Thomas Sonar, Uwe Feyerabend, Tim Scharlau

Die Dimensionsanalyse als Vermittlerin zwischen Mathematik und Physik

In der Ausbildung zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer bieten wir an der TU Braunschweig regelmäßig eine Vorlesung zum Thema Mathematische Modellierung an, in der insbesondere das Zusammenspiel zwischen Mathematik und Physik im Mittelpunkt steht. Dabei mußten wir leider feststellen, dass den meisten Studierenden Modellierungen aus der Physik sehr schwer fielen, da konkrete Zusammenhänge aus der Physik der Schulzeit nicht mehr präsent waren. Als hervorragendes Mittel zum Transport physikalischer Ideen und deren Zusammenhang mit Mathematik erweist sich aus unserer Sicht die so genannte „Dimensionsanalyse“. Wenn auch diese Technik eine Errungenschaft des 19. Jahrhunderts ist, so ist sie heute wichtiger denn je und in der Auslegung oder Beurteilung technischer Geräte unverzichtbar wie in vielen Bereichen der Physik, z. B. bei der Beschreibung von Phasenübergängen. Im Gegensatz zur Bedeutung dieser Methode ist die Dimensionsanalyse nur in Fachkreisen von Physikern oder Ingenieuren bekannt, obwohl sie sich auch für den Einsatz in Schulen hervorragend eignet.

1. Mathematik und Physik – eine Einschätzung

Bereits im alten Babylon wurde die Mathematik dazu benutzt, astronomische Berechnungen anzustellen. Mit ARCHIMEDES tritt uns in der griechischen Antike ein Mathematiker entgegen, der mit gleichem Recht Physiker zu nennen ist. Spätestens von diesem Moment an sind Mathematik und Physik wie zwei Geschwister gemeinsam groß geworden, was ein Blick in die Kulturgeschichte der Physik nach SIMONY [5] unzweifelhaft zeigt. War der Abstand der Geschwister zueinander im Lauf der Menschheitsgeschichte mal enger, mal weniger eng, so blieb das verbindende Band von der Physik her doch immer intakt, während Abstraktionsperioden innerhalb der Mathematik für die Entwicklung mathematischer Teildisziplinen sorgten, die nicht von physikalischen Fragestellungen her motiviert waren.

Zurzeit befinden wir uns in einer Phase, in der der Graben zwischen den beiden Geschwistern in der schulischen und universitären Ausbildung wieder sehr groß zu sein scheint. In den neuen Empfehlungen des niedersächsischen Kultusministeriums zum Physikunterricht an Gymnasien feiert die beschreibende Physik ohne mathematische Durchdringung fröhliche Urstände; mit anderen Worten: Der Physikunterricht soll sich wieder an den Methoden der prä-GALILEIschen Zeiten orientieren. Gleichzeitig erleben wir im Mathematikunterricht einen fortwährenden Abbau wichtiger Inhalte (z. B. Rechnen mit Ungleichungen, Grenzwertbegriff, usw.) zu Gunsten des Einsatzes von elektronischen Rechnern bis hin zum Computeralgebrasystem. Passend dazu ist das klassische Ideal des Mathematikstudenten nahezu verschwunden: An Stelle der Kombination Mathematik – Physik, die heute von den meisten Studierenden als „zu schwer“ empfunden wird, haben sich Kombinationen der Mathematik mit Betriebswirtschaft, Informatik, Geschichte, Englisch u. ä. durchgesetzt. Höhepunkte der Mathematik, wie etwa die Untersuchung von Vektorfeldern, die in den großen Integralsätzen des 19ten Jahrhunderts kulminiert, erreichen daher die meisten unserer Studierenden nicht mehr. Studiengänge wie die für junge Gemüter äußerst attraktiv klingende „Finanz- und Wirtschaftsmathematik“ tragen zudem dazu bei, dass das Interesse an Physik weiter nachlässt.

