Frank Heinrich

Variationen zum Satz von KLEIN

Nicht selten wird Mathematik als ein auf Theoriebildung ausgerichteter Prozess angesehen (vgl. z.B. KIEßWETTER [1]), der sich insbesondere durch folgende Teilprozesse auszeichnet: Aufwerfen von Fragestellungen (häufig erhalten durch Variieren), Bearbeiten derselben, Deuten der Lösungen und Einordnen in das bestehende Wissensnetz. Beim Durchlaufen dieses Prozesses hat es der Bearbeiter mit wesentlichen mathematischen Tätigkeiten wie Analogisieren, Begriffe bilden, Vermuten, Beweisen, Begründen, Klassifizieren, Spezifizieren, Verallgemeinern oder Systematisieren zu tun.
Folgt man dieser Sichtweise von Mathematik, sollte es im Rahmen der Förderung mathematischer Begabung vor allem darum gehen, diese Teilprozesse anzuregen und zu pflegen. Die folgenden Ausführungen mögen dafür entsprechende Anregungen liefern, besonders für die Arbeit mit Schülerinnen und Schülern, die bereits grundlegende trigonometrische Kenntnisse erworben haben
Darüber hinaus wird der interessierte Leser im Schlussteil angesprochen, den Themenkreis selbst weiter zu erschließen bzw. erschließen zu lassen und entsprechende Arbeitsergebnisse mitzuteilen.

1. Ausgangssachverhalt: Satz von KLEIN

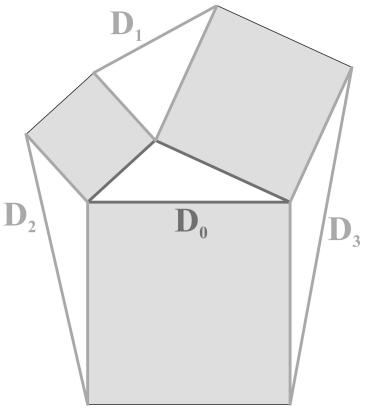


Abb. 1

In Abb. 1 sehen wir eine Figuration, die aus vier Dreiecken und drei Quadraten besteht.
Es ist überliefert (vgl. z.B. LIETZMANN [1]), dass etwa um 1935 ein polnischer Schüler aus Opole namens J. KLEIN folgenden mathematischen Zusammenhang gefunden hat:

Satz 1: Die in der Figur bezeichneten Dreiecke D_0, D_1, D_2 und D_3 sind flächeninhaltsgleich.

Diesen Satz wollen wir **Satz von KLEIN** nennen und eine Beweisskizze angeben, die sich auf elementare trigonometrische Beziehungen gründet:
Sind A_0 bis A_4 die Flächeninhalte der oben bezeichneten Dreiecke, dann ist zu zeigen, dass die Beziehung $A_0 = A_1 = A_2 = A_3$ gilt.
Wir betrachten zunächst die Dreiecke D_0 und D_1 und beweisen deren Inhaltsgleichheit (vgl. Abb. 2).

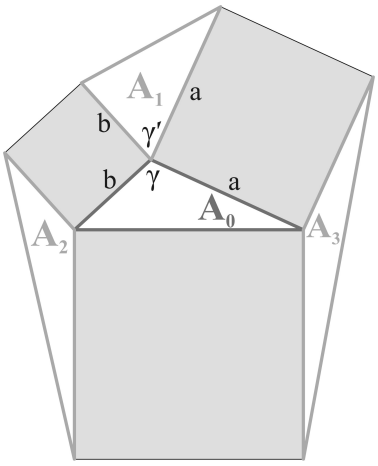


Abb. 2

Gemäß der gewählten Bezeichnungen gilt für die entsprechenden Flächeninhalte

(1) $A_0 = \frac{1}{2}\, ab \sin \gamma$ und

(2) $A_1 = \frac{1}{2}\, ab \sin \gamma'$.

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Summe der Winkel γ und γ' 180° beträgt. Auf Grund der somit geltenden Beziehung $\gamma' = 180° - \gamma$ lässt sich (2) auch schreiben als

(2') $A_1 = \frac{1}{2}\, ab \sin (180° - \gamma)$.

Wird in (2') noch die Gleichheit $\sin (180° - \gamma) = \sin \gamma$ berücksichtigt, erhält man die Beziehung $A_0 = \frac{1}{2}\, ab \sin \gamma$ und somit Gleichung (1).

Damit ist $A_0 = A_1$ nachgewiesen. Analoge Betrachtungen für A_0 und A_2 und für A_0 und A_3 führen schließlich zum oben angegebenen Satz.

An dieser Stelle sei mit Blick auf spätere Ergebnisse noch eine Umformulierung des Satzes von KLEIN vorgenommen. Dabei verwenden wir für die Dreiecke D_1, D_2 und D_3 die Bezeichnung *Zwischenraumdreiecke*.

