Karlhorst Meyer

Vorbereitungen der gymnasialen Unter- und Mittelstufe für den Analysisunterricht – Lösungen der Aufgaben[1]

Zu Aufgabe 1.1.1.1:
3,05 m hat die längste und 1,99 m die kürzeste Stange.

Zu Aufgabe 1.1.1.2:
Da bei 0,9 m etwas abgezogen wird und 0,9 m kleiner als die größeren Summanden der anderen Summen ist, ist 0,9 m – 0,3 m die kleinste Länge. Die 2. Summe ist größer als die erste. Vergleichen wir die 2. Summe mit der letzten, bei der der 1. Summand wie auch der 2. Summand größer als bei der 2. Summe ist, müssen wir die letzte Summe nur noch mit der vorletzten vergleichen, die dann größer als die letzte Summe ist.

Zu Aufgabe 1.1.1.3:
U = 2(a + b) = 24 cm, also a + b = 12 cm. Die Aufgabe wird in Klasse 5 gestellt, also kommen als Lösungen nur natürliche Zahlen in Frage. Man probiert alle Möglichkeiten aus:

a	1	2	3	4	5	6	in cm
b	11	10	9	8	7	6	in cm
F = a·b	11	20	27	32	35	36	In cm^2

Bei den weiteren Möglichkeiten vertauschen a und b ihre Bedeutung.
11 cm^2 ist der kleinste und 36 cm^2 der größte Flächeninhalt.
Lässt man alle Dezimalzahlen (reelle Zahlen) zu, so gibt es zunächst Zwischenpunkte und 36 cm^2 bleibt ein Maximum. Dagegen kann a beliebig klein werden, der Flächeninhalt also 0 „zustreben“, was aber für keine Zahl $a \neq 0$ erreicht wird. D. h. in diesem Fall gibt es kein Minimum sondern nur ein Infimum.

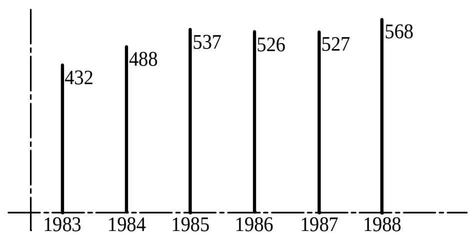
Zu Aufgabe 1.1.1.4:
Analoge Untersuchung zu 1.1.1.3: A = a·b und U = 2(a+b);

a	1	2	3	4	5	6	in cm
b	36	18	12	9	7,2	6	in cm
U	74	40	30	26	24,4	24	in cm

Bei natürlichen a und b ist 74 cm der größte und 24 cm der kleinste Umfang.
Lässt man alle reellen Zahlen zu, so existieren Zwischenpunkte. 24 cm bleibt der kleinste Umfang; aber beliebig kleine a liefern immer größere Umfänge. Die Umfänge können beliebig groß werden. D. h. ein Maximum existiert dann nicht mehr. Aber es gibt auch kein Supremum, da U beliebig groß wird.

Zu Aufgabe 1.1.1.5:
Die Frage nach dem Größten kann nur in Zahlenmengen gestellt werden. Farben sind aber keine Zahlen und deshalb ist die Frage hier sinnlos. Anders ist das mit der Frage nach dem Schönsten; hier ist der Geschmack des Einzelnen gefragt. Verschiedene Personen können dann auch Verschiedenes antworten. Aus diesem Grund hat die Frage in der Mathematik nichts zu suchen.

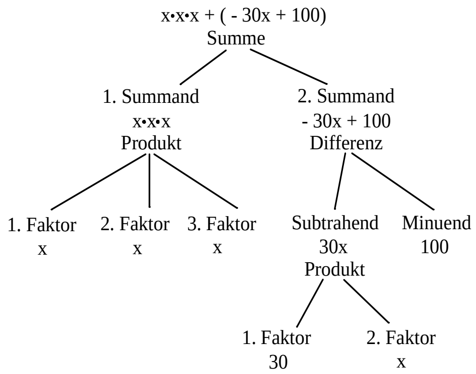
Zu Aufgabe 1.1.2.1:
Jedenfalls wird auf Milliarden gerundet. Man muss den Maßstab auswählen: 568 ist die größte darzustellende Zahl. Deshalb wählen wir 100 Milliarden als 1 cm und benötigen „nach oben“ 6,0 cm Platz. In der Breite verteilen wir die vorgegebenen 6 Jahre. Es entsteht das nebenstehend gezeichnete Strichdiagramm.
Will man nur die Steigerung der Ausfuhr darstellen, dann beginnt man beim Minimum 1983 und trägt nur noch die Differenzen zum Mini-



[1] Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Arthur Krämer, der Korrektur gelesen und viele Lösungen verbessert hat.

mum an. Darstellungen dieser Art verfälschen allerdings manchmal beim Betrachter den Eindruck.

Zu Aufgabe 1.1.2.2:



a) Wortform: Bilde die Summe aus der dritten Potenz von x mit der Summe aus dem negativen Produkt von 30 und x mit 100. Nebenstehend findet man einen Baum hierzu.

b) In Voruntersuchungen haben die Schüler bereits bemerkt, dass x·x·x schneller als – 30·x + 100 wächst. Deshalb ist eine Lösung im Negativen zu vermuten.
Hat man einen negativen Wert und einen positiven Wert gefunden und kann man annehmen, dass alle Zwischenwerte existieren, so ist der Versuch berechtigt, einen solchen zu finden.

x	x·x·x	– 30·x + 100	x·x·x – 30·x + 100	Kritik
0	0	100	100	zu groß
-10	-1000	400	-600	zu klein, also liegt ein x zwischen 0 und -10
-5	-125	250	125	zu groß, also -5 > x > -10
-7	-343	310	-33	zu klein, also -5 > x > -7
-6	-216	280	64	zu groß, also -6 > x > -7, d. h. x = -6,..
				usw.

c) wurde hier weggelassen.
d) Man erhält so leichter eine Vermutung über eine der Nullstellen.

Zu Aufgabe 1.1.2.3:
a) 3141; die gerundete Zahl ist gleich der Ausgangszahl. b) 3140 c) 3100 d) 3000 e) 0
f) Wenn man „zu grob“ rundet, ist die gerundete Zahl immer 0.

Zu Aufgabe 1.2.0.1:
Die gerundete Zahl lautet 0,2202. Um sie darzustellen, muss man einen Maßstab wählen, der dies ermöglicht. Man kann auf mm genau messen:
1. Möglichkeit: Man nimmt einen Ausschnitt der Zahlengeraden zwischen 0,2200 und 0,2205 und stellt den Abstand 0,0001 als 1 cm dar oder ähnlich.
2. Möglichkeit: Will man die Zahl zusammen mit der Zahl 0 darstellen, benötigt man eine Zeichnung, die mindestens 2202 mm breit ist.

Zu Aufgabe 1.2.0.2:
3,14 < 3,141... < 3,15

Zu Aufgabe 1.2.0.3:
a) Man kann 3,141 und 3,141... nicht anordnen.
b) Man kann Dezimalzahlen nur anordnen, wenn sie gleich viele geschriebene Nachkommastellen haben.
Z. B: Lautet die nächste Ziffer der rechten Zahl 0, so gilt 3,141.... > 3,140...
Lautet aber diese Ziffer z. B. 2, so gilt 3,141.... < 3,142...

Zu Aufgabe 1.2.1.1:
3,142; 3,142; 3,142; 3,142; 3,142; 3,142; 3,142; 3,142; 3,142 aber 3,1425... ≈ 3,143; aber 3,141... kann man nicht auf Tausendstel runden, weil man hierzu die 4. Nachkommastelle kennen müsste.

Zu Aufgabe 1.2.1.2:
Der Winkelmesser hat eine Einteilung in Grad. Man kann deshalb durch Schätzen auf halbe Grad genau messen.

Zu Aufgabe 1.2.1.3:
Gesucht wird ein Intervall. Die untere Grenze wird von den Schülern rasch als Minimum 3,1415 des Intervalls

gefunden. Anders ist dies mit der oberen Grenze: Man rät 3.1425, was falsch ist. Dann kommt 3,1424 als eine zu kleine Zahl. Die Schüler erhöhen auf 3,14249, dann 3,142499 usw. und sind schließlich überzeugt, dass es sich um die Zahl $3{,}1424\overline{9}$ handelt, was falsch ist, weil diese Zahl gleich 3,1425 gerundet zu 3,143 ergibt. Diese Stelle ist geeignet, auf die Mehrdeutigkeit der Dezimalzahlen zu sprechen zu kommen. Wichtig ist, darauf hinzuweisen, dass die obere Grenze kein Maximum des Intervalls ist. Ergebnis: $3{,}1415 \le x < 3.1425$

Zu Aufgabe 1.2.1.4:
Alle $x \in \mathbf{R}$ mit $x < a$ sind untere Schranken und alle y mit $b < y$ sind obere Schranken.

Zu Aufgabe 1.2.1.5:
inf [a; b] = a sup [a; b] = b inf]a; b] = a sup]a; b] = b inf [a; b[= a sup [a; b[= b
inf]a; b[= a sup]a; b[= b

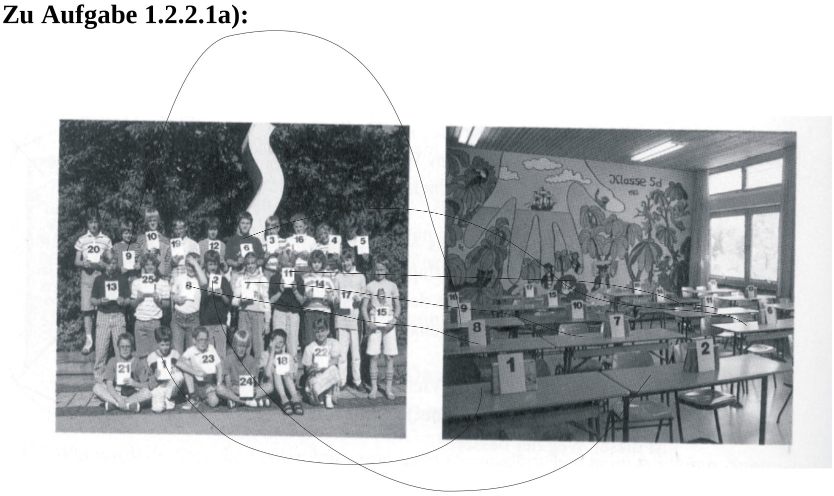
Zu Aufgabe 1.2.1.6:
Gehört das Infimum zur Menge, so ist es Minimum, gehört ein Supremum zur Menge, so ist es Maximum.

Zu Aufgabe 1.2.1.7:
a) inf ⌉ = 1 = min ⌉ sup ⌉ und damit max ⌉ existieren nicht; dafür schreibt man auch sup ⌉ = ∞.
b) **Z** sei die Menge der ganzen Zahlen; dann gibt es für **Z** weder Infimum noch Supremum und damit auch kein Minimum und kein Maximum. Hierfür schreibt man auch inf **Z** = – ∞ und sup **Z** = ∞.
c) **Q**, die Menge der rationalen Zahlen, verhält sich genauso wie **Z**.
d) $\sup\{\frac{1}{n}: n\in N\} = \max\{\frac{1}{n}: n\in N\} = 1$; $\inf\{\frac{1}{n}: n\in N\} = 0 \notin \{\frac{1}{n}: n\in N\}$; deshalb gibt es kein Minimum.
e) $\inf\{1-\frac{1}{n}: n\in N\} = \min\{1-\frac{1}{n}: n\in N\} = 0$; $\sup\{1-\frac{1}{n}: n\in N\} = 1 \notin \{1-\frac{1}{n}: n\in N\}$; deshalb gibt es kein Maximum.
f) $\sup\{1+\frac{1}{n}: n\in N\} = \max\{1+\frac{1}{n}: n\in N\} = 2$; $\inf\{1+\frac{1}{n}: n\in N\} = 1 \notin \{1+\frac{1}{n}: n\in N\}$; deshalb gibt es kein Minimum.

g) $\sup\{3x - 7: x\in[4;6]\} = \max\{3x - 7: x\in[4;6]\} = 11$; $\inf\{3x - 7: x\in[4;6]\} = \min\{3x - 7: x\in[4;6]\} = 5$.

