgabe 19:** Bestimme die Reste der Quadrate modulo 8. Zeige insbesondere, dass die Quadrate aller ungeraden Zahlen den Rest 1 modulo 8 haben.

4.2 PYTHAGORÄische Quader I. Art

Satz 4.2: Der größte gemeinsame Teiler aller Oberflächen von PYTHAGORÄischen Quadern der I. Art ist 24.

Siehe den *Beweis* als Aufgabe 20.

> **Aufgabe 20:** Zeige, dass 24 die Oberfläche eines PYTHAGORÄischen Quaders I. Art teilt. Finde außerdem zwei dieser Quader deren Oberflächen den größten gemeinsamen Teiler 24 haben.

4.3 PYTHAGORÄische Quader II. Art

Hier lassen sich keine größeren gemeinsamen Teiler als 2 finden und es gilt der folgende Satz:

Satz 4.3: Der größte gemeinsame Teiler aller Oberflächen von PYTHAGORÄischen Quadern der II. Art ist 2.

Beweis: Da die Oberfläche O = 2 (a b + a h + b h) jedes Quaders durch 2 teilbar ist, folgt der Satz mit dem Beispiel aus Aufgabe 21.

> **Aufgabe 21:** Finde zwei PYTHAGORÄische Quader II. Art deren Oberflächen den größten gemeinsamen Teiler 2 haben.

4.4 PYTHAGORÄische Quader III. Art

Obwohl mehr gefordert wird, ist der gemeinsame Teiler aller Oberflächen nicht größer als bei den Quadern der I. Art.

Satz 4.4: Der größte gemeinsame Teiler aller Oberflächen von PYTHAGORÄischen Quadern der III. Art ist 24.

Beweis: PYTHAGORÄische Quader III. Art sind spezielle der I. Art und somit ist die Oberfläche durch 24 teilbar. Man kann in Aufgabe 22 sehen, dass 24 schon der größte gemeinsame Teiler aller PYTHAGORÄischen Quader III. Art ist.

> **Aufgabe 22:** Finde zwei PYTHAGORÄische Quader III. Art deren Oberflächen den größten gemeinsamen Teiler 24 haben.

4.5 PYTHAGORÄische Quader IV. Art

Auch die Oberflächen der Quader IV. Art haben überraschender Weise keine größeren gemeinsamen Teiler, aber der Beweis von oben kann nicht übernommen werden.

Satz 4.5: Der größte gemeinsame Teiler aller Oberflächen von PYTHAGORÄischen Quadern der IV. Art ist 24.

Siehe den *Beweis* als Aufgabe 23.

> **Aufgabe 23:** Zeige, dass 24 die Oberfläche eines PYTHAGORÄischen Quaders IV. Art teilt (vielleicht hilft ein Blick in den Beweis von Satz 3.4). Finde außerdem zwei dieser Quader deren Oberflächen den größten gemeinsamen Teiler 24 haben.

4.6 PYTHAGORÄische Quader V. Art

Über die PYTHAGORÄischen Quader V. Art kann man aufgrund obiger Überlegungen lediglich 24 | O sagen.

Vielleicht regen diese Überlegungen an, weitere Entdeckungen zu machen?

Vielleicht lässt sich durch Teilbarkeitsüberlegungen mehr über die PYTHAGORÄischen Quader V. Art – die "perfect cuboids" – finden?

5. Lösungen

Zu Aufgabe 1:
Man betrachte zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2. Dabei ist Dreieck Δ_1 das vorausgesetzte Dreieck mit $a_1 = a$; $b_1 = b$ und $c_1 = c$. Das Dreieck Δ_2 soll rechtwinklig mit den Kathetenlängen $a_2 = a$ und $b_2 = b$ sein, dann gilt für die Hypotenuse $c_2^2 = a_2^2 + b_2^2 = a^2 + b^2 = c^2$ und somit $c_2 = c$. Deshalb stimmen Δ_1 und Δ_2 in 3 Seiten überein und sind nach dem sss-Satz kongruent. Damit hat auch Δ_1 bei C einen rechten Winkel.

