Hans Walser

Innen und Außen

Ausgehend vom Problem der Innenwinkelsumme im Fünfeck wird eine Strategie besprochen, welche mit Hilfe der Außenwinkel arbeitet. Dadurch wird auch die „andere Seite“ mit in die Betrachtung gezogen. Viele Probleme lassen sich dadurch allgemeiner und konsistenter angehen. Eine weitere wichtige Strategie ist der Einbezug von dynamischen Überlegungen, welche zwar anspruchsvoller, aber auch eleganter sind als additive statische Berechnungen. Die Bedeutung des Begriffs der Invarianten wird hervorgehoben. Exemplarisch werden Sternfiguren behandelt.

Ein heuristisches Grundprinzip ist der Perspektivenwechsel. Jeder neue Standpunkt bringt neue Einsichten. Exemplarisch für dieses Prinzip wird die Berechnung von Innenwinkelsummen in ebenen Vielecken besprochen. Eine einfache gemeinsame Strategie ist, zunächst nicht die Innenwinkel, sondern die Außenwinkel zu untersuchen. Dabei wird der topologische Begriff der Umlaufszahl implizit verwendet. Das übliche Zerlegen der Figuren in Figuren kleinerer Eckenzahl entfällt.

Der letzte Abschnitt enthält ausführliche Lösungshinweise zu den Aufgaben. Bei offenen Aufgaben werden exemplarisch mehrere Lösungsvarianten angegeben, die aber natürlich nicht abschließend sind.

Zu dieser Arbeit bin ich angeregt worden durch HEINRICH [5], wo dieselbe Thematik von einer anderen Seite her angegangen wird.

1. Vielecke

1.1 Das Fünfeck

Im Fünfeck der Abbildung 1 sind die Innenwinkel schwarz und die Außenwinkel weiß eingezeichnet. Je ein Innenwinkel und sein zugehöriger Außenwinkel messen zusammen 180°. Sämtliche eingezeichneten Winkel messen zusammen 5 · 180°.

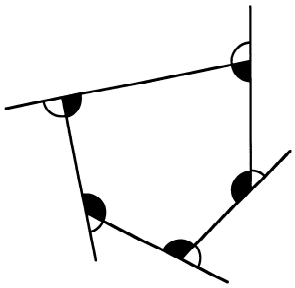

Abb. 1 Innenwinkel und Außenwinkel

Für die Summe der schwarzen Innenwinkel gibt es Daten, die aber unterschiedlich sind bei Dreiecken (180°), Vierecken (360°), Fünfecken (540°, wenn man der Reihe trauen darf?) usw.

Aufgabe 1: Wie groß ist die Summe der Außenwinkel? Warum ist das so?

Nachdem wir gesehen haben, dass die Summe der Außenwinkel 360° ist, können wir leicht auch die Summe der Innenwinkel berechnen. Wir bezeichnen die Außenwinkelsumme mit A und die Innenwinkelsumme mit I. Mit diesen Bezeichnungen gilt in unserem Fünfeck:

Im 5-Eck:	Im n-Eck:
$A = 360°$	$A = 360° = 2\pi$
$A + I = 5 \cdot 180°$	$A + I = n \cdot 180° = n\pi$
$I = 5 \cdot 180° - 360° = 5 \cdot 180° - 2 \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$	$I = (n-2) \cdot 180° = (n-2)\pi$

1.2. Invarianten

Die Mathematiker sind bestrebt, allgemeine Aussagen im Sinne von Invarianten zu machen. Verlässliches Wissen, das in allen Lebenslagen gilt. Nun ist die Innenwinkelsumme im Dreieck tatsächlich eine Invariante,

aber eben doch nur beschränkt auf das Dreieck. Im Fünfeck haben wir die Innenwinkelsumme 540° gefunden, zwar auch eine Invariante, aber auf das Fünfeck beschränkt. Die eigentliche Invariante in diesem Kontext ist offensichtlich die Außenwinkelsumme, welche unabhängig von der Eckenzahl 360° oder 2π beträgt. Die Innenwinkelsumme kann davon abgeleitet werden.

Aufgabe 2: In einem Dreieck ABC der Abbildung 2 halten wir die beiden Ecken A und B fest. Die Ecke C darf bewegt werden. Formulieren Sie nun einige Invarianten mit den Seiten a und b und überlegen Sie sich, was dies für die Ecke C bedeutet.

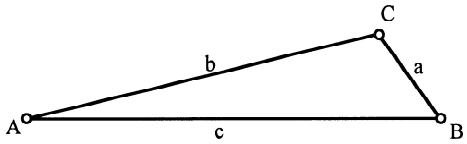

Abb. 2 Die Ecke C darf bewegt werden

1.3 Vieleck mit Delle

Durch die Delle (Abb. 3) haben wir eine zusätzliche Ecke erhalten, aber eine nach innen. Diese Ecke hat einen gewaltigen Innenwinkel.