Satz 1': Die Summe der Flächeninhalte der Zwischenraumdreiecke ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt der Ausgangsfigur.
Es gilt also auch $A_1 + A_2 + A_3 = 3\ A_0$.

Der Satz von KLEIN findet sich als Bestimmungsaufgabe in einigen gymnasialen Mathematiklehrbüchern. Dabei geht es im Rahmen eines zu erbringenden Beweises insbesondere um ein geeignetes Anwenden grundlegender trigonometrischer Kenntnisse.
Im Folgenden soll ausgeführt werden, dass die vorliegende Figuration aber noch wesentlich mehr Potenzial besitzt, um bedeutsame mathematische Tätigkeiten zu initiieren.

2. grundlegende Variationen zum Ausgangssachverhalt

„Das Erkennen eines Problems ist meist wichtiger als seine Lösung, die lediglich von dem mathematischen oder experimentellen Geschick abhängen dürfte. Neue Fragen zu stellen, neue Möglichkeiten zu eröffnen, alte Probleme aus einem neuen Blickwinkel zu sehen, erfordert schöpferische Vorstellungskraft und bedeutet wirklichen Fortschritt in der Wissenschaft."

A. EINSTEIN (so zitiert in SCHÖNPFLUG / SCHÖNPFLUG [1], S. 246)

In diesem Abschnitt wird exemplarisch gezeigt, wie durch Veränderung von Objekten des Ausgangssachverhaltes neue Arbeitsrichtungen entstehen (können). Für sinnvolle und überschaubare Arbeitsrichtungen müssen aber auch Komponenten des Satzes beibehalten werden. So wollen wir unsere Aktivitäten weiterhin auf Zusammenhänge zwischen Inhalten von Teilfiguren in Gebilden konzentrieren, die zur KLEINschen Figuration „verwandt" sind.
Methodisch betrachtet stellt sich dabei zunächst die Frage, welche Objekte diesbezüglich (sinnvoll) veränderbar sind. Nahe liegend ist es, die **Ausgangsfigur** D_0 oder die auf die Seiten der Ausgangsfigur **aufgesetzten Figuren** (Quadrate) oder die **Zwischenraumfiguren** zu verändern.
Dabei wollen wir erst einmal so verfahren, dass wir eine der drei genannten Komponenten verändern und die anderen beibehalten.

2.1 Variation: andere Zwischenraumfiguren

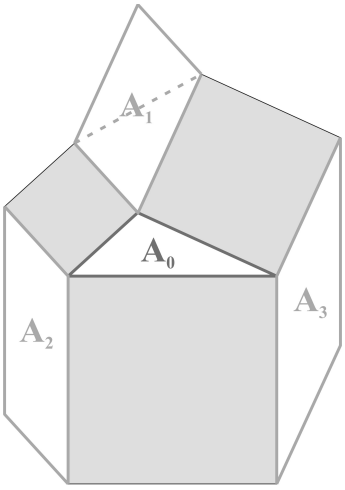


Abb. 3

Erweitert man z.B. die Zwischenraumdreiecke in der KLEINschen Figuration durch Punktspiegelung am Mittelpunkt ihrer äußeren Seiten zu Parallelogrammen (Abb. 3), erhalten wir die Gleichung $A_1 + A_2 + A_3 = 6\ A_0$.
Die Beziehung wird durch das Betrachten der nebenstehenden Abbildung unmittelbar einsichtig. Man erkennt den Zusammenhang $A_1 = 2A_0$. Analog gelten $A_2 = 2A_0$ und $A_3 = 2A_0$.

Eine andere Möglichkeit zum Nachweis der erhaltenen Flächeninhaltsbeziehung $A_1 = 2A_0$ besteht z. B. in der Verwendung des Kongruenzsatzes *(sws)* für Dreiecke. In Abbildung 4a sehen wir die Zerlegung des Parallelogramms mit dem Flächeninhalt A_1 in zwei kongruente Dreiecke. Eines davon ist stärker berandet. Wir vergleichen dieses Dreieck mit dem Ausgangsdreieck und erkennen, dass in beiden Dreiecken a und b als Seitenlängen vorkommen. Der im Ausgangsdreieck von a und b eingeschlossene Winkel ist γ.

Wenn man nun zeigen kann, dass es sich bei dem im anderen Dreieck von a und b eingeschlossenen Winkel (der in Abb. 4b mit φ bezeichnet ist) ebenfalls um γ handelt, sind gemäß (*sws*) beide

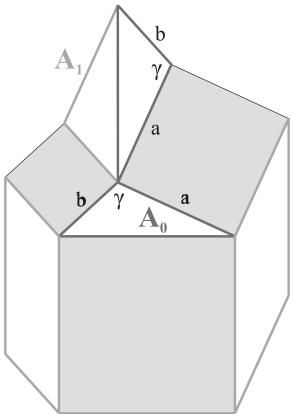


Abb. 4a

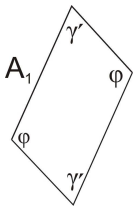


Abb. 4b

Dreiecke kongruent und damit auch flächeninhaltsgleich.

