András Ambrus
Tünde Berta

Zur Verwendung von Quadrat-, Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben

1. Zur Einführung

Schüler[1] sind es gewöhnt mit Quadratgittern zu arbeiten. Schon vom ersten Schuljahr an benutzen sie „karierte" Hefte. Auch im Geometrieunterricht finden diese Hefte Verwendung. Allerdings warnen viele Lehrer davor, weil ihrer Meinung nach die Gefahr besteht, dass in karrierten Heften geometrische Figuren in zu spezieller Weise abgebildet werden und sich die Schüler leicht daran gewöhnen können. Deshalb benutzen diese Lehrer keine karrierten Hefte im Geometrieunterricht.

Wir hingegen möchten mit diesem Beitrag die Vorteile der Benutzung von Gittern beim Lösen mathematischer Aufgaben[2] demonstrieren. Insbesondere sehen wir folgende Vorzüge:

- Das Gitter ermöglicht es den Schülern, sich viele unterschiedliche Beispiele für eine Situation vorzustellen und zur Verallgemeinerung zu führen.
- Lösungen mathematischer Aufgaben sind nicht selten das Ergebnis von Repräsentationswechseln. So kann es in bestimmten Situationen von großem Nutzen sein, anstelle von geometrischen Betrachtungen arithmetische und / oder algebraische Überlegungen anzustellen; oder umgekehrt. Das Arbeiten mit einem Gitternetz birgt ein hohes Potenzial für solche Wechsel in der Betrachtungsweise.
- Die kontinuierliche Arbeit mit dem Gitternetz ist eine gute Vorbereitung für die spätere Behandlung der Analytischen Geometrie. Vor allem spielen das Dreiecksgitternetz und Würfelgitternetz eine besondere Rolle. Man denke etwa an ein Koordinatensystem in der Ebene mit nicht zueinander senkrecht stehenden Achsen bzw. an ein räumliches Koordinatensystem.
- Die Verwendung eines Gitternetzes kann nicht nur für eine bestimmte Aufgabensituation, sondern für eine ganze Reihe von Aufgabenklassen hilfreich sein, z.B. für Kongruenzaufgaben, für Ähnlichkeitsaufgaben und für Teilungsaufgaben.
- Für die Schüler ist der Umgang mit dem Quadratgitter ein wohlbekannter Sachverhalt. Zahlreiche Experimente machen sie bereits in den unteren Klassen damit. Nach unseren Beobachtungen können die Schüler aufgrund ihrer dabei gemachten konkreten Erfahrungen intuitiv Lösungsideen für „anspruchsvollere" und allgemeiner gehaltene Aufgaben finden.
- Die Benutzung des Gitternetzes stellt für Schüler eine Lösungsmethode dar, die den Fundus an bislang bekannten Lösungsmethoden (vermutlich) anreichert. Diese Tatsache kann dafür genutzt werden, dass sich Schüler daran gewöhnen, unterschiedliche Lösungwege zu suchen, diese zu analysieren und zu vergleichen.

Im Folgenden wollen wir auf die mögliche nutzbringende Verwendung von Gittern beim Lösen von Aufgaben eingehen. Wir befassen uns dabei mit drei Aufgabentypen und demonstrieren die besonderen Potenzen von Gittern als heuristische Hilfsmittel.

In der ersten Gruppe geht es um Aufgaben für vorgegebene Gitternetze. Interessant ist dabei das Vergleichen von analogen Aufgaben und ihrer Lösung. Des Weiteren bieten die Aufgaben gute Gelegenheiten für die Untersuchung konkreter Fälle, für kombinatorisches Denken und für Verallgemeinerungen.

In der zweiten Gruppe analysieren wir „rein" geometrische Aufgaben. Die Lösungsidee besteht dabei darin, sich die jeweilige Figur als Teil eines Gitternetzes zu vorstellen.

In der dritten Gruppe sind solche Aufgaben enthalten, zu deren Lösung die Konstruktion eines passenden Gitternetzes nötig wird. Die Suche nach einem solchen Netz bietet ein gutes Feld zum Experimentieren, zum Ausprobieren konkreter Fälle. Ferner bestehen gute Möglichkeiten für Verallgemeinerungen.
Es geht uns vor allem darum, dass Lernende ihren Erfahrungsschatz in der Verwendung von Quadrat-, Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben ausweiten und die Bedeutung derartiger Gitter beim

[1] Der männliche Genus wird (auch an anderen Stellen in diesem Beitrag) nur der Einfachheit halber verwendet.
[2] Aufgabe wird in diesem Beitrag im Sinne von problemhafter Aufgabe (Problem) verstanden.

Betreiben von Mathematik erkennen. Das ist nur durch eigenes Tun möglich. Deswegen findet der Leser im Weiteren ein Angebot von entsprechenden Aufgaben und zugehörigen möglichen Lösungen bzw. Lösungshinweisen.

2. Aufgaben für vorgegebene Gitternetze

Aufgabe 2.1: Wir teilen eine Strecke in 4 (5, 10, ….n) gleich lange Teile. Wie viel (Teil)Strecken lassen sich durch die Teilungspunkte, zu denen auch die Endpunkte der Ausgangsstrecke gerechnet werden, für die einzelnen Fälle bilden?

Lösung:

Die Grundidee besteht in der Auswahl von je zwei Punkten aus 4+1, 5+1, 10+1, …., n+1 Punkten. Da je zwei Punkte eine Strecke bestimmen, erhalten wir für die Anzahl(en)

$$\binom{5}{2}, \binom{6}{2}, \binom{11}{2}, \binom{n+1}{2}$$

Aufgabe 2.2: In einem Quadratgitternetz betrachten wir je ein 4 x 4, (5 x 5, 10 x 10,….n x n) Quadrat, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind und dessen Seiten auf den Gitternetzlinien liegen. Wie viele Rechtecke werden durch die Gitterpunkte, die auf den Quadratseiten liegen, bestimmt? Die Seiten der Rechtecke sind zu den Quadratseiten parallel.