Viel interessanter ist aber die Tatsache, dass sich an dieser Ecke die Nase des Pinocchio (siehe Lösung zur Aufgabe 1) nicht wie an den übrigen Ecken im Kreiselsinn dreht, sondern im Gegenkreiselsinn wie bei einem Geisterfahrer.

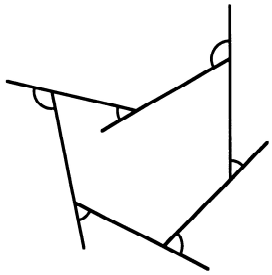

Abb. 3 Mit Delle

Die Mathematiker nennen das den negativen Drehsinn, und wenn wir den in der Figur eingezeichneten Winkel von der Summe der Außenwinkel subtrahieren, sind wir wieder sauber bei 360°. Wir müssen diesen innen liegenden „Außen"-winkel also negativ rechnen. Hier zeigt sich einmal mehr, wie elegant sich mit negativen Zahlen arbeiten lässt.

Ein Vieleck, das nur Ecken nach außen hat, wird als konvex bezeichnet. Ein Vieleck mit Dellen ist nicht konvex. Trotzdem gilt, unter Einsatz von negativen Zahlen:

$$A = 360° = 2\pi$$

$$A + I = n \cdot 180° = n\pi$$

$$I = (n-2) \cdot 180° = (n-2)\pi$$

1.4 Ein Stern mit fünf Zacken

Die Außenwinkel des Sterns der Abbildung 4 sind offensichtlich größer geworden, die Innenwinkel kleiner. Nun ist auch die Invariante der Außenwinkelsumme ins Wanken geraten.

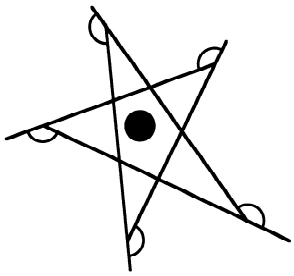

Abb. 4 Stern

Aufgabe 3: Wie groß ist nun die Außenwinkelsumme? Warum ist das so?

1.5 Ein regelmäßiger Stern

Der Stern der Abbildung 5 hat 17 Ecken, die gleichmäßig auf einem Kreis verteilt sind. Jeder Eckpunkt ist jeweils mit den beiden drittnächsten Eckpunkten durch eine Kante verbunden. Dieser Stern wird mit dem Symbol $\left\{\frac{17}{3}\right\}$ bezeichnet.

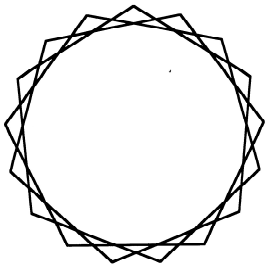

Abb. 5 Stern

Aufgabe 4: Was lässt sich über die Winkel in diesem Stern sagen?

Mit dem Symbol $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ wird der Stern bezeichnet, der n regelmäßig auf einem Kreis angeordnete Ecken hat und bei dem von jeder Ecke aus jeweils die nächste k-te Ecke (gezählt im positiven Drehsinn) geradlinig angefahren wird. Es werden also $k-1$ Ecken übersprungen (vgl. Coxeter [3], S. 93, Coxeter [4], S. 56, Heinrich [5]).

In der Regel wird $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ vorausgesetzt.

Aufgabe 5: Wie groß sind Außenwinkelsumme und Innenwinkelsumme im Stern $\left\{\frac{n}{k}\right\}$?

2. Noch mehr Sterne

2.1 Zerfallende Sterne

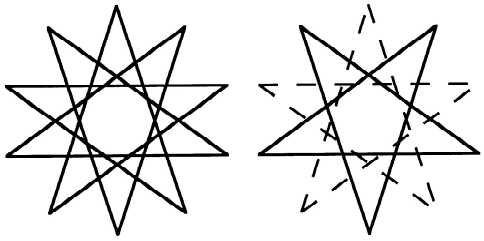

Abb. 6 Ein zerfallender Stern

Die Formel $I = (n-2k)\cdot 180° = (n-2k)\pi$ gilt auch dann, wenn der Stern in Teilsterne zerfällt. Das einfachste Beispiel dazu ist $\left\{\frac{10}{4}\right\}$, das in zwei Sterne von der Form $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ zerfällt (Abb. 6). Die totale Innenwinkelsumme ist 360°.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass bei unserem Symbol das Bruchrechnen nicht gilt. Es ist doch: $2\cdot\frac{5}{2} = 5 \neq \frac{10}{4}$

Für unser Symbol passt aber $p\left\{\frac{n}{k}\right\} = \left\{\frac{pn}{pk}\right\}$.

Es gelten also Regeln, die wir vom Erweitern und Kürzen der Brüche her kennen. Das „Kürzen“ bedeutet geometrisch, dass wir aus den Zerfallskomponenten einen Repräsentanten herausfiltrieren.

7.2 Im Zwölfeck

Im Zwölfeck (Abb. 7) schließlich kommen alle Ladenhüter der Schulgeometrie vor.