Der Nachweis ist einfach zu erbringen Wir betrachten das Parallelogramm mit dem Flächeninhalt A_1 (Abb. 4b). In dieser Zwischenraumfigur repräsentiert γ' eine Innenwinkelgröße, für die gilt:
$\gamma' = 180° - \gamma$ (1)
Diese Gleichung resultiert aus dem Fakt (vgl. Abb. 4a), dass γ, γ' und zwei rechte Innenwinkel der Quadrate über den Dreiecksseiten a und b einen Vollwinkel bilden.
Auf Grund der Innenwinkeleigenschaften im Parallelogramm gilt gemäß der gewählten Bezeichnungen in Abb. 4b die Beziehung
$360° = 2\gamma' + 2\varphi$ (2)
Aus (1) und (2) folgt schließlich $\varphi = \gamma$.

Damit sind beide Dreiecke kongruent und gemäß unserer ausgänglichen Unterteilung des Parallelogramms gilt $A_1 = 2A_0$.

2.2 Variation: andere Ausgangsfigur

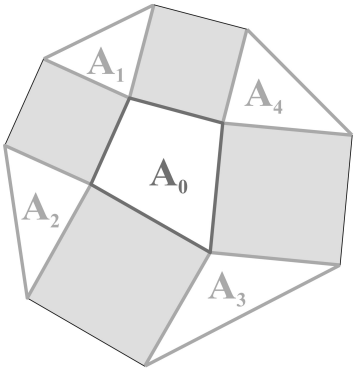


Abb. 5

Möglicherweise wird man im Hinblick auf eine andere Ausgangsfigur zuerst an ein konvexes Viereck denken. Werden in Analogie zur KLEINschen Figuration Quadrate auf dessen Seiten aufgesetzt und die Zwischenraumdreiecke gezeichnet, erhält man ein Gebilde, wie es uns Abb. 5 zeigt.
Es soll (wieder) nach Zusammenhängen zwischen Flächeninhalten gesucht werden.
Beim Betrachten der Zeichnung können verschiedene Vermutungen resultieren. Vielleicht gibt es eine Gleichheit zwischen A_0 und dem Flächeninhalt eines Zwischenraumdreiecks? Vielleicht ist die Summe der Flächeninhalte der Zwischenraumdreiecke ein natürliches Vielfaches von A_0? Oder gibt es gänzlich andere Flächeninhaltsbeziehungen?

Wie aber findet man mögliche Zusammenhänge zwischen Inhalten von Teilflächen dieser neuen Figuration? Verschiedene Methoden sind denkbar. Im Folgenden werden wir versuchen, uns (am nunmehr ja bekannten) Satz von KLEIN und an der Vorgehensweise zu orientieren, mit der wir ihn bewiesen haben.

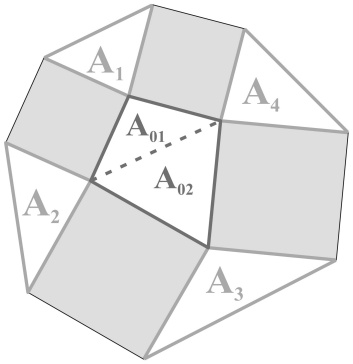


Abb. 6

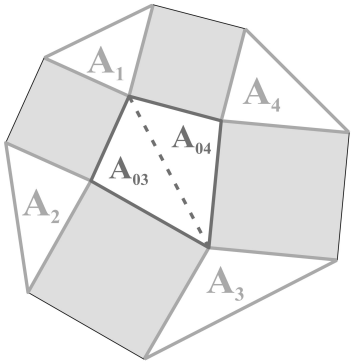


Abb. 7

Zerlegen wir das konvexe Ausgangsviereck durch Einzeichnen einer Diagonale in zwei Dreiecke (Abb. 6), können wir in Anwendung des Satzes von KLEIN folgende Flächeninhaltsbeziehungen angeben: $A_1 = A_{01}$ und $A_3 = A_{02}$. Daraus folgt $A_1 + A_3 = A_{01} + A_{02}$ und damit $A_1 + A_3 = A_0$.
Wird im Ausgangsviereck die andere Diagonale eingezeichnet (Abb. 7), resultieren in analoger Weise folgende Gleichungen: $A_2 = A_{03}$, $A_4 = A_{04}$ und damit $A_2 + A_4 = A_0$.
Bilden wir anschließend die Summe $A_1 + A_3 + A_2 + A_4$, so erhalten wir $A_1 + A_3 + A_2 + A_4 = 2A_0$. Die Summe der Flächeninhalte der Zwischenraumdreiecke ist im vorliegenden Fall also doppelt so groß wie der Flächeninhalt der Ausgangsfigur.

