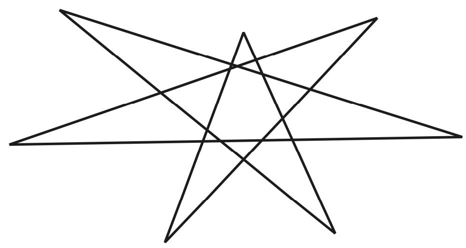
Frank Heinrich

Lösungen zu ausgewählten Aufgaben aus dem Beitrag „Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren – ein Angebot zur Förderung mathematischer Begabung“ (MI 43)

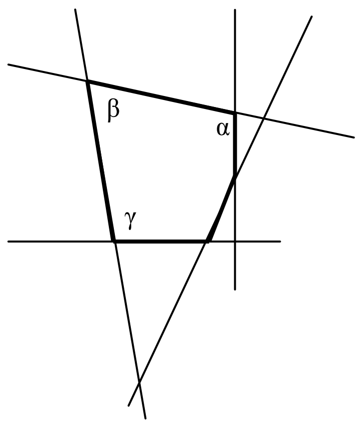
Aufgabe 3.1:
Es handelt sich zwar um eine nicht einfache Sternfigur, jedoch nicht um eine normale, da die 7 Sternspitzen nicht zugleich Eckpunkte eines konvexen Siebenecks sind.



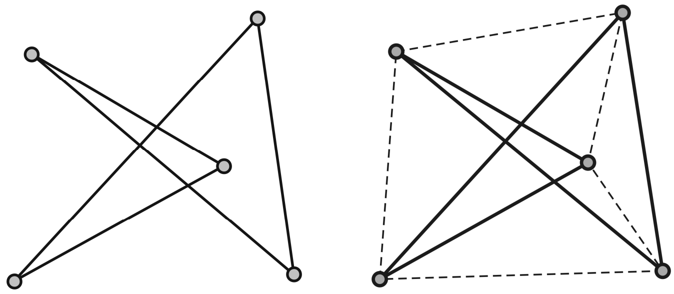
Aufgabe 3.2:
Abb. 6a: zerfallend (in zwei zueinander kongruente regelmäßige konvexe Sechsecke); Abb. 6b: zerfallend (in zwei zueinander kongruente Sternfünfecke); Abb. 6c: nicht zerfallender Neunstern

Aufgabe 4.2.a):
Einfache und nicht einfache Sternfiguren sind die beiden Klassen von Sternfiguren. Zueinander bilden sie Nebenbegriffe. Entartete Sternfiguren, zerfallende Sternfiguren und nicht zerfallende Sternfiguren wurden im Text als Klassen von nicht einfachen (normalen) Sternfiguren ausgewiesen und sind somit Unterbegriffe von nicht einfachen Sternfiguren. Untereinander sind diese drei Begriffe Nebenbegriffe.

Aufgabe 4.3:
Die Formulierung „geeignet gewählt“ ist erforderlich, da die Konstruktion angewendet auf konvexe Fünfecke nicht in allen Fällen einen Fünfstern hervorbringt. In nebenstehender Abbildung sehen wir ein solches Beispiel. Wir erkennen, dass für die Innenwinkel α, β und γ des konvexen Fünfecks folgende Beziehungen gelten: $\alpha + \beta < 180°$ und $\beta + \gamma < 180°$.
Verallgemeinernd lässt sich feststellen: Ein Fünfstern resultiert, wenn jede Summe zweier benachbarter Innenwinkel(größen) der Ausgangsfigur größer als 180° (und kleiner als 360°) ausfällt.



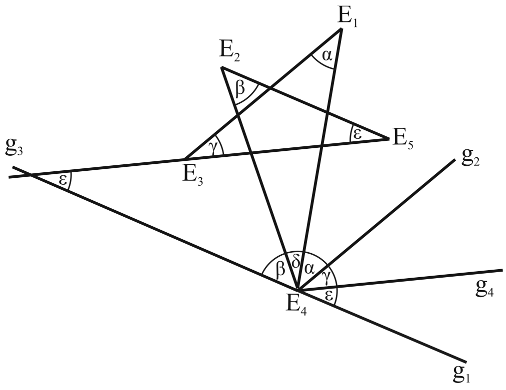
Aufgabe 4.4:
Die nebenstehende nicht normale sternförmige Figur (mittleres Bild) kann mittels des bisher verwendeten Konstruktionsprinzips erzeugt worden sein. Ausgangsfigur ist in diesem Falle ein (im rechten Bild gestrichelt gezeichnetes) nicht konvexes Fünfeck mit einem überstumpfen Innenwinkel.