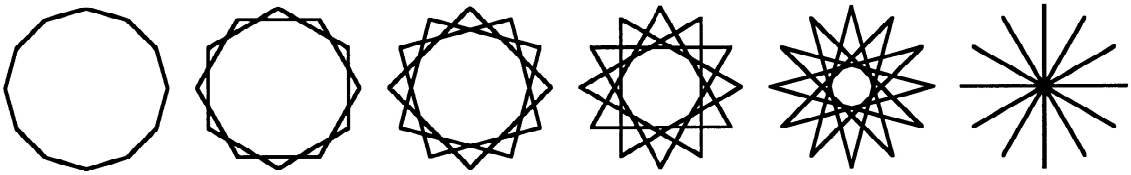

Abb. 7 Zwölfecke

Die Abbildung 7 zeigt der Reihe nach: $\left\{\frac{12}{1}\right\}$, ein regelmäßiges Zwölfeck mit der Innenwinkelsumme 1800°.

$\left\{\frac{12}{2}\right\}$, zwei regelmäßige Sechsecke, totale Innenwinkelsumme 1440°.

$\left\{\frac{12}{3}\right\}$, drei Quadrate, totale Innenwinkelsumme 1080°.

$\left\{\frac{12}{4}\right\}$, vier gleichseitige Dreiecke, totale Innenwinkelsumme 720°.

$\left\{\frac{12}{5}\right\}$, zerfällt nicht, totale Innenwinkelsumme 360°.

$\left\{\frac{12}{6}\right\}$, 6 Durchmesserstrecken, die Innenwinkelsumme ist Null.

Aufgabe 6: Die Frage ist, was nun wohl $\left\{\frac{12}{7}\right\}$ bedeutet.

2.3 Pentagramme noch und noch

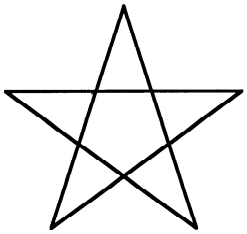

Abb. 8 Pentagramm

Die Symbole $\left\{\frac{5}{2}\right\}$, $\left\{\frac{5}{3}\right\}$, $\left\{\frac{5}{7}\right\}$, $\left\{\frac{5}{8}\right\}$ (wie geht es weiter?) führen bildlich alle zum gleichen Pentagramm der Abbildung 8.
Zunächst ist man versucht, das Problem der verschiedenen Schreibweisen für dieselbe Figur mit Scheuklappen auszublenden: In $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ verlangen wir $k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ($\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ist hierbei die größte natürliche Zahl, die kleienr als $\frac{n}{2}$ ist). Das erinnert aber an die chinesische Mauer und ähnliche Versuche, mit Sperranlagen eine Horizonterweiterung zu unterbinden.

Aufgabe 7: Eine genaue Analyse dessen, wie Pinocchio etwa bei $\left\{\frac{5}{7}\right\}$ knapp vor Erreichen einer Spitze sich die nächste Richtung durch Abzählen überlegt, ist sehr lehrreich.

2.4 Die Mistfliege

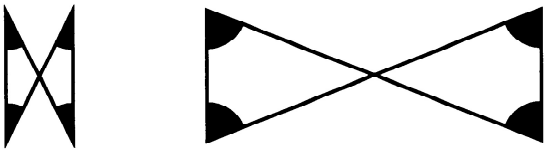

Abb. 9 Zwei Mistfliegen

Ein sich überschlagendes Viereck wird als „Mistfliege“ bezeichnet. Es sind auch Miststücke, weil die Summe der eingezeichneten Winkel nicht konstant ist. Es sind alle Werte zwischen 0° und 360° möglich.

Aufgabe 8: Wie lässt sich die Invariante bei den Mistfliegen retten?

3. Stochastik

Der Begriff des Innenwinkels führt auch in der Stochastik zu einem Problem, das sich mit dem Außenwinkel elegant lösen lässt.

3.1 Beschreibende Statistik

In der beschreibenden Statistik wird zu einer Stichprobe $x_i, i = 1, \ldots, n$ zunächst der Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ eingeführt und dann die empirische Varianz $s_x^2 = \mathrm{var}(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Zu Messwertpaaren (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,n$ gibt es die empirische Kovarianz $\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

sowie den Korrelationskoeffizienten: $r(x,y) = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{s_x s_y}$

3.2 Link zur Geometrie

Mit den Vektoren $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{bmatrix}$ können die statistischen Begriffe wie folgt geschrieben werden:

$s_x = \frac{1}{\sqrt{n-1}}|\vec{x}|, s_y = \frac{1}{\sqrt{n-1}}|\vec{y}|, \operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n-1}\vec{x}\vec{y}, r(x,y) = \frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$

Die Formel $r(x,y) = \frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ erinnert an die Formel $\cos(\gamma^*) = \frac{\vec{x}\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$ zur Berechnung des Zwischenwinkels γ^* zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ (Abb. 10).

