Gesa Behnke, Tanja Fließ, Harald Löwe

Mathematische Modelle für den Zerfall von Bierschaum

Im Dezember 2001 veröffentlichte der Münchener Physiker ARND LEIKE im *European Journal of Physics* eine Arbeit[1] über den Zerfall von Bierschaum mit dem Titel *„Demonstration des exponentiellen Zerfallsgesetzes mit Hilfe von Bierschaum“* [1]. Er stellte fest, dass die Beschreibung des Bierschaumzerfalls als lineare Funktion nicht der Realität entspricht, dass also nicht die gleiche Menge Schaum in jeder Zeiteinheit zerfällt. Vielmehr folge der Zerfall einer exponentiellen Funktion, d. h. die zerfallende Schaummenge sei stets proportional zur noch vorhandenen Schaummenge[2].

Einige von LEIKES Überlegungen und Ergebnissen wollen wir hier wieder aufgreifen und weiterführen: Der Zerfall von Bierschaum eignet sich besonders gut für eine mathematische Modellierung, weil die Messungen mit einfachen Mitteln leicht durchzuführen und nachzuvollziehen sind. Außerdem birgt die Arbeit mit einem alltäglichen Gegenstand wie Bierschaum ein hohes Motivationspotential, was besonders für die fächerübergreifende Arbeit in der Oberstufe von Interesse ist.

1. Einleitung

In einem Schulbuch für den Mathematikunterricht in der 10. Klasse des Gymnasiums [2] findet sich folgende „Anwendungsaufgabe“:

"In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule verringert sich alle 15 Sekunden um 9 %.

a) Um wie viel Prozent verringert sich die Höhe der Schaumsäule in einer Minute?
b) Zu Beginn der Beobachtung beträgt die Schaumhöhe 10 cm. Bestimme die Exponentialfunktion *Zeit (in min) → Schaumhöhe (in cm).* Zeichne den Graphen.
c) Man spricht von "sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls größer als 110 Sekunden ist. Überprüfe am Graphen, ob sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vorliegt."

Diese Aufgabe gibt das Vorgehen und das Ergebnis allein schon dadurch vor, dass sie im Zusammenhang mit der „Exponentialfunktion“ gestellt wird. Es ist von Anfang an klar: Hier wird nur der Umgang mit der Exponentialfunktion geübt. Die Zahlen sind so gewählt, dass sich ein glattes Ergebnis ergibt. Dabei geht ein Teil des Realitätsbezugs verloren.

Die Untersuchung des Zerfalls von Bierschaum eignet sich nicht nur für solche „eingekleideten“ Aufgaben, sondern auch besonders für die mathematische Modellierung und auch für Simulationen, z. B. die des radioaktiven Zerfalls. Die experimentelle Untersuchung und das anschließende Modellieren des Zerfallsprozesses ist ein Vorgang, in dem Zusammenhänge und mathematische Sachverhalte von Schülern selber entdeckt werden können. Das kann hier die Erkenntnis sein, dass die Zerfallsgeschwindigkeit abhängig von der vorhandenen Menge an Schaum ist, dass eine selbstständig gefundene Differentialgleichung den Vorgang beschreibt und dass diese Zusammenhänge auch bei anderen Zerfallsprozessen zu finden sind.

Bei diesem mathematischen Modellieren anhand empirischer Daten ist die Kreativität der Schüler gefragt, da Vorgehensweise und Ergebnis nicht vorgegeben sind. Der Bierschaum wird zum „Forschungsobjekt“. Man beschränkt sich bei der Modellbildung nicht nur auf einen ganz bestimmten mathematischen Aspekt (Exponentialfunktion). Es werden verschiedene Fähigkeiten und Kenntnisse benötigt: Kenntnis der Exponentialfunktion und des zugehörigen Logarithmus, Grundlagen der Differential- und Integralrechnung, Fehlerrechnung, Entwurf und Umgang mit Wertetabellen und Diagrammen, Einführung geeigneter variabler Größen etc. Darüber hinaus sind auch experimentelle Fähigkeiten, die Planung von Versuchen, gegebenenfalls der Umgang mit dem Tabellenkalkulationsprogramm, ein Gespür für Zusammenhänge und ganz besonders ein gewisses Abstraktionsvermögen

[1] Für diese Arbeit erhielt LEIKE ein Jahr später den „Ignobel-Preis“ für Physik, der für Errungenschaften und Entdeckungen verliehen wird, die „nicht reproduziert werden können oder nicht reproduziert werden sollten“.
[2] In diesem Zusammenhang möchten wir darauf hinweisen, dass schon weit vor LEIKE jeder bayrische Physiklehrer beim Thema „radioaktiver Zerfall“ auch den Zerfall von Bierschaum angeführt hat.

wichtig. Genau wegen dieser Vielfalt müssen die Schüler neben der Fähigkeit, die genannten mathematischen Werkzeuge einzusetzen, auch selbstständig entscheiden können, wann welches dieser Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden kann. In einem Modellierungsprozess ist anfangs nicht absehbar, welche mathematischen Anforderungen auf die Schüler zukommen: Eventuell entdeckt man während des Modellierens ganz neue Zusammenhänge und muss bisher unbekannte Verfahrensweisen erlernen, um weiterzukommen.

Eine solche mathematische Modellierung erfordert einen projektartig angelegten Unterricht. Es empfiehlt sich, die Klasse in Gruppen aufzuteilen (am günstigsten sind Gruppen von 3 Personen). Jede Gruppe kann selbstständig Messungen durchführen und Modelle entwickeln, die dann zu bestimmten Zeitpunkten gesammelt und von der gesamten Klasse diskutiert werden. Dabei werden Fragen auftauchen wie: Welcher Ansatz sieht viel versprechend aus, und warum? Welchen Weg wollen wir einschlagen? Eventuell können die einzelnen Gruppen auch unterschiedliche Ansätze verfolgen, die auf verschiedenen Wegen zum Ziel führen. Die unterschiedlichen Lösungswege müssen dann vorgestellt, diskutiert, verglichen und auf Zusammenhänge hin untersucht werden. Als Abschluss der Untersuchungen wird das zur Beschreibung des Versuchs am besten geeignete Modell bestimmt.

In einem solchen Projekt muss man sich nicht auf den mathematischen Aspekt beschränken, sondern kann auch andere Fragen zum Untersuchungsgegenstand klären: Woraus besteht Bierschaum? Warum entsteht er? Wie erfolgt der Zerfall genau? Was haben Andere vor uns herausgefunden, und auf welche Weise? Eventuell können so auch Verbindungen zu anderen Fächern gezogen werden (z. B. Zerfallsprozesse in der Chemie und Physik).
Wenn das mathematische Modell fertig gestellt ist, muss noch die Frage nach der Anwendbarkeit beantwortet werden: Was kann man nun damit anfangen? Eine mögliche Anwendung dieses Modells besteht darin, verschiedene Biersorten über die Halbwertszeit des Schaumzerfalls zu charakterisieren, denn unterschiedliche Biersorten zerfallen unterschiedlich.

Diese Überlegungen treffen mit Sicherheit auf den Mathematikunterricht zu, eingeschränkt auch auf den Physik- und Chemieunterricht. Schüler erhalten so die Gelegenheit, Zusammenhänge selbst zu entdecken und sich „im Kleinen“ als Forscher zu betätigen. Natürlich können naturwissenschaftlicher Unterricht und Mathematikunterricht nicht nur aus solchen Projekten bestehen. Es bietet sich so aber eine Gelegenheit, Gelerntes anzuwenden. Die Beschäftigung mit einem so alltäglichen Stoff wie Bierschaum stellt somit für die Schüler eine hohe Motivation zum selbständigen Arbeiten im Unterricht dar.

2. Verfolgung des Bierschaumzerfalls anhand der Bildung von Flüssigkeit

Bierschaum entsteht beim Eingießen des Biers (in unserem Falle aus der Flasche) ins Glas. Der Schaum erreicht seine maximale Höhe nach wenigen Sekunden und zerfällt dann innerhalb einiger Minuten. Dabei zerplatzen die kleinen Bläschen schneller als die großen, da in ihnen der höchste Gasdruck herrscht. Ein Teil des entweichenden Gases strömt in benachbarte Bläschen, wodurch sich deren Gasdruck erhöht, so dass sie leichter platzen. Dabei bilden sich größere Blasen mit der Folge, dass zwischen ihnen die Flüssigkeit mit wachsender Geschwindigkeit abfließen kann, was zu weiterem Zerfall des Schaums führt. Zuständig für die Blasenbildung sind vermutlich unter anderem die im Bier enthaltenen Eiweiße und natürlich das Kohlenstoffdioxid.