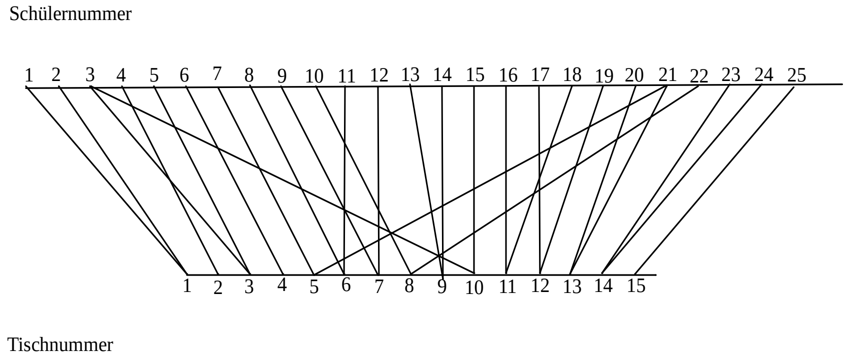
Zu Aufgabe 1.2.1.8:
8600 t : 24,5 t = 351,020.. ≈ 351 Güterwagen, weil der Rest auf einige Güterwagen verteilt wird.
351 : 46 = 7,63.. ≈ 8 Güterzügen
Wenn die Waage nur bis auf ± 0,5 t genau ist, muss man jetzt weitere zwei Rechnungen ausführen:
8600 t : 24 t = 358,3... ≈ 359 Güterwagen
359 : 46 = 7,8.. ≈ 8 Güterzüge
8600 t : 25 t = 344 Güterwagen
344 : 46 = 7,47.. ≈ 8 Güterzüge
Man bekommt in jeden Fall 8 Güterzüge, wobei 344 bis 359 Wagen gefüllt sind.

Zu Aufgabe 1.2.2.1a):



usw.

b)

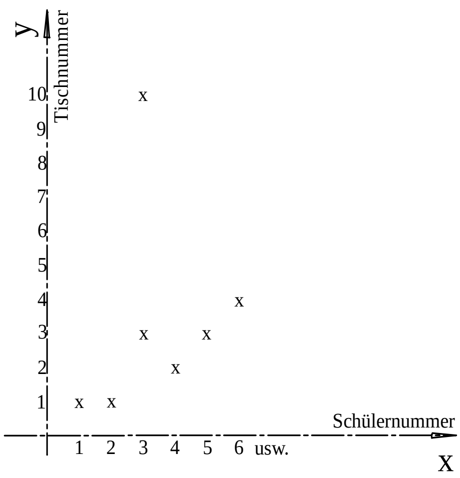


c)

Schülernummer x =	1	2	3	4	5	usw.
Tischnummer y = 1	*	*				
2				*		
3			*		*	
usw.						

Also die folgenden Paare (1|1); (2|1); (3|3) und (3|10); (4|2) usw.

d)



e)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
y	1	1	3	2	3	4	5	6	7	8	6	7	9	9	10	11	12	11	12	13	5	8	14	14	15
od.			10																		13				

Zu Aufgabe 1.2.2.2:
Auch wenn der Schreiber nur alle 5 Minuten Daten bekommt, gibt es dazwischen liegende, die er näherungsweise auf der kontinuierlichen Kurve erfasst.

Zu Aufgabe 1.2.2.3:
a) Das Paar (200|9) hat er gemessen und dann auf dem halben Weg geschlossen. Er bedenkt, dass 150 m genau in der Mitte von 100 m und 200 m liegt und deshalb dies auch für die Fahrzeit gelten muss. 400 m sind das Doppelte von 200 m; also gilt dies auch für die Fahrzeit; analog bei 600 m.
b) Die Fahrgeschwindigkeit muss konstant sein.
c) Bei 600 m hat er nicht Recht, wenn der Zug durch die Steigung langsamer geworden ist. Bis zu 500 m hätte er jedenfalls weitere Zwischenwerte berechnen können.

Zu Aufgabe 1.2.2.4:
a) 3·2,40 € = 7,20 €
b) 4:2,40 = 1 2/3. Sie bekommt 1 2/3 kg Äpfel.
c) Eine größere Menge Äpfel bekommt man billiger.
d) 15000 · 1,10 € = 16 500 €. Sie hat aus zweierlei Gründen nicht Recht:

1. Der berechnete Betrag wird durch weitere Kosten im Supermarkt größer.
2. Die Gesamtkette kauft in aller Regel zu einem kleineren Preis ein, als der Einkaufspreis an der einzelnen Verkaufsstelle beträgt.

Zu Aufgabe 1.3.1.1:
Lege das Geodreieck so an, dass die lange Seite des Geodreiecks durch einen Punkt der Figur geht und die Mittellinie des Geodreiecks auf der Geraden liegt. Übertrage den Abstand des Punktes mittels der Skala auf die andere Seite der Mittellinie. Führe dies für alle Punkte der Figur aus.

Zu Aufgabe 1.3.1.2:
Fälle durch einen beliebigen Punkt P der Figur ein Lot auf die Gerade g. Wähle einen vom Lotfußpunkt verschiedenen Punkt der Geraden g und verbinde diesen mit P. Spiegle den so erhaltenen Winkel an der Geraden. Dort wo sich der von g verschiedene Schenkel mit dem Lot schneidet, ist der Spiegelpunkt von P. Führe dies für alle Punkte der Figur aus.

Zu Aufgabe 1.3.1.3:
y = (a + b)(a + b) = usw.

Zu Aufgabe 1.3.1.4:
Führt man an einer Konstruktionszeichnung die Spiegelungen für mindestens 2 Punkte aus, erkennt man dass die Gesamtabbildung eine Drehung der beschriebenen Art ist.

Zu Aufgabe 1.3.1.5:
Fertige eine Zeichnung. Die gedrehte Gerade sei g'. Das Bild der oberen Hälfte liegt dann rechts von g'.

Zu Aufgabe 1.3.1.6:
Fertige eine Zeichnung. Das gespiegelte Dreieck ist die „andere" Hälfte des Quadrats.

Zu Aufgabe 1.3.1.7:
$[5{,}1; 7{,}1[= \{y: 5{,}1 \leq y < 7{,}1\}$

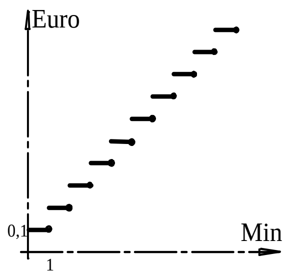
Zu Aufgabe 1.3.1.8:
Die Bildmenge ist **R**. Die Zuordnung ist nicht eindeutig, da für alle $x \neq 0$ folgt $+x \neq -x$.

Zu Aufgabe 1.3.1.9:
Es gibt 3 Mischfarben. Die Zuordnung ist eindeutig, weil gilt:
rot+gelb = orange, rot-blau = violett, gelb-blau = grün

Zu Aufgabe 1.3.1.10:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	min
p	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	€

Die Zuordnung ist eindeutig. Den Graphen nennt man eine Treppenfunktion. Die dicken Punkte gehören nicht mehr zur Strecke, sondern hier ist bereits der Punkt auf der darüberliegenden Strecke „zuständig".



Zu Aufgabe 1.3.1.11:
Die Zuordnung der Aufgabe 1.2.2.1 ist keine eindeutige, weil 2 Kinder nicht immer dieselben Sitzplätze haben. Alle anderen Zuordnungen waren eindeutig.

Zu Aufgabe 1.3.1.12:
Ist die Wertemenge der inneren Funktion in der Definitionsmenge der äußeren Funktion enthalten, so kann man die innere in die äußere Funktion einsetzen. Wegen der Eindeutigkeit der inneren Zuordnung gehört zu jedem x der Definitonsmenge der inneren Funktion genau ein y ihrer Wertemenge. Dieses y ist jetzt der abzubildende Wert der äußeren Funktion. y wird in z eindeutig übergeführt. Es gibt also zu jedem x genau ein y und zu jedem y genau ein z, also auch zu jedem x genau ein z. Deshalb hat die zusammengesetzte Funktion eine eindeutige Zuordnungsvorschrift.

Zu Aufgabe 1.3.1.13:
Bei der Abbildung fallen die Bilder der oberen und unteren Halbebene zusammen; das stört nicht: Zu jedem Punkt der Gesamtebene gehört genau ein Bildpunkt; also ist die Zuordnungsvorschrift eindeutig.

Zu Aufgabe 1.3.1.14:
Zu jedem Punkt des Gespiegelten gehört genau ein Punkt im Spiegel; also ist die Zuordnung eindeutig.

Zu Aufgabe 1.3.1.15:
Einige der folgenden Teilfragen wird man wohl anhand einer Zeichnung lösen. Man erhält die folgenden Umkehrfunktionen:
a) S_a b) S_aS_b c) $S_aS_bS_c$ d) Drehung um P um $-\alpha$ e) Verschiebung längs g um a in der Gegenrichtung
f) Spiegle an derselben Geraden und verschiebe längs ihr in die Gegenrichtung.
g) Man spiegelt an denselben Geraden in der entgegengesetzten Reihenfolge. Es handelt sich um eine Schubspiegelung.

Zu Aufgabe 1.3.1.16:
Führt man eine Abbildung und ihre Umkehrabbildung nacheinander aus, so ergibt sich die identische Abbildung id. Ist die Verknüpfung zweier Abbildungen die identische Abbildung, so ist die eine Umkehrabbildung der anderen. Da S_aS_a = id ist, lassen sich die obigen Behauptungen „beweisen“. Z. B.: $S_bS_aS_aS_b = S_bS_b$ = id

Zu Aufgabe 1.3.1.17:
Nicht jede Abbildung hat eine Umkehrabbildung: In 1.3.1.13 ist jeder Punkt der oberen Halbebene doppelt belegt. Einmal ist er Bildpunkt eines Punktes der oberen Halbebene und dann auch Bildpunkt eines Punktes der unteren Halbebene. Eine Umkehrung ist also nicht eindeutig, sondern (abgesehen von den Punkten von g) zweideutig, also gibt es keine Umkehrabbildung.

Zu Aufgabe 1.3.1.18:
Der Reihe nach ergeben sich: 1; Abstand von a und b, falls beide Buchstaben Zahlen sind; 1 und 5; 1 und 5,]1; 5[; **R**\[1; 5].
Zusatzfrage: $1 < x < 5$, $x < 1$ oder $x > 5$

Zu Aufgabe 1.3.1.19:
Es handelt sich um die Zahlen aus den folgenden Intervallen:
a) [3; 7] b) [–1,5; 6,5] c) **R**\]–6; 1[d) $x \le 2{,}5$ oder $15{,}5 \le x$

Zu Aufgabe 1.3.1.20:
a)

	oder
$-2{,}44 + x > 0$ **und**	$-2{,}44 + x \le 0$ **und**
$3(-2{,}44 + x) = 6$	$-3(-2{,}44 + x) = 6$
$x = 4{,}44$	$x = 0{,}44$

d. h. Lösungsmenge **L** = {0,44; 4,44}

b)

	oder
$-2{,}44 + x > 0$ **und**	$-2{,}44 + x \le 0$ **und**
$-3(-2{,}44 + x) = 6$	$3(-2{,}44 + x) = 6$

d. h. das ist dieselbe Lösunsgmenge wie bei a).

c)

	oder
$-2{,}44 + x > 0$ **und** (1)	$-2{,}44 + x \le 0$ **und** (2)
$-3(-2{,}44 + x) < 6$	$3(-2{,}44 + x) < 6$
$-2{,}44 + x > -2$	$-2{,}44 + x < 2$
$x > 0{,}44$	$x < 4{,}44$
Wegen (1) folgt $\mathbf{L}_1$ = {x: x > 2,44}	Wegen (2) folgt $\mathbf{L}_2$ = {x: x ≤ 2,44}.