Zu Aufgabe 2:
Jede natürliche Zahl n lässt sich in der Form 10x + e schreiben, wobei e deren Einerziffer ist. Quadriert man die natürliche Zahl, so ergibt sich $n^2 = 100x^2 + 20xe + e^2 = 10(10x^2 + 2xe) + e^2$. Dies zeigt, dass als Einerziffern einer Quadratzahl nur die Einerziffern der Quadratzahlen von 1 bis 10 auftreten, also folgende Möglichkeiten:

0	$10^2 = 100$
1	$1^2 = 1$; $9^2 = 81$
4	$2^2 = 4$; $8^2 = 64$
5	$5^2 = 25$
6	$4^2 = 16$; $6^2 = 36$
9	$3^2 = 9$; $7^2 = 49$

Man sagt auch, dass die quadratischen Reste modulo 10 die Zahlen 0; 1; 4; 5; 6 und 9 sind.

Zu Aufgabe 3:
Das Quadrat einer natürlichen Zahl z ergibt nach der Division durch 5 lediglich die quadratischen Reste 0 (5 teilt z), 1 oder 4.

z	z^2	Rest bei der Division durch 5
5n + 0	$25n^2$	0
5n + 1	$25n^2 + 10n + 1$	1
5n + 2	$25n^2 + 20n + 4$	4
5n + 3	$25n^2 + 30n + 9$	4
5n + 4	$25n^2 + 40n + 16$	1

Zu Aufgabe 4:
Angenommen a, b und c sind nicht durch 5 teilbar.
Das Quadrat einer natürlichen Zahl z hat nur die quadratischen Reste 0, 1 oder 4.

Somit verbleiben nur die Fälle
$\overline{a^2} = \overline{1}$ oder $\overline{a^2} = \overline{4}$ und $\overline{b^2} = \overline{1}$ oder $\overline{b^2} = \overline{4}$. Diese verbleibenden Fälle führen aufgrund der Tabelle

+	$\overline{a^2} = \overline{1}$	$\overline{a^2} = \overline{4}$
$\overline{b^2} = \overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{b^2} = \overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$

zu Widersprüchen, da $c^2 = a^2 + b^2$ nach Voraussetzung nicht durch 5 teilbar ist und 2 bzw. 3 keine quadratischen Reste modulo 5 sind. Somit muss eine der Zahlen a, b oder c durch 5 teilbar sein.
Sind zwei Seiten durch 5 teilbar, so ist wegen des Satzes von PYTHAGORAS auch die dritte Seite im Widerspruch zur Primitivität durch 5 teilbar.

Zu Aufgabe 5:
Nach 1.10a) und b) gilt 4 | ab und 3 | ab und somit 12 | ab.
Deshalb ist der Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}ab$ ganzzahlig und durch 6 teilbar.

Zu Aufgabe 6:
Nach dem Satz von EUKLID 1.8 gilt ohne Einschränkung $a = 2xy$; $b = x^2 - y^2$; $c = x^2 + y^2$ mit geeigneten ganzzahligen x und y. Somit berechnet sich der Umfang folgendermaßen
$U = a + b + c = 2xy + x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 2xy + 2x^2 = 2(xy + x^2) = 2x(x + y)$
was zeigt, dass der Umfang ganzzahlig und durch 2 teilbar ist.

Zu Aufgabe 7:
Die Aussage über die Fläche folgt sofort aus dem Korollar 1.11 und die andere ist offensichtlich, da für jedes Rechteck $U = 2(a + b)$ gilt.
Das PYTHAGORÄische Rechteck mit Seiten $a_1 = 3$ und $b_1 = 4$ hat den Flächeninhalt 12.
Für den Umfang ergibt sich $U_1 = 14 = 2 \cdot 7$.
Beim PYTHAGORÄischen Rechteck mit $a_2 = 5$ und $b_2 = 12$ gilt für den Umfang $U_2 = 34 = 2 \cdot 17$.
Damit gilt für $ggT(U_1, U_2) = 2$.