Lösung:

Wir wählen zwei Teilungspunkte auf einer Seite des Quadrates und zwei Teilungspunkte auf der anderen Seite. Diese 4 Punkte bestimmen ein Rechteck. Die Zahl der Möglichkeiten ist:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}, \binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}, \binom{11}{2}\cdot\binom{11}{2}, \binom{n+1}{2}\cdot\binom{n+1}{2}$$

Aufgabe 2.3: Analoge Aufgabe im Raum: Wir betrachten in einem Würfelgitternetz (xyz Koordinatensystem) liegende 4 x 4 x 4 (5 x 5 x 5, 10 x 10 x 10, …n x n x n) Würfel. Ihre Eckpunkte sind Gitterpunkte und ihre Seitenflächen sind parallel zu den Grundebenen xy, xz, yz. Wie viele Quader (deren Seitenflächen parallel zu den Seitenflächen des Würfels sind) werden durch die Gitterpunkte auf den Würfelkanten bestimmt?

Lösung:

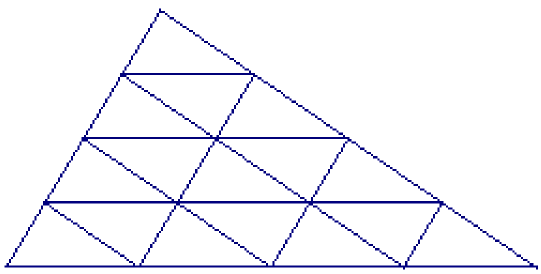
Auf drei zueinander senkrecht stehenden Kanten wählen wir je zwei Gitterpunkte aus. Das Produkt der Möglichkeiten liefert die Gesamtzahl(en):

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{2}, \binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{6}{2}, \binom{11}{2}\cdot\binom{11}{2}\cdot\binom{11}{2}, \binom{n+1}{2}\cdot\binom{n+1}{2}\cdot\binom{n+1}{2}$$

Aufgabe 2.4: In einem Dreiecksgitternetz betrachten wir ein 4 x 4 x 4 (5 x 5 x 5, 10 x 10 x 10, …n x n x n) Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind. Die Dreiecksseiten liegen auf den Gitternetzlinien. Wie viele Teildreiecke werden durch die Gitterpunkte des vorgelegten Dreiecks bestimmt?

Lösung:

Es ist zweckmäßig, die Dreiecke in zwei Klassen einzuteilen. Die erste Klasse enthält die Dreiecke, die in Standardlage (△) vorkommen. In die zweite Klasse nehmen wir die Dreiecke mit „ungekehrter Lageposition” (▽). Dann werden die entsprechenden Anzahlen von Dreiecken in beiden Klassen bestimmt.



Dreiecke in der ersten Klasse:

Dreiecke mit der Seitenlänge 1 („1-er Dreiecke”): 1 + 2 + 3 + 4

„2-er Dreiecke”: 1 + 2 +3

„3-er“ Dreiecke: 1 + 2

„4-er“ Dreieck: 1

Interessant scheint die Tatsache, dass diese Anzahlen die ersten 4 Dreieckszahlen (also $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10$) repräsentieren, deren Summe 20 ist.
Die Formel für die Summe der ersten n Dreieckszahlen lautet:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

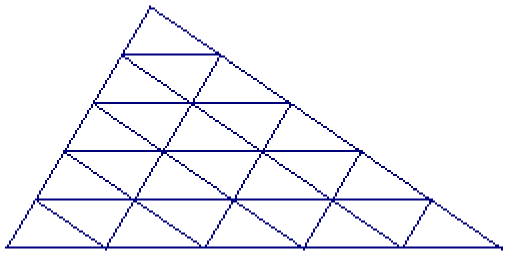
Für die Anzahlen in der zweiten Klasse erhalten wir:

„1-er” Dreiecke: 1 + 2 + 3 (= D_3)

„2-er” Dreieck: 1 (= D_1)

In der zweiten Klasse kommen 7 Teildreiecke vor. Insgesamt finden wir also 27 Teildreiecke im 4 x 4 x 4 – Dreieck.

Auch für das 5 x 5 x 5 – Dreieck wollen wir in analoger Weise die Anzahlen der Teildreiecke der ersten und zweiten Klasse und anschließend die Gesamtanzahl bestimmen:



erste Klasse:
„1-er”: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = D_5 (fünfte Dreieckszahl)
„2-er”: 1 + 2 + 3 + 4 = D_4
„3-er”: 1 + 2 + 3 = D_3
„4-er”: 1 + 2 = D_2
„5-er”: 1 = D_1
Summe: 35

zweite Klasse:
„1-er” : 1 + 2 + 3 + 4 (= D_4)
„2-er” : 1 + 2 (= D_2)
Summe: 13

Die Gesamtsumme beträgt somit 48.

Untersucht man nun das 10 x 10 x 10 – Dreieck, ergibt sich als Summe für die erste Klasse 220, während sich die Anzahl der Dreiecke in der zweiten Klasse als Summe der Dreieckszahlen $D_1 + D_3 + D_5 + D_7 + D_9$ ergibt.
Betrachten wir schließlich noch ein Dreieck mit der Seitenlänge 9, also einer ungeraden Seitenlänge, erhalten wir für die Anzahl der Dreiecke in der ersten Klasse die Zahl 165 (Summe von den ersten 9 Dreieckszahlen). Die Anzahl der Dreiecke zweiter Klasse ist das Ergebnis folgender Rechnung: $D_2 + D_4 + D_6 + D_8$.

Die bisherigen Beispiele legen Verallgemeinerungsmöglichkeiten für ein n x n x n – Dreieck nahe, wobei es für die Anzahl der Dreiecke in der zweiten Klasse von Bedeutung ist, ob die Maßzahl der Seitenlängen des ausgänglichen Dreiecks gerade oder ungerade ist.