D. h. $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \mathbf{R}$.

d)

	oder
$-2{,}44 + x > 0$ **und** (1)	$-2{,}44 + x \le 0$ **und** (1)

$-3(-2{,}44 + x) > 6$	$3(-2{,}44 + x) > 6$
$x < 0{,}44$	$x > 4{,}44$
Wegen (1) folgt $\mathbf{L}_1 = \varnothing$	Wegen (1) folgt $\mathbf{L}_2 = \varnothing$

Kürzer: $\left|-2{,}44+6\right|<-2$

D. h. $\mathbf{L} = \varnothing$.

e) Ist ein Produkt null, so kann dies jeder Faktor sein; deshalb:

$|3 - x| = 0$ oder $|2 + x| = 0$

$x = 3$ oder $x = -2$ d. h. $\mathbf{L} = \{-2; 3\}$

f) Da der Betrag stets null oder positiv ist, ist $\mathbf{L} = \mathbf{R}\backslash\{-2; 3\}$.

g) Da Beträge stets null oder positiv sind, ist diese Aufgabe unlösbar, also $\mathbf{L} = \varnothing$.

h)

	oder
falls $x > 3$ (1)	falls $x \le 3$ (2)
ist $x(x-3) > 0$	ist $-x(x-3) > 0$
Durch Raten findet man	$x \in\ ]0; 3[$ dies ist dann auch wegen (2) die Teillösung.
$x < 0$ (unbrauchbar wegen (1)) oder $x > 3$	

Insgesamt findet man also $\mathbf{L} =]0; \infty[\backslash\{3\}$.

Dieses Ergebnis kann man aber auch sofort sehen: Da der Betrag null oder positiv ist, muss x positiv sein, kann aber nicht 3 sein, da ja sonst der Betrag zu null werden würde.

i) $\mathbf{L} = \varnothing$, weil aus $|x| \ge 0$ folgt $2|x| \ge |x| \ge 0$. Da $7 > 3$ ist, folgt $2|x| + 7 \ge |x| + 3$; also hat die Aufgabe die Lösungsmenge $\varnothing$.

Zu Aufgabe 1.4.1.1:
Man meint, wenn man einen Gang einlegt, dass dann auch mit einer eindeutig bestimmten Getriebeübersetzung der Wagen angetrieben wird. Der Zusammenhang Gangnummer → Übersetzung ist eine Funktion.
Weiteres Beispiel: Der Angestellte Meier übt eine wichtige Funktion im Betrieb aus. Gemeint ist: Die Entscheidungen des Angestellten verändern z. B. die Höhe des Gewinns. Also ist der Gewinn eine Funktion der Entscheidungen dieses Herrn im Sinne der Mathematik.

Zu Aufgabe 1.4.1.2:
Z. B. beeinflussen Sonnenfleckentätigkeit, Bestrahlungsstärken u. v. m. das Wetter.

Zu Aufgabe 1.4.1.3:
a) Ich würde beide Teilfragen verneinen: Dasselbe Lebewesen hat zu unterschiedlichen Lebenszeiten verschiedene Längen. Richtig ist, dass mit Föhn die Anzahl der Verkehrstoten steigt, aber bei gleich starkem Föhn können durchaus verschiedene Anzahlen vorkommen. Beide Beispiele haben keine eindeutige Zuordnung.
b) Auch dieses Beispiel zeigt so formuliert keine Funktion, da die gleiche Anzahl Sonnenflecken verschieden starke Funkstörungen verursachen kann, wenn die Flecken verschiedene Größen haben. Ersetzt man das Wort Anzahl durch Heftigkeit, so würde man z. B. meinen, dass zwei kleine Flecken weniger heftig als zwei große sind, und man hätte mit ein wenig Großzügigkeit einen funktionalen Zusammenhang.

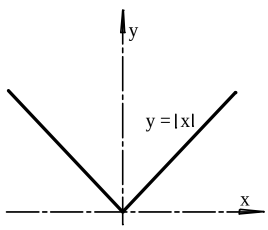
Zu Aufgabe 1.4.1.4:
a) Auch hier kommt es auf die Interpretation an: Nimmt man ein bestimmtes Kind, so hat es eindeutig festzulegende Eltern und seine Erbanlagen können nur eine eindeutige Auswahl der Erbanlagen seiner Eltern sein. Dgg. haben verschiedene Kinder derselben Eltern durchaus verschiedene Auswahlen getroffen.
b) Das ist eine Funktion, da es in einem Raum zu einer bestimmten Zeit an der Stelle eines bestimmten Hygrometers keine zwei verschiedenen Feuchtigkeiten geben kann.

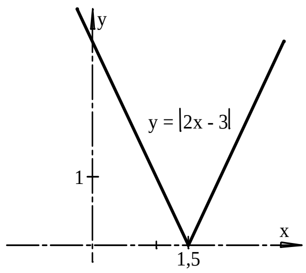
Zu Aufgabe 1.4.1.5:

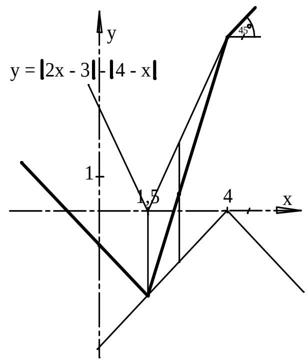
n ist die Nummer der so genannten FIBONACCI-Zahlen. Nachdem die 1. und 2. Zahl angegeben werden und die rekursive Definition daraus nacheinander jede weitere Zahl berechnen lässt, gehört zu jeder Nummer genau eine FIBONACCI-Zahl. Es handelt sich also um eine Funktion f.

Zu Aufgaben 1.4.1.6:
$x = 10$ kommt viermal vor und jeweils mit verschiedenen y. Es handelt sich also zunächst um keine Funktion. Der Geschäftsfrau geht es aber gar nicht darum; für sie sind die Mittelwerte wichtig. D. h. für $x = 10$ „schwankt“ y zwischen 60 und 63. Man könnte dies z. B. durch $y = 61{,}5 \pm 1{,}5$ dokumentieren. Für die anderen Mehrdeutigkeiten gilt Analoges. D. h. in der Tat ist y eine Funktion von x bis auf „Schwankungen“. Daran ändert sich nichts, wenn man einen einmaligen „Ausreißer“ hat. Bei einer ernsthaften Untersuchung lässt man häufig solche Ausreißer unberücksichtigt, man übersieht sie einfach.

Zu Aufgabe 1.4.2.1:







Im letzten Fall zeichnet man zunächst $y = |2x - 3|$ und $y = -|4 - x|$ und bildet dann den Graphen der Summenfunktion. Man weiß: In jedem Abschnitt wird der Graph einer linearen Funktion, also einer Geraden, gezeichnet. Knicke gibt es nur dort, wo eine der Summandengraphen einen solchen hat. Das ist also in $x = 1{,}5$ und $x = 4$ der Fall. Rechts von $x = 4$ hat die Summenfunktion die Steigung 1; deshalb wird der 45^o-Winkel angetragen. Links von 1,5 braucht man genau einen weiteren Punkt, z. B. bei $x = 0$ bekommt man $y = -1$.

Zu Aufgabe 1.4.4.1:
a)

	oder
$x > -1$, also $702x + 702 =: z > 0$	$x \le -1$, also $702x + 702 =: z < 0$ (1)
$z - z = 0 > 0$ d. i. ein Widerspruch	$z + z = 2z > 0$ d. i. ein Widerspruch zu (1)
$0 > 0$	
$\mathbf{L}_1 = \varnothing$	$\mathbf{L}_2 = \varnothing$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2 = \varnothing$$

b) $2|x - 4| \ge 0$ also $|x - 4| \ge 0$, was stets erfüllt ist; also ist $\mathbf{L} = \mathbf{R}$.

c) Nach Teilaufgabe a) ist die linke Seite entweder gleich 0 und damit unlösbar, oder es ist $5 - x < 0$ und damit $x > 5$. Dann ist $|5 - x - |5 - x|| = ||x - 5| + (x - 5)| = |2(x - 5)| = 2(x - 5) = 14$, also $x = 12$.

d) Fall 1: $x > 1$ **und**
Fall 1a: $x > -1$ dann gilt $x - 1 + x + 1 = 2x \ge 2x$, d. h. $\mathbf{L}_1 = \mathbf{R}$.
Weil die Lösungsmenge nicht größer als **R** werden kann, wird die Fallunterscheidung an dieser Stelle abgebrochen.

Zu Aufgabe 1.4.4.2:

a) Aus $\dfrac{14}{|2x+3|} \le 1$ folgt $|2x+3| \ge 14$ mit $|2x+3| > 0$.

Fall 1: $2x + 3 > 0$, also $x > -\dfrac{3}{2}$ **und** $2x + 3 > 14$ ergibt $x > \dfrac{11}{2}$.

Fall 2: 2x + 3 < 0, also $x < -\frac{3}{2}$ **und** – (2x + 3) > 14, d. h. 2x + 3 < –14 also $x < -\frac{17}{2}$.

Man bekommt **L** = $\left]-\infty;-\frac{17}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{2};\infty\right[$.

b) $\frac{4}{5|x-2|}+\frac{9}{7|x-2|}\le\frac{1}{|x-2|}$ also $\frac{28+45-35}{35|x-2|}\le 0$ also $\frac{38}{35|x-2|}\le 0$ also $\frac{1}{|x-2|}\le 0$ und damit **L** = ∅, weil links etwas Positives steht, das nicht kleiner oder gleich null sein kann.

c) $\frac{3}{(11x+1)^2}\le\frac{5}{11x+1}$ mit **D** = **R**\{ $-\frac{1}{11}$ }. Da Quadrate stets positiv oder null (hier ausgeschlossen) sind, darf man die Ungleichung mit $(11x + 1)^2$ erweitern zu

3 ≤ 5(11x + 1) also $11x \ge -\frac{2}{5}$ also $x \ge -\frac{2}{55}$.

d) $\frac{(2-3x)(13+5x)}{(0{,}5-x)^2}\ge 0$ also (2 – 3x)(13 + 5x) ≥ 0.

Diese Gleichung kann man lösen, wenn man quadratische Gleichungen beherrscht. Man kann aber auch wissen, dass es sich bei y = (2 – 3x)(13 + 5x) um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, deren Nullstellen bei $x = \frac{2}{3}$ und $x = -\frac{13}{5}$ sind. Also ist **L** = $\left[-\frac{13}{5};\frac{2}{3}\right]$.

Zu Aufgabe 1.5.0.1:

a) Eine Nullstellenbestimmung ergibt Nullstellen bei – 2 und 5. Da es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt ist **L** =]– 2; 5[.

b) $y = 3x^2 + x - 2$ hat Nullstellen bei $\frac{2}{3}$ und – 1. Damit hat man Lösungen bei – 1, $\frac{2}{3}$ und 2.

Fall 1: x > 2 **und** $3x^2 + x - 2 \ge 0$. $y = 3x^2 + x - 2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel und deshalb positiv für (– ∞; – 1) ∪ ($\frac{2}{3}$; ∞); also ergibt sich als $\mathbf{L}_1$ = [2; ∞).

Fall 2: x < 2 **und** $3x^2 + x - 2 < 0$. $y = 3x^2 + x - 2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel und deshalb negativ für [– 1; $\frac{2}{3}$] = $\mathbf{L}_2$, weil sich die beiden Bedingungen nicht widersprechen.

Insgesamt haben wir erhalten: **L =** [– 1; $\frac{2}{3}$] ∪ [2; ∞).

c) $1^{2-x} = 1$ für alle x. Deshalb ist das Problem $2x^2 + 1 < 1$ zu lösen, also $2x^2 < 0$, was unlösbar ist. **L** = ∅

Zu Aufgabe 1.5.1.1:

Löst man y = mx + t nach x auf, bekommt man abermals eine lineare Funktion; d. h. hier kommt nichts Neues heraus.