Zu Aufgabe 8:
Man kann eine Diagonale auswählen. Dafür gibt es 4 Möglichkeiten (die drei Seitendiagonalen, c, d, f und die Raumdiagonale d). Nur eine Seitendiagonale liefert wirklich nichts Neues, da man die Ergebnisse aus dem ersten Kapitel erhält. Wählt man 2 Diagonalen aus gibt es 6 Möglichkeiten (kurz: ce; cf; cd; ef; ed; fd).
Um 3 Diagonalen auszuwählen gibt es wieder 4 Möglichkeiten (kurz: cef; ced; cfd; efd oder man kann auch die auswählen, die man nicht dabei haben möchte und auch hier gibt es 4 Möglichkeiten).
Wählt man alle 4 Diagonalen gibt es nur diese eine Möglichkeit.
Also ergeben sich insgesamt $4 + 6 + 4 + 1 = 15$ Möglichkeiten.

Zu Aufgabe 9:
Sind die Kantenlängen a, b und h und überdies die Seitendiagonale c ganzzahlig, so gilt nach Aufgabe 7 für die Grundfläche $12 \mid A = a\,b$ und damit:
$12 \mid V = a\,b\,h$ und $2 \mid O = 2(a\,b + a\,h + b\,h)$
Für einen Quader mit $a_1 = 3$; $b_1 = 4$ und $h_1 = 1$ sind die Voraussetzungen erfüllt und es ist
$V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = 12$. Damit kann es keinen größeren Teiler aller Quader dieser Art geben.
Außerdem ist $O_1 = 2\,(a_1\,b_1 + a_1\,h_1 + b_1\,h_1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
Bei einem Quader mit $a_2 = 3$; $b_2 = 4$ und $h_2 = 2$ ist $O_2 = 2\,(a_2\,b_2 + a_2\,h_2 + b_2\,h_2) = 52 = 2^2 \cdot 13$.
Somit ist $ggT(O_1; O_2) = 2$.

Zu Aufgabe 10:
Die anderen Quader können durch Drehen bzw. Umbenennen einer der folgenden Arten zugeordnet werden:

Art	Ausgewählte Diagonalen	Anzahl der Möglichkeiten
ohne Namen	c; e; f	3
0. Art	d	1
I. Art	cd; ed; ef	3
II. Art	ce; cf; df	3
III. Art	ced; cfd; efd	3
IV. Art	cef	1
V. Art	cefd	1

Zu Aufgabe 11:
Angenommen zwei oder drei Seitenlängen sind ungerade, also ist deren quadratischer Rest modulo 4 sicher 1, dann hat $a^2 + b^2 + h^2$ als quadratischen Rest 2 oder 3, was beides nicht möglich ist, weil d eine Quadratzahl sein soll. Somit müssen mindestens zwei Seitenlängen gerade sein. D. h.: $2 \cdot 2 \mid a \cdot b \cdot h = V$
Für einen Quader mit $a = 2$; $b = 2$ und $h = 1$ sind die Voraussetzungen erfüllt und es ist $V = a \cdot b \cdot h = 4$. Damit kann es keinen größeren Teiler aller Volumina von Quadern dieser Art geben.

Zu Aufgabe 12:
Die Teilbarkeit durch 12 ist nach Aufgabe 7 klar. Man betrachtet die beiden Quader II. Art mit $a_1 = 3$, $b_1 =4$,
$h_1 = 4$ und $a_2 = 4$, $b_2 = 3$, $h_2 = 3$. Für die Volumina gilt $V_1 = 48 = 12 \cdot 4$ und $V_2 = 36 = 12 \cdot 3$.
Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Volumina ist $ggT(V_1,V_2) = 12$ und somit ist der Satz gezeigt.

Zu Aufgabe 13:
Als quadratische Reste modulo 7 ergeben sich 0, 1, 2 und 4, wie aus der Tabelle folgt:

z	z²	Rest bei der Division durch 7
$7n + 0$	$49n^2$	0
$7n + 1$	$49n^2 + 14n + 1$	1
$7n + 2$	$49n^2 + 28n + 4$	4
$7n + 3$	$49n^2 + 42n + 9$	2
$7n + 4$	$49n^2 + 56n + 16$	2
$7n + 5$	$49n^2 + 70n + 25$	4
$7n + 6$	$49n^2 + 84n + 36$	1