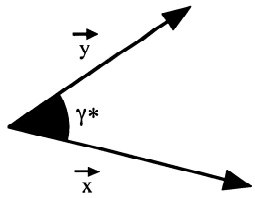

Abb. 10 Zwischenwinkel

In dieser Sicht ist $r(x,y) = \cos(\gamma^*)$. Daraus folgt unmittelbar $-1 \le r(x,y) \le +1$.

Positive Korrelation bedeutet, dass die beiden Vektoren einen spitzen Winkel einschließen, negative Korrelation bedeutet, dass die beiden Vektoren einen stumpfen Winkel einschließen. Keine oder sehr kleine Korrelation heißt, dass die beiden Vektoren orthogonal oder nahezu orthogonal sind. Umgangssprachlich: Die eine Messreihe steht „quer“ zur anderen, die beiden Messreihen sind unabhängig voneinander. So weit, so gut.

3.3 Rechnungen

Nun ist weiter:

$$s_{x+y}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i + y_i) - (\bar{x} + \bar{y})\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right] = s_x^2 + 2\operatorname{cov}(x,y) + s_y^2 = s_x^2 + 2s_x s_y r(x,y) + s_y^2$$

Also $s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_x s_y r(x,y)$.

Falls die beiden Messreihen unabhängig sind, ist $r(x,y) = 0$, und wir haben: $s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2$

3.4 Pythagoras und Co

Da ist es nahe liegend, an den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck zu denken (Abb. 11).

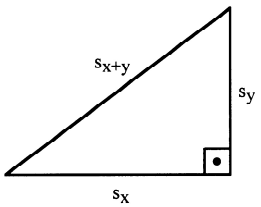

Abb. 11 Satz des Pythagoras

Im positiv oder negativ korrelierenden Fall wäre es nun schön, wenn die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras gelten würde, der Kosinussatz also. Ich habe in der Schule den Kosinussatz in der Form

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ kennen gelernt und später jahrzehntelang so unterrichtet; dabei hatte ich immer ein ästhetisches Unbehagen über das Minuszeichen.

In unserem statistischen Beispiel gilt
$s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2 + 2s_x s_y r(x,y)$,
und wir haben festgestellt, dass es sinnvoll ist, den Korrelationskoeffizienten als Kosinus eines Winkels anzusehen. Das Verblüffende ist, dass wir hier aber ein Pluszeichen haben!

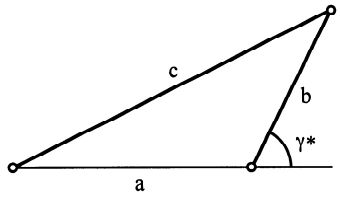

Abb. 12 Außenwinkel

Der „Fehler“ liegt in einem falschen Winkelkonzept beim Kosinussatz. Verwenden wir nämlich den Außenwinkel gemäß Figur, gilt ebenfalls das Pluszeichen: $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\gamma^*)$

Aufgabe 9: Wie lässt sich dies beweisen?

4. Lösungshinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1:
Die Summe der weißen Außenwinkel ist immer 360°, unabhängig davon, ob es sich um ein Dreieck, Viereck, Fünfeck usw. handelt. Es gibt viele Wege, dies einzusehen. Im Folgenden eine exemplarische Auswahl.

a) Il giro di Pinocchio. Der Rundgang des Pinocchio:
Im letzten Kapitel des *Pinocchio* (Collodi [2]) muss der arme Pinocchio in einem Drehgöpel schuften, um ein Glas Milch für seinen Vater zu verdienen. Nach jeder Runde hat sich natürlich auch die Nase von Pinocchio um eine volle Drehung, also um 360°, gedreht.

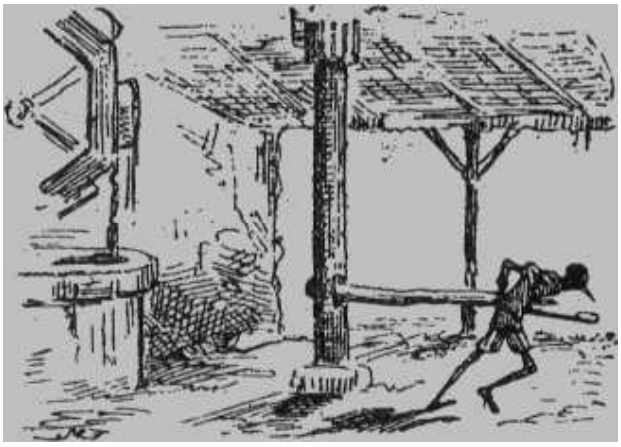

Abb. 13a Pinocchio im Göpel
Illustration nach Enrico Mazzanti aus der Erstausgabe von 1883