Wer schon einmal ein Bierglas über einige Minuten hinweg beobachtet hat, weiß, dass der Schaum am Anfang relativ schnell zerfällt (es „verschwindet mehr Schaum“) und gegen Ende immer langsamer. Man wird kaum auf die Idee kommen, dass der Zerfall von Bierschaum linear geschieht – denn das würde ja bedeuten, dass pro Zeiteinheit dieselbe Menge Schaum zerfällt, was der alltäglichen Beobachtung widerspricht.

Das direkte Messen der Höhe des Bierschaums ist fehlerbehaftet und der daraus resultierende mathematische Modellierungsprozess mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Daher soll hier zunächst eine einfachere Variante vorgestellt werden: Die Verfolgung des Zerfalls von Bierschaum an Hand der Flüssigkeitsbildung. Man kann daraus dann später auf die Schaummenge zurückschließen.

Versuch 1:

Materialien: Skalierter Messzylinder à 250 ml
Stoppuhr
ggf. ein Flaschenöffner
80-100 ml Bier für eine Messung

Durchführung: Das Bier wird aus ca. 10 cm Höhe in den Zylinder gegossen und die Stoppuhr gestartet, sobald der Schaum sich nicht mehr ausdehnt. An der Skala des Zylinders wird alle 15 Sekunden die Flüssigkeitsmenge abgelesen und notiert. Es wird so lange die Zeit gemessen, bis nur noch sehr wenig oder gar kein Schaum mehr zu sehen ist.
Auch diese Messung sollte mehrmals durchgeführt werden, und zwar bei konstanter Temperatur.

Im Mathematik- oder Physikunterricht genügt es – falls die Schüler in Gruppen arbeiten – wenn jede Gruppe eine Messung macht. Die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen können dann zur Auswertung zusammengetragen werden.

Man verwendet für die Messung ein zylinderförmiges Gefäß, weil so die Schaummenge und die Flüssigkeitsmenge proportional zu ihrer Höhe sind. Man kann dann darauf verzichten, die Mengen selbst zu berechnen.

Da der Bierschaum sich unmittelbar nach dem Eingießen noch ausdehnt, wird die eigentliche Messung erst nach einigen Sekunden begonnen. Die Menge an Flüssigkeit, die sich zu diesem Zeitpunkt schon gebildet hat, wird von den ermittelten Messwerten subtrahiert, um für t = 0 s auch 0 mL Flüssigkeit angeben zu können (der Zerfall hängt in keiner Weise von der schon gebildeten Flüssigkeitsmenge ab). Außerdem wird die Gesamtmenge der Flüssigkeit abgelesen (Zeile „100 %“), nachdem der Schaum vollständig zerfallen ist (also nach etwa 30 min).

Zur besseren Auswertung werden die erhaltenen Messwerte in prozentuale Werte umgerechnet (mit der zum Ende der Messung vorhandenen Flüssigkeitsmenge als 100 %) und zusätzlich deren Durchschnittswert gebildet.

Die Daten einer mit Einbecker Brauherren Premiumpils durchgeführten Messreihe befinden sich im Anhang.

Auswertung und Mathematisierung

Aus den ermittelten Durchschnittswerten der Flüssigkeitsmenge kann die zum entsprechenden Zeitpunkt vorhandene Schaummenge berechnet werden. Dies ist hier diejenige Flüssigkeitsmenge, die noch als Schaum vorliegt und daher nicht mitgemessen wird, also jeweils

100 % - „gemessene Flüssigkeit“ in %.

Die Angaben, die man so über die zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhandene Schaummenge machen kann, entsprechen nicht dem Volumen oder der Höhe des Bierschaums. Hier kann lediglich darüber Auskunft gegeben werden, wie viel Flüssigkeit gerade in Form von Schaum vorliegt. Es ist also durchaus möglich, durch direkte Messung der Höhe des Bierschaums zu einem ganz anderen Ergebnis zu gelangen.

Nun können wir uns mit Hilfe eines Diagramms einen ersten qualitativen Überblick über den Zerfallsprozess verschaffen: Hier finden wir unsere Vermutung bestätigt: Der Zerfall von Bierschaum erfolgt offensichtlich nicht linear, denn sonst würde der Graph einer Geraden entsprechen. Man kann deutlich erkennen, dass am Anfang mehr Schaum pro Zeiteinheit zerfällt als gegen Ende der Beobachtung.

Die Fragen, die sich einem Betrachter des Diagramms zunächst stellen, sind: Woran könnte es liegen, dass der Zerfall zu Beginn schneller verläuft als gegen Ende? Und in welchem Maße wird er langsamer?

Es sollte Schülern der Oberstufe schnell klar sein, dass die Zerfallsgeschwindigkeit dem Betrag der Steigung des Graphen entspricht. Die Steigung einer Sekante gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten an. Diese lässt sich aus den erhaltenen Durchschnittswerten für die Messintervalle leicht berechnen. Man kann nun bestimmte Zeitintervalle festlegen und die zugehörige durchschnittliche

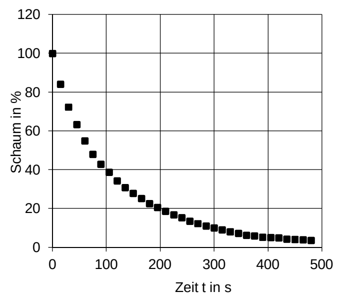

Abb. 1: Flüssigkeit in Form von Schaum während des Zerfalls

Zerfallsgeschwindigkeit berechnen. Trägt man diese Durchschnittsgeschwindigkeiten gegen die jeweilige Startzeit der Zeitintervalle auf, erhält man ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm mit einem gekrümmten Graphen. Damit wissen wir zwar, dass die Geschwindigkeit des Zerfalls sich ebenfalls nicht linear verhält, sind aber dem tatsächlichen mathematischen Modell für den Zerfall von Bierschaum noch nicht wesentlich näher gekommen.
Die Ursache dafür, dass der Zerfall immer langsamer wird, ist im Grunde genommen leicht einsichtig: Wenn viel Bierschaum vorhanden ist, zerfällt auch mehr Bierschaum, als wenn wenig Schaum vorhanden ist. Mathematisch ausgedrückt: Die Zerfallsgeschwindigkeit ist abhängig von der vorhandenen Schaummenge.

Diese Abhängigkeit kann man sichtbar machen, indem man die Durchschnittsgeschwindigkeit in jedem Intervall gegen die Schaumhöhe aufträgt, die zu Beginn des entsprechenden Intervalls vorliegt:

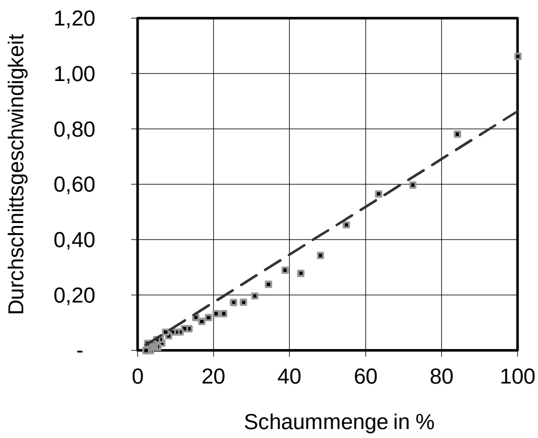

Abb. 2: Durchschnittsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Schaumhöhe

Es ergibt sich näherungsweise ein linearer Verlauf, eine Ursprungsgerade der allgemeinen Form $y : f(x) = m \cdot x$. Dies deckt sich mit der Beobachtung, dass mit abnehmender Schaumhöhe auch die Geschwindigkeit abnimmt. Ist kein Schaum mehr vorhanden, ist auch der Zerfall gleich Null. Schaummenge und Zerfallsgeschwindigkeit sind also in guter Näherung proportional zueinander.