Aufgabe 4.5:
Vorgelegt sei ein konvexes n-Eck ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$). Jeder Eckpunkt wird mit demjenigen Eckpunkt, den man erhält, wenn man u Ecken ($u \in \mathbb{N}$, $0 < u < n - 2$) überspringt, durch eine Strecke verbunden. Die so entstehende Figur heißt *nicht einfache Sternfigur*.

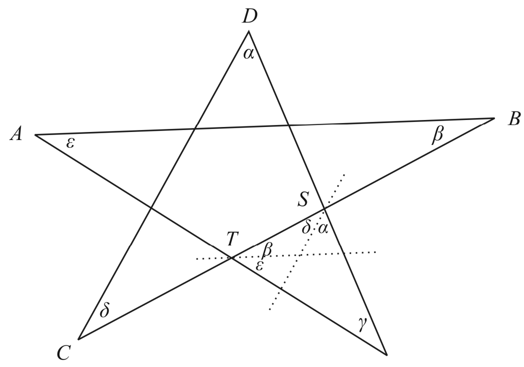
Aufgabe 5.1.2:

Vorgelegt ist die Sternfigur $E_1E_2E_3E_4E_5$. Man zeichnet die Parallele g_1 zu E_2E_5 durch E_4. Durch E_4 zeichnet man eine weitere Gerade, nämlich die Parallele zu E_1E_3, und bezeichnet sie mit g_2. Schließlich wird mit g_4 noch eine Parallele zu E_5E_3 durch E_4 gezeichnet und E_5E_3 wird über E_3 hinaus verlängert und mit g_1 zum Schnitt gebracht.



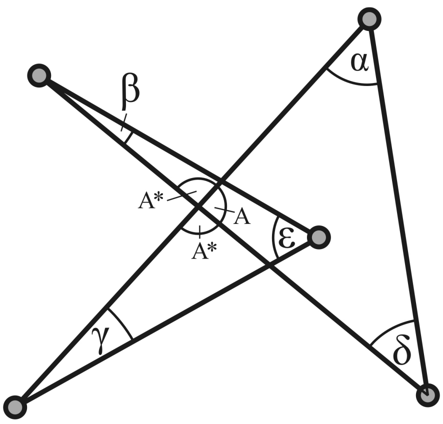
Auf Grund von Winkelbeziehungen an geschnittenen Parallelen kann man in der Umgebung von E_4 die fünf Innenwinkel der Sternfigur zu einem gestreckten Winkel zusammenfügen.
Da ein gestreckter Winkel ein Maß von 180° besitzt, gilt $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180°$.

Aufgabe 5.1.3:
Die nebenstehende Skizze zeigt ein Sternfünfeck. Eingezeichnet sind die Eckpunkte A, B, C, D sowie die Hilfspunkte S und T.

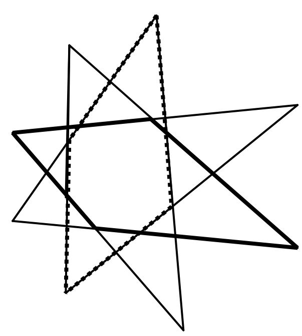


Durch S wird eine Parallele zur Strecke CD und durch T eine Parallele zu AB gezeichnet. Wegen der Stufenwinkelbeziehung an geschnittenen Parallelen findet man α und ε im unteren rechten Dreieck an den dort eingezeichneten Stellen wieder, aber auch β und δ kommen als Wechselwinkel (zu den entsprechenden Winkeln in den Spitzen des Sterns) dort vor. Wie unschwer zu erkennen, sind damit γ, $\alpha + \delta$ und $\beta + \varepsilon$ die Innenwinkel des Dreiecks und die gesuchte Innenwinkelsumme eines Sternfünfecks entspricht der Innenwinkelsumme im Dreieck, also 180°.