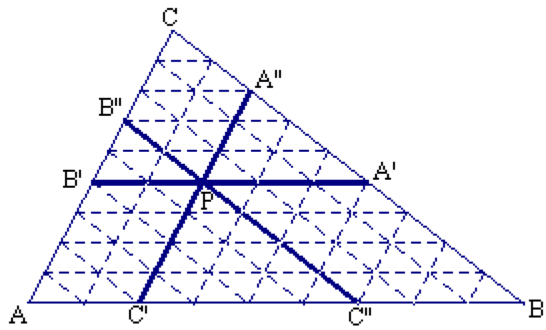
Fall 1: n = 2k + 1 (Maßzahl der Seitenlänge ist ungerade) Anzahl der Dreiecke der ersten Klasse: $\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ Anzahl der Dreiecke in der zweiten Klasse: $D_2 + D_4 + D_6 + \ldots\ldots\ldots + D_{n-1}$ (D_{2k})	Fall 2: n = 2k (Maßzahl der Seitenlänge ist gerade) Anzahl der Dreiecke der ersten Klasse: $\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ Anzahl der Dreiecke in der zweiten Klasse: $D_1 + D_3 + D_5 + \ldots. + D_{n-1}(D_{2k-1})$

Die Überlegungen lassen sich fortführen, indem für jeden Fall noch die Gesamtsumme der Dreiecke gebildet wird.

Noch ein Wort zur n-ten Dreieckszahl: Sie ist bestimmt durch $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Für die Korrektheit dieser Formel kann übrigens eine geometrische Begründung angegeben werden, die mit dem Quadratgitternetz zusammenhängt.

Aufgabe 2.5: Durch einen inneren Gitterpunkt eines 9 x 9 x 9 - Dreiecks zeichnen wir parallele Geraden zu den Seiten des Dreiecks und erhalten so drei innere Dreiecke. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten der Teildreiecke und dem Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks.

Lösung:
Die Teildreiecke und das Dreieck ABC sind einander ähnlich wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkelgrößen.
Für die Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke gilt: $F_{B'PB''} = 4$, $F_{C'C''P} = 16$ und $F_{PA'A''} = 9$ Flächeneinheiten. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 81 Flächeneinheiten.
Das Verhältnis der Flächeninhalte von je zwei ähnlichen Dreiecken ist gleich dem Verhältnis der Quadrate der entsprechenden Seitenlängen.

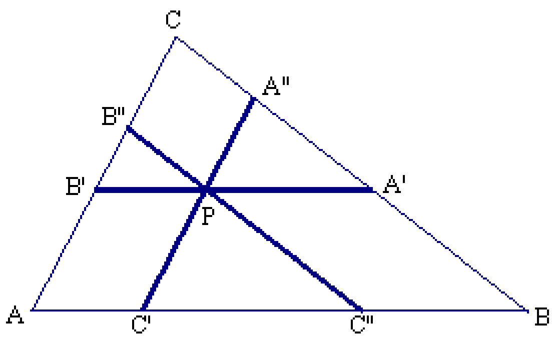


Der Figur können wir entnehmen, dass die Summe der „horizontalen" Seitenlängen der Teildreiecke mit der Seitenlänge von AB übereinstimmt. Wir können die horizontalen Seitenlängen der Teildreiecke ins Verhältnis zur Seitenlänge AB setzen und erhalten $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$ und $\frac{4}{9}$. Drücken wir dann die Seitenlängen mit Hilfe der Flächeninhalte der Teildreiecke und des Dreiecks ABC aus, bekommen wir folgende Beziehungen:

$$\frac{2}{9}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{81}} \quad \frac{3}{9}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{81}} \quad \frac{4}{9}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{81}}$$

Die Summe dieser drei Brüche ist 1. Wir können nun anstelle der Zahlen die entsprechenden Flächeninhaltssymbole einsetzen und erhalten den gesuchten Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten.

Aufgabe 2.6 (Verallgemeinerung von 2.5)**:** Durch einen inneren Punkt eines Dreiecks zeichnen wir paralelle Geraden zu seinen Seiten und bekommen drei innere Teildreiecke. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten der Teildreiecke und dem Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks.



Lösung:
Die Teildreiecke und das Dreieck ABC sind ähnlich zueinander. Wir schreiben die Verhältnisse der Seiten B'P und AB, C'C'' und AB, PA' und AB mit Hilfe der Quadratwurzel der Flächeninhalte der entsprechenden Dreiecke.

$$\frac{B'P}{AB}=\frac{\sqrt{F_{B'PB''}}}{\sqrt{F_{ABC}}} \qquad \frac{C'C''}{AB}=\frac{\sqrt{F_{C'C''P}}}{\sqrt{F_{ABC}}} \qquad \frac{PA'}{AB}=\frac{\sqrt{F_{PA'A''}}}{\sqrt{F_{ABC}}}$$

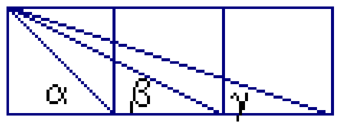
Die Summe der linken Seiten der Gleichungen ist 1, also ist die Summe der rechten Seiten ebenfalls 1. Somit erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten.

$$\frac{\sqrt{F_{B'PB''}}}{\sqrt{F_{ABC}}}+\frac{\sqrt{F_{C'C''P}}}{\sqrt{F_{ABC}}}+\frac{\sqrt{F_{PA'A''}}}{\sqrt{F_{ABC}}}=1$$

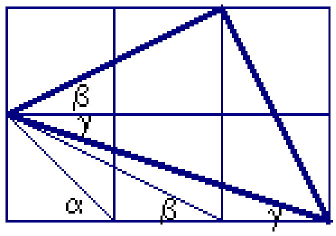
$$\sqrt{F_{B'PB''}}+\sqrt{F_{C'C''P}}+\sqrt{F_{PA'A''}}=\sqrt{F_{ABC}}$$

3. Aufgaben, in denen Figuren in ein Gitternetz eingelegt werden

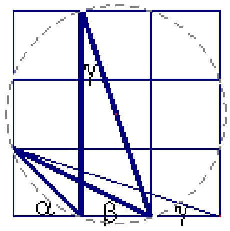
Aufgabe 3.1: Drei Einheitsquadrate liegen aneinander. Wir verbinden bestimmte Eckpunkte durch Strecken (vgl. Abbildung). Was groß ist die Summe der drei eingezeichneten Winkel?