Damit kann eine erste Gleichung aufgestellt werden. Mit t als Zeit in s, $\bar{v}$ als Durchschnittsgeschwindigkeit in %/*s* und *S* als Schaummenge in % erhält man

$$\bar{v} = k \cdot S .$$

Dabei ist k der Proportionalitätsfaktor. Er entspricht der Steigung der Geraden. Da die Geschwindigkeit stets größer als Null ist, ist auch k größer als Null. Hier ist k = 0,0086 s^{-1}. Nimmt man an, dass für kleine Messzeitintervalle $\bar{v} \approx v$ gilt, kann man schreiben

$$v(t) = k \cdot S(t) .$$

Die Momentangeschwindigkeit des Zerfalls ist gleich dem Betrag der Tangentensteigung des Graphen aus der Auftragung von *S* als Funktion von *t*, also $v(t) = |S'(t)|$. Da *S* abnimmt, ist $v(t) = |S'(t)| = -S'(t)$. Damit gilt

$$-S'(t) = k \cdot S(t) .$$

Unabhängig davon, ob man den Bierschaumzerfall nutzt, um im Mathematikunterricht die Exponentialfunktion oder auch Differenzialgleichungen einzuführen oder um im Physikunterricht den radioaktiven Zerfall zu simulieren, sollten die Schüler an dieser Stelle Überlegungen anstellen, welche Funktion hier für S(t) in Frage kommt. Man kann davon ausgehen, dass den meisten Schülern Verfahren wie die Trennung der Variablen unbekannt sind. Im Regelfall des Mathematikunterrichts sollen sie ja erst anhand dieses Beispiels darauf hin geführt werden. In jedem Fall sollte ihnen aber die Exponentialfunktion von früher schon bekannt sein, und spätestens für die reduzierte Gleichung

$$S'(t) = S(t)$$

sollte ihnen $S(t) = e^t$ als Lösung für einfallen. Genau genommen erfüllt für jede Konstante A die Funktion $A \cdot e^t$ die Gleichung.

Entsprechend ist für die Differentialgleichung $-S'(t) = k \cdot S(t)$ die Funktion

$$S(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}$$

eine Lösung, denn es gilt $S'(t) = -k \cdot A \cdot e^{-k \cdot t} = -k \cdot S(t)$.

Die Konstante k ist schon bekannt. Die letzte noch unbekannte Größe in unserem mathematischen Modell ist die Konstante A.

Für t = 0 erhält man eine Gleichung, in der *A* schon isoliert auf einer Seite der Gleichung steht:

$$S(0) = A \cdot e^{-k \cdot 0} = A$$

Die Schaumhöhe *S*(0) zum Startzeitpunkt der Messung ist 100%; also ist A = S(0) = 100%.

Damit haben wir ein mathematisches Modell gefunden, das den Zerfall von Bierschaum näherungsweise beschreibt:

$$S(t) = A \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$S(t) = 100\% \cdot e^{-0{,}0086 s^{-1} \cdot t}$$

Um zu überprüfen, wie gut das Modell die Realität wiedergibt, kann man die Werte aus den Versuchen und die berechneten Werte zum Vergleich in einem gemeinsamen Diagramm auftragen:

Die beiden Kurven haben einen fast deckungsgleichen Verlauf. Wir können mit unserem mathematischen Modell zufrieden sein.

Hier liegt ein mathematisches Modell vor, das sich die Schüler sowohl im Mathematik- als auch im Physikunterricht durchaus ohne viel Hilfe von Seiten des Lehrers erarbeiten können. Der einzige Umweg, der gegangen werden muss, ist der der Berechnung der vorhandenen Schaummenge aus der bereits gebildeten Flüssigkeit. Dafür sind die Ergebnisse der Modellierung als Exponentialfunktion recht genau, was bei der direkten Verfolgung der Höhe des Schaums nicht in gleichem Maße der Fall ist.

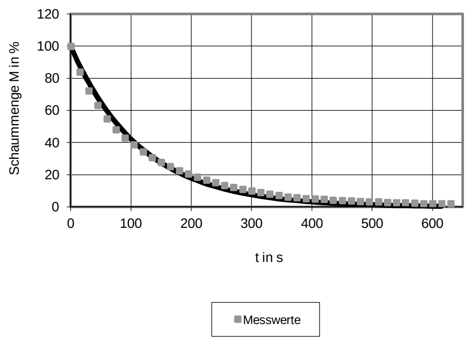

Abb. 3: Vergleich der Messwerte mit dem mathematischen Modell

Im Mathematikunterricht könnte nun der Themenbereich der Differentialgleichungen behandelt werden. Es wäre darüber hinaus möglich, Wachstumsprozesse zu behandeln: Der Verlauf der Flüssigkeitsmenge selbst ergibt eine entsprechende Kurve.
Für den Physikunterricht wäre nun der Vergleich zwischen Modell und Realität angeraten: Was ist beim radioaktiven Zerfall bzw. bei Reaktionen erster Ordnung genau so wie in unserem Bierschaum-Modell? Der Vergleich liefert die Erkenntnis: Beim radioaktiven Zerfall und bei Reaktionen erster Ordnung ist die Änderungsgeschwindigkeit proportional zur Zahl der vorhandenen Teilchen. Der Zerfall erfolgt nach einer Exponentialfunktion.

Die Differentialgleichung $-S'(t) = k \cdot S(t)$ entspricht genau einem Geschwindigkeits-Gesetz für eine Elementarreaktion erster Ordnung. Es besteht ein direkter Bezug zwischen dem mathematischen Modell zum Bierschaumzerfall und radioaktivem Zerfall bzw. Reaktionen erster Ordnung.

Möglicherweise kommen einige Schüler angesichts der Abbildung 1 von sich aus schon auf den Gedanken, es könnte sich um eine Exponentialfunktion handeln. Dies zieht natürlich die Frage nach sich, wie man das bestätigen könnte. Der oben eingeschlagene Weg würde hier zum Ziel führen, wirkt aber erzwungen. Eine einfachere Methode, um diese Hypothese zu überprüfen, ist, die Werte für die Schaummenge logarithmisch gegen *t* aufzutragen. Es ergibt sich eine Gerade der Form $y = m \cdot t + b$ mit y = ln S, m = -k und b = S(0). Mit Hilfe der Exponentialfunktion gelangt man ebenfalls zu der gesuchten Funktion:

$$\ln S = -k \cdot t + S(0) \quad \Rightarrow \quad S(t) = S(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

Dieses Vorgehen ist aber keine mathematische Modellierung im eigentlichen Sinn, sondern lediglich die Überprüfung einer Hypothese. Die Proportionalität zwischen Schaummenge und Zerfallsgeschwindigkeit kommt dabei überhaupt nicht zur Sprache.

3. Messung des Zerfalls von Bierschaum

Eine weitere, nahe liegende Möglichkeit, den Zerfall von Bierschaum zu verfolgen, besteht darin, die Schaumhöhe während des Zerfallsprozesses direkt zu messen. Allerdings ist dieses Verfahren wegen der nicht so scharf gebildeten oberen Schaumgrenze stärker fehlerbehaftet, als wenn man die Bildung der Flüssigkeit mit ihrer klaren Grenzfläche verfolgt. Die obere Grenze des Bierschaums ist nicht plan, und daher ist es auch nicht möglich, die tatsächliche Höhe des Schaums eindeutig anzugeben. Beide Verfahren liefern voneinander abweichende Ergebnisse.

Je nach dem, in welchem fachlichen Kontext der Versuch eingesetzt wird, eignet er sich bedingt dazu, den exponentiellen Zerfall zu modellieren. Im Mathematikunterricht ist dazu die Verfolgung der Flüssigkeitsbildung besser geeignet, weil die Ergebnisse dort genauer und eindeutiger sind. Der nachfolgend beschriebene Versuch eignet sich besonders, die Grenzen mathematischen Modellierens zu erforschen. Er ermöglicht die Behandlung einer weiteren Differentialgleichung, anhand derer das Verfahren der Trennung der Variablen eingeführt werden kann.

Versuch 2:

Materialien: Messzylinder à 500 ml
Stoppuhr
ein 30 cm langes Lineal
ggf. ein Flaschenöffner
150-200 ml Bier für eine Messung

Durchführung: Direkt aus der Flasche werden sofort nach dem Öffnen etwa 150 ml Bier in den Zylinder gegossen, so dass sich möglichst viel Schaum bildet. Es wird einige Sekunden gewartet, bis der Zerfall sichtbar beginnt.
Bei 30 cm Schaumhöhe wird die Stoppuhr gestartet. Alle 15 Sekunden wird die Höhe des Schaums gemessen und notiert. Achtung: Nur die Schaumhöhe messen, die Flüssigkeit unten soll nicht mitgemessen werden!
Nach 20 min können die Messungen beendet werden.