Aufgabe 5.1.5:
Die Behauptung, dass die Innenwinkelsumme $\alpha + \delta + \beta + \gamma + \varepsilon$ des nicht normalen Fünfsterns ebenfalls 180° beträgt, soll im Folgenden bewiesen werden. Wir betrachten dazu die nebenstehende Abbildung und erkennen ein Dreieck mit den Innenwinkeln α, δ und A. Wir bemerken auch ein nicht konvexes Viereck mit den Innenwinkeln β, ε, γ und $(A + 2A^*)$. Für die Innenwinkelsumme des Dreiecks gilt $\alpha + \delta + A = 180°$, für die Innenwinkelsumme des Vierecks $\beta + \varepsilon + \gamma + (A + 2A^*) = 360°$. Werden beide Gleichungen addiert, erhalten wir $\alpha + \delta + A + \beta + \varepsilon + \gamma + (A + 2A^*) = 540°$. Nach Umformungen auf der linken Seite dieser Gleichung resultiert die Beziehung $\alpha + \delta + \beta + \varepsilon + \gamma + 2\cdot(A + A^*) = 540°$. Wie aus der Zeichnung ersichtlich, gilt auf Grund der Nebenwinkelbeziehung $A + A^* = 180°$. Wird noch dieser Sachverhalt berücksichtigt, erhalten wir die Gleichung $\alpha + \delta + \beta + \varepsilon + \gamma = 180°$.



Aufgabe 5.2.1:
Es ist die Innenwinkelsumme in einem Achtstern zweiter Art zu bestimmen. Dies soll (möglichst) mit Hilfe von V1 oder V2 erfolgen. Wir geben im Weiteren Hinweise zur Verwendung von Strategie V1.
Im Achtstern können vier sich überschneidende Vierecke eingezeichnet werden, von denen zwei in der beigefügten Zeichnung hervorgehoben sind. In jedem der Vierecke sind zwei gegenüberliegende Innenwinkel zugleich Innenwinkel der Sternfigur.



Die beiden anderen Winkel sind Innenwinkel eines konvexen Achtecks. Die Summe I aller Innenwinkel dieser Vierecke beträgt $4\cdot 360°$. Sie setzt sich zusammen aus der Innenwinkelsumme I_8 des konvexen Achtecks und der gesuchten Summe der 8 Winkel in den Spitzen des Sterns IS_8. I_8 kann unmittelbar bestimmt werden (vgl. Ausführungen im Beitrag); es gilt $I_8 = 6 \cdot 180°$. Damit ist $IS_8 = I - I_8$, also $4 \cdot 360° - 6 \cdot 180°$ und somit 360°.

Aufgabe 5.3.1.1:
Den vorgelegten Sternen sind folgende Bezeichnungen zuzuordnen:

Abb. 28a → $\left\{\frac{15}{6}\right\}$, Abb. 28b → $\left\{\frac{16}{7}\right\}$, Abb. 28c → $\left\{\frac{9}{4}\right\}$

Aufgabe 5.3.1.2:

Die Konstruktion der Sternfigur $\left\{\frac{12}{5}\right\}$ besteht aus folgenden drei Grobschritten:

- Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks (sinnvoll über den Umkreis des regelmäßigen Sechsecks)
- Fortführung der Konstruktion zu einem regelmäßigen Zwölfeck (Zeichnen von Geraden durch die Mitten gegenüberliegender Seiten des Sechsecks; Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Umkreis des Sechsecks sind [neben den Eckpunkten des Sechsecks] die restlichen Eckpunkte des Zwölfecks)
- Jeder der 12 Eckpunkte wird mit dem fünftnächsten Eckpunkt durch eine Strecke verbunden

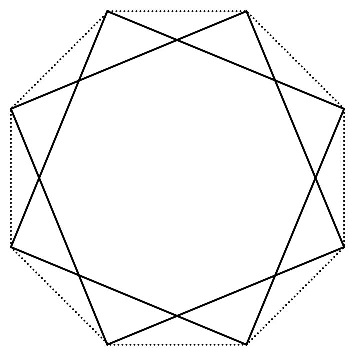
Aufgabe 5.3.2.2:

Die Innenwinkelsumme I_4 der Figur $\left\{\frac{11}{5}\right\}$ lässt sich wie folgt bestimmen (berechnen):

$I_4 = 11 \cdot 2 \cdot 180° + 2 \cdot \mathbf{I_3} - 2 \cdot 11 \cdot 180° - I_2$
$I_4 = 3960° + 1080° - 3960° - 900°$
$I_4 = 180°$

Dabei wurde durch $\mathbf{I_3}$ berücksichtigt, dass in $\left\{\frac{11}{5}\right\}$ der Stern $\left\{\frac{11}{4}\right\}$ als Teilfigur vorkommt.