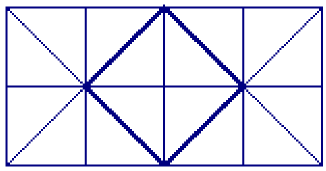
Lösung:
Die Grundidee besteht darin, die entsprechenden Winkel so aneinander zu legen, dass ihre Summe als Größe eines bekannten Winkels vorkommt. (Einbettung ins globale Quadratgitternetz)
Das fett eingezeichnete Dreieck ist rechtwinklig-gleichschenklig. Seine spitzen Winkel (und damit also auch $\beta + \gamma$) haben ein Winkelmaß von 45^{o}. Der Winkel α ist die Hälfte eines Innenwinkels im Quadrat und hat somit ein Maß von 45^{o}.
Die Summe der drei Winkel beträgt folglich 90°.



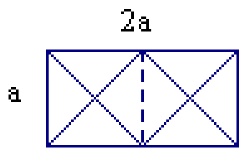
Eine weitere Lösung:
Bei dieser Lösung betrachten wir die fett eingezeichneten Winkel γ. Es handelt sich um Peripheriewinkel über demselben Bogen, also sie sind gleich groß.
In der linken oberen Ecke des links unten liegenden Quadrates liegen somit die Winkel α, β (auf Grund der Wechselwinkelbeziehung an geschnittenen Parallelen) und γ aneinander und bilden einen rechten Winkel.



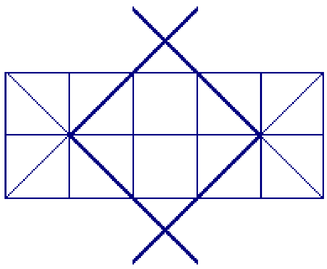
Aufgabe 3.2: Die Seiten eines Rechtecks sind 4 cm und 2 cm lang (5 cm und 2 cm; 3 cm und 2 cm). Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks, welches durch die vier Winkelhalbierenden des Rechtecks bestimmt wird.
Lösung:
Wenn die Seitenlängen des Rechtecks 4 bzw. 2 cm betragen, können wir aus der Figur ablesen, dass die zustandegekommene Figur ein Quadrat ist, dessen Flächeninhalt 2 cm^2 beträgt.
Man kann wie folgt argumentieren: Die zu einer Seite gehörenden Winkelhalbierenden bilden mit der Seite je einen Winkel von 45^{o}, also bilden sie miteinander einen rechten Winkel. Das erzeugte Viereck hat 4 rechte Winkel und die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander. Sie sind gleich lang. Das Viereck ist ein Quadrat.



Auch im allgemeinen Fall kann für Rechtecke, bei denen eine Seite doppelt so lang ist wie die andere, diese Argumentation übernommen werden. Für den Flächeninhalt F gilt stets $F = \frac{a^2}{2}$, weil die Diagonalen der entstehenden Figur die Länge a besitzen.



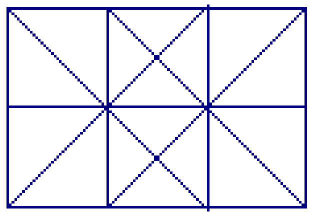
Die nebenstehende Abbildung zeigt uns nun den Spezialfall a = 5 cm und b = 2 cm. Der Flächeninhalt beträgt $3 \cdot \frac{3}{2}$ cm^2, also $\frac{9}{2}$ cm^2.
Ist a > 2b werden die Diagonalen des entstehenden Quadrats a – b lang (vgl. Abb.). Daraus kann der Flächeninhalt F (z.B. mit Hilfe des Satzes von Pythagoras) bestimmt werden.
Es gilt $F = \frac{(a-b)^2}{2}$.



Betrachten wir noch den Spezialfall a = 3 cm und b = 2 cm. Die Diagonale des inneren Quadrats wird einen Zentimeter lang. Der

Flächeninhalt beträgt somit $\frac{1}{2}$ cm^2.

Verallgemeinernd können wir für b < a < 2b feststellen: Für den gesuchten Quadratflächeninhalt F gilt: $F = \frac{(a-b)^2}{2}$



Interessant ist noch die Frage, unter welchen Bedingungen der Flächeninhalt des Quadrats mit dem Flächeninhalt des Ausgangsrechtecks übereinstimmt.

Aus den obigen Darlegungen folgt, dass dieser Fall eintritt, wenn a > 2b ist. Diese Bedingung ist jedoch noch zu ungenau. Wir werden mit algebraischen Mittel die (exakte) Lösung bestimmen. Dazu setzen wir die Flächeninhaltsformeln für das Ausgangsrechteck und das entstehende Quadrat gleich. Bei der Quadratformel benutzen wir dabei die uns bereits bekannte Diagonalenlänge a – b.

$$\frac{(a-b)^2}{2} = ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

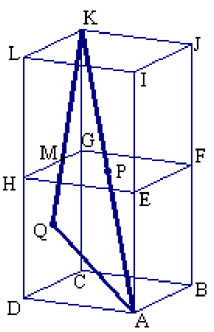
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b} + 1 = 0$$

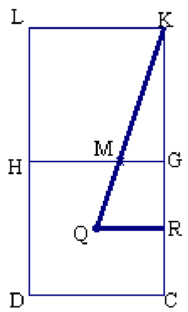
$$\frac{a}{b} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Davon kommt nur $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ als Lösung in Frage.

Aufgabe 3.3: Gegeben ist ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H. P sei der Mittelpunkt seiner Seitenfläche EFGH und Q sei der Mittelpunkt seiner Seitenfläche DCGH. Ferner ist M Schnittpunkt der Würfelkante GH mit der Ebene APQ. Im welchem Verhältnis teilt M die Kante GH?