Achtung! Es ist empfehlenswert, den Versuch mehrmals durchzuführen, um wie unten erläutert mit Mittelwerten zu arbeiten. Für jeden Versuch muss die gleiche Biersorte verwendet werden, da jede Bierschaumsorte anders zerfällt. Auch die Temperatur sollte bei allen Versuchen gleich und konstant sein.
Außerdem ist es sinnvoll, stets dieselbe Person die Schaumhöhe ablesen zu lassen, da der obere Rand nicht eindeutig erkennbar ist und verschiedene Personen die Höhenmesswerte unterschiedlich interpolieren.
Im Verlauf der von der ersten Autorin durchgeführten Versuche stellte sich heraus, dass die Zerfallsgeschwindigkeit möglicherweise auch davon abhängt, in welcher Art und Weise das Bier eingegossen wird (ob langsam oder schnell etc.). Es scheint daher sinnvoll zu sein, bei mehreren Versuchen immer dieselbe Person auf möglichst dieselbe Art und Weise das Bier eingießen zu lassen.

Wie im obigen Versuch verwendet man hier ein zylinderförmiges Gefäß, da so die Schaumhöhe proportional zur Menge des Schaums ist. Man kann deshalb die Höhe des Schaums als Maß für seine Gesamtmenge verwenden.

Um besser mit den ermittelten Daten umgehen zu können, wird zu jedem Zeitpunkt der Mittelwert aus den abgelesenen Werten gebildet. Außerdem wird die Standardabweichung berechnet.

Die Daten einer mit Einbecker Brauherren Premiumpils durchgeführten Messreihe befinden sich im Anhang.

Auswertung und mögliche mathematische Modelle

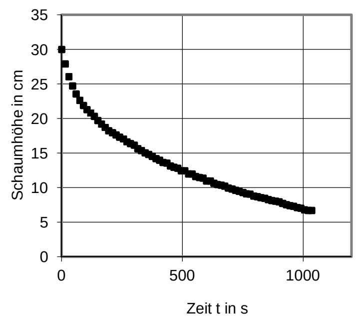

Abb. 4: Verlauf der Schaumhöhe beim Zerfall von Bierschaum

Nun kann mit Hilfe eines Diagramms ein erster Überblick über den Verlauf der Schaumhöhe gewonnen werden.
Auch hier ist deutlich erkennbar, dass der Bierschaumzerfall nicht linear erfolgt. Wenn die Schüler die Exponentialfunktion schon kennen und wissen, dass man aus dem ersten Versuch eine Exponentialfunktion für den Zerfall von Bierschaum erhält, können sie schnell zu der Vermutung gelangen, dass es sich auch hier um eine Exponentialfunktion handelt. In diesem Fall müsste sich, wenn man die Schaumhöhe logarithmisch gegen die Zeit aufträgt, eine Gerade ergeben: Aus

$$H(t) = H(0) \cdot e^{-k \cdot t}$$

ergibt sich durch Logarithmieren die Geradengleichung

$$\ln H(t) = -k \cdot t + \ln H(0)$$

mit H als Schaumhöhe in cm, t als Zeit in s und k > 0 als Geschwindigkeitskonstante in s^{-1}.
Tatsächlich liefert die logarithmische Auftragung das folgende Diagramm:

Die Gleichung der Ausgleichsgeraden, die sich aus Steigungsdreieck und dem y-Achsen-Abschnitt ergibt, lautet

$$\ln H(t) = -0{,}0013 \cdot t + 3{,}19$$

Mit $k = 0{,}0013 \frac{1}{s}$ und $H(0) = e^{3{,}19} \approx 24{,}3\,\text{cm}$

erhält man

$$H(t) = 24{,}3 \cdot e^{-0{,}0013 \cdot t}\,.$$

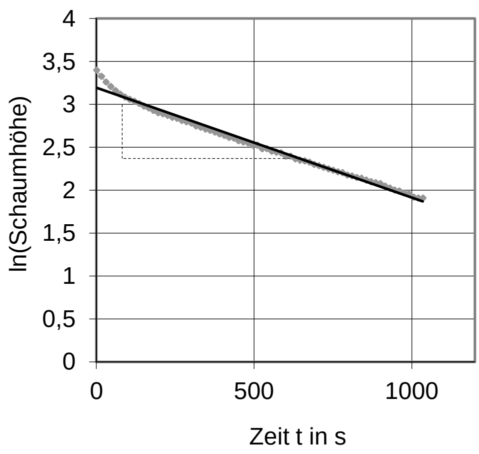

Abb. 5: Verlauf der Schaumhöhe beim Zerfall von Bierschaum

Einen ersten visuellen Vergleich des Modells mit den Messwerten können wir damit in Abbildung 6 vornehmen:

Die ermittelte exponentielle Funktion und die Messwerte verlaufen zwar nicht völlig deckungsgleich, liegen aber doch recht nahe beieinander. Unser mathematisches Modell ist zunächst durchaus zufriedenstellend.
Wenn man allerdings die Halbwertszeit τ betrachtet, stellt man fest, dass das vorliegende exponentielle Modell durchaus noch verbesserungsfähig ist.

Die Halbwertszeit τ ist bei einem exponentiellen Zerfall während des gesamten Beobachtungszeitraumes konstant. Sie ist weder von der Ausgangsmenge noch von unterschiedlichen Beobachtungsintervallen abhängig. Die Gleichung zur Berechnung von τ lautet

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}$$

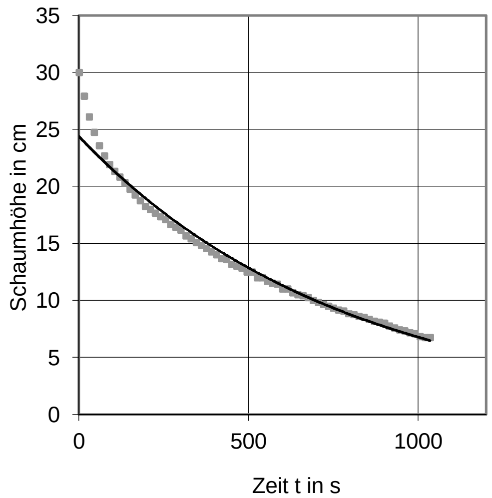

Abb. 6: Verlauf der Schaumhöhe und exponentielle Regressionskurve

Im Unterricht kann diese Gleichung gemeinsam mit den Schülern hergeleitet werden. Der Ansatz dafür ergibt sich aus

$$H(\tau) = \frac{1}{2} \cdot H(0) \qquad \text{und} \qquad H(t) = 24{,}3 \cdot e^{-0{,}0013 \cdot t}\,.$$

Im vorliegenden Fall ist

$$\tau = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{0{,}0013}\,s \approx 533\,s\,.$$

Aus den Ausgangsdaten der Messreihen kann man die jeweiligen Halbwertszeiten der Zerfallsprozesse für bestimmte Beobachtungsintervalle ablesen. Sie sind im Anhang aufgelistet (wir nehmen dafür einen Ablesefehler von ca. 10 Sekunden an). Es wird der Durchschnitt der Halbwertszeiten für die gewählten Beobachtungsintervalle gebildet und die Standardabweichung berechnet:

H(0) in cm	**H(τ) in cm**	**Durchschnitt τ in s**	**Standardabweichung**
30	15	350	25
25	12,5	454	24
20	10	552	19
15	7,5	598	38

Der Durchschnittswert aller vier angegebenen Halbwertszeiten ist 489 s. Von der Größenordnung her entspricht dies durchaus dem erwarteten Wert. Aus der obigen Tabelle geht aber auch hervor, dass die Halbwertszeit des Zerfalls von Bierschaum keineswegs während der gesamten Zerfallszeit konstant ist. Offensichtlich nimmt sie mit abnehmender Höhe kontinuierlich zu.

Das Modell des exponentiellen Zerfalls ist zwar weitaus besser zur Beschreibung des Bierschaumzerfalls geeignet als ein lineares Modell, beschreibt ihn aber offensichtlich auch nur näherungsweise. Es lohnt sich, nach einem weiteren Modell zu suchen.

Die Vermutung, dass die Zerfallsgeschwindigkeit auch hier von der vorhandenen Menge des Schaums abhängig ist, hilft weiter. Wir tragen die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zerfalls in einem Zeitintervall gegen den Anfangszeitpunkt des jeweiligen Intervalls auf.