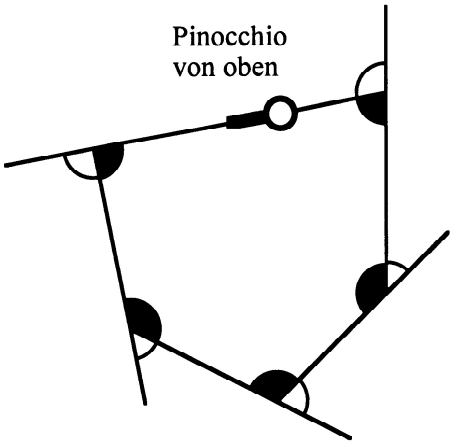

Abb. 13b Pinocchio auf dem Fünfeck

Nun stellen wir Pinocchio auf den Rand des Fünfeckes (Abb. 13b) und heißen ihn, darauf herumzugehen. Wie ändert sich die Richtung von Pinocchios Nase bei einem Umlauf? An jeder Ecke ändert die Richtung um den weißen Außenwinkel. Die Gesamtänderung ist natürlich 360°. Es ist klar, dass diese Überlegung unabhängig davon ist, ob es sich um ein Fünfeck oder um ein Vieleck mit einer anderen Eckenzahl ist.
Gemäß der Figur ist Pinocchio im positiven Sinn auf dem Rand des Fünfeckes herumgegangen. Der positive Drehsinn ist der Drehsinn eines Verkehrskreisels (Abb. 14). Auch bei jeder Ecke dreht sich Pinocchio im Kreiselsinn.

Didaktische Randbemerkung:
Ich habe bei 307 Erstsemestrigen eine kleine Umfrage gemacht: Sämtliche haben in der Schule den positiven Drehsinn als „Gegenuhrzeigersinn“ kennen gelernt. Diese Eselsbrücke ist wegen dem „gegen“ didaktisch ungeschickt. Nachdem es nun auch in Hinterkleinlützelheim einen Verkehrskreisel vor dem Schulhaus gibt, ist der Vergleich mit dem Kreiselsinn für unsere Schülerinnen und Schüler alltagsgerecht. (Ich höre die Rohrspatzen: Aber in Ländern mit Linksverkehr ... . Und die Digitaluhren ... .)

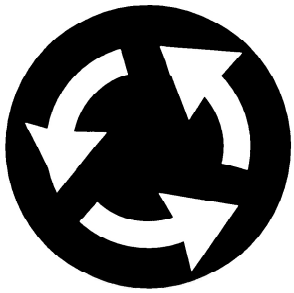

Abb. 14 Positiver Drehsinn

b) Beine, Füße und eine dynamische Überlegung:
Statt mit der Nase können wir auch mit Beinen und Füßen überlegen. Wir denken uns im Innern des Fünfeckes einen beliebigen Punkt und zeichnen von dort aus die Lote auf die fünf Seiten (Abb. 15).

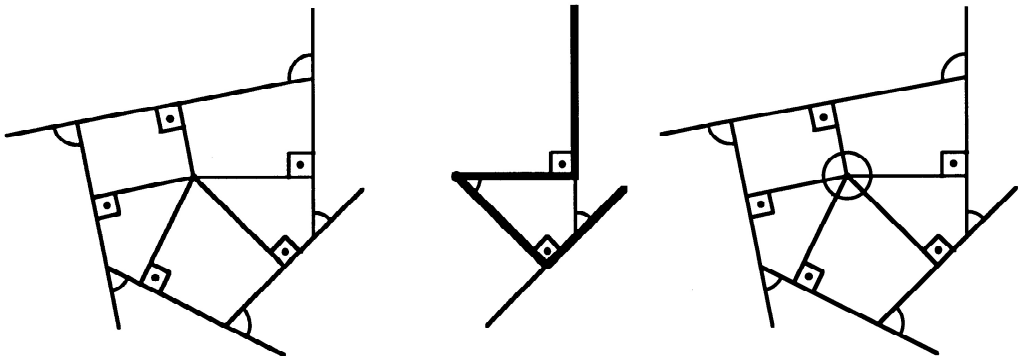

Abb. 15 Lote als Beine, Seiten als Füße

Wir greifen zwei aufeinander folgende Beine und ihre Füße heraus. Wenn wir ein Bein ein bisschen um den Punkt im Fünfeck drehen, drehen sich auch die Füße um den gleichen Winkel. Wenn die Beine aufeinander liegen, sind die Füße zumindest parallel, allenfalls aufeinander liegend. Somit ist der Winkel zwischen den Beinen derselbe wie der Winkel zwischen den Füßen. Wenn wir nun alle fünf Beine ins Auge fassen, haben wir beim Punkt im Fünfeck fünf Winkel, welche zusammen einen vollen Winkel ergeben, also 360° messen.

c) Abschneiden:
Wir schneiden vom Fünfeck parallel zu einer Seite ein Stück ab. Dadurch ändern sich die Winkel nicht.