Zu Aufgabe 1.5.1.2:

$y = ax^2 + bx + c$ habe bei x_s ihren Scheitel. Man kann dann durch Einschränkung des Definitionsbereiches auf entweder]– ∞; x_s] oder [x_s; ∞[die Funktion umkehren. Es gibt 2 Möglichkeiten.

Zu Aufgabe 1.5.1.3:

a) Man findet die Definitionsmenge **D** = [1/2; ∞[und bringt die Wurzel allein auf eine Seite der Gleichung; man quadriert $\sqrt{2x-1} = x-2$ zu $2x - 1 = (x - 2)^2$. Dies ist *keine Äquivalenzumformung*; deshalb kann man Ergebnisse bekommen, die keine Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$ also $x^2 - 6x + 5 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $x = 3 \pm 2 = \begin{cases}5\\1\end{cases}$.

Es liegen beide Ergebnisse in **D**. Die Lösungen hat man erst, wenn diese Werte die Ausgangsgleichung erfüllen. Die Probe ist also Bestandteil des Lösungsverfahrens:
1. Die linke Seite 5 – 3 stimmt mit der rechten Seite der Ausgangsgleichung überein. $5 \in$ **L**.
2. Die linke Seite 1 – 1 = 0 stimmt nicht mit der rechten Seiten überein; also handelt es sich bei x = 1 um keine Lösung.

Man hat also gefunden **L** = {5}.

b) $2x - 1 + 3x + 10 + 2\sqrt{(2x-1)(3x+10)} = 11x + 9$ mit **D** = [1/2; ∞[∩ [– 10/3; ∞[∩[– 9/11; ∞[= [1/2; ∞[

$$\sqrt{(2x-1)(3x+10)} = 3x$$
$$6x^2 + 17x - 10 = 9x^2$$
$$3x^2 - 17x + 10 = 0$$

hat die Lösungen 5 und $\frac{2}{3}$. Beide liegen in **D**.

Probe:
1. $\sqrt{9} + \sqrt{25} = 8$ und $\sqrt{64} = 8$.
2. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{12} = \frac{\sqrt{3}+6}{3}$ und $\sqrt{\frac{22+27}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$ Die beiden Seiten sind nicht gleich; deshalb handelt es sich hierbei um keine Lösung.

L = {5}.

c) Die innere Wurzel hat **D** = [– ½; ∞[. Für die äußere Wurzel muss $x^2 \geq 2x + 1$ oder $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ d. h. $(x-1)^2 \geq 2$, also $x \geq 1 + \sqrt{2}$ sein. Deshalb ist der Gesamtdefinitionsbereich [$1 + \sqrt{2}$; ∞[. Man löst die Aufgabe durch doppeltes Quadrieren:

$x - \sqrt{2x+1} = 1 \;\Rightarrow\; x - 1 = \sqrt{2x+1} \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = 2x + 1 \;\Rightarrow\; x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$; beide sind aus **D.**

Also gilt: **L** = {0; 4}

d) **D** =]0; ∞[; deshalb kann man mit $\sqrt{x}$ die Gleichung multiplizieren zu $2x + 2 = 5\sqrt{x}$. Quadrieren ergibt $4x^2 + 8x + 4 = 25x$ also $4x^2 - 17x + 4 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen 4 und ¼ und beide liegen in **D**.

Probe:
1. Linke Seite $4 + 1$ ist der rechten Seite gleich.
2. Linke Seite $1 + 4$ ist der rechten Seite gleich.

L = {1/4; 4}

Zu Aufgabe 1.5.2.1:
a) Die lineare Funktion ändert ihr Monotonieverhalten nie. Sie ist entweder stets steigend oder stets fallend oder horizontal.
b) Die quadratische Funktion ändert ihr Monotonieverhalten am Scheitel.
c) Die Wurzelfunktion ist stets steigend.

Zu Aufgabe 1.5.2.2:
a) Der Graph der linearen Funktion liegt zu jedem seiner Punkte punktsymmetrisch und ist zu jedem Lot achsensymmetrisch.
b) Die quadratische Funktion ist stets zur Normalen der Scheiteltangente achsensymmetrisch.
c) Die Wurzelfunktion hat kein Symmetrieverhalten.

Zu Aufgabe 1.5.2.3:
Beweis: O. B. d. A. betrachten wir $y = ax^2$. Die Abbildung $x_1 = ax$ und $y_1 = ay$ mit $a \neq 0$ ist eine zentrische Streckung und führt $y = ax^2$ äquivalent zu $ay = (ax)^2$ über in $y_1 = x_1^2$. D. h. durch die zentrische Streckung wird jede Parabel übergeführt in die Normalparabel.

Zu Aufgabe 1.5.2.4:
Scheitelbestimmung: $y = 2(x - \frac{3}{4})^2 + \frac{23}{8}$, d. h. $]\frac{3}{4} \mid \frac{23}{8}[$ ist der Scheitel.

Die Parabel ist nach oben geöffnet, also ist sie in $]0;\ \frac{3}{4}]$ streng monoton fallend und in $]\frac{3}{4};\ 3]$ streng monoton steigend. Die Funktion hat bei $\frac{3}{4}$ ihr absolutes Minimum $\frac{23}{8}$ und bei 3 ihr absolutes Maximum 13. Die Untersuchung eines Infimums bzw. Supremums entfällt deshalb.

Zu Aufgabe 1.5.2.5:
1. Handelt es sich bei dem vorgegebenen Maximum auch um ein relatives, so gilt $y = a(x – 3)^2 + 4$ mit $a < 0$. Ein weiterer Punkt mit $y < 4$ legt dann die Parabel fest.
2. Ist das absolute Maximum kein relatives, so gilt $4 = a(3 – b)^2 + c$ und es können noch mindestens 2 weitere Punkte „passend“ mit y-Werte kleiner als 4 vorgegeben werden. Mindestens deshalb, weil man ja „zufällig“ weitere Punkte angeben könnte, die auf der bereits bestimmten Parabel liegen.

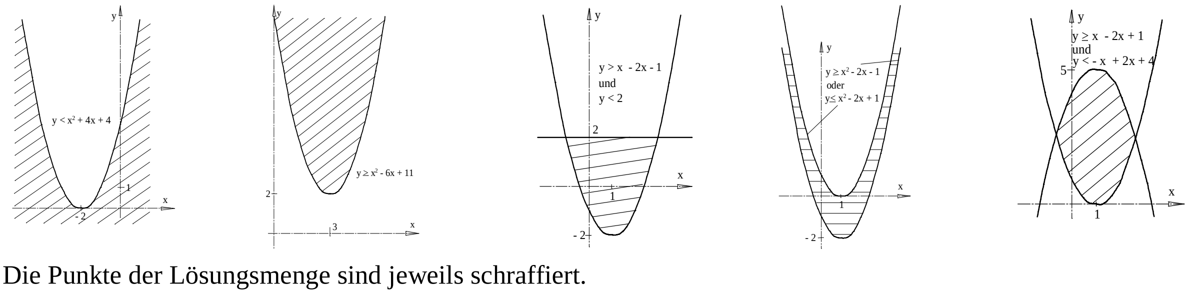
Zu Aufgabe 1.5.2.6:
Die Parabel hat also bei $x = 3$ ihren Scheitel. P_1 hat die Koordinaten $(7|0)$.
a) Die Nullstellen liegen symmetrisch zur Symmetrieachse; deshalb ist $(– 1|0)$ ein weiterer Parabelpunkt.
b) Parabelgleichung $y = a(x – 3)^2 + b$, wobei $0 = a(– 4)^2 + b$, also $b = – 16a$. Hieraus findet man für $x = 0$
$y = 9a – 16a = – 7a$.

Zu Aufgabe 1.5.2.7:
a) Der Scheitel liegt in der Mitte der Nullstellen, also auf der y-Parallelen mit $x = – ½$.
b) Die Parabel ist nach oben geöffnet, d. h. in $]– \infty;– ½]$ ist die Kurve streng monoton fallend und in $[– ½; \infty[$ streng monoton steigend.
c) Es gilt $0 = 4 – 2b + c$ und $0 = 1 + b + c$. Dieses Gleichungssystem kann man eindeutig lösen und erhält: $b = 1$ und $c = – 2$.
1. Weg: $y = x^2 + x – 2 = (x + ½)^2 – 9/4$, also ist $(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$ der Scheitel.
2. Weg: Es handelt sich um eine verschobene Normalparabel; da die x-Werte einer Nullstelle vom x-Wert des Scheitels 3/2 entfernt sind, brauchen wir den hierzu gehörigen y-Wert 9/4 der Normalparabel. Um diesen Betrag ist der Scheitel nach unten verschoben; deshalb ergibt sich abermals $(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$ als Scheitel.
d) Die Funktionsgleichung fand man unter c).

Zu Aufgabe 1.5.2.8:
Die Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge x ist $y = 6x^2$. Man kann nun die dazugehörige Parabel zeichnen und für y = 50 cm den dazu gehörigen Kantenwert x ablesen. Mit dem TR ergibt sich y = 2,8867...cm gerundet zu 3 cm, wenn man die Genauigkeit des angegebenen y-Wertes berücksichtigt.

Zu Aufgabe 1.5.2.9:
$y\ \ = ax^2\ + bx + c$ führt zum Gleichungssystem
$54 = 4a\ \ – 2b + c$
$12 = a\ \ \ +\ \ b + c$
$6\ \ = 16a + 4b + c$ Lösung $a = 2$, $b = – 12$ und $c = 22$.
Der 4. Punkt kann auf der dadurch bestimmten Parabel liegen; das muss aber nicht so sein.

Zu Aufgabe 1.5.2.10:
a) b) c) d) e)



Die Punkte der Lösungsmenge sind jeweils schraffiert.
zu a) Die Parabelpunkte gehören nicht zur Fläche.
zu b) Die Parabelpunkte gehören zur Fläche.

zu c) Weder die Parabelpunkte noch die der horizontalen Geraden gehören zur Fläche.
zu d) Da die Gebiete der beiden Parabeln sich überlappen, ist die gesamte Ebene Lösung.
zu e) Die Punkte der nach oben geöffneten Parabel gehören zur Fläche, wohingegen die Punkte der nach unten geöffneten Parabel nicht dazugehören.

Zu Aufgabe 1.5.3.1:
$F = (a - x)^2$ und $0 \leq x \leq a/2$. Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel, deren Scheitel $(a|0)$ ist. Im angegebenen abgeschlossenen Intervall hat F bei x = 0 ein absolutes Maximum a^2 und bei x = a/2 ein absolutes Minimum (auch wenn es dann in beiden Fällen keine Schachtel gibt).

Zu Aufgabe 1.5.3.2:
$F = x \cdot y$ wird maximiert. Aus $10 = U = 2(x + y)$ findet man $y = 5 - x$, also $F = x(5 - x)$ für $0 \leq x \leq 5$. Der dazu gehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Nullstellen bei 0 und 5 sind. Also ist der Scheitel bei x = 2,5 mit y = 2,5. Maximal können $F = 6{,}25\ m^2$ eingezäunt werden.

Zu Aufgabe 1.5.3.3:
Der neue Umsatz $U(p) = (1000 + 20p)15(1 - p/100)$ soll maximiert werden für $0 \leq p \leq 100$. Beim Graphen handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel, deren Nullstellen bei p = – 50 und p = 100 sind. Also ist der Scheitel bei p = 25 mit U(25) = 16875 €. Vergleich mit den Definitionsrändern von p: U(0) = 15000 €, U(100) = (0). Für p = 25 erhält man einen maximalen Umsatz.
Wenn p auf 10% nur genau bestimmt wird, ist $22{,}5 \leq p \leq 27{,}5$. Diese beiden Werte liegen symmetrisch zum p-Wert des Scheitels; man muss deshalb nur ausrechnen U(22,5) = 16856,25 €. D. h. diese Schwankung würde schlimmstenfalls einen um 18,75 € niedrigeren Umsatz bedeuten.