Zu Aufgabe 14:
Man zeigt $3^3 \mid V$ wie bei der Aussage $2^6 \mid V$ unter Benutzung von Satz 1.10b).
1.Fall $3 \mid a$ und $3 \mid b$ und $3 \mid h$: Dies zeigt $3^3 \mid abh = V$.
2.Fall $3 \nmid a$ oder $3 \nmid b$ oder $3 \nmid h$: Wegen der Symmetrie der Angaben kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $3 \nmid a$. Da (a, b, c) und (a, h, e) PYTHAGORäische Tripel sind folgt nach Satz 1.10b), dass b und h durch

3 teilbar sind. Aus $f^2 = b^2 + h^2$ folgt, dass f durch 3 teilbar ist. Es gibt somit b', h', f' aus **N** mit (b, h, f) = (3b', 3h', 3f'). Da nun (b', h', f') ebenfalls ein PYTHAGORÄisches Tripel ist, folgt dass 3 | b' oder 3 | h'. Insgesamt folgt: $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \mid a \cdot 3b' \cdot 3h' = a\,b\,h = V$

Zu Aufgabe 15:
1.Fall 5 | a oder 5 | b oder 5 | h: Hieraus folgt sofort 5 | V = a b h.
2.Fall $5 \nmid a$ und $5 \nmid b$ und $5 \nmid h$: Da (a ,b, c) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist muss nach Satz 1.10c) c durch 5 teilbar sein. Ebenso schließt man aus den PYTHAGORÄischen Tripeln (a,h,e) und (a,h,f), dass e und f durch 5 teilbar sein müssen. Also ist

$\overline{a^2} + \overline{h^2} = \overline{e^2} = \overline{0}$, da 5 | e, und $\overline{b^2} + \overline{h^2} = \overline{f^2} = \overline{0}$, da 5 | f.

Somit ist $0 = \overline{e^2} + \overline{f^2} = \overline{a^2} + \overline{h^2} + \overline{b^2} + \overline{h^2} = \overline{c^2} + 2\,\overline{h^2} = 2\,\overline{h^2}$, da 5 | c.

Da ggT(2,5) = 1, folgt $\overline{h^2} = \overline{0}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
D. h.: Der 2. Fall tritt gar nicht auf und die Behauptung ist gezeigt.

Zu Aufgabe 16:
Die quadratischen Reste modulo 11 sind nur 0, 1, 3, 4, 5 und 9.

z	z^2	Rest bei der Division durch 11
11n + 0	121n	0
11n + 1	121n + 22n + 1	1
11n + 2	121n + 44n + 4	4
11n + 3	121n + 66n + 9	9
11n + 4	121n + 88n + 16	5
11n + 5	121n + 110n + 25	3
11n + 6	121n + 132n + 36	3
11n + 7	121n + 154n + 49	5
11n + 8	121n + 176n + 64	9
11n + 9	121n + 198n + 81	4
11n + 10	121n + 220n + 100	1

Zu Aufgabe 17:
Man betrachte die folgende Tabelle:

+	$\overline{a^2} = \overline{1}$	$\overline{a^2} = \overline{3}$	$\overline{a^2} = \overline{4}$	$\overline{a^2} = \overline{5}$	$\overline{a^2} = \overline{9}$
$\overline{b^2} = \overline{1}$	$(\overline{2})$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$(\overline{6})$	$(\overline{10})$
$\overline{b^2} = \overline{3}$	$\overline{4}$	$(\overline{6})$	$(\overline{7})$	$(\overline{8})$	$\overline{1}$
$\overline{b^2} = \overline{4}$	$\overline{5}$	$(\overline{7})$	$(\overline{8})$	$\overline{9}$	$(\overline{2})$
$\overline{b^2} = \overline{5}$	$(\overline{6})$	$(\overline{8})$	$\overline{9}$	$(\overline{10})$	$\overline{3}$
$\overline{b^2} = \overline{9}$	$(\overline{10})$	$\overline{1}$	$(\overline{2})$	$\overline{3}$	$(\overline{7})$

Die Möglichkeiten in Klammern können nicht auftreten, da $a^2 + b^2$ eben ein Quadrat – nämlich c^2 – sein muss. Es verbleiben also noch 10 Fälle.