2.3 Variation: andere aufgesetzte Figuren

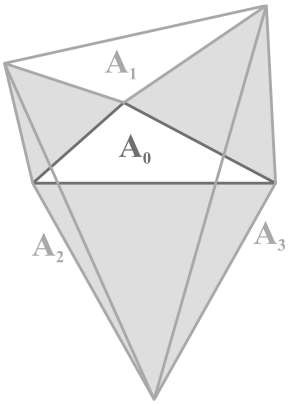


Abb. 8

Auf die Seiten des Ausgangsdreiecks können anstelle von Quadraten z. B. auch andere regelmäßige Vielecke aufgesetzt werden. Abb. 8 zeigt ein Gebilde, bei dem die aufgesetzten Figuren gleichseitige Dreiecke sind. Werden deren „äußere“ Eckpunkte durch Strecken verbunden, erhalten wir wieder Zwischenraumdreiecke. Diese weisen eine Besonderheit auf. Wie man Abb. 8 entnehmen kann, können Zwischenraumdreiecke in der aus dem Ausgangsdreieck und den aufgesetzten Dreiecken bestehenden Figuration enthalten sein. An späterer Stelle wird überdies deutlich, dass unter bestimmten Bedingungen gar kein Zwischenraumdreieck existiert.
Auf der Suche nach möglichen „interessanten“ Flächeninhaltsbeziehungen betrachten wir hier zunächst den Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten vom Ausgangsdreieck und einem Zwischenraumdreieck.

Wir orientieren uns dabei an der Größe *eines* Innenwinkels im Ausgangsdreieck, hier von γ (vgl. Abb. 9a-c) und seines Einflusses auf den Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten A_0 und A_1. Zuerst betrachten wir spezielle Winkelgrößen, die in der Dreieckslehre als bedeutsam gelten.

Fall A $\gamma = 60°$

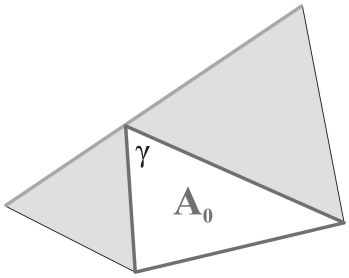


Abb. 9a

Es existiert kein Zwischenraumdreieck.

Fall B $\gamma = 120°$

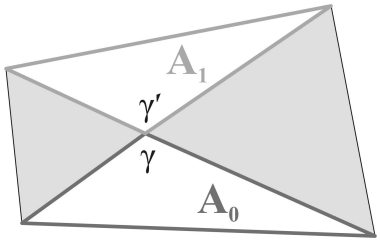


Abb. 9b

$A_1 = A_0$
Die beiden interessierenden Dreiecke sind zueinander kongruent (man denke an den Kongruenzsatz *sws*) und somit flächeninhaltsgleich.

Fall C $\gamma = 90°$

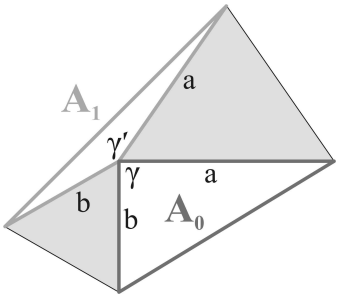


Abb. 9c

$A_0 = 2\ A_1$
Das über den rechten Winkel des Ausgangsdreiecks liegende Zwischenraumdreieck nimmt halb so viel Fläche ein wie das Ausgangsdreieck.

Zur Begründung: $A_0 = \frac{1}{2}\ ab$

$A_1 = \frac{1}{2}\ ab \sin \gamma'$ mit $\gamma' = 150°$

$= \frac{1}{4}\ ab$

Um die Fallunterscheidung zu vervollständigen, sind noch die Intervalle $0° < \gamma < 60°$, $60° < \gamma < 90°$, $90° < \gamma < 120°$ und $120° < \gamma < 180°$ entsprechend zu untersuchen.
Diese Untersuchung führt zu dem Ergebnis, dass es keine allgemeingültige (besondere) Flächeninhaltsbeziehung zwischen A_0 und A_1 gibt.