Spätestens bei dem Versuch, eine Ausgleichsgerade einzuzeichnen, sollten die Schüler bemerken, dass der Zusammenhang zwischen Durchschnittsgeschwindigkeit und Schaumhöhe offensichtlich nicht linear ist. An dieser Stelle muss diskutiert werden, welche Art Regressionskurve am besten zur Beschreibung des Zusammenhangs geeignet ist und warum.
Eine Ausgleichskurve, die den Verlauf der Datenpunkte gut annähert, ist die quadratische Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 .$$

Mit v als Geschwindigkeit würde die Abhängigkeit zwischen der Höhe des Bierschaums H und der Zerfallsgeschwindigkeit dann lauten:

$$v(t) = k \cdot (H(t))^2$$

Die Ermittlung des Faktors k ist hier schwieriger als bei einer Geraden. Die Auftragung der Quadratwurzel der Geschwindigkeit gegen die Schaumhöhe liefert ein zu ungenaues Bild für die Ermittlung einer etwaigen Ausgleichsgeraden.

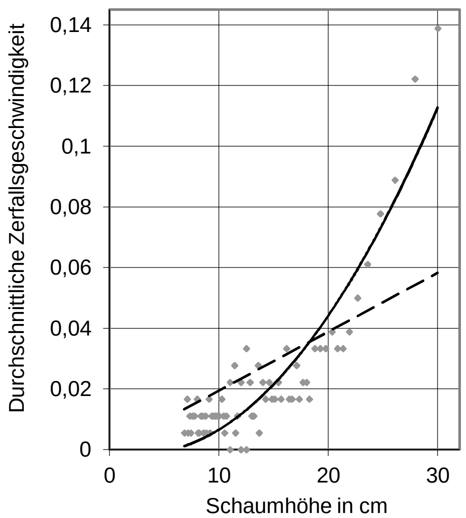

Abb. 7: Auftragung der durchschnittlichen Zerfallsgeschwindigkeit gegen die Schaumhöhe mit möglicher Regressionsgerade und Regressionskurve.

Wir stellen die Bestimmung von k daher vorerst zurück und betrachten zuerst den Ansatz für das mathematische Modell etwas genauer.

Aus $v(t) = |H'(t)| = -H'(t)$ ergibt sich also die Differentialgleichung

$$H'(t) = -k \cdot (H(t))^2 .$$

Diese Gleichung ist nicht ohne weiteres lösbar. Die Exponentialfunktion kommt nicht als Lösung in Frage. Wir benötigen also ein Verfahren, das uns die Lösung der Gleichung ermöglicht.

Für Schüler ist die selbstständige Entwicklung des Verfahrens der Trennung der Variablen eventuell mit zu großen Schwierigkeiten verbunden. Außerdem führt dies von der eigentlichen Problemstellung sehr weit weg. An dieser Stelle wird es nötig sein, den Schülern das fertige Verfahren als Werkzeug an die Hand zu geben.
Dabei verwendet man die Gleichung H'(t) = dH/dt. Die Differentialgleichung wird dabei so umgestellt, dass die Variable H nur auf der linken und die Variable t nur auf der rechten Seite der Gleichung erscheint. Beide Seiten werden dann integriert.
Für die obige Differentialgleichung ergibt sich mit Hilfe der Trennung der Variablen

$$\frac{dH}{dt} = -k \cdot H^2$$

$$\frac{1}{H^2} \cdot dH = -k \cdot dt$$

$$\int_{H(0)}^{H(t)} \frac{1}{H^2} \cdot dH = -\int_0^t k \cdot dt$$

$$-\frac{1}{H(t)} + \frac{1}{H(0)} = -k \cdot t$$

$$\frac{1}{H(t)} = \frac{1}{H(0)} + k \cdot t$$

$$H(t) = \frac{1}{\frac{1}{H(0)} + k \cdot t}$$

Dieses mathematische Modell ist von einer ganz anderen Art als das Modell zum exponentiellen Zerfall. Aber auch hier ist erkennbar: Je größer t wird, desto kleiner wird H; die Schaumhöhe zum Zeitpunkt t hängt von der Ausgangshöhe ab; H(t) nähert sich für große Zeiten t dem Wert 0 an.

Nun haben wir auch eine Möglichkeit, *k* zu bestimmen: Trägt man den Kehrwert von H(t) gegen t auf, ergibt sich die Geradengleichung

$$\frac{1}{H(t)} = k \cdot t + \frac{1}{H(0)}$$

mit k als Steigung.

Als Geradengleichung ergibt sich aus dem Diagramm

$$\frac{1}{H(t)} = 0{,}032 + 0{,}0001 \cdot t \cdot$$

Demnach gilt dann mit

$$k = 0{,}0001 \; \frac{1}{s \cdot cm}$$

und

$$H(0) = \frac{1}{0{,}032}\,cm \; = 31{,}25\,cm$$

für den Verlauf der Schaumhöhe nach dem Modell des Zerfalls 2. Ordnung

$$H(t) = \frac{1}{\frac{1}{31{,}25} + 0{,}0001 \cdot t} \; .$$

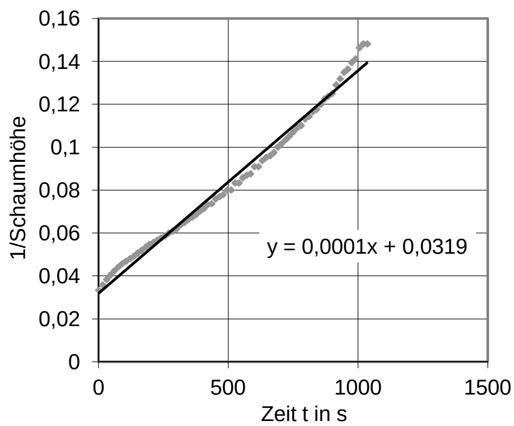

Abb. 8: Auftragung von 1/H(t) gegen t

Wie bei den früheren Verfahrensbeispielen tragen wir zunächst den Funktionsgraphen des mathematischen Modells und die Messdaten der Versuchsdurchführung in ein gemeinsames Koordinatensystem ein, um einen ersten Vergleich anstellen zu können:

Wie beim exponentiellen Modell sind auch im neuen Modell Abweichungen zwischen den Daten aus dem Modell und den Messdaten erkennbar. Aber dieses neue Modell scheint die Realität mindestens ebenso gut anzunähern wie das vorangegangene, in Bezug auf die Anfangsdaten sogar besser. Auch das neue Modell betrachten wir im Hinblick auf die Halbwertszeit des Vorgangs etwas genauer.
Es ist

$$H(\tau) = \frac{1}{2} H(0) \cdot$$

Damit erhält man:

$$\frac{1}{2}H(0) = \frac{1}{\frac{1}{H(0)} + k \cdot \tau}$$

$$H(0) \cdot \left(\frac{1}{H(0)} + k \cdot \tau \right) = 2$$

$$1 + H(0) \cdot k \cdot \tau = 2$$

$$H(0) \cdot k \cdot \tau = 1$$

$$\tau = \frac{1}{H(0) \cdot k}$$

Man kann nun mit Hilfe des Modells für verschiedene Ausgangshöhen die Halbwertszeiten berechnen. Diese sind hier zum Vergleich zusammen mit den aus den Versuchsreihen ermittelten Halbwertszeiten aufgelistet:

H(0) in cm	**H(τ) in cm**	**τ (Modell) in s**	**τ ± Standardabw. (ermittelt) in s**
30	15	333	350 ± 25
25	12,5	400	454 ± 24
20	10	500	552 ± 19
15	7,5	667	598 ± 38

Obwohl nicht alle berechneten Werte innerhalb der Standardabweichung um die ermittelten Werte liegen, liegen die Ergebnisse doch recht dicht beieinander. Aus der Annahme $H'(t) = -k \cdot (H(t))^2$ erhält man also ein Modell, das die Realität besser wiedergibt als das exponentielle Modell: Die Deckung des mathematischen Modells mit den Messwerten ist besser, und es wird zusätzlich der Aspekt der wachsenden Halbwertszeit berücksichtigt. Ein Großteil der Abweichungen des Modells von der Realität lässt sich mit der Einfachheit der Messmethode und einer gewissen Ungenauigkeit beim Ablesen der Schaumhöhe erklären.

Theoretisch könnte nun nach einem Modell gesucht werden, das den Versuch noch genauer beschreibt. Dies sollte aber nicht Ziel des Unterrichts sein, sondern

- den Schülern zu vermitteln, dass bei der Bildung eines mathematischen Modells nicht nur ein einzelner, sondern verschiedene Aspekte berücksichtigt werden müssen,
- den Schülern gegebenenfalls das Verfahren der Trennung der Variablen als ein einfaches Werkzeug zur Lösung von Differentialgleichungen zu vermitteln,
- mit Schülern die Grenzen der Mathematisierung auszuloten (ein Modell, das die Realität hundertprozentig exakt beschreibt, wird es nicht geben) und
- mit Schülern ein anspruchsvolles mathematisches Modell zu entwickeln, so dass sie die einzelnen Schritte der Modellbildung nachvollziehen können und erworbene Kenntnisse der Mathematik anwenden und vertiefen können. Dazu gehört auch die Diskussion der Güte der entwickelten Modelle.