Zu Aufgabe 18:

$\overline{a^2} = \overline{1};\ \overline{b^2} = \overline{4}$	$\overline{h^2} = \overline{1}$	$\overline{h^2} = \overline{3}$	$\overline{h^2} = \overline{4}$	$\overline{h^2} = \overline{5}$	$\overline{h^2} = \overline{9}$
$\overline{e^2} = \overline{a^2} + \overline{h^2}$	$(\overline{2})$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$(\overline{6})$	$(\overline{10})$
$\overline{f^2} = \overline{b^2} + \overline{h^2}$	$\overline{5}$	$(\overline{7})$	$(\overline{8})$	$\overline{9}$	$(\overline{2})$

$\overline{a^2} = \overline{3};\ \overline{b^2} = \overline{9}$	$\overline{h^2} = \overline{1}$	$\overline{h^2} = \overline{3}$	$\overline{h^2} = \overline{4}$	$\overline{h^2} = \overline{5}$	$\overline{h^2} = \overline{9}$
$\overline{e^2} = \overline{a^2} + \overline{h^2}$	$\overline{4}$	$(\overline{6})$	$(\overline{7})$	$(\overline{8})$	$\overline{1}$
$\overline{f^2} = \overline{b^2} + \overline{h^2}$	$(\overline{10})$	$\overline{1}$	$(\overline{2})$	$\overline{3}$	$(\overline{7})$

$\overline{a^2} = \overline{4};\ \overline{b^2} = \overline{5}$	$\overline{h^2} = \overline{1}$	$\overline{h^2} = \overline{3}$	$\overline{h^2} = \overline{4}$	$\overline{h^2} = \overline{5}$	$\overline{h^2} = \overline{9}$
$\overline{e^2} = \overline{a^2} + \overline{h^2}$	$\overline{5}$	$(\overline{7})$	$(\overline{8})$	$\overline{9}$	$(\overline{2})$
$\overline{f^2} = \overline{b^2} + \overline{h^2}$	$(\overline{6})$	$(\overline{8})$	$\overline{9}$	$(\overline{10})$	$\overline{3}$

$\overline{a^2} = \overline{5};\ \overline{b^2} = \overline{9}$	$\overline{h^2} = \overline{1}$	$\overline{h^2} = \overline{3}$	$\overline{h^2} = \overline{4}$	$\overline{h^2} = \overline{5}$	$\overline{h^2} = \overline{9}$

$\overline{e^2} = \overline{a^2} + \overline{h^2}$	$(\overline{6})$	$(\overline{8})$	$\overline{9}$	$(\overline{10})$	$\overline{h} = \overline{3}$
$\overline{f^2} = \overline{b^2} + \overline{h^2}$	$(\overline{10})$	$\overline{1}$	$(\overline{2})$	$\overline{3}$	$(\overline{7})$

Zu Aufgabe 19:
Als quadratische Reste modulo 8 ergeben sich 0, falls die Zahl durch 4 teilbar ist, 1 und 4, falls die Zahl bei der Division durch 8 einen Rest 2 oder 6 lässt:

z	z²	Rest bei der Division durch 7
8n + 0	64n²	0
8n + 1	64n² + 16n + 1	1
8n + 2	64n² + 32n + 4	4
8n + 3	64n² + 48n + 9	1
8n + 4	64n² + 64n + 16	0
8n + 5	64n² + 80n + 25	1
8n + 6	64n² + 96n + 36	4
8n + 7	64n² + 112n + 49	1

Zu Aufgabe 20:
Es genügt zu zeigen, dass ab, ah und bh durch 12 teilbar sind.
a) Zuerst wird 3 | ab, 3 | ah und 3 | bh gezeigt:
Man kann nach 1.10b) ohne Einschränkung annehmen, dass 3 | a.
Im Beweis zu Satz 3.1a) wurde gezeigt, dass entweder 3 | h oder 3 | b gilt.
b) Nun zeigt man 4 | ab, 4 | ah und 4 | bh:
Man kann wieder nach 1.10a) ohne Einschränkung annehmen, dass 4 | a.
Nach dem Beweis von 3.1b) gilt entweder 4 | h oder 4 | b.
Somit gilt $3 \cdot 4 = 12 \mid (ab + ah + bh)$ und 24 | O.
Einen größeren gemeinsamen Teiler gibt es nicht, was folgendes Beispiel zeigt:
Aus $a_1 = 12$, $b_1 = 9$, $h_1 = 8$ folgt $O_1 = 552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$;
aus $a_2 = 28$, $b_2 = 21$, $h_2 = 12$ folgt $O_2 = 2352 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$.
Also gilt für den $ggT(O_1, O_2) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Zu Aufgabe 21:
Man betrachtet die beiden Quader II. Art mit $a_1 = 3$, $b_1 = 4$, $h_1 = 4$ und $a_2 = 4$, $b_2 = 3$, $h_2 = 3$.
Für die Oberflächen gilt somit $O_1 = 80 = 2^4 \cdot 5$ und $O_2 = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.
Der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Volumina ist ggT(80, 66) = 2.