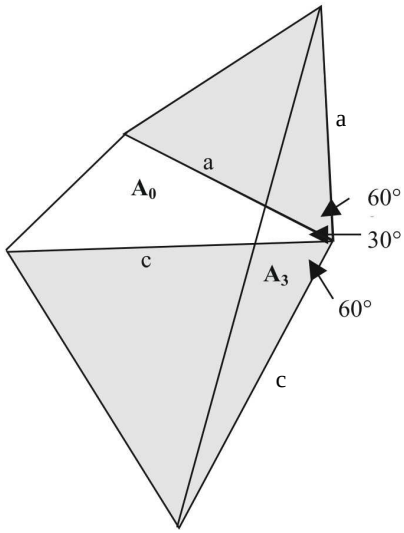


Abb. 10

Da der Satz von KLEIN jedoch eine Aussage über die Inhalte von vier Flächen liefert, macht es auch hier Sinn, die Betrachtungen auszuweiten und nach ähnlichen Zusammenhängen zu suchen.
Wir führen aber lediglich die Untersuchung zu Fall C ($\gamma = 90°$) fort, da er mit $A_0 = 2\ A_1$ einen interessanten Teilbefund erbrachte.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, welche Größen die Innenwinkel im Ausgangsdreieck, also α und β im Falle von $\gamma = 90°$ annehmen können. Auch an dieser Stelle widmen wir uns nur einem Spezialfall und wählen $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.
In der oben stehenden Übersicht erkennen wir, dass kein Zwischenraumdreieck existiert, wenn ein Innenwinkel im Ausgangsdreieck die Größe von 60° annimmt. Aus $\alpha = 60°$ folgt also $A_2 = 0$.
Zur Bestimmung von A_3 (vgl. Abb. 10) nutzen wir die bereits unter 1. verwendete Flächeninhaltsformel für Dreiecke. Die Seiten a und c des Ausgangsdreiecks sind auch Seiten des Zwischenraumdreiecks mit dem Flächeninhalt A_3. Der von ihnen eingeschlossene (Innen)Winkel beträgt 150°.

Es gelten die folgenden Beziehungen: $A_0 = \frac{1}{2} ac \sin 30°$ und $A_3 = \frac{1}{2} ac \sin 150°$. Wegen $\sin 30° = \sin 150°$ ist $A_0 = A_3$.

Aus den erhaltenen Gleichungen $A_0 = 2\ A_1$, $A_2 = 0$ und $A_0 = A_3$ folgt schließlich $A_1\ (+\ A_2) + A_3 = \frac{3}{2} A_0$.

Diese Beziehung kann als Analogon zum Satz von KLEIN für den hier gewählten speziellen Fall angesehen werden.

3. weitere Variationen zum Ausgangssachverhalt

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei weitere Variationsmöglichkeiten betrachten. Während unter 2. von drei möglichen Komponenten des Ausgangssachverhaltes jeweils nur eine verändert wurde, soll es nunmehr möglich sein, gleichzeitig mehrere zu verändern und nach entsprechenden Flächeninhaltsbeziehungen zu suchen. Wir wollen bei dieser Art Variationen von Kombination (der grundlegenden Objektveränderungsmöglichkeiten) sprechen.

3.1 Variation: Kombination

Wir verändern exemplarisch die Ausgangsfigur und die aufgesetzten Figuren. Dabei wählen wir mit dem rechtwinkligen Dreieck eine spezielle Ausgangsfigur und mit speziellen regelmäßigen Vielecken andere aufgesetzte Figuren. Wir beschränken uns hierbei aber darauf, dass die auf das Ausgangsdreieck aufgesetzten regelmäßigen Polygone zueinander ähnlich sind und wollen im Weiteren den Fall untersuchen, wenn es sich um regelmäßige Sechsecke handelt (Abb. 11).
Bevor dies geschieht werden wir vor dem Hintergrund einer späteren Vergleichbarkeit zunächst aber Bezug auf bereits vorliegende Befunde nehmen:
Wenn man auf die Seiten eines rechtwinkliges Dreiecks Quadrate aufsetzt und die Zwischenraumdreiecke konstruiert, liegt eine spezielle KLEINsche Figuration vor und es gilt u. a. für die Flächeninhalte von Ausgangsdreieck und dem Zwischenraumdreieck über den rechten Winkel die Beziehung $A_0 = A_1$.
Unter 2.3 haben wir den Fall behandelt, dass einem rechtwinkligen Dreieck gleichseitige Dreiecke aufgesetzt werden. Wir konnten zeigen, dass hierbei $A_0 = 2\ A_1$ gilt.
In beiden Fällen ist das Ausgangsdreieck rechtwinklig und die aufzusetzenden Figuren sind zueinander ähnliche regelmäßige Vielecke, so dass diese Ergebnisse unter 3.1 eingeordnet werden können.