Zu Aufgabe 1.5.3.4:
Die Scheibenfläche sei F = xy, wobei x in der Richtung der 40 cm und y in der Richtung der 80 cm gemessen wird. Nach dem Strahlensatz gilt dann: $\frac{40 - x}{40} = \frac{y}{80}$ Hieraus folgt y = 80 – 2x also:
$F(x) = x(80 - 2x)$ für $0 \leq x \leq 40$
Der Graph hierzu ist ein nach unten geöffnetes Parabelstück, dessen Nullstellen bei 0 und 40 sind. Der Scheitel und damit das Maximum liegen deshalb in der Mitte bei x = 20 und y = 40. $F_{max} = 800\ cm^2$.

Zu Aufgabe 1.5.3.5:
Querschnittsfläche sei F = xy mit 2x + y = 24, also $F = x(24 - 2x)$ und $0 \leq x \leq 12$. Beim dazugehörigen Graphen handelt es sich um ein nach unten geöffnetes Parabelstück, mit den Nullstellen F(0) = F(12) = 0. Der Scheitel und damit das Maximum liegen also bei x = 6 und y = 12 mit $F_{max} = 72\ cm^2$.

Zu Aufgabe 1.5.3.6:
Die Zahl sei $z(x) = x(x - 15)$. Der dazugehörige Graph ist ein nach oben geöffnetes Parabelstück zwischen den Nullstellen 0 und 15. Da z(0) = z(15) = 0 ist, liegt der Scheitel in der Mitte bei x = 7,5. $z_{min} = -7{,}5^2 = -56{,}25$.

Zu Aufgabe 1.5.3.7:
Das Produkt p ist $p(x) = (45 - x)2x$ und hat als Graphen eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und 45. Der Scheitel liegt bei x = 22,5 und bringt das Maximum $z_{max} = 1012{,}5$. Ein Minimum gibt es nicht, weil $\inf z = \infty$ für $x = \infty$ oder $x = -\infty$.

Zu Aufgabe 1.5.3.8:
Zur Gewinnfunktion gehört eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen bei 1 und 2, d. h. einen Scheitel bei x = 1,5 und $y_{max} = 0{,}125$.
a) Dieser Gewinn wird bei einer Stückzahl von 15 000 erreicht.
b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus]1;2[$ hat er keinen Gewinn.

Zu Aufgabe 1.5.3.9:
a) Länge der Raumdiagonalen $(l(x))^2 = (10 - x)^2 + 4^2 + (3 + x)^2 = 125$ für $0 \leq x \leq 10$ führt auf $2x(x - 7) = 0$ mit den beiden Lösungen x = 0 und x = 7.
b) An der Kante der Länge 4 cm wird nichts geändert; deshalb muss ein Flächeninhalt maximiert werden.
$F(x) = (10 - x)(3 + x)$ für $0 \leq x \leq 10$ hat die Nullstellen x = 10 und x = – 3. Hierzu gehört ein nach unten offener Parabelbogen mit dem Scheitel $(3{,}5|42{,}25)$. Das maximale Volumen wird für x = 3,5 angenommen:
$V = 42{,}25 \cdot 4\ cm^3 = 169\ cm^3$

c) $V(x) = (10 - x)(3 + x)\cdot 4 = 150$, also $x = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{2} = \begin{cases} 1{,}32055.. \\ 5{,}67944.. \end{cases}$, die beide in der Definitionsmenge von x liegen. Da es sich um einen nach unten geöffneten Parabelbogen handelt, ist das Volumen größer als 150 cm^3 für alle x aus]1,32055..; 5,67944..[.

Zu Aufgabe 1.5.3.10:
a) Nach Augenmaß kann man sehr gut Tangenten zeichnen.
b) Eine Tangente hat mit einer Parabel genau einen Punkt gemeinsam, der im Folgenden für eine beliebige Gerade durch den angegebenen Punkt, der nicht auf der Parabel liegt, berechnet wird. Für eine solche Gerade $y = mx + t$ gilt z. B. $t = 6 + m/2$; also lautet sie $y = mx + 6 + m/2$. Setzt man sie in die Parabelgleichung ein, so erhält man $mx + 6 + m/2 = - x^2 - 2x + 3$ oder $x^2 + (m + 2)x + (3 + m/2) = 0$, deren Diskriminante bei einer Tangente null ist: $D = (m + 2)^2 - 4(3 + m/2) = 0$, d. h. $m^2 + 2m - 8 = 0$ hat die Lösungen $m = 2$ und $m = - 4$. Die Tangentengleichungen lauten: $y = 2x + 7$ und $y = - 4x + 4$.

Zu Aufgabe 1.5.3.11:
Die Parabel hat den Scheitel $(- 2|3)$, d. h. A und B liegen unterhalb der Scheiteltangente.
a) $F(ABC) = ½\ 8\cdot(y + 3) = ½\ 8(½x^2 + 2x + 5+3) = 2x^2 + 8x +32$ ist ebenfalls eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $(- 2|24)$.
b) Aus a) folgt: Der Flächeninhalt ist bei $x = - 2$ mit $F = 24$ minimal.

Zu Aufgabe 1.5.3.12:
a) $- x - 2 = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$, d. h. $x^2 + 2x + 1 = 0$ oder $(x + 1)^2 = 0$ oder $x = - 1$. Die Gerade hat mit der Hyperbel genau den Schnittpunkt $(- 1|- 1)$.
b) Da diese Hyperbel zum Ursprung punktsymmetrisch ist, muss durch $(1|1)$ eine zur gegebenen Geraden parallele Tangente gehen. Sie lautet $y + x - 2 = 0$.

Zu Aufgabe 1.6.1.1:

Schritt	Anzahl der Dreiecke	Größe der Dreiecke	Größe der Teilvolumen	Gesamtvolumen
1	4	F	V	V
2	$4\cdot 6$	F:4	V:8	V(1 + 4/8)
3	$4\cdot 6^2$	$F:4^2$	$V:8^2$	$V(1 + \frac{4}{8} + \frac{4\cdot 6}{8^2})$
n	$4\cdot 6^{n-1}$	$F:4^{n-1}$	$V:8^{n-1}$	V_n

a) F sei die Fläche eines das Tetraeder berandenden Dreiecks. Das Tetraeder hat also 4F als Oberfläche. Durch den Verfeinerungsprozess kommt auf jeder Seitenfläche zum „mittleren Viertel“ eine dreiseitige Pyramide dazu, wobei sich jedes Oberflächenteil um 2/4 vergrößert. Nach der Tabelle (bzw. vollständiger Indutkion) ist nach dem n-ten Schritt die Oberfläche $4\cdot 6^{n-1}\cdot F:4^{n-1} = 4\cdot(6/4)^{n-1}F \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Oberfläche wächst also über alle Grenzen.

b) $V_n = V(1+\frac{4}{8}(1+\frac{6}{8}+...+\left(\frac{6}{8}\right)^{n-2}) = V(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{4}-1}) = V(1+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)) \to 3V$ für $n \to \infty$

c) Die linke Zeichnung in MI 44 Seite 31 legt „oben“ ein Quadrat fest. Aus Symmetriegründen gilt dies für alle weiteren 5 Seiten eines Würfels. Damit ist der Würfel festgelegt. Man müsste jetzt nur zeigen, dass diese Würfelflächen bei „Verfeinerung“ nicht mehr überschritten werden.

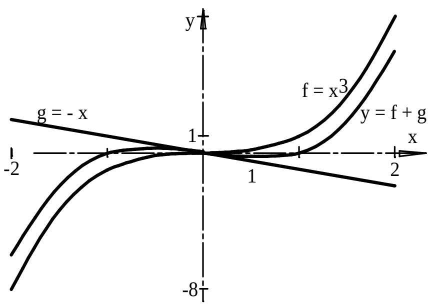
Aufgabe 1.6.1.2:
a) $D = \mathbb{R}$. Ist n ungerade, so ist $W = \mathbb{R}$. Ist n gerade, so ist $W = \mathbb{R}_0^+$.
b) Alle Graphen gehen durch $(0|0)$ und $(1|1)$. Bei ungeradem n haben die Kurven untereinander auch $(- 1|-1)$ gemeinsam, bei geradem n auch $(- 1|1)$.
c) Bei geradem n gilt $x^n = (- x)^n$, deshalb ist jeweils $x = 0$ Symmetrieachse. Bei ungeradem n gilt $(- x)^n = - x^n$ und deshalb ist der Graph jeweils zu $(0|0)$ punktsymmetrisch.
d) Bei ungeradem n sind die Kurven jeweils streng monoton steigend. Bei geradem n sind sie für negative x

streng monoton fallend und für positive x streng monoton steigend.
e) Von beiden Seiten nähern sich die Kurven bei x = 0 der x-Achse. Dies geschieht mit zunehmenden n rascher.

Zu Aufgabe 1.6.1.3:
a) Z. B. kann man die Formel ausmultiplizieren.
b) $y = (x - 2)^3 + 1$
c) Verschiebe die Kurve aus a) längs dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ in die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^3$. Anschließend wird diese längs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu der Parabel von c) verschoben. Die Superposition zweier Verschiebungen ist eine Verschiebung. Man kann u. U. dies mit Vektorrechnung durchführen.

Zu Aufgabe 1.6.1.4:
$(5 - y) + y^2 = 25$ hat die Lösungen y = - 4 und y = 5; also haben die Schnittpunkte die Koordinaten $(0|5)$, $(3|-4)$ und $(-3|-4)$. Im anderen Fall bekommt man $(y - 3) + y^2 = 25$; das ist eine quadratische Gleichung, die in **R** keine Lösung hat, also meiden sich Kreis und Parabel. Allgemein gilt:
$y^2 + y - (a + r^2) = 0$ mit den Lösungen $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4(a + r^2)}}{2}$. Hieraus ersieht man:
Falls $1 + 4a + 4r^2 = 0$ ist, also $a = \dfrac{-4r^2 - 1}{4}$ gibt es 1 oder 2 Schnittpunkte, wobei es nur 1 Schnittpunkt gibt, falls x = 0 wird.
Falls $1 + 4a + 4r^2 > 0$ ist, also $a > \dfrac{-4r^2 - 1}{4}$ gibt es 3 oder 4 Schnittpunkte, wobei es 3 Schnittpunkte sind, falls in einem Fall x = 0 ist.
Falls $1 + 4a + 4r^2 < 0$ ist, also $a < \dfrac{-4r^2 - 1}{4}$ gibt es keinen Schnittpunkt.

Zu Aufgabe 1.6.1.5:
a) $y = x(x^2 - 1) = 0$ ergibt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
b) Nebenstehend wurden absichtlich in x- und y-Richtung verschiedene Maßstäbe gewählt, um die Krümmungen der Kurven deutlicher werden zu lassen.
c) s ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil gilt: $(-x)^3 - (-x) = -(x^3 - x)$.
d) Die Stellen der Extremwerte können nur bei etwa 0,3 geschätzt werden. Dann folgt:
Die Kurve ist streng monoton steigend in $]-\infty; -0{,}3] \cup [0{,}3; \infty[$, sonst streng monoton fallend.



Zu Aufgabe 1.6.1.6:
a) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\} = W$ falls n ungerade ist; sonst $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $W = \mathbb{R}^+$.
b) n ungerade: $(-1|-1)$ und $(1|1)$. n gerade $(-1|1)$ und $(1|1)$.
c) n ungerade: $(-x)^{-n} = -x^{-n}$, d. h. punktsymmetrisch zu $(0|0)$. n gerade $(-x)^{-n} = x^{-n}$, d. h. achsensymmetrisch zu x = 0.
d) n ungerade: In D streng monoton fallend. n gerade: Im Negativen streng monoton steigend, im Positiven streng monoton fallend.
e) Beide Kurven schmiegen sich für $x \to \pm\infty$ immer mehr der x-Achse an. Beide Kurven schmiegen sich für $x \to 0$ von beiden Seiten der y-Achse an.