4. Aufgaben

In diesem Abschnitt wollen wir nicht noch einige „Anwendungsaufgaben“ stellen, in denen aus fiktiven Messwerten ebenso fiktive Daten gewonnen werden, sondern vielmehr Vorschläge zu für ergänzende Aufgaben machen.

Wir beginnen mit zwei Aufgaben zum Versuchsablauf und zur Modellbildung.

> *Aufgabe 1:* Ist das Modell des exponentiellen Zerfalls von Bierschaum einer bestimmten Biersorte für jeden nur denkbaren Zeitpunkt t gültig? Wo liegen die Grenzen dieser Modellbildung?

Lösung: Für $t < 0$ ist die Lösung physikalisch sinnlos. Für sehr große t ist besteht der Schaum nur noch aus sehr wenigen Bläschen – hier wird man mit dem Modell nichts anfangen können.

Geradezu perfekt eignet sich das Bierschaumexperiment zum ersten Kontakt mit Differentialgleichungen und ihrer Behandlung. Die nächsten Aufgaben ergänzen das oben vorgestellte Prinzip „Trennen der Veränderlichen“; kommen aber ohne Integralrechnung aus.

Aufgabe 2: Während der Modellierung des Bierschaumexperiments tritt die Differentialgleichung

$$y'(x) = k \cdot y(x) \text{ mit einer Konstanten } k$$

auf. Warum bildet die Funktionenschar $y_c(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ (mit dem reellen Parameter c) die gesamte Lösungsmenge dieser Differentialgleichung?

Lösung: Zunächst stellen wir durch Einsetzen fest, dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichung tatsächlich lösen. Wir betrachten zunächst eine Lösung $y(x)$ mit Anfangswert $y(0) = 0$. Jetzt hilft nur noch ein Trick, um ohne Kenntnisse der Integralrechnung auszukommen: Wir differenzieren die Funktion $h_a(x) = y(x) \cdot y(a - x)$ nach x und erhalten

$$h'_a(x) = y'(x) \cdot y(a - x) - y(x) \cdot y'(a - x) = y(x) \cdot y(a - x) - y(x) \cdot y(a - x) = 0.$$

Damit ist $h_a(x) \equiv k_a$ eine konstante Funktion. Einsetzen von $x = 0$ zeigt $k_a = 0$, da $y(0) = 0$ nach Voraussetzung gilt. Folglich gilt $0 = h_{2a}(a) = y(a)^2$ für jedes a – und somit ist die Nullfunktion die einzige Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$.

Der allgemeine Fall ist nun schnell abgetan: Ist $y(x)$ eine Lösung mit $y(0) = c$, dann ist $y(x) - y_c(x)$ eine Lösung mit verschwindendem Anfangswert. Nach dem eben erzielten Ergebnis folgt $y(x) - y_c(x) = 0$ und damit $y(x) = y_c(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$.

Druckabfall, Temperaturerhöhung, aber auch simples Zukippen von Bier werden die Differentialgleichung natürlich verändern. Ohne Rücksicht auf solche „Anwendungsprobleme“ wollen wir hier die Gelegenheit nutzen, der allgemeinen linearen Differentialgleichung erster Ordnung auf den Leib zu rücken:

Aufgabe 3: In Abschnitt 4 wurde das Verfahren „Trennung der Veränderlichen“ als Lösungsverfahren vorgestellt. Wende dieses auf die Differentialgleichung $y'(x) = k(x) \cdot y(x)$ an, wobei $k(x)$ wenigstens stetig ist.

Lösung: Wir trennen x und y und erhalten nach Integration die Gleichung

$$\ln|y(x)| = \int k(x)dx =: K(x) + c_1 .$$

Anwenden der Exponentialfunktion und Auflösen des Betrags liefert

$$y(x) = c \cdot e^{K(x)},$$

wobei für die Konstante c je nach Vorzeichen von y(x) als e^{c_1}, $-e^{c_1}$ bzw. 0 zu nehmen ist.

Aufgabe 4: Löse das Anfangswertproblem $y'(x) = x^2 \cdot y(x), \quad y(0) = 1$.

Lösung: Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich nach den Ergebnissen der letzten Aufgabe zu $y(x) = c \cdot e^{x^3/3}$. Wegen $y(0) = 1$ muss $c = 1$ sein.

Aber auch die im letzten Abschnitt gefundene Differentialgleichung soll hier nicht unkommentiert bleiben:

Aufgabe 5: Gehört zu jedem Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$ genau eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y'(x) = -k \cdot (y(x))^2$ (mit $k > 0$) auf dem Intervall $[0, \infty)$?

Lösung: Wir nehmen zunächst an, dass $y(x)$ keine Nullstellen besitzt. Dann können wir die Differentialgleichung umformen zu

$$\left(\frac{1}{y(x)}\right)' = -\frac{y'(x)}{(y(x))^2} = k$$

Damit ergibt sich $\frac{1}{y(x)} = k \cdot x + c$ bzw. $y(x) = \frac{1}{k \cdot x + c}$. Einsetzen der Anfangsbedingung liefert $c = \frac{1}{y_0}$. Damit lautet die bislang einzige Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{k \cdot x + \frac{1}{y_0}}$$

Wir müssen noch ausschließen, dass eine der Lösungen $y(x)$ Nullstellen besitzt: Angenommen, es gibt positive Nullstellen und a ist davon die kleinste. Da $y(0)$ nach Voraussetzung positiv ist, kann a nicht 0 sein. Im Intervall $(0,a)$ ist folglich $y(x)$ stets echt größer als 0 und stimmt daher mit der oben gefundenen Lösung überein. Das liefert den Widerspruch

$$0 = y(a) = \lim_{x\to a} y(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{k\cdot x + \frac{1}{y_0}} = \frac{1}{k\cdot a + \frac{1}{y_0}} \neq 0\,.$$

Aufgabe 6: Sind die Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung $x\cdot y'(x) = 2\cdot y(x)$ ebenfalls durch den Anfangswert $y(0)=0$ eindeutig bestimmt?

Lösung: Nein! Die Lösungen lauten $y(x) = c\cdot x^2$ mit beliebigem c. Bei $x=0$ lassen sich die Zweige verschiedener Lösungen differenzierbar zu neuen Lösungen zusammensetzen:

$$y(x) = \begin{cases} c_1\cdot x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ c_2\cdot x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Für $y(0)\neq 0$ gibt es überhaupt keine Lösungen, denn $y(0) = \frac{1}{2}\cdot 0\cdot y'(0) = 0$ folgt direkt aus der Differentialgleichung.

Aufgaben zur Halbwertszeit dürfen natürlich nicht fehlen. Da wir uns in den Aufgaben vorgeblich um das erste Experiment kümmern, ist hier die Halbwertszeit für die Abnahme der im Schaum enthaltenen Flüssigkeit gemeint.

Aufgabe 7: Wie hängen Halbwertszeit τ_h und Lösung $y(x) = c\cdot e^{-k\cdot t}$ (mit $k>0$) zusammen?

Lösung: Der Ansatz $c\cdot e^{-k\cdot(t+\tau_h)} = y(t+\tau_h) = \frac{1}{2}\cdot y(t) = \frac{c}{2}\cdot e^{-k\cdot t}$ führt auf die Beziehung $\tau_h = \frac{\ln(2)}{k}$.

Aufgabe 8: Wie viele (exakte) Werte braucht man mindestens zur Berechnung der Halbwertszeit?

Lösung: Zwei. Ist nämlich $y(t_1) = c\cdot e^{-kt_1} = y_1$ und $y(t_2) = c\cdot e^{-kt_2} = y_2$, so liefert Division dieser beiden Gleichungen und anschließendes Umformen $k = \frac{\ln(y_1/y_2)}{t_2 - t_1}$. Mit der vorigen Aufgabe erhalten wir $\tau_h = \ln(2)\cdot\frac{t_2 - t_1}{\ln(y_1) - \ln(y_2)}$.