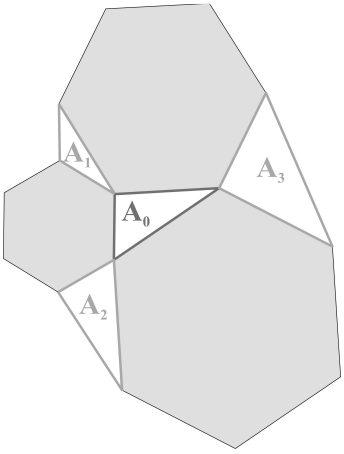


Abb. 11

Wir wollen nun der Frage nachgehen, ob es im Falle regelmäßiger Sechsecke einen ähnlich einfachen Zusammenhang zwischen A_0 und A_1 gibt. Werden die bislang verwendeten Bezeichnungen beibehalten, gilt $A_0 = \frac{1}{2}ab$. Berücksichtigt man, dass jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks 120° beträgt, lässt sich der Flächeninhalt von Zwischenraumdreieck 1 wie folgt bestimmen:

$$A_1 = \frac{1}{2}ab \sin(360° - 90° - 240°)$$

$$= \frac{1}{2}ab \sin 30°$$

$$= \frac{1}{4}ab.$$

Somit gilt wie im Falle aufgesetzter gleichseitiger Dreiecke die Beziehung $A_0 = 2\ A_1$.

Wir wollen in punkto Veränderung der Komponenten des Ausgangssachverhaltes noch einen Schritt weiter gehen und neben einer anderen (hier spezielleren) Ausgangsfigur, anderen aufgesetzten Figuren nun auch noch andere Zwischenraumfiguren betrachten. Natürlich kann dies hier wiederum nur exemplarisch erfolgen. Wir verweilen bei der Figuration von Abb. 11, wollen aber nun mit anderen Zwischenraumdreiecken (Abb. 12, Abb. 13) arbeiten.

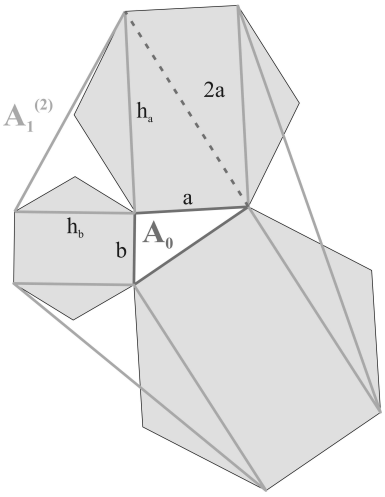


Abb. 12

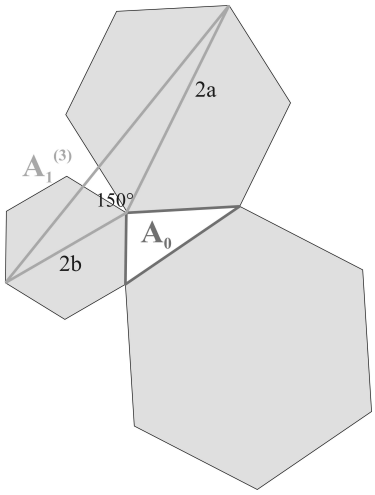


Abb. 13

Bislang waren Seiten der aufgesetzten Sechsecke auch Seiten von Zwischenraumdreiecken. In Abb. 12 und in Abb. 13 sind von den Eckpunkten des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks nach einer bestimmten Vorschrift Verbindungsstrecken zu anderen Ecken der Sechsecke gezeichnet.
Wir wollen uns wieder auf einen Vergleich zwischen A_0 und A_1 konzentrieren. Um mögliche Verwechslungen mit dem Zwischenraumdreieck 1 von Abb. 11 zu vermeiden, erhält das jeweilige Zwischenraumdreieck ein anderes Symbol. Die Bezeichnungen $A_1^{(2)}$ und $A_1^{(3)}$ in den Abb. 12 und 13 resultieren aus der Art der Verbindung des Dreieckseckpunktes mit Eckpunkten der Sechsecke.

Bezüglich der Flächeninhalte A_0 und $A_1^{(2)}$ (vgl. Abb. 12) erhalten wir folgendes Ergebnis:

$h_a = \sqrt{3}\,a$, $h_b = \sqrt{3}\,b$

$A_1^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\sqrt{3}\,b$

$A_1^{(2)} = \frac{3}{2}ab$

Wegen $A_0 = \frac{1}{2}\,ab$, gilt somit $A_1^{(2)} = 3\,A_0$.

Wird das Zwischenraumdreieck so wie in Abb. 13 gewählt, ergibt sich Folgendes:

$A_1^{(3)} = \frac{1}{2}2a\,2b\sin 150°$

$= ab$

$A_0 = \frac{1}{2}\,ab$

Somit besteht die Beziehung $A_1^{(3)} = 2A_0$.