Zu Aufgabe 1.6.1.7:
a) $F(OTS_n) = F(\text{Trapez}) - F(\text{Dreieck unter TO}) - F(\text{Dreieck unter } OS_n) =$
$= ½\,(4{,}5 + 12n^{-1})(6 + n) - ½\; 6 \cdot 4{,}5 - ½\; n \cdot 12n^{-1} =$
$= ½\,(27 + 72n^{-1} + 4{,}5n + 12 - 27 - 12) =$

$= ½ (72n^{-1} + 4{,}5n)$

b) $29{,}25 = ½ (72n^{-1} + 4{,}5n)$ oder $72n^{-1} + 4{,}5n – 58{,}5 = 0$, d. h. $4{,}5n^2 –58{,}5\, n + 72 = 0$ oder $n^2 – 13n +16 = 0$ hat die Lösungen 11,623... und 1,376..., also unter Berücksichtigung der Genauigkeit der gegebenen Maße 11,62 und 1,38.

c) $\left(\sqrt{x} - 4\left(\sqrt{x}\right)^{-1}\right)^2 + 8 = x + 16x^{-1}$ bewiesen durch Ausmultiplizieren.

d) $F(OTS_n)$ ist am kleinsten, wenn $72n^{-1} + 4{,}5n$ am kleinsten ist.

n	1	2	3	4	5	6
$2F(OTS_n)$	76,5	45	37,5	36	36,9	39

Ab n = 6 wächst 4,5n rascher als $72n^{-1}$ kleiner wird.
Deshalb ist für n = 4 das absolute Minimum $F(OTS_n) = 18$ erreicht.

Zu Aufgabe 1.6.1.8:
$– 2·3^2$ ist als negative Zahl die kleinste. $18^{-3} > (0{,}5^{-1}·9)^{-4} = – 2·3^2$

Zu Aufgabe 1.6.1.9:
a) $\sqrt{32} \le x \le 9$ oder $-\sqrt{32} \ge x \ge -9$ b) $\sqrt[3]{100} < x < \sqrt[3]{131072}$ c) $\sqrt[4]{243} \le x < 32$ oder $-\sqrt[4]{243} \ge x > -32$

Zu Aufgabe 1.6.2.1:
a) a ≥ 0, weil es im Reellen keine Wurzel aus einer negativen Zahl gibt.
b) D = $\mathbb{R}$
c) W = $\mathbb{R}^+$ falls a > 0.
d) Wegen c) gibt es keine Nullstelle.
e) Für 0 < a < 1 ist die Funktion streng monoton fallend. Für a > 1 streng monoton steigend.
f) Aus dem Bisherigen folgt: Im Fall 0 < a < 1 wird die Funktion für kleine x beliebig groß und für große x beliebig klein, aber positiv. Für a > 1 ist es genau umgekehrt.
g) (0|1) liegt auf allen Graphen.
h) $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ liegen zur y-Achse symmetrisch.
i) D. i. ein Potenzgesetz.
j) $a = y^{\frac{1}{x}}$ ist eindeutig, falls y > 0. Z. B. Es sei $2 = a^3$, dann ist $4 = a^6$ usw.
k) Z. B. a = 2, a = 3, a = 1, a = 0, a = ½ , a = 1/3. Die Zeichnungen sind hier weggelassen.

Zu Aufgabe 1.6.2.2:
a) $128 = 2^7$, also x = 7 b) $½ = 2^{-2}$, also x = – 2 c) $0{,}04 = 1/5^2$, also x = – 2 d) L = ∅
e) 4x = 2, alos x = ½ f) $81 = 3^4$, also x = 1/8 g) $0{,}\overline{1} = 1/3^2$, also x = – 1/8 h) x = 3/2

Zu Aufgabe 1.6.2.3:
a)

x	10	15	13	12	12,5	12,4	12,45	12,44	12,43
$y = 1{,}5^x$	57,..	437,..	194,..	129,..	158,..	152,..	155,7..	155,08..	154,45...
$y = x^2$	100	225	169	144	156,25	153,76	155,0025	154,7..	154,50..

Wegen der Monotonie der untersuchten Funktionen gilt: Ab 12,43 < x < 12,44, also x = 12,43..., ist die Exponentialfunktion größer als die Quadratfunktion.

b)

x	50	100	55	70	60	58	59
$y = 2^x$	$< 10^{16}$	$> 10^{30}$	$< 10^{17}$	$> 10^{21}$	$> 10^{18}$	$< 3·10^{17}$	$> 5{,}7·10^{17}$
$y = x^{10}$	$> 10^{16}$	10^{20}	$> 10^{17}$	$< 10^{19}$	$< 10^{18}$	$> 4·10^{17}$	$< 5{,}2·10^{17}$

Wegen der Monotonie der untersuchten Funktionen gilt: Ab 59 < x < 60, d. h. x = 59,..., ist die Exponentialfunktion größer als die Potenzfunktion.

c)
Hier versagt der Taschenrechner für das Vergleichen. Der Taschenrechner liefert noch $25^{100} = 9{,}5..\cdot 10^{13}$, d. h.
$10^{130} < 25^{1000} < 10^{140}$ (1)
und $1000^{100} = 10^{300}$ also $25^{1000} < 1000^{100}$. Aus (1) folgt $10^{1300} < 25^{10000} < 10^{1400}$ aber $10000^{100} = 10^{400}$, also $25^{10000} > 10000^{100}$. D. h. für die gesuchte Zahl x gilt: $1000 < x < 10000$

Zu Aufgabe 1.6.2.4: a) Verschiebung b) Zentrische Streckung c) Zentrische Streckung d) Zentrische Streckung und Verschiebung

Zu Aufgabe 1.6.2.5:

a) 0 b) – 1 c) – 1 d) 6 e) $\sqrt{3}$ f) $2^{3\cdot\log_2 3} = 2^{\log_2 27} = 27$ g) $\frac{1}{5}$ h) $\frac{1}{2}\log_a x^2$

i) Dieser Wert kann im Reellen nicht berechnet werden.

Zu Aufgabe 1.6.2.6:

a) $x = \log_{\frac{a}{b}} c = \dfrac{\lg c}{\lg \frac{a}{b}} = \dfrac{\lg c}{\lg a - \lg b}$ b) $x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\lg a + \lg b}{\lg u - \lg v}$

Zu Aufgabe 1.6.2.7:

a) $3^x = 19$ b) $y^x = \dfrac{1}{z}$ oder $z = \dfrac{1}{y^x}$ oder $y = 10^{-\frac{\lg z}{x}}$ c) Weil es mehrere Variable sind.

Zu Aufgabe 1.6.2.8:
a) $x = -2^y$ b) $x = 5^{2y}$

Zu Aufgabe 1.6.2.9:

a) Falls $\log_5 8$ rational ist, muss dies auch der dritte Teil also $\log_5 2$ und umgekehrt sein. Annahme: $\log_5 2 = \dfrac{a}{b}$ mit gekürzten natürlichen Zahlen a und b. Dann ist $5^a = 2^b$. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ zeigt, dies ist nicht möglich; also ist die gegebene Zahl irrational.
b) $\log_2 8 = 3 \log_2 2 = 3$. Diese Zahl ist rational.
c) ggT (a,b) = 1

Zu Aufgabe 1.6.2.10:
a) $D = \mathbb{R}$
b) $y = 4x^2 - 8x + 4$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, die ihren Scheitel bei $(1|0)$ hat. Hieraus folgt $D = \mathbb{R}$.
c) $D = \mathbb{R}^+$ d) $D = \mathbb{R}^+$ e) $D = \varnothing$

Zu Aufgabe 1.6.2.11:
a) $4 \log_a x = \log_a x^4$ b) $\log_{10} 10^x = x \log_{10} 10 = x$ c) $4 \log_{10} \sqrt{2x+3} = \log_{10} (2x+3)^2$

Aufgabe 1.6.2.12:

a) x = 1/8 b) $x = 2^3 \cdot 4^{0,5} = 16$ c) $x = \sqrt[3]{\dfrac{|a|b^4}{c(a+c)}}$, falls $c(a+c) > 0$. d) $x = \log_3 15$

e) $2^{x-1} = 2^{(-x+2)\log_2 5}$, d. h. $x(1 + \log_2 5) = 2 \log_2 5 + 1$, also $x = \dfrac{1 + 2\log_2 5}{1 + \log_2 5}$

f) $5\cdot 10^{2x} - 12\cdot 10^x - 5/4$. Die Substitution $10^x = z$ ergibt: $5z^2 - 12z - 5/4$ und z = 2,5 oder z = – 0,1; letzteres ist nicht möglich, weil Potenzen positiv sind. Also gilt $10^x = 2{,}5$ oder x = log 2,5.

g) $x = 2^8 = 256$

h) $D =]-5; \infty[\cap]-\infty; 2[\cap]-\infty; 3[=]-5; 2[$ $\quad \frac{(x+5)(2-x)}{3(3-x)} = 0$ Wir untersuchen $(x + 5)(2 - x) = 0$ oder $x = -5 \in D$ bzw. $x = 2 \notin D$. 5 erfüllt die Gleichung. Also ist $L = \{-5\}$.

i) $D =]0,5; \infty[$ Die Substitution $\log_{10}(2x - 1) = z$ ergibt $z^2 - 3z + 2 = 0$ oder $z = 2$ oder $z = 1$. Das ergibt: $100 = 2x - 1$, also
$x = 101/2$ bzw. $10 = 2x - 1$, also $x = 11/2$; beide liegen in D und erfüllen die Ausgangsgleichung.

j) $\frac{\lg(7x^2+2)}{\lg 4} = \frac{\lg(4x-1)}{\lg 2}$ mit $D =]0,25; \infty[$. $\sqrt{7x^2+2} = 4x - 1$ d. h. $9x^2 - 8x - 1 = 0$ hat die Lösungen 1 und $-1/9$. Letzteres liegt nicht in D. Die Probe für $x = 1$ ergibt $L = \{1\}$.

k) $2\lg^2 x = 2$ oder $\lg x = \pm 1$; die Probe ergibt $L = \{10; 1/10\}$

l) $\log_a{}^2 x = 2 + \log_a x$ mit $D = \mathbb{R}^+$. Die Substitution $\log_a x = z$ ergibt $z^2 - z - 2 = 0$ oder $z = 2$ bzw. $z = -1$, also
$x = a^2$ oder $x = 1/a$; die Probe ergibt $L = \{-1; 2\}$.

m) $\frac{\lg(4x \cdot 4^3)}{\lg 4} = \frac{\lg 4}{\lg x}$ mit $D = \mathbb{R}^+$. Die Substitution $\lg x = z$ ergibt $4z^2 + 3\lg 4 \cdot z - \lg^2 4 = 0$ und damit $z = -1$ oder $z = \frac{1}{4}\lg 4 = \lg\sqrt{2}$, d. h. $x = -0,1$ oder $x = \sqrt{2}$.

n) $\frac{\lg^2 x}{\lg a \cdot \lg b} = \frac{\lg b}{\lg a}$, d. h. $\lg x = \pm \lg b$ also $x = 10^{\pm \lg b}$

Zu Aufgabe 1.6.2.13:
Durch gezieltes Raten findet man:

x	1	10	5	4
(0,5x – 1)lg 3	– 0,238..	**1.9**	**0,71..**	0,47..
lg x	**0**	1	0,3..	**0,60..**

Die jeweils größere Zahl ist halbfett gedruckt. Ergebnis x = 4,...

Zu Aufgabe 1.6.2.14:

$0,1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n$ oder $\lg 0,1 > n \cdot \lg \frac{5}{6}$, weil $y = \lg x$ eine streng monoton wachsende Funktion ist. Hieraus folgt:

$n > \frac{\lg 0,1}{\lg\frac{5}{6}} \approx 12,629...$ also $n > 12$, weil $\lg \frac{5}{6} < 0$ ist.