Bei der Versuchsauswertung hat man es mit fehlerbehafteten Messreihen zu tun. Es liegt daher nahe, die Fehlerabschätzungen und ein wenig Statistik in den Unterricht zu integrieren.

Aufgabe 9: Aus dem Anhang entnehmen wir die beiden Werte[3] $y(120s) = 100 - 65{,}6 = 34{,}4$ und $y(300s) = 100 - 89{,}9 = 10{,}1$. Welche Halbwertszeit ergibt sich hieraus? Wenn wir mit einem Ablesefehler von ± 2 rechnen: Wie groß ist der (maximale) Fehler, den wir bei der Halbwertszeit machen?

Lösung: Mit Aufgabe 7 erhalten wir als Halbwertszeit $\tau_h = \ln(2)\cdot\frac{300-120}{\ln(34{,}4)-\ln(10{,}1)} = 101{,}8s$. Der Nenner des Bruchs wird offenbar kleiner, wenn die beiden Messfehler die Werte 34,4 und 10,1 „näher zusammenrücken". Von allen mögliche Werten ist daher $\tau_{h,max} = \frac{\ln(2)\cdot(300-120)}{\ln(34{,}4-2)-\ln(10{,}1+2)} = 126{,}7s$ der größte und analog $\tau_{h,min} = \frac{\ln(2)\cdot(300-120)}{\ln(34{,}4+2)-\ln(10{,}1-2)} = 83{,}0s$ der kleinste. Wegen $|83{,}0-101{,}8| = 18{,}8 < |126{,}7-101{,}8| = 24{,}9$ be-

[3] Die verbleibende Schaummenge wird in Prozent der anfänglichen Schaummenge angegeben.

trägt der maximal mögliche Fehler daher 24,9 Sekunden – immerhin rund 25% des errechneten Wertes!

Aufgabe 10: Die exakte Halbwertszeit betrage bei einer Biersorte 100 Sekunden. Wir errechnen aus 10 [bzw. 20 bzw. 50] Experimenten, bei denen wir natürlich Fehler machen, jeweils die Halbwertszeit. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass nur die folgenden Fehler auftreten können (die dritte Zeile benötigen wir für die Lösung):

Fehler	-20s	-10s	±0s	+10s	+20s
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
Anzahl	k_{-20}	k_{-10}	k_0	k_{10}	k_{20}

Im Anschluss mitteln wir unsere experimentellen Ergebnisse. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir dabei das exakte Ergebnis um weniger als $\pm 5\text{s}$ (bzw. $\pm 1\text{s}$) verfehlen?

Lösung: Für die vorliegende Multinomial-Verteilung ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, dass in n Versuchen genau die in der Tabelle genannten Anzahlen auftreten

$$P = \frac{n!}{k_{-20}! \cdot k_{-10}! \cdot k_0! \cdot k_{10}! \cdot k_{20}!} \cdot 0{,}1^{k_{-20}} \cdot 0{,}2^{k_{-10}} \cdot 0{,}4^{k_0} \cdot 0{,}2^{k_{10}} \cdot 0{,}1^{k_{20}}$$

Unter Beachtung von $k_0 = n - (k_{-20} + k_{20}) - (k_{-10} + k_{10})$ erhalten wir

$$P = \frac{n!}{k_{-20}! \cdot k_{-10}! \cdot (n - k_{-20} - k_{-10} - k_{10} - k_{20})! \cdot k_{10}! \cdot k_{20}!} \cdot \left(\frac{0{,}1}{0{,}4}\right)^{k_{-20}+k_{20}} \cdot \left(\frac{0{,}2}{0{,}4}\right)^{k_{-10}+k_{10}} \cdot 0{,}4^n$$

Der Betrag des Gesamtfehlers ist dabei $F = \left| \frac{10 \cdot (k_{10} - k_{-10}) + 20 \cdot (k_{20} - k_{-20})}{n} \right|$. Die Wahrscheinlichkeit W, dass der auftretende Fehler eine vorgegebene Schranke m unterschreitet, erhält man als Summe all derjenigen P, deren zuständiges F kleiner als m ist. Jetzt drängt sich der Einsatz eines Taschenrechners förmlich auf. Dabei erhält man

Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Anzahlen für Experimente			
Anzahl n	10	20	50
Max. Fehler $\pm 5\text{s}$	0,7089	0,887	0,990
Max. Fehler $\pm 1\text{s}$	0,0934	0,197	0,364

Es scheint daher einen Grund zu geben, die Daten aus vielen Experimenten zu mitteln:

Das Programm im „Pseudo-Code“:
```
Start
Eingabe m      %maximale Fehlerschranke
Eingabe n      %Anzahl der Versuche
W:=0           %Initialisierung
für k1 von 0 bis n:
 für k2 von 0 bis n-k1:
  für k3 von 0 bis n-k1-k2:
   für k4 von 0 bis n-k1-k2-k3:
       falls abs(10*(k3-k4)+20*(k1-k2)) < m*n dann
       W:=W+n!*0.4^n/(k1!*k2!*k3!*k4!*(n-k1-k2-k3-k4)!)*0.25^(k3+k4)*0.5^(k1+k2)
       %Falls der Wert F des Fehlers die maximale Fehlerschranke m mindestens
       %erreicht, dann erhöhe W um P
   nächstes k4
  nächstes k3
 nächstes k2
nächstes k1
Ausgabe W
Ende
```

Aufgabe 11: Leite die oben verwendete Formel für die Multinomial-Verteilung her.

Lösung: Im Wesentlichen liegt eine Experiment mit $n = 5$ möglichen Ergebnissen mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_5$ vor. Wir beachten $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$ und berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass bei n unabhängigen Versuchen das i-te Ergebnis genau k_i -mal auftritt. Natürlich gilt dabei $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = n$. Die Wahrscheinlichkeit, mit n Versuchen genau k_1 -mal das erste Ergebnis zu erzielen, beträgt

$$P_1 = \binom{n}{k_1} \cdot p_1^{k_1} \cdot (1 - p_1)^{n-k_1}$$

Unter der Voraussetzung, dass in den n Experimenten genau k_1-mal das erste Ergebnis aufgetreten ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das zweite Ergebnis in einem der restlichen $n-k_1$ Versuche $\frac{p_2}{1-p_1}$; die Wahrscheinlichkeit, genau k_2-mal das zweite Ergebnis zu erhalten, ergibt sich zu

$$P_2 = \binom{n-k_1}{k_2}\cdot\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2}\cdot\left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-k_1-k_2} = \binom{n-k_1}{k_2}\cdot\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2}\cdot\left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-k_1-k_2}.$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, genau k_1-mal das erste und k_2-mal das zweite Ergebnis zu erhalten, insgesamt

$$\begin{aligned} P_1\cdot P_2 &= \binom{n}{k_1}\cdot p_1^{k_1}\cdot(1-p_1)^{n-k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{k_2}\cdot\left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{n-k_1-k_2} \\ &= \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot(n-k_1-k_2)!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2} \end{aligned}$$

Jetzt argumentiert man ähnlich weiter und erhält zu guter Letzt die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$P = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot k_4!\cdot k_5!\cdot(n-k_1-k_2-k_3-k_4-k_5)!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot p_4^{k_4}\cdot p_5^{k_5}\cdot$$
$$\cdot(1-p_1-p_2-p_3-p_4-p_5)^{n-k_1-k_2-k_3-k_4-k_5}$$

Unter Beachtung von $k_1+k_2+k_3+k_4+k_5=n$ ergibt dies die gewünschte Formel

$$P = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot k_4!\cdot k_5!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot p_4^{k_4}\cdot p_5^{k_5}$$

Anhang: Daten und Tabellen

Daten aus dem Versuch „Verfolgung des Bierschaumzerfalls anhand der Bildung von Flüssigkeit“