Wir halten diese Entwicklung nicht nur für beklagenswert, sondern sogar für schädlich! Noch leben wir in einem Hochtechnologieland. DVD-Player, Magnetschwebebahn, HIGHCOM-Rauschunterdrückung in High-Fidelity-Anlagen und vieles mehr sind moderne deutsche Erfindungen, die im eigenen Land nicht an der Expertise der Entwickler gescheitert sind. Auch das Scheitern der Maut-Anlagen auf deutschen Autobahnen im ersten Anlauf lag sicher nicht an den Technikern, sondern offenbarte zum wiederholten Mal, dass zu wenig Naturwissenschaftler in die Planung des Managements einbezogen wurden. Wollen wir auch in Zukunft international wieder zur technisch-naturwissenschaftlichen Spitze zählen, kann die Konsequenz nur in einer deutlich verbesserten und vertieften Ausbildung auf den Gebieten der Mathematik und der Naturwissenschaften liegen, wobei insbesondere die Zusammenhänge zwischen Technik, Naturwissenschaften und der Mathematik im Vordergrund stehen sollten.

Ein Weg zur Zusammenführung von Mathematik und Physik ist die **Dimensionsanalyse** (manche sagen auch *Dimensionsprobe*), die wir im Folgenden beschreiben wollen. Ihr großer Vorteil liegt darin, dass der Anwender keinerlei detaillierte Kenntnisse der Physik besitzen muss. Es reicht zu wissen, welche *Einheiten* die verschiedenen physikalischen Größen aufweisen. Selbst wenn man in einem Modellierungsproblem überhaupt keine Idee mehr hat, erreicht man mit den Methoden der Dimensionsanalyse tiefe Einsichten in physikalische Zusammenhänge. Wir hoffen, dass diese für die Mathematische Modellierung so wichtige Grundlagendisziplin mehr Freunde findet und dass Mathematik-Physik-Lehrkräfte hier ein verbindendes Moment zwischen Physik- und Mathematikunterricht finden mögen.

2. Ein einführendes Beispiel

Wer im Physikunterricht aufgepasst hat, weiß, dass die Schwingungsdauer eines einfachen Fadenpendels nur von der Fadenlänge und der Erdbeschleunigung, nicht aber von der am Faden schwingenden Masse abhängig ist. Selbst wenn man aber *nichts* über Physik weiß, hilft die Dimensionsanalyse weiter.

Die physikalische Einheit der Masse μ ist das Kilogramm kg, die Einheit der Fadenlänge l ist das Meter m und die Einheit der Erdbeschleunigung g ist m/s^2. Wir schreiben für die Einheit einer Größe G die Bezeichnung $[G]$, also

$[\mu] = \text{kg},\ [l] = \text{m},\ [g] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Die Schwingungsdauer Θ hat als Einheit die Sekunde s und es gilt sicher

$\Theta = f(\mu, l, g)$

mit einer unbekannten Funktion f.

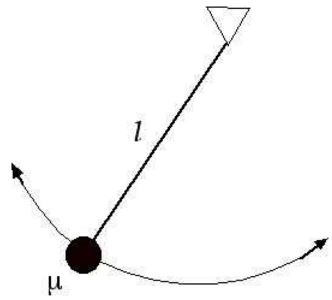


Abb. 1

Rechnen wir jetzt mit Einheiten wie mit Zahlen, dann ist $\Pi := \Theta \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$ **dimensionslos**, d. h. $[\Pi] = 1$. Nehmen wir noch an, dass Π konstant ist, dann folgt

$$\Theta = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Damit haben wir tatsächlich die Formel für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels, d. h. die vormals unbekannte Funktion f gefunden. Die noch fehlende Konstante kann man in einem Experiment bestimmen oder man weiß aus der Physik, dass $\text{const} = 2 \cdot \pi$ gilt. Wie kommt es, dass uns schon die Einheiten sagen, wie eine funktionale Abhängigkeit aussehen muss? Ist das nur Zufall?

3. Grundlagen der Dimensionsanalyse

Eine hervorragende, allerdings für schulische Belange ungeeignete Beschreibung der Dimensionsanalyse findet man in den wundervollen Büchern [1] und [2] von BARENBLATT. Wir werden hier versuchen, einen vereinfachten Zugang zu entwickeln.

3.1 Einheitensysteme

Die einfachste Einheitenklasse ist die LMZ-Klasse (Länge, Masse, Zeit) und in der Newtonschen Mechanik kommt man damit schon sehr weit. Wir haben noch gar nichts über die *eigentlichen* Einheiten gesagt, also ob wir Masse in Gramm oder Tonnen messen wollen oder Länge in Meter oder Kilometer. Wir könnten uns für das „Meter-Kilogramm-Sekunde"-System (m-kg-s) entscheiden oder