Lösung:



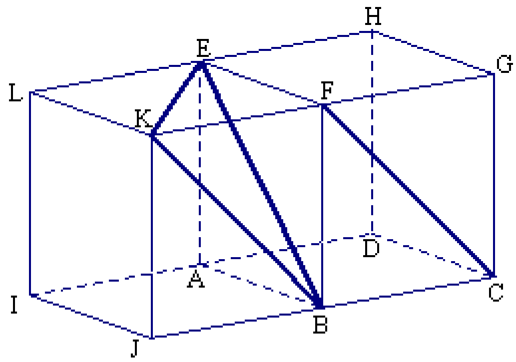


Wir orientieren uns am Würfelgitternetz, dessen Einheitswürfel unser gegebener Würfel ist. Dann betrachten wir noch den Würfel, der auf den Ausgangswürfel aufgesetzt wurde. Auf Grund der Würfeleigenschaften verläuft die Gerade AP durch den Punkt K. Folglich ist K ein Punkt der Ebene APQ. Damit liegt aber auch die Gerade KQ in dieser Ebene. Sie schneidet die Kante HG im Punkt M.

Nun betrachten wir die Ebene DCKL näher. Die Dreiecke QRK und MGK sind (wegen der Gleichheit ihrer Innenwinkel) einander ähnlich. Das Verhältnis der entsprechenden Seiten (vgl. Abb. rechts) ist 3 : 2. Nutzt man eine solche Seitenbeziehung, dann gilt nach dem Strahlensatz KG : KR = MG : QR und durch Zahlen belegt 2 : 3 = MG : $\frac{1}{2}$. Daraus folgt, dass die Maßzahl der Strecke MG $\frac{1}{3}$ beträgt. Der Punkt M teilt die Kante GH daher im Verhältnis 2 : 1.

Bemerkung: Die Idee, einen kongruenten Würfel auf den Ausgangswürfel aufzusetzen, kommt vermutlich eher zu Stande, wenn man den Würfel als Teil eines Würfelgitternetzes betrachtet, d.h. bereits Erfahrungen im Umgang mit einem Würfelgitternetz hat. Ansonsten kommt diese Idee selten bei Lernenden vor, sie haften an der Ausgangsfigur fest.

Aufgabe 3.4: Vorgelegt sei ein Würfel ABCDEFGH. Wir betrachten mit CF und BE zwei zueinander windschiefe Flächendiagonalen von zwei benachbarten Würfelflächen. Der Winkel zwischen diesen Diagonalen und die Länge ihrer Normaltransversale (die zu beiden Diagonale senkrechte Strecke) sind zu bestimmen.



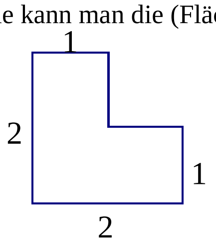
Lösung:
Wir betrachten auch den Würfel IJBALKFE, also den Würfel, der sich im Würfelgitter vor dem Würfel ABCDEFGH befindet. Wir bekommen den Winkel zwischen den beiden windschiefen Geraden, wenn wir eine parallel so verschieben, dass die zwei betrachteten Geraden einen gemeinsamen Punkt haben. Der Winkel, den diese Geraden miteinander einschließen ist der gesuchte Winkel. CF geht im Ergebnis einer Parallelverschiebung in die Strecke BK über. Verbinden wir die Punkte E und K durch eine Strecke, so erhalten wir das gleichseitige Dreieck BKE. Da in diesem Dreieck jeder Innenwinkel 60^o beträgt, hat auch der gesuchte Winkel dieses Maß.
Die Normaltransversale der beiden windschiefen Geraden bekommt man, wenn eine der Geraden so parallel verschoben wird, dass die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben (und somit eine Ebene aufspannen). Der Abstand dieser Ebene von der ausgänglichen Geraden (die wir verschoben haben) repräsentiert die gesuchte Länge. Weil die Ebene und die Ausgangsgerade zueinander parallel sind, genügt es, einen Punkt auf der Geraden auswählen und seinen Abstand zur Ebene zu bestimmen.
Betrachten wir die dreiseitige Pyramide BEKF. Der Abstand der Ebene BEK vom Punkt F entspricht der Höhe der Pyramide, die durch den Punkt F geht. Also die Frage nach der Länge dieser Höhe zu beantworten. Wir können das Volumen der Pyramide in zwei unterschiedlichen Formen aufschreiben. Zuerst betrachten wir das gleichseitige Dreieck BEK als Grundfläche und danach wählen wir ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck wie z.B. BFK als Grundfläche. Durch Gleichsetzung beider Volumengleichungen kann die gesuchte Höhe (Länge der Normaltransversalen) ermittelt werden.

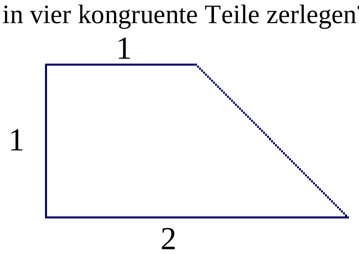
$$h = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$V = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{3}$$

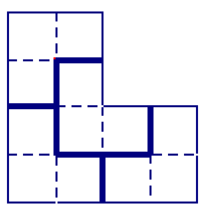
4. Aufgaben, zu denen „passende” Gitternetze konstruiert werden

Aufgabe 4.1: Wie kann man die (Flächen) beiden Figuren jeweils in vier kongruente Teile zerlegen?

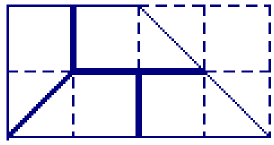




Lösung:
Wenn man an das Quadratgitternetz denkt, kann die Idee erwachsen, die Figur in so viele Einheitsquadrate zu zerlegen, dass deren Anzahl ein Vielfaches von vier ist. 12 Einheitsquadrate entsprechen diesen Bedingungen.

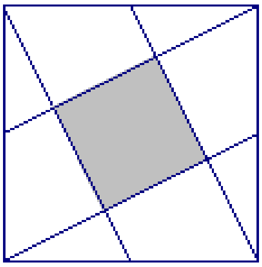


Ähnliches gilt für die zweite Aufgabe. In diesem Falle finden jedoch noch halbe Quadrate (gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke) Berücksichtigung. Eine Teilfigur besteht hier aus „1,5 Einheitsquadraten”.