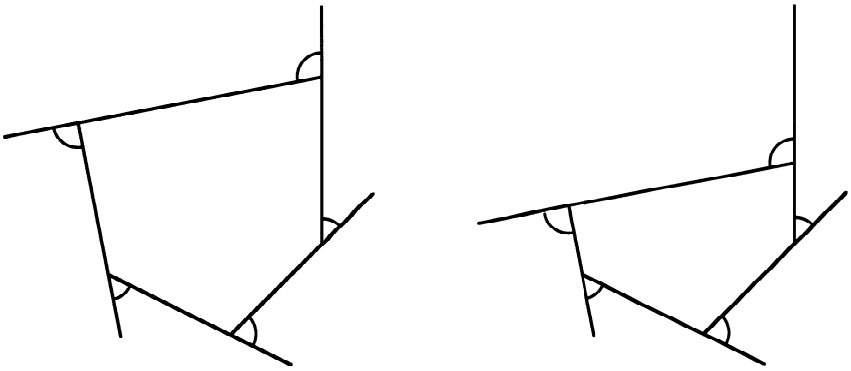

Abb. 16 Paralleles Abschneiden

Und nun schneiden wir an allen Seiten immer mehr ab (Abb. 17). Das Fünfeck wird immer kleiner, aber die Außenwinkel bleiben. Am Schluss ist das Fünfeck verschwunden und es sind nur noch die Außenwinkel übriggeblieben. Ihre Summe ist 360°.

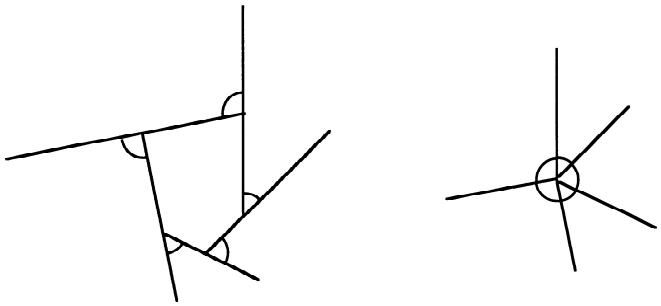

Abb. 17 Abschneiden bis zum Ende

Die Aufgabe in der Aufgabe: Gibt es andere Beispiele, in denen etwas verschwindet und dennoch etwas Wesentliches davon übrig bleibt?

Beispiele:

a) Im Kapitel VI von *Alice im Wunderland* (Carroll [1]) verschwindet die Katze vom Schwanz her, bis nur noch ihr Grinsen übrig bleibt.

b) In der Differentialrechnung wird die *Steigung einer Sekante* (Abb. 18) mit Hilfe eines Stützdreieckes mit den Katheten Δx und Δy berechnet als $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Beim Grenzübergang $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ verschwindet das Stützdreieck; die Steigung bleibt aber erhalten und wird zur Steigung der Tangenten.

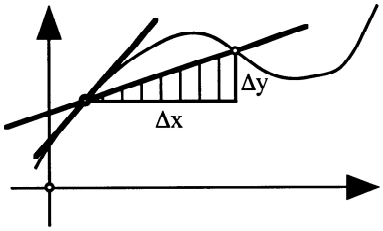

Abb. 18 Stützdreieck

c) *Der Blick aus dem Weltall:*
Ein Astronaut sieht unser Fünfeck nicht, es ist zu klein. Damit er doch was sieht, verlängern wir die Seiten ins Gigantische.

Der Astronaut sieht dann praktisch nur noch die Außenwinkel (Abb. 19), die sich auf 360° summieren.

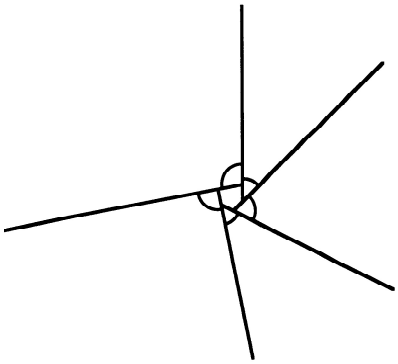

Abb. 19 Blick von weit außen

Zu Aufgabe 2:
Hier handelt es sich um eine offene Aufgabe; es folgen einige Lösungsmöglichkeiten:

a) Ortsbogen: Der Winkel γ zwischen den Seiten a und b soll invariant bleiben. Der Punkt C kann auf dem Ortsbogen bewegt werden (Abb. 20).

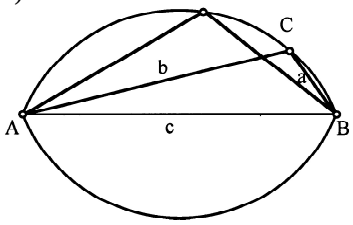

Abb. 20 Ortsbogen

b) Ellipse: Die Summe $a + b$ soll invariant bleiben. Der Punkt C kann auf einer Ellipse bewegt werden. Die Eckpunkte A und B sind Brennpunkte dieser Ellipse (Abb. 21).

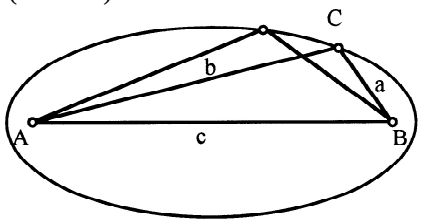

Abb. 21 Ellipse

c) Hyperbel: Die Differenz $b-a$ soll invariant bleiben. Nun kann der Punkt C auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten A und B bewegt werden (Abb. 22).