Zu Aufgabe 1.6.2.15:

$2 = \log_a(2b+c)$ oder $a^2 = 2b + c$
$0 = \log_a(-b + c)$ oder $1 = -b + c$ oder $b = c - 1$
$1 = \log_a c$ oder $a = c$

Setzt man die letzten beiden Gleichungen in die erste ein, so erhält man $c^2 - 3c + 2 = 0$, was gelöst wird von $c = 2$ und damit $a = 2$ und $b = 1$ also $y = \log_2(x + 2)$ oder $c = a = 1$, wozu es keine Logarithmusfunktion gibt.

Zu Aufgabe 1.6.3.1:
a) $\cos x = 3/5$ $\quad L = \{\pm 0,92729... + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$
b) $5 - \sin x = 6 - 6\sin^2 x$ also $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Die Substitution $z = \sin x$ liefert $z = 1/2$ oder $z = -1/3$ also
$L = \{\pi/3 + 2k\pi$ oder $-0,3398... + 2k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $\sin x \le \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also L = {$x \in [-5\pi/4 + 2k\pi;\ \pi/4 + 2k\pi]$ für alle $k \in$ }.
d) L = {$-\pi/6 + 2k\pi \le x \le \pi/4 + 2k\pi$ für alle $k \in$ }$\cup${$3\pi/4 + 2k\pi \le x \le 7\pi/6 + 2k\pi$ für alle $k \in$ }
e) L = {$-\pi/4 + k\pi \le x \le \pi/4 + k\pi$ für alle $k \in$ }
f) L = {$\pi/3 + k\pi$ für alle $k \in$ }
g) $(2 \sin x + 1)\cos x = 0$ also L = {$-\pi/6 + 2k\pi$ oder $7\pi/6 + 2k\pi$ oder $\pi/2 + k\pi$ für alle $k \in$ }
h) $\sin x\left(\frac{1}{\cos x} + 3\right) = 0$. Der Nenner der Klammer ist für $\cos x \ne 0$ gleich null für $\cos x = -1/3$. Hieraus ergibt sich L = {$k\pi$ oder 1,9106.. + $2k\pi$ oder 1,91063... + $2k\pi$ für alle $k \in$ }.
i) Die Substitution $\sin x = z$ führt zu der Gleichung $6z^2 - z - 1 = 0$ mit den Lösungen $z = ½$ und $z = -1/3$. Hieraus folgt L = {$\pi/6 + 2k\pi$ oder $7\pi/6 + 2k\pi$ oder – 0,3398... + $2k\pi$ oder 3,4814.. + $2k\pi$ für alle $k \in$ }.
j) Die Gleichung führt auf $\cos^2 x + 2\cos x - 8 = 0$ mit den sinnlosen Lösungen $z = -4$ und $z = 2$.
k) Aus $\tan x = -1$ folgt L = {$-\pi/4 + k\pi$ für alle $k \in$ }.
l) Da $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ ist, folgt $3 \sin x + 7 \cos x = 0$, d. h. $\tan x = -7/3$, d. h. L = {– 1,1659... + $k\pi$ für alle $k \in$ }.
m) Da $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x$ und $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x$ sind, folgt $\cos^2 x - 3 \sin x^2 = 1 - 4 \sin^2 x = 0$ oder $\sin x = \pm 1/2$ bringt L = {$\pm\pi/6 + 2k\pi$ oder $\pm 5\pi/6 + 2k\pi$ für alle $k \in$ }.

Zu Aufgabe 1.6.3.2:
In allen Teilaufgaben ist $|\sin x| \le 1$ bzw. $|\cos x| \le 1$ verletzt.

Zu Aufgabe 1.6.3.3:
Die graphische Lösung bringt eine erste Näherung, die hier weggelassen wird.
a)

x	1	0,5	0,6	0,7	0,65	0,64
$\sqrt{x}$	**1**	0,707..	0,774	**0,83..**	**0,806..**	0,8
cos x	0,5..	**0,877..**	**0,82..**	0,76..	0,79..	**0,802..**

Die halbfetten Zahlen sind jeweils die größeren. Es folgt x = 0,64...
b)
Es gibt zwei Lösungen.

x	– 0,5	– 1	– 0,7	– 0,6	– 0,65	– 0,63	– 0,64
$x^2 - 1$	– 0,75..	**0**	– **0,51..**	– 0,64..	– **0,57..**	– 0,60	– **0,590**
sin x	– **0,47..**	– 0,84..	– 0,64..	– **0,56..**	– 0,60..	– **0,58..**	– 0,597

x	1,5	1,3	1,40	1,42	1,41
$x^2 - 1$	**1,25**	0,69	0,96	**1,01..**	**0,988**
sin x	0,99..	**0,96..**	**0,98**	0,98	0,987

Die Ergebnisse lauten $x \approx -0{,}64..$ und $x \approx 1{,}40..$

Zu Aufgabe 1.6.3.4:
a) $3 \sin x - 4 \sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$, d. h. $\sin x\,(3 - 4 \sin x - 2 \cos x) = 0$. Es wird zunächst die Klammer untersucht: $2\sqrt{1-\sin^2 x} = 3 - 4 \sin x$ oder $4 - 4 \sin^2 x = 9 - 24 \sin x + 16 \sin^2 x$ also $20 \sin^2 x - 24 \sin x + 5 = 0$ ergibt $\sin x = \frac{6 \pm \sqrt{11}}{10}$. Damit findet man die Lösungsmenge
L={$k\pi$ oder 1,198996...+$2k\pi$ oder 1,942630...+$2k\pi$ oder 0,271666..+$2k\pi$ oder 2,869925...+$2k\pi$ für alle $k \in$ }.

b) $2 \sin x \cos x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$. Man muss bei den Lösungen also $\sin x = 0$ berücksichtigen und hat
$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ oder $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, d. h. $\cos x = 1$ oder $\cos x = -1/2$.
L = {$k\pi$ oder $2\pi/3 + 2k\pi$ oder $4\pi/3 + 2k\pi$ für alle $k \in$ }

Zu Aufgabe 1.6.3.5:

a) $\sin x + \sin x \cos\frac{2}{3}\pi + \cos x \sin\frac{2}{3}\pi + \sin x \cos\frac{4}{3}\pi + \cos x \sin\frac{4}{3}\pi =$

$= \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x = 0$

b) $\dfrac{1+\cos x + 2\cos^2 x - 1 - 4\cos^3 x - 3\cos x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = \dfrac{2\cos x(-1+\cos x - 2\cos^2 x)}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = 2\cos x$

Zu Aufgabe 1.6.3.6:

a) Aus $m_1 = \tan\alpha$ und $m_2 = \tan\beta$ folgt der Winkel zwischen den beiden Geraden als $\beta - \alpha$ aus dem Additionstheorem für den Tangens:

Aus $\tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{5}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{23}{7}$ folgt $\beta - \alpha = 73{,}0724..^{\circ}$.

b) Falls $\beta - \alpha = 90^{\circ}$, muss in dem obigen Bruch der Nenner 0 sein, also $\tan\alpha \cdot \tan\beta = -1$ sein.

Zu Aufgabe 1.6.3.7:

Es gilt $\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin\alpha$; da gilt $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$ folgt hieraus:

$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$ oder wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit des Cosinus in $[0;\pi]$ bekommt man $\beta - \gamma = \alpha$.

Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck folgt hieraus $\beta = \frac{\pi}{2}$. Es handelt sich also um eine Eigenschaft rechtwinkliger Dreiecke.

Zu Aufgabe 1.6.3.8:

a) x für $[-1;1]$ b) x für $[-\pi/2;\pi/2]$ c) $\sqrt{1-\cos^2 \arccos x} = \sqrt{1-x^2}$ für $[0;\pi]$

Zu Aufgabe 1.6.3.9:

An einer geeigneten Zeichnung kann man ablesen:
$x_D = x\cos\varphi - y\sin\varphi$
$y_D = x\sin\varphi + y\cos\varphi$
Weil jedem Paar $(x|y)$ genau ein Paar $(x_D|y_D)$ zugeordent wird, handelt es sich um eine Abbildung.

Im zweiten Fall geht es einfacher mit Vektorrechnung: Es sei $\vec{x} \to \overrightarrow{x_D}$. Dann gilt $\overrightarrow{x_D} = \vec{x} - 2\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ wie man ebenfalls einer Zeichnung entnehmen kann. Auch hier ist die Zuordnung eindeutig und deshalb handelt es sich um eine Abbildung.

Zu Aufgabe 2.1.1:

a) D = |. y' = 6x – 6 ergibt den Scheitel $(1|-10)$. Es handelt sich also um eine nach oben geöffnete Parabel und W = $[-10;\infty[$.
b) Die Funktion ist in $]-\infty;1]$ streng monoton fallend, sonst streng monoton steigend. **D’** = **S** = **R**
c) Der Scheitel ist relatives und absolutes Minimum. Relative Maxima und Wendepunkte gibt es nicht. Da y(– 7) = 182 und y(5) = 38 ist wegen der Monotonie der Funktion das absolute Maximum 182.
d) Die Zeichnung ist hier weggelassen.

Zu Aufgabe 2.1.2:

a) **D** =]– 10; ∞[\{1}; $\lim_{x\to 1l} y = 0$ und $\lim_{x\to 1r} y = 1$ zeigen x = 1 ist eine endliche Sprungstelle und damit ist y hier unstetig. $\lim_{x\to 3l} y = 7$ und $\lim_{x\to 3r} y = 7$ begründen, dass y hier stetig ist.

$$y' = \begin{cases} 4x + 3 \text{ für } -10 < x < 1 \\ 2^x \text{ für } 1 < x < 3 \\ -2\pi \sin \pi x \text{ für } 3 < x < \infty \end{cases}$$

Da die Grenzwerte der Ableitung an den Übergangsstellen jeweils verschiedene Werte ergeben, gilt D' = D\{3}. Damit ist bei x = 3 eine Ecke. Jede der Einzelfunktionen ist beliebig oft differenzierbar; deshalb gilt D" = D'.
Die „erste" Funktion ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei x = – ¾; also ist die Gesamtfunktion streng monoton steigend in [– ¾; 1[∪]1; 3]∪[3+2n–2; 5+2n–2] für alle n ∈ ⌉, sonst in **D** fallend.

$$y'' = \begin{cases} 4 \text{ für } -10 < x < 1 \\ 2^x \text{ für } 1 < x < 3 \\ -4\pi^2 \cos \pi x \text{ für } 3 < x < \infty \end{cases}$$

b) Die Funktion hat beim Parabelscheitel x = – ¾ ein relatives Minimum y_1 = – 6,125. Bei x = 2 + 2k mit k ∈ ⌉ hat die Funktion relative Maxima y_2 = 11 und bei x = 4 + 2k – 1 für k ∈ ⌉ relative Minima y_3 = 7. Es ist y_4(– 10) = 165 und deshalb das Supremum. y_1 ist unter den relativen Minima das kleinste und deshalb das absolute Minimum.
c) wird hier weggelassen.