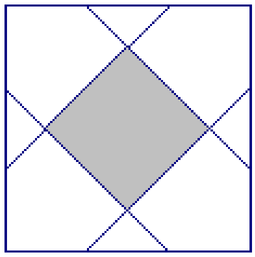


Aufgabe 4.2: Bestimmte Punkte auf den Seiten eines Quadrates werden durch Strecken miteinander verbunden (vgl. Abb.). Dadurch wird die Quadratfläche in Teilflächen zerlegt. Wie groß ist das Verhältnis der Flächeninhalte des markierten Vierecks und des Ausgangsquadrates?

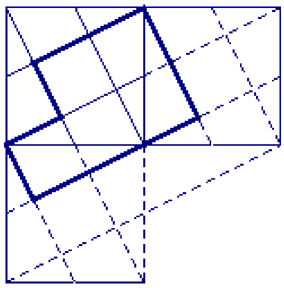
a)



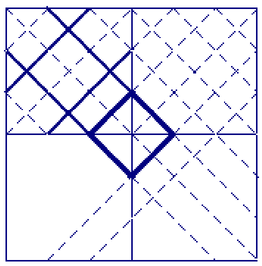
b)



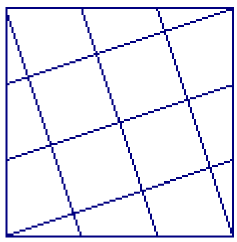
Lösung a):
Zuerst zeigt man, dass die innere Figur ein Quadrat ist. Das ist z.B. mit Hilfe einer Drehung um den Mittelpunkt des Ausgangsquadrates möglich. Dann kann man die Teilflächen von Figur a) anders zusammensetzen und fünf kongruente Quadrate erhalten. Eines ist das grau unterlegte Quadrat. Die restlichen vier Quadrate entstehen durch Zusammensetzen von Dreiecken und Vierecken. Der Nachweis der Kongruenz kann z.B. über ähnliche Dreiecke bzw. Strahlensätze geführt werden. Ein solches Quadrat nimmt also den fünften Teil der Fläche des Ausgangsquadrates ein.
Den Flächeninhalt der Teildreiecke kann man auch aus der (erweiterten) Figur ablesen. Ein kleines Dreieck und ein Trapez bilden zusammen ein rechtwinkliges Dreieck, was den fünften Teil der Fläche der Ausgangsfigur ausmacht. Von der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks nimmt das kleine Dreieck den vierten Teil ein. Folglich ist sein Flächeninhalt in Bezug auf den Flächeninhalt der Ausgangsfigur $\frac{1}{5} : 4 = \frac{1}{20}$ und der Flächeninhalt des Trapezes $\frac{3}{20}$.



Lösung b):
Es lohnt sich, wie in der Zeichnung dargestellt, eine Quadratseite mit 6 Einheitsstrecken festzulegen. Aber auch eine Unterteilung in 9, 12, ... usw. kongruente Teilstrecken ist möglich.
Der Flächeninhalt des inneren Quadrates kann mit Hilfe der fett gezeichneten Figur ermittelt werden. Das gesuchte Verhältnis ist 2 : 9.



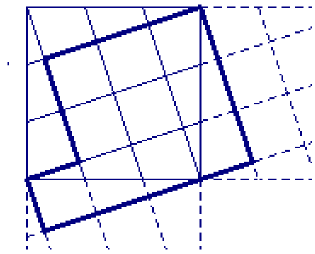
Aufgabe 4.3: Jede Seite eines Quadrates wird in drei gleich lange Stücken geteilt. Die Teilungs- bzw. Eckpunkte der Figur werden in der angegebenen Weise durch Strecken miteinander verbunden. Zu bestimmen sind die Flächeninhalte der so erzeugten Figuren.
Wie geht es weiter, wenn die Quadratseite in vier, fünf, ..., n gleich lange Stücken geteilt werden?



Lösung:

Die Argumentation ist ähnlich wie oben. In diesem Falle ist es jedoch komplizierter ein passendes Quadratgitternetz zu finden, so dass die Teilungspunkte auf Gitterpunkten liegen.

Man kann vermuten, dass bei Teilung jeder Quadratseite in n Teile insgesamt $n^2 + 1$ Einheitsquadrate entstehen. Es lässt sich bei Unterteilung einer Seite in n Einheiten zu jeder Einheit ein Quadrat bilden. Neben diesen n^2 kongruenten Quadraten bekommen wir aber noch ein Quadrat, welches ebenfalls kongruent zu diesen ist.



Aufgabe 4.4: Wir teilen nunmehr die Seiten eines Quadrates in 4, 5, ..., n Teile und verbinden die Teilungs- und Eckpunkte entsprechend dem Sachverhalt von 4.2.b).

(Aufgabevariation zur Aufgabe 4.2.b)

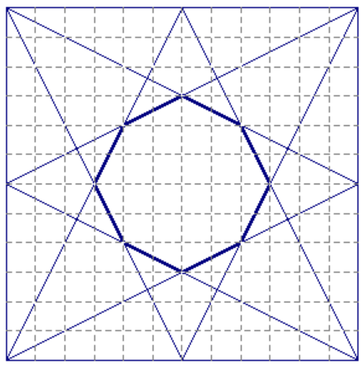
Lösung:

Wir können ein passendes Quadratgitternetz wie in Aufgabe 4.2 b) finden.

Aufgabe 4.5: Die Seitenlänge eines Quadrates beträgt 10 cm. Wir verbinden jeden Eckpunkt des Quadrates mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Dadurch wird „im Inneren" ein konvexes Achteck gebildet. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Achtecks?