Zu Aufgabe 22:
Einen größeren gemeinsamen Teiler findet man nicht, was folgendes Beispiel zeigt.
Aus $a_1 = 104$, $b_1 = 153$, $h_1 = 672$ folgt $O_1 = 377232 = 2^4 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 271$;
Aus $a_2 = 117$, $b_2 = 520$, $h_2 = 756$ folgt $O_2 = 1084824 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 61$.
Also gilt $ggT(O_1, O_2) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Zu Aufgabe 23:
Man könnte den Beweis wie bei Aufgabe 20 im Beweis von 3.4 versteckt finden. Da dies nicht so offensichtlich wie bei Aufgabe 20 ist, folgt hier der ausgeführte Beweis:
a) Zu zeigen ist, dass 4 | a b und 4 | a h und 4 | b h gilt.
1. Fall 4 | a und 4 | h: Die Behauptung gilt in diesem Fall.
2. Fall $4 \nmid a$ oder $4 \nmid h$:
2.1. Fall $4 \nmid a$:
Da (a, b, c) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist, folgt nach 1.10a), dass 4 | b. Ebenso gilt 4 | h, da (a, h, e) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist. Insgesamt gilt 4 | b und 4 | h und somit folgt die Behauptung.
2.2. Fall $4 \nmid h$: Da (a, h, e) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist folgt wiederum nach 1.8a), dass 4 | a. Außerdem gilt 4 | b, da (b, h, f) ein PYTHAGORÄisches Tripel ist. Insgesamt gilt 4 | a und 4 | b und somit die Behauptung.

b) Man zeigt 3 | ab, 3 | ah und 3 | bh wie unter a) mit Hilfe von 1.10b).
Einen größeren gemeinsamen Teiler findet man nicht, was folgendes Beispiel zeigt.
$a_1 = 240$; $b_1 = 44$; $h_1 = 117$ somit $O_1 = 87576 = 2^3 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 89$ und
$a_2 = 1008$; $b_2 = 1100$; $h_2 = 1155$ somit $O_2 = 7087080 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 59$.
Also gilt $ggT(O_1, O_2) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Abschließend möchte ich Herrn Josef Rung für sein Interesse danken.

Und vor allem sei meiner Neigungsgruppe am St.-Gotthard-Gymnasium in Niederalteich gedankt. Als ich für Daniel, Franz, Georg und nicht zuletzt Richard etwas über PYTHAGORÄische Tripel vorbereitet habe, kam mir die Idee zu dieser Verallgemeinerung.

Literatur:

A. Bartholomé, J. Rung, H. Kern [1]:	Zahlentheorie für Einsteiger, Vieweg, Braunschweig (1996)
L. E. Dickson [2]:	History of the theory of numbers; vol II, Chelsea, New York (1966)
R. K. Guy [3]:	Unsolved Problems in Number Theory, Springer, New York (1994)
A. Konwallin [4]:	Eine Methode zum Auffinden unendlich vieler Eulerscher Quader, Praxis der Mathematik **4/39** (1997), 161
M. Kraitchik [5]:	On certain rational cuboids, Scripta Math., **11** (1945), 317–326
J. Rung [6]:	Über Summen aufeinanderfolgender Quadratzahlen, vorläufige, unveröffentlichte Übersicht (1995)
P. Ribenboim [7]:	The New Book of Prime Number Records, Springer, New York (1996)
H. Scheid [8]:	Zahlentheorie, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (1994)

Anschrift des Autors:

Markus Meiringer
Herrichstr. 12 a
93049 Regensburg