An dieser Stelle soll eine Teilzusammenfassung für den Vergleich von A_0 mit A_1 für die drei behandelten Fälle vorgenommen werden:

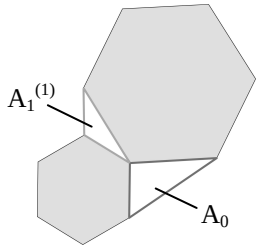


Abb. 14a

$A_1^{(1)}\ (=A_1) = \frac{1}{2}\,A_0$

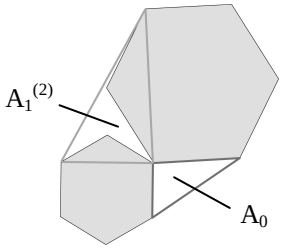


Abb. 14b

$A_1^{(2)} = 3\,A_0$

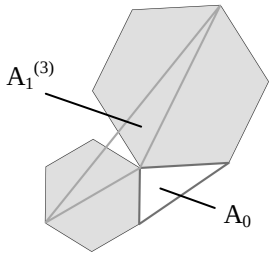


Abb. 14c

$A_1^{(3)} = 2\,A_0$

Es wird deutlich, dass auf diese Weise Einzelbefunde eine Bedeutung erhalten, die sie sonst kaum besitzen und somit zugleich ein Beitrag geleistet wird, Zusammenhänge zwischen verwandten mathematischen Situationen herzustellen.

3.2 Variation: andere Dimension

Grundsätzlich kann die Suche nach räumlichen Analogien zum Ausgangssachverhalt in verschiedene Richtungen erfolgen. Wir werden nur auf einen nahe liegenden Sachverhalt im dreidimensionalen euklidischen Raum eingehen.

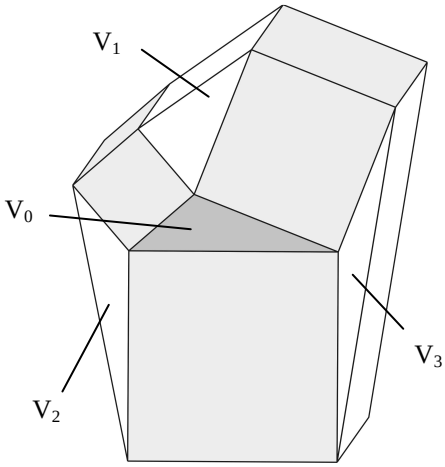
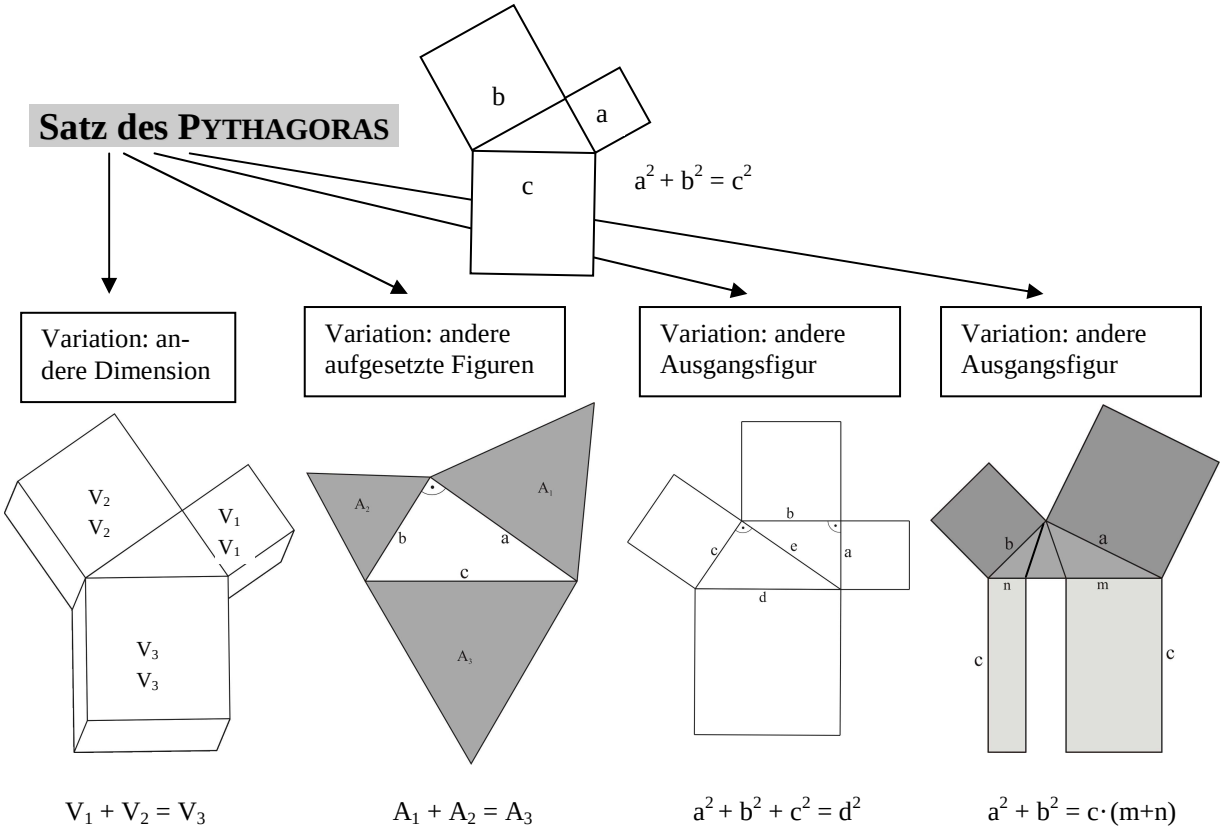