Lösung:

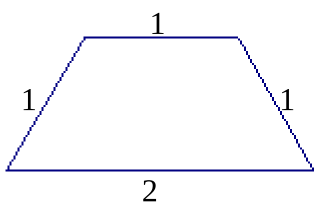
Es ist eine schöne experimentelle Arbeit, ein geeignetes Quadratgitternetz zu finden. Legt man nämlich ein 10 x 10 Quadratgitter zu Grunde, kommt man nicht oder nur schwerlich zu einer Lösung. Die Wahl eines 12 x 12 Gitters hingegen führt uns zum Ergebnis. Wir wählen für die Quadratseite also 12 Einheiten (= 10 cm). In diesem Falle liegen die Eckpunkte des Achtecks auf Gitterpunkten und der Flächeninhalt kann ermittelt werden: 24 Einheitsquadrate. Gemäß der gewählten Gittereinteilung entsprechen 144 Einheitsquadrate einem Flächeninhalt von 100 cm^2 und 24 Einheitsquadrate somit $\frac{24 \cdot 100}{144} cm^2 = \frac{50}{3}\ cm^2$.

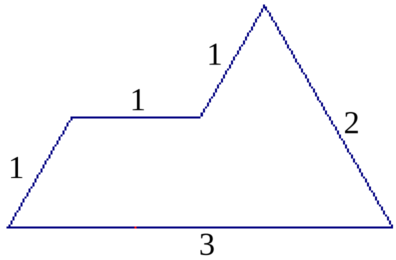


Bemerkung: Bei dieser Lösung kommt die Stärke des heuristischen Hilfsmittels Quadratgitter (bzw. allgemeiner gesprochen des heuristischen Hilfsmittel Gitternetz), die in seiner Veränderbarkeit liegt, besonders gut zum Ausdruck.

Überdies sind viele Personen beim Bearbeiten dieser Aufgabe der Meinung, dass besagtes Achteck regelmäßig ausfällt. Mit Hilfe des Quadratgitternetzes können sie zur Einsicht gelangen (bzw. geführt werden), dass zwei benachbarte Innenwinkel nicht gleich groß sind; das Achteck somit nicht regelmäßig ist.

Aufgabe 4.6: Wie können die (Flächen der) Figuren in vier kongruente Teile zerlegt werden?



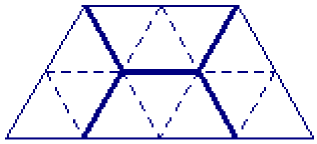
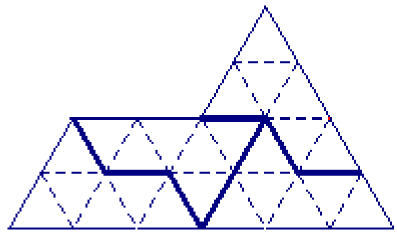


Lösung:

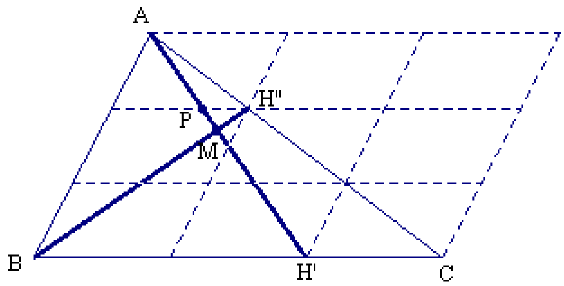
Die Aufgabe scheint schwieriger als die unter 4.1., was daran liegen könnte, dass Lernenden der Gebrauch von Dreiecksgittern weniger vertraut ist als der von Quadratgittern.

Mit Hilfe eines geeigneten Dreiecksgitters können die Schüler das Problem auf die rechnerische Ebene transformieren. Die links abgebildete Figur (vgl. Folgeseite) lässt sich in 12 Einheitsdreiecke zerlegen. Entsprechend der Aufgabenstellung muss jedes Teilstück aus drei Dreiecken zusammengesetzt sein. Aus drei gleichseitigen Dreiecken kann nur eine einzige Figur konstruiert werden. Man findet die Lösung nach einigem Probieren.

Bei der rechts abgebildeten Figur arbeiten wir mit einer Zerlegung in 24 Einheitsdreiecke, ein Teil besteht somit aus 6 Einheiten. Das Finden der Lösung verlangt hier vermutlich ein höheres Maß an Kreativität.

Aufgabe 4.7: In einem Dreieck ABC sei H' derjenige Punkt, der die Seite a = BC im Verhältnis 2:1 teilt und näher an C als an B liegt. Mit H" wird der Punkt bezeichnet, der b = AC im gleichen Verhältnis teilt und näher an A als an C liegt. Ferner weiß man, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC eine Flächeneinheit beträgt. Wie groß sind die Flächeninhalte der vier Teilfiguren, die durch das Einzeichnen der Strecken BH" und AH' in das Dreieck ABC entstehen?