Zeit t in s	Reihe1 in ml	Reihe2 in ml	Reihe3 in ml	Reihe4 in ml	Reihe5 in ml	Durchschnitt in %	Standard-abweichung
0	0	0	0	0	0	-	-
15	8	7	9	8	8	15,94%	1,46%
30	15	13	14	14	13,5	27,67%	0,66%
45	20	17	19	17,5	18,5	36,63%	1,92%
60	25	20	23	23	22,5	45,12%	1,32%
75	28	24	26	27	25,5	51,93%	0,87%
90	31	26	29	29,5	28	57,09%	1,08%
105	33	28	31	32	30	61,27%	1,19%
120	36	30	33	34	32	65,62%	0,71%
135	38	32	34,5	36	33,5	69,21%	0,48%
150	40	33	36	37,5	35	72,16%	0,36%
165	41	34,5	37	39	36,5	74,78%	0,54%
180	42	36	38,5	40,5	37,5	77,38%	1,01%
195	43	37	39,5	41,5	38,5	79,38%	1,13%
210	44	38	40,5	42,5	39,5	81,38%	1,25%
225	45	38,5	41,5	43,5	40,5	83,15%	1,17%
240	46	39	42,5	44,5	41	84,73%	1,17%
255	47	40	43	45,5	42	86,52%	1,08%
270	48	40,5	43,5	46	42,5	87,70%	0,74%
285	49	41	44	46,5	43	88,88%	0,43%
300	49,5	41,5	44,5	47	43,5	89,88%	0,47%
315	50	42	45	47,5	44	90,87%	0,51%
330	50,5	42,5	45,5	48	44,5	91,87%	0,56%
345	51	43	46	48,5	44,5	92,66%	0,79%
360	51,5	43,5	46,5	49	45	93,66%	0,83%
375	52	44	46,5	49	45	94,06%	1,04%
390	52	44	47	49,5	45,5	94,66%	0,87%
405	52,5	44	47	49,5	45,5	94,84%	0,69%
420	52,5	44	47	49,5	46	95,05%	0,40%
435	53	44,5	47	50	46	95,64%	0,81%

450	53	44,5	47,5	50	46	95,84%	0,71%
465	53	44,5	47,5	50	46,5	96,04%	0,46%
480	53,5	44,5	47,5	50,5	46,5	96,42%	0,52%
100%	*55,5*	*46*	*49,5*	*52*	*48,5*	100,00%	-

Anmerkung: Neben der Standardabweichung muss bei der Diskussion der Fehlerquellen zusätzlich der geschätzte Ablesefehler von 1 ml berücksichtigt werden.

Daten aus dem Versuch „Messung des Zerfalls von Bierschaum“

In der folgenden Tabelle ist die Schaumhöhe in cm angegeben.

Zeit t in sec	Reihe 1 in cm	Reihe 2 in cm	Reihe 3 in cm	Reihe 4 in cm	Reihe 5 in cm	Reihe 6 in cm	Mittel-wert	Standard-abweichung
0	30	30	30	30	30	30	30,00	0,00
15	28	28	28	27,5	28	28	27,92	0,20
30	26	27	25,5	26	26	26	26,08	0,49
45	24,5	25,5	24	25	24,5	25	24,75	0,52
60	23	24	23	24	23,5	24	23,58	0,49
75	22	23	22,5	23	22,5	23	22,67	0,41
90	21,5	22	22	22,5	21,5	22	21,92	0,38
105	21	21,5	21,5	22	20,5	21,5	21,33	0,52
120	20,5	21	21	21,5	20	21	20,83	0,52
135	20	20,5	20,5	21	19,5	20,5	20,33	0,52
150	19,5	19,5	20	20,5	19	20	19,75	0,52
165	19	19	19,5	20	18,5	19,5	19,25	0,52
180	18,5	18,5	19	19,5	18	19	18,75	0,52
195	18	18	18,5	19	17,5	18,5	18,25	0,52
210	17,5	18	18,5	18,5	17,5	18	18,00	0,45
225	17	17,5	18	18,5	17	18	17,67	0,61
240	17	17	17,5	18	17	17,5	17,33	0,41
255	16,5	17	17,5	17,5	16,5	17,5	17,08	0,49
270	16,5	16,5	17	17	16	17	16,67	0,41
285	16	16	17	17	16	16,5	16,42	0,49
300	16	16	16,5	16,5	15,5	16,5	16,17	0,41
315	15,5	15,5	16	16	15	16	15,67	0,41
330	15	15	15,5	16	15	16	15,42	0,49
345	14,5	15	15,5	15,5	14,5	15,5	15,08	0,49
360	14,5	14,5	15	15,5	14	15,5	14,83	0,61
375	14	14,5	15	15	14	15	14,58	0,49
390	14	14	14,5	14,5	13,5	15	14,25	0,52
405	13,5	14	14,5	14	13,5	14,5	14,00	0,45
420	13,5	13,5	14	14	13	14	13,67	0,41
435	13,5	13,5	14	13,5	13	14	13,58	0,38
450	13	13	13,5	13,5	12,5	13,5	13,17	0,41
465	13	13	13,5	13	12,5	13	13,00	0,32
480	13	12,5	13,5	13	12	13	12,83	0,52
495	12,5	12,5	13	12,5	12	12,5	12,50	0,32
510	12,5	12,5	13	12,5	12	12,5	12,50	0,32
525	12	12	12,5	12	11,5	12	12,00	0,32
540	12	12	12,5	12	11,5	12	12,00	0,32
555	11,5	11,5	12	12	11,5	11,5	11,67	0,26
570	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,50	0,00
585	11,5	11,5	11,5	11,5	11	11,5	11,42	0,20
600	11	11	11	11	11	11	11,00	0,00
615	11	11	11	11	11	11	11,00	0,00
630	10,5	11	10,5	10,5	10,5	11	10,67	0,26
645	10,5	10,5	10,5	10,5	10,5	10,5	10,50	0,00
660	10,5	10,5	10,5	10,5	10	10,5	10,42	0,20
675	10	10,5	10	10,5	10	10,5	10,25	0,27
690	10	10	10	10	10	10	10,00	0,00
705	9,5	10	9,5	10	10	10	9,83	0,26
720	9,5	10	9,5	9,5	9,5	10	9,67	0,26
735	9,5	9,5	9	9,5	9,5	10	9,50	0,32
750	9	9,5	9	9,5	9,5	9,5	9,33	0,26
765	9	9,5	9	9	9	9,5	9,17	0,26
780	9	9,5	8,5	9	9	9,5	9,08	0,38
795	9	9	8,5	9	8,5	9	8,83	0,26
810	8,5	9	8,5	9	8,5	9	8,75	0,27
825	8,5	9	8	8,5	8,5	9	8,58	0,38

Zeit t in sec	Reihe 1 in cm	Reihe 2 in cm	Reihe 3 in cm	Reihe 4 in cm	Reihe 5 in cm	Reihe 6 in cm	Mittel-wert	Standard-abweichung
840	8,5	9	8	8,5	8,5	8,5	8,50	0,32
855	8,5	8,5	8	8,5	8	8,5	8,33	0,26
870	8	8,5	7,5	8,5	8	8,5	8,17	0,41
885	8	8,5	7,5	8	8	8,5	8,08	0,38
900	8	8,5	7,5	8	7,5	8,5	8,00	0,45
915	8	8	7	8	7,5	8	7,75	0,42
930	7,5	8	7	8	7	8	7,58	0,49
945	7,5	8	6,5	7,5	7	8	7,42	0,58
960	7,5	8	6,5	7,5	7	7,5	7,33	0,52
975	7,5	7,5	6,5	7,5	6,5	7,5	7,17	0,52
990	7,5	7,5	6	7,5	6,5	7,5	7,08	0,66
1005	7	7,5	6	7	6,5	7	6,83	0,52
1020	7	7	6	7	6,5	7	6,75	0,42
1035	7	7	6	7	6,5	7	6,75	0,42

Anmerkung: Da die obere Grenze der Schaumkrone nicht eindeutig festlegbar ist, wurden die Messwerte in 0,5 cm-Schritten notiert. Es ist daher bei der Fehlerbetrachtung zusätzlich ein Ablesefehler von ± 0,5 cm einzukalkulieren.

Halbwertszeiten aus den einzelnen Messreihen

Hier kann zusätzlich ein Ablesefehler von 10 Sekunden angenommen werden.

		τ in s für...					
H(0)	H(τ)	Reihe 1	Reihe 2	Reihe 3	Reihe 4	Reihe 5	Reihe 6
30	15	330	337	352	375	322	382
25	12,5	460	445	490	457	417	457
20	10	547	563	532	532	577	562
15	7,5	630	648	540	592	585	593

Literatur

[1] A. Leike: Demonstration of the exponential decay law using beer froth. European Journal of Physics 23 (2001), S. 21-26.

[2] Lambacher Schweizer 10, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium. Ausgabe Nordrhein-Westfalen, Ernst Klett Verlag, S. 70.

Anschriften der Autoren:

Gesa Behnke
G.Behnke@gmx.de

Tanja Fließ
TanjaFliess@gmx.de

Harald Löwe
TU Braunschweig
Institut Computational Mathematics
Pockelsstraße 14
38106 Braunschweig
h.loewe@tu-bs.de