Abb. 15

Wird die ursprüngliche KLEINsche Figuration so wie in Abb. 15 verräumlicht, geht es nunmehr um die Volumengleichheit von Dreiecksprismen.
Es lässt sich für diese Prismen mit gleicher Höhe unschwer die Beziehung $V_0 = V_1 = V_2 = V_3$ nachweisen.

4. Zur Anwendung der Variationsmöglichkeiten in anderen Kontexten

Viele der in diesem Beitrag vorgeschlagenen Variationsmöglichkeiten (Variationsstrategien) können und soll(t)en auf andere mathematische Sachverhalte übertragen werden. Sie führen nicht selten zu interessanten Ergebnissen. Für Lernende ist es so möglich, die Anwendungsbreite und Eignung dieser Vorgehensweisen für das Herstellen (subjektiv) neuer Mathematik zu erfahren.
Exemplarisch sei im Schema 16 auf den Satz des PYTHAGORAS als (anderen) möglichen Ausgangssachverhalt, auf ausgewählte Variationen und denkbare Arbeitsergebnisse überblicksartig verwiesen. Natürlich ist nicht auszuschließen, dass diese Variationen bereits bei der unterrichtlichen Behandlung des Satzes von PYTHAGORAS (was in der Regel der Behandlung von Trigonometrie vorausgeht) Berücksichtigung fanden.



Schema 16

5. Ein Aufruf an die Leser

Die Mathematikinformation betrachtet es als ihr Anliegen, den Lesern sowohl Anregungen zur Förderung mathematisch interessierter/begabter Schülerinnen und Schüler zu geben als auch die Leserschaft selbst zum Betreiben und Publizieren von Mathematik anzuregen.
In diesem Beitrag wurden exemplarisch elementare Sachverhalte im Umfeld des Satzes von KLEIN behandelt. Es wurde deutlich, dass in verschiedene Richtungen weiterführend gearbeitet werden kann.
An dieser Stelle werden die Leser **aufgerufen**, die im Beitrag angerissenen Arbeitsrichtungen fortzuführen oder sich selbst Anschlussprobleme zum Satz von KLEIN auszuwählen, diese zu bearbeiten und entsprechende Ergebnisse zu veröffentlichen. Die Mathematikinformation beabsichtigt, in einem der folgenden Hefte ausgewählte Einsendungen von Lesern abzudrucken.
Es wäre schön, würden viele Leser dem Aufruf folgen und ihre Arbeiten an die Mathematikinformation senden. Auch Arbeiten von Schülerinnen und Schülern, die vielleicht im Rahmen der Förderung mathematischer Begabung mit der Beitragsthematik konfrontiert werden, sind willkommen.
Entsprechende Manuskripte erbitten wir (unter Berücksichtigung der in der Mathematikinformation abgedruckten Manuskripthinweise) bis zum **30.03. 2007** an die unten stehende Adresse.

Literatur

Heinrich, F. [1]: Ausbauen von Problemen als Kernelement mathematischen Arbeitens. In: Die Wurzel. Zeitschrift für Mathematik. Sonderheft 2000. Verein zur Förderung der Mathematik an Schulen und Universitäten e.V., Jena 2000.

Kießwetter, K. [1]: Theoriebildung und Kreativität in der Mathematik. In: Zimmermann / David / Fritzlar / Heinrich / Schmitz): Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften. Tagungsband im Rahmen der Schriftenreihe „Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math/Inf/99/29, FSU Jena 1999.

Lietzmann, W. [1]: Der Pythagoreische Lehrsatz. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft 1951.

Schönpflug, W. / Schönpflug. U. [1]: Psychologie. München: Psychologische Verlagsunion 1989.

Schupp, H. [1]: Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker 2002.

Walsch, W. [1]: Aufgabenfamilien. In: Mathematik in der Schule 33 (1995), Heft 2 und Heft 3.

Anschrift des Autors

Dr. habil. Frank Heinrich
Universität Bamberg
Didaktik der Mathematik
Markusplatz 3
D – 96045 Bamberg
frank.heinrich@ppp.uni-bamberg.de