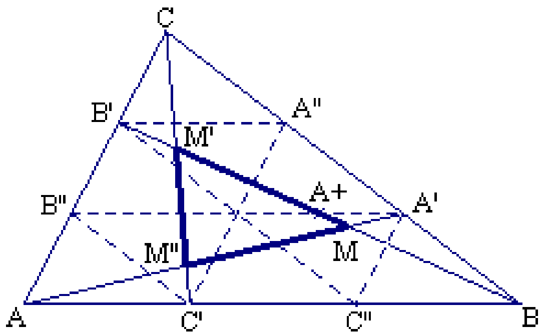
Lösung:
Die Dreiecke BH'M und MH''P sind einander ähnlich, da entsprechende Winkel gleich groß sind. Weiter gilt PH" = $\frac{1}{9}$ a. Das Gitternetz macht es möglich, dieses Verhältnis abzulesen. Man orientiere sich diesbezüglich z.B. an den Dreiecken APH'' und AH'C.
Der Flächeninhalt von Dreieck BH'M lässt sich über die Seite a und die zugehörige Höhe h des Ausgangsdreiecks ausdrücken. Die Länge der Grundseite vom Dreieck BH'M kann direkt abgelesen werden, sie ist $\frac{2}{3}$ a. Zur Bestimmung der zugehörigen Dreieckshöhe gehen wir zunächst vom Verhältnis der Seiten der Dreiecke BH'M und MH"P aus. Es beträgt 6 : 1. Wenn wir nun $\frac{6}{7}$ von $\frac{2}{3}$ h berechnen, erhalten wir die gesuchte Dreieckshöhe mit $\frac{4}{7}$ h. Der Flächeninhalt von Dreieck BH'M ist dann ($\frac{2}{3}$ a · $\frac{4}{7}$ h) : 2, also $\frac{4}{21}$ ah. Dem gegenüber berechnet sich der Flächeninhalt vom Ausgangsdreieck ABC bekanntlich nach $\frac{ah}{2}$. Da wir zudem wissen, dass der Flächeninhalt vom Ausgangsdreieck eine Flächeninhaltseinheit groß ist, lässt sich über eine Verhältnisgleichung ermitteln, dass der Flächeninhalt des Dreiecks BH'M $\frac{8}{21}$ Flächeneinheiten beträgt.
Zur Bestimmung des Flächeninhaltes von Dreieck MH"P erinnern wir uns an das Verhältnis der Seiten der Dreiecke BH'M und MH"P. Es beträgt 6 : 1. Damit ist auch bekannt, dass sich ihre Flächeninhalte wie 36 : 1 verhalten. Der Flächeninhalt des Dreiecks PMH'' beträgt also $\frac{8}{21} \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{189}$ Flächeneinheiten.
Zur Bestimmung des Flächeninhalts von Dreieck PH''A kann man der Abbildung die Länge der Grundseite und die Länge der zugehörigen Höhe entnehmen. Nach der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks erhalten wir dann $\frac{1}{54}$ ah, was $\frac{1}{27}$ Flächeneinheiten entspricht.
Der Flächeninhalt von Dreieck AMH'' ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke PMH'' und PH''A und beträgt $\frac{9}{189} = \frac{1}{21}$ Flächeneinheiten.
Beim Flächeninhalt von Dreieck BMA handelt es sich um die Differenz der Flächeninhalte von ABH' und BH'M. Er beträgt $\frac{2}{7}$ Flächeneinheiten. Schließlich lässt sich noch der Flächenhalt des Vierecks H'CH''M bestimmen. Das ist recht einfach möglich, indem vom Flächeninhalt der ausgänglichen Figur die Flächeninhalte der Dreiecke BMA, BH'M und AMH'' subtrahiert werden. Es ist interessant, dass er mit dem Flächeninhalt von Dreieck BMA übereinstimmt.

Aufgabe 4.8: Alle Seiten eines Dreiecks werden in drei gleich lange Stücken geteilt. Verbindet man jeden der Eckpunkte mit bestimmten Teilungspunkten in gleicher Weise (s. u.), so erhält man die hervorgehobene Figur. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte dieser Figur und der Ausgangsfigur zueinander?

Lösung:

Weil alle Seiten bereits in drei gleiche Teile zerlegt sind, könnte die Lösungsidee „Verwenden eines Dreiecksgitters" nahe gelegt werden. Unter Verwendung eines solchen lassen sich in der Figur verschiedene mathematische Zusammenhänge erkennen und angeben.

So ist A"B' parallel zu $A'A^+$ und nach dem Strahlensatz ist $A'A^+ = \frac{1}{2}A"B'$. Weiterhin gilt $A"B' = \frac{1}{3}AB$.



Die Dreiecke $A^+A'M$ und ABM sind ähnlich zueinander, weil ihre entsprechenden Innenwinkel gleich groß sind. Aus den obigen Beziehungen folgt $\frac{A^+A'}{AB} = \frac{1}{6}$. Bezeichnen wir im Dreieck ABC die Seite AB mit a und die zugehörige Höhe mit h, so gilt für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC $= \frac{ah}{2}$. Wir wollen nun den Flächeninhalt des Dreiecks ABM ermitteln. Dazu betrachten wir in diesem Dreieck die von M ausgehende Höhe. Sie ist ein Drittel so lang wie h. Weil die Dreiecke $A^+A'M$ und ABM ähnlich sind und das Verhältnis ihrer Seiten 1 : 6 beträgt, stehen auch die entsprechende Höhen in diesem Verhältnis. Man muss also $\frac{h}{3}$ im Verhältnis 1: 6 teilen. Die gesuchte Höhe wird $\frac{6}{7} \cdot \frac{h}{3} = \frac{2}{7}$h und der Flächeninhalt des Dreiecks ABM wird $\frac{ah}{7}$. Analog kann man zeigen dass der Flächeninhalt der Dreiecke BCM' und AM"C genau so groß (also auch $\frac{ah}{7}$) ausfällt. Für den Flächeninhalt der markierten Dreiecksfläche F_m gilt somit $F_m = \frac{ah}{2} - \frac{3ah}{7} = \frac{ah}{14}$, was den siebenten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ausmacht.

Aufgabe 4.9: Die Seiten a, b, c eines Dreiecks werden wie folgt geteilt: Man teilt a in zwei gleiche Teile, b in drei gleiche Teile und c in vier gleiche Teile und verbindet sodann die Eckpunkte mit dem jeweils ersten Teilungspunkt der gegenüberliegenden Seite. So entsteht ein inneres Dreieck. In welchem Verhältnis steht sein Flächeninhalt zum Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks? *(Aufgabenvariation zu 4.8).*

Lösung:

Es ist zweckmäßig mit einem Dreiecksgitter zu arbeiten, mit dessen Hilfe alle Seiten in 12 gleiche Teile geteilt werden. Ist dies realisiert, kann man wieder ähnliche Dreiecke finden und wie bei Aufgabe 4.8 zum Ergebnis kommen.

Literatur

Ambrus, A. / Hortobágyi, I. [1]: Einige Tendenzen im problemlösenden Mathematikunterricht in Ungarn. In: Der Mathematikunterricht, 6/2001, S. 6 – 17.

Anschrift der Autoren:

Tünde Berta / Doz. Dr. András Ambrus
Eötvös Lorand Universität
Pázmány Péter sétány 1/C
H-1117 Budapest
Ungarn
ambrus@cs.elte.hu