Zu Aufgabe 2.1.3:
Für a = 0 handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel, die ihren Scheitel (0|0) als absolutes und relatives Minimum hat. Wendepunkte existieren keine.
Für a ≠ 0 handelt es sich um eine Kurve 3. Ordnung, von der man weiß, dass sie einen Wendepunkt und u. U. ein relatives Maximum und ein solches Minimum hat. Es gilt:
f' = $3a^2x^2 + 2x = 0$ für (0|0) und $\left(\frac{-2}{3a^2}\middle|\frac{4}{27a^4}\right)$. Da der zweite y-Wert positiv und der erste null ist, handelt es sich beim ersten Punkt um das relative Minimum und beim zweiten um das relative Maximum.
f" = $6a^2x + 2 = 0$ liefert den Wendepunkt $\left(\frac{-1}{3a^2}\middle|\frac{2}{27a^4}\right)$. Die Steigung der Wendetangente beträgt m = $\frac{-1}{3a^2}$.
Weiter ist gefragt nach den Extremwerten unter den Extremwerten in Abhängigkeit von a. Da
$\frac{d\frac{4}{27a^4}}{da} = \frac{-16}{27a^5} \neq 0$ für alle a ≠ 0 ist, gibt es keinen tiefsten oder höchsten relativen Extremwert. Absolute Extremwerte existieren bei einer in | definierten Funktion vom Grad 3 nicht.
Die steilste Tangente liefert $\frac{dm}{da} = \frac{2}{3a^3} = 0$. Dies gilt für kein a. Absolute Extremwerte von m gibt es nicht; die Wendetangente kann für a → 0 beliebig steil und für a → ± ∞ beliebig flach werden.

Zu Aufgabe 2.1.4:
Einfach heißt die Funktion, wenn sie z. B. eine ganz rationale Funktion ist. Da 4 Bedingungen gegeben sind, versucht man es mit einer solchen Funktion vom Grad 3:
Da die Kurve durch den Ursprung geht ist in $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ die Variable d = 0; also hat man:
Aus $y = ax^3 + bx^2 + cx$,
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$ und
$y'' = 6ax + 2b$ findet man das folgende lineare Gleichungssystem:

I 5 = 27a + 9b + 3c
II 1 = a + b + c
III 0 = 27a + 6b + c
IV 18a + 2b < 0
V = 27II – I: 22 = 18b + 24c
VI =I – III: 5 = 3b + 2c

V – 6VI: – 8 = 12c also c = – 2/3 und damit b = 19/9 also a = – 4/9.
Überprüfung von IV: – 18·4/9 + 2·19/9 < 0. Man sieht hier sehr deutlich, dass die Aufgabe unlösbar wird, wenn der angegebene Punkt bei einem Minimum hätte sein sollen. In einem solchen Fall rettet man sich dahingehend, dass man den Grad des Ansatzes um 1 erhöht. Dann aber ist die Funktion nicht mehr eindeutig bestimmt.

Ergebnis: y = $-\frac{4}{9}x^3+\frac{19}{9}x^2-\frac{2}{3}x$. Die Funktion beginnt in ∞ und geht nach – ∞.

Zu Aufgabe 2.1.5:
Eine gedämpfte Schwingung wird durch $y = Ae^{-kx}\sin(bx + c)$ beschrieben.
$y' = -kAe^{-kx}\sin(bx + c) + Abe^{-kx}\cos(bx + c) = 0$
Man wählt z. B. k = b und erhält tan(bx + c) = 1 also bx + c = π/4 + nπ.
D. h. man wählt k = b = π und erhält $y = Ae^{-\pi x}\sin(\pi x + \pi/4)$.

Zu Aufgabe 2.1.6:
Zur Überprüfung: Die Funktion müsste bei 0 und 2π Nullstellen besitzen und in der Mitte das Minimum 0. Man kann dann noch in den Nullstellen die Tangentensteigungen überprüfen.

$$y = \begin{cases} (x-\pi)^2 \text{ für } x \in [0;2\pi] \\ (x-3\pi)^2 \text{ für } x \in [2\pi;4\pi] \\ . \\ . \\ . \\ (x-(2k-1)\pi)^2 \text{für } x \in [(2k-2)\pi;2k\pi] \end{cases}$$

Zu Aufgabe 2.1.7:
Man kann Funktionen auf vielfältige Art so zusammensetzen, dass die gewünschten Nullstellen vorhanden sind. Es werden z. B. nur lineare Funktionen derselben Steigung benutzt:

$$y = \begin{cases} x \text{ für } x \in [0;1[\\ x-1 \text{ für } x \in [1;2[\\ \text{usw.} \\ x-n \text{ für } x \in [n;n+1[\text{ usw. für } n \in Z \end{cases} .$$

Diese Funktion hat an ihren Nahtstellen endliche Sprungstellen. Soll sie dort differenzierbar sein, so wählt man y = Asin πx.

Zu Aufgabe 2.1.8:

sin 0 = 0,	d. h. f(0) = 0,
y'(0) = cos 0 = 1,	d. h. f'(0) = 1,
y"(0) = - sin (0) = 0,	d. h. f"(0) = 0.

a) $f = ax^2 + bx + c$	d. h. c = 0
f' = 2ax + b	d. h. b = 1
f" = 2a	d. h. a = 0, das geht nicht; denn jetzt haben wir keine Funktion vom Grad 2 mehr.

Ergebnis: Wenn man nicht auch die gleiche Krümmung haben will, so funktioniert es mit einer ganz rationalen Funktion vom Grad 2: $f = ax^2 + x$

b) $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$	d. h. d = 0
$f' = 3ax^2 + 2bx + c$	d. h. c = 1
f" = 6ax + 2b	d. h. b = 0

Ergebnis $f = ax^3 + x$ geht glatt in den Sinus über, auch mit derselben Krümmung.

c) $f = a\log_b(cx + d)$, b>1,	d. h. d = 1
$f' = \frac{ac}{(cx+1)\ln b}$	d. h. $\frac{ac}{\ln b}=1$

f" = $\dfrac{-ac^2}{(cx+1)^2 \ln b}$ d. h. $\dfrac{-ac^2}{\ln b} = 0$ oder ac = 0; es kann aber weder a noch c null sein.

Ergebnis: y = a $\log_b$(cx+1) erfüllt die Bedingungen, wenn ac = ln b ist. Es gibt also viele Möglichkeiten. Doch gibt es keine, die dieselbe Krümmung ansetzt.

d) ist damit beantwortet.

Zu Aufgabe 2.2.1:

$\dfrac{d\eta}{d\alpha} = \dfrac{\tan(\alpha+\rho)\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \tan\alpha \cdot \dfrac{1}{\cos^2(\alpha+\rho)}}{\tan^2(\alpha+\rho)} = 0$. Falls der Nenner nicht null ist, was nach der folgenden Rechnung leicht überprüft werden könnte, ist der Zähler null, was auf die Gleichung

$\cos^2(\alpha+\rho)\tan(\alpha+\rho) = \tan\alpha \cos^2\alpha$ führt.

Umgeformt ergibt diese sin 2(α + ρ) = sin 2α. Für 0 < α + ρ < π/2 folgt hieraus ρ = 0, was technisch nicht realisierbar ist. Es gibt also keine relativen Extrema. Absolute können deshalb nur am Rande des Definitionsintervalls α ∈]0; π/2[liegen. Für α = 0 ergibt sich η = 0. Für α = π/2 folgt η = – ∞, also ein sinnloser Wert. D. h. es gibt keine Optimierung.

Zu Aufgabe 2.2.2:

a) Die Klammer der Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Nullstellen bei – 7 und 12 sind, deren Scheitel also bei x = 2,5 ist und damit den Wert 90,25 hat. Die maximale Beschleunigung beträgt also 541,5 m/s^2.

b) t = 12 s

Die angegebene Formel scheint falsch zu sein.

Zu Aufgabe 2.2.3:

a) $y = \dfrac{2400}{z}(1{,}6 + (0{,}1z)^2)$

b) $\dfrac{dy}{dz} = \dfrac{2400z \cdot 0{,}02z - (1{,}6 + 0{,}01z^2)}{z^2} \approx \dfrac{48z^2 - 1{,}6}{z^2} = 0$, falls z = $\pm\sqrt{\dfrac{1{,}6}{48}} \approx \pm 0{,}18$. Mit 0,18 Knoten ist der Verbrauch minimal.

Zu Aufgabe 2.2.4:

r sei der Kreisradius. Die Parameterform der allgemeinen Zykloide heißt in Abhängigkeit vom Drehwinkel t:

x = rt – a sin t,

y = r – a cos t, wenn die „Latte" a im Ausgangspunkt vom Kreismittelpunkt senkrecht nach unten geht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei a > 0.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\sin t}{r - a\cos t} = 0$, falls a sin t = 0 und der Nenner dies nicht ist. Letzteres ist zu prüfen:

a ≠ r: Für t = kπ und k ∈ ist r – a cos kπ = r ± a ≠ 0. Man erhält abwechselnd relative Maxima und Minima. Die relativen Extremwerte sind auch die absoluten. (Ob mit einem Maximum oder mit einem Minimum für t = 0 begonnen wird, hängt davon ab, wie die Stange am Kreis befestigt ist.)

a = r: Für t = kπ und k ∈ ist r – r cos kπ = $\begin{cases} 2r \\ 0 \end{cases}$; d. h. jedes zweite Extremum „fällt aus", weil es hier eine Spitze gibt.

Zeichnungen zeigen: Für a < r gibt es Wendepunkte, für a ≥ r keine.

Zu Aufgabe 2.2.5

$y_1' = \frac{1}{1+x^2}$ und $y_2' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2((1-x)+(1+x))}{(1-2x+x^2+1+2x+x^2)(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$,

$y_1(0) = 0$ aber $y_2(0) = \pi/4$. D. h. der Graph von y_2 ist gegenüber dem Graphen von y_1 um $\pi/4$ in y-Richtung nach oben verschoben.

Zu Aufgabe 2.2.6.

$\frac{d\eta}{dP} = \frac{(a+P+bP^2)-P(1+2bP)}{(a+P+bP^2)^2} = 0$. Da der Nenner stets von null verschieden ist, wird diese Bedingung nur erfüllt, wenn $a + P + bP^2 - P - 2bP = bP^2 - 2bP + a = 0$ also $P = 1 \pm \sqrt{\frac{b-a}{b}}$. In beiden Fällen ergibt sich $\eta = \frac{1}{1+2b}$. Da $\lim_{P \to \pm\infty} \eta = 0$ und sonst bei der überall differenzierbaren Funktion keine Extrema sind, handelt es sich in beiden Fällen um optimale.

Zu Aufgabe 2.2.7:

Aus Symmetriegründen gilt: $x^2 + y^2 = r^2$
$F = 4xy + 4yz$
$z + y = x$
Hieraus folgt eine algebraische Gleichung vom Grad 4, die der Schüler nicht mehr lösen kann. Auf solche Problematik ist im vorliegenden Text nicht eingegangen worden, soll aber hier kurz angeschnitten werden. In einem solchen Fall muss man sich überlegen, ob man nicht mit anderen Mitteln zum gleichen Ziel kommen kann:
$x = r \cos \alpha$
$y = r \sin \alpha$
$z = r(\cos \alpha - \sin \alpha)$
$F = 4x^2 - 4z^2 = 4r^2(\sin 2\alpha - \sin^2 \alpha)$. Diese Funktion soll maximiert werden, also berechnet man:

$\frac{dF}{d\alpha} = 4r^2(2\cos 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$ Hieraus folgt $\tan 2\alpha = 2$ und damit $\alpha \approx 31^o43'$. Man erhält damit

$F = 2{,}472\ r^2$. Der Füllungsgrad f ist dann $f = \frac{2{,}472 r^2}{r^2\pi} \approx 0{,}7869$.

Es wurden also rund 79% der Kreisfläche benutzt.

Zu Aufgabe 2.2.8:

Wenn x der Kreisradius und h die Rechteckshöhe sind, ergibt sich $20 = F = ½\ x^2\pi + 2xh$ und daraus

$h = \frac{2F - \pi x^2}{4x}$.

Für den Umfang U bekommt man dann: $U = \pi x + 2x + 2h = \pi x + 2x + \frac{40-\pi x^2}{2x} = \frac{20}{x} + \left(\frac{\pi}{2}+2\right)x$

$\frac{dU}{dx} = -20x^{-2} + \frac{\pi}{2} + 2 = 0$. Hieraus erhält man $x = \pm\sqrt{\frac{20}{\frac{\pi}{2}+2}} = \pm 2{,}3666..$.

Das Minuszeichen kommt nicht in Frage; deshalb wird als Kreisradius ungefähr gewählt x = 2,37 m.