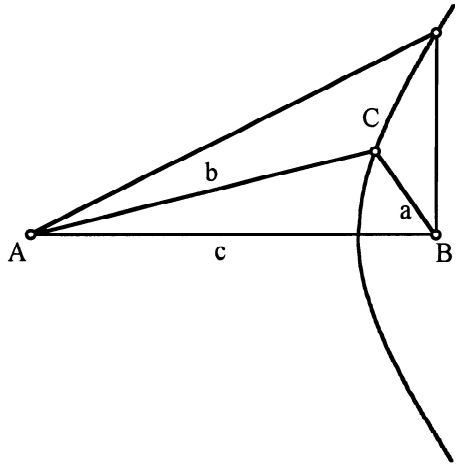

Abb. 22 Hyperbel

d) Kreis des Apollonius: Das Verhältnis $\frac{b}{a}$ soll invariant bleiben. Die Lösung ist der Kreis des APOLLONIUS über der Strecke $\overline{AB}$ zu diesem Verhältnis (Abb. 23).

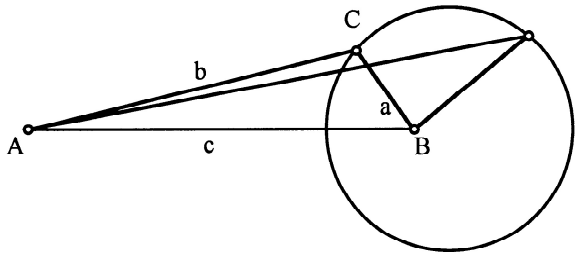

Abb. 23 Kreis des Apollonius

e) Noch ein Kreis: Nun soll die Quadratsumme a^2+b^2 invariant bleiben. Da stutzen wir, denn das Dreieck ist ja gar nicht rechtwinklig. Es geht trotzdem, und die Lösung ist ein Kreis um den Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ durch C (Abb. 24).

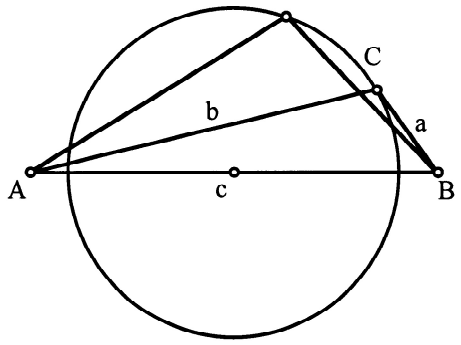

Abb. 24 Ein seltsamer Kreis

Um dies einzusehen, gehen wir rechnerisch vor: Wir verwenden ein Koordinatensystem, in welchem die Eckpunkte A und B die Koordinaten $A(-1,0)$ und $B(1,0)$ erhalten. Für C verwenden wir allgemeine Koordinaten $C(x,y)$. Dann ist:

$a=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ und $b=\sqrt{(1+x)^2+y^2}$

Aus der Bedingung $a^2+b^2=p$ ergibt sich $(1-x)^2+y^2+(1+x)^2+y^2=p$. Daraus erhalten wir $x^2+y^2=\frac{p}{2}$.

Das ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung, also dem Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Wir sehen, dass die rechtwinkligen Dreiecke eine Sonderstellung einnehmen; bei ihnen fällt dieser Kreis mit dem Ortsbogen zusammen.

Zu Aufgabe 3:
Die Außenwinkelsumme ist 720°. Pinocchio muss nun zweimal um den großen Punkt ganz im Innern herumgehen, bis er wieder an den Ausgangsort zurückkommt. Er macht zwei Umläufe, seine Nase dreht sich total um zweimal 360°, also 720°. Es gilt: $A=2\cdot 360°$

$A+I=5\cdot 180°$

$I=5\cdot 180°-2\cdot 360°=5\cdot 180°-4\cdot 180°=180°$

Zu Aufgabe 4:
In diesem Fall muss Pinocchio drei Umläufe machen, bis er wieder an den Ausgangsort zurückkommt. Wer sich beim Nachfahren mit dem Zeigefinger verheddert, kann sich mit folgender Überlegung behelfen: Um vom

Innern ins Äußere zu gelangen, muss dreimal der Weg des Pinocchio überquert werden. Ein Taugenichts, der im Innern sitzt und tief in Gedanken verloren immer in die gleiche Richtung nach außen blickt, wird drei Mal erleben, dass Pinocchio durch sein Gesichtsfeld wetzt. Somit haben wir die Rechnung:

$$A = 3 \cdot 360°$$
$$A + I = 17 \cdot 180°$$
$$I = 17 \cdot 180° - 3 \cdot 360° = 17 \cdot 180° - 6 \cdot 180° = 11 \cdot 180° = 1980°$$

Zu Aufgabe 5:

$$A = k \cdot 360° = 2k\pi$$
$$A + I = n \cdot 180° = n\pi$$
$$I = (n - 2k) \cdot 180° = (n - 2k)\pi$$

Zu Aufgabe 6:

In $\left\{\frac{12}{7}\right\}$ werden im positiven Drehsinn 6 Ecken übersprungen; das führt zum selben Punkte wie das Überspringen von 4 Ecken im negativen Drehsinn. Somit ist $\left\{\frac{12}{7}\right\} = \left\{\frac{12}{-5}\right\}$.