Aufgabe 5.3.3.1:
Da die Korrektheit der Beziehung $I = 180° \cdot (n - 2k)$ für die Innenwinkelsummen nicht zerfallenden Sternfiguren bereits gezeigt wurde, muss lediglich noch bewiesen werden, dass diese Gleichung auch für die Innenwinkelsummen der zerfallenden Sterne erster Art gilt. Da in solchen Figuren k = 2 ist, muss bewiesen werden, dass die Gleichung $I = 180° \cdot (n - 4)$ Gültigkeit besitzt.
Derartige n – Sterne zerfallen stets in zwei kongruente regelmäßige konvexe $\frac{n}{2}$- Ecke (vgl. Abbildung: Achtstern erster Art zerfällt in zwei Quadrate). Die Innenwinkelsumme I des n – Sterns ist deswegen doppelt so groß wie die Innenwinkelsumme einer Teilfigur.
Unter Berücksichtigung der Formel für die Innenwinkelsumme in konvexen Vielecken gilt folglich $I = 2 \cdot 180° \cdot (\frac{n}{2} - 2)$. Nach Vereinfachung erhält man die zu beweisende Beziehung.

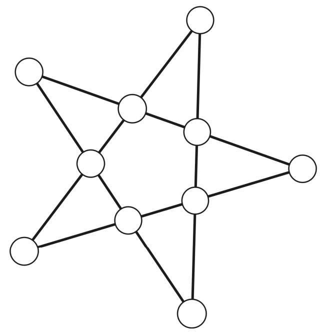


Aufgabe 6.1:
Überprüft man die Aussage *Ist n die Anzahl der Ecken und u die Anzahl der beim Zeichnen der Verbindungsstrecken jeweils übersprungenen Eckpunkte, dann sind nur diejenigen Figuren nicht zerfallend, für welche die Division n : (u+1) einen Rest lässt* an Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht- und Neunsternen, drängt sich die Vermutung auf, dass sie für alle Sternfiguren Gültigkeit besitzt.
Wird jedoch die Sternfigur mit n = 10 und u = 3 untersucht, erhält man bei entsprechender Division den Rest 2. Das würde bedeuten, dass diese Sternfigur nicht zerfällt, was allerdings nicht zutrifft. Folglich gilt die Aussage nicht für alle Sternfiguren.

Aufgabe 6.2:

Man bestimme zunächst die Anzahl z aller natürlicher Zahlen x mit $x \leq n$ und ggT (x, n) = 1. Wird z dann halbiert und um 1 vermindert, erhält man die gesuchte Anzahl a der nicht einfachen nicht zerfallenden Sterne für die jeweilige Eckenzahl n. Den mathematischen Hintergrund (Teilbarkeitslehre, Eulersche Phi - Funktion) findet man ausführlich bei ZEITLER [1] erläutert.
Beispiel: n = 8: Wegen ggT(1, 8) = 1, ggt(3, 8) = 1, ggT(5, 8) = 1, ggT(7, 8) = 1 ist z = 4. Für a erhält man folglich a = 4 : 2 – 1, also a = 1.

Aufgabe 6.4:



Die fünf Ecken und die fünf weiteren Schnittpunkte des Fünfsterns können nicht mit den natürlichen Zahlen von 1 bis 10 so belegt werden, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und dass die vier Zahlen auf jeder Seite der Figur die gleiche Summe ergeben.
Die Summe jeder Seite müsste gleich 22 sein. Die Zahlen von 1 bis 10 ergeben in der Summe 55. Berücksichtigt man zudem, dass jede Zahl auf zwei Seiten des Fünfsterns liegt, beträgt die Summe aller fünf Seiten(summen) $2 \cdot 55 = 110$. Da die Summen auf allen fünf Seiten des Sterns gleich sind, muss die Summe der Zahlen einer Seite 22 betragen.
Leider gibt es keine Möglichkeit, die vorgelegten Zahlen so anzuordnen, dass dies erfüllt wird (vgl. auch GARDNER [1]).

Literatur

Heinrich, F. [1] Innenwinkelsummen nicht einfacher Sternfiguren – ein Angebot zur Förderung mathematischer Begabung. In: Mathematikinformation Nr. 42, Begabtenförderung Mathematik e.V., München 2005.

Gardner, M. [1] Mathematischer Karneval. Ullstein, Frankfurt 1985.

Zeitler, H. [1] Reguläre Polygone. In: Didaktik der Mathematik, Heft 1/1987. Bayerischer Schulbuchverlag, München 1987.