Optisch sieht dieser Stern gleich aus wie $\left\{\frac{12}{5}\right\}$; tatsächlich ist er aber sein Spiegelbild. Daher erstaunt es auch nicht, dass seine Innenwinkelsumme negativ wird, nämlich -2π. Pinocchio geht auf dem Stern im negativen Sinn herum, da er sich aber in jeder Ecke im positiven Sinn auf die neue Richtung einstellt, wird jeder Außenwinkel größer als π. Das sieht dann aus wie ein Schaufelradbagger (Abb. 25).

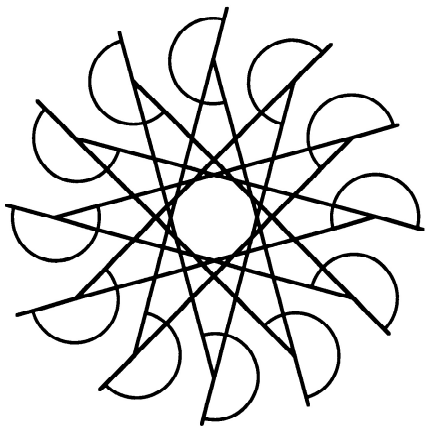

Abb. 25 Große Außenwinkel

Zu Aufgabe 7:

Pinocchio zählt die Eckpunkte im positiven Drehsinn ab. Da er diese Punkte dabei anguckt, hat er sich nach fünf Punkten um 360° gedreht. Dann zählt er noch zwei Eckpunkte weiter. Somit ist der einzelne Außenwinkel größer als 360°.

Zu Aufgabe 8:

Es gibt zwei Lösungsvorschläge:

a) Pinocchio startet, und dann dreht er sich bei jeder Ecke im positiven Drehsinn zur neuen Richtung (Abb. 26). Auf diese Weise ergibt sich eine Außenwinkelsumme von 4π.

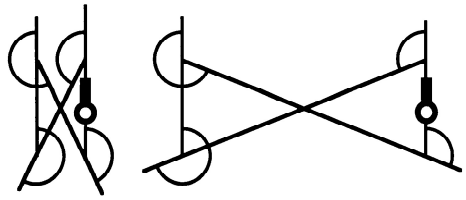

Abb. 26 Richtungsänderung im positiven Drehsinn

b) Pinocchio startet und dreht sich bei jeder Ecke so wenig wie möglich zur neuen Richtung (Abb. 27). Dazu muss er sich auch in negativer Richtung drehen. Es entstehen negative Drehwinkel. Zu jedem negativen Drehwinkel gibt es aber einen betragsmäßig gleich großen positiven Drehwinkel. Daher ist die Außenwinkelsumme Null. Das ist auch eine schöne Invariante.

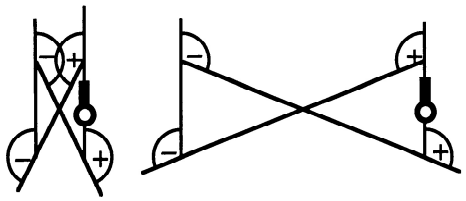

Abb. 27 Richtungsänderungen in beiden Drehsinnen

Zu Aufgabe 9:
Der Beweis ist natürlich ganz einfach, wenn an den „gewöhnlichen“ Kosinussatz angehängt werden darf: Wegen $\gamma^* = \pi - \gamma$ ist $\cos(\gamma^*) = -\cos(\gamma)$. Ansonsten verläuft der Beweis am einfachsten vektoriell:

Mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gemäß Abbildung 28 gilt:

$$c^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\gamma^*) + |\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\gamma^*)$$

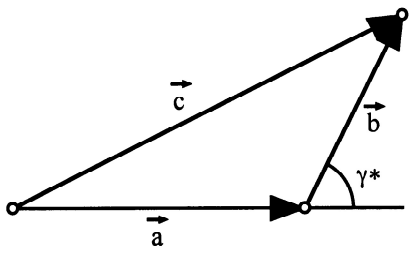

Abb. 28 Beweisfigur

Literatur

Carroll, L. (C. L. Dodgson) [1]: Alice's Adventures in Wonderland. 1865

Collodi (Carlo Lorenzini) [2]: Pinocchio, Storia di un burattino. Illustriert von Enrico Mazzanti. 1883

Coxeter, H.S.M. [3]: Unvergängliche Geometrie. Basel: Birkhäuser 1963.

Coxeter, H.S.M. [4]: Regular Polytopes. Third Edition. New York: Dover 1973.

Heinrich, Frank [5]: Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren – ein Angebot zur Förderung mathematischer Begabung. Mathematikinformation, Nr. 42, 2005, Seiten 40-58

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut der Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
e-mail: hwalser@bluewin.ch
http://www.math.unibas.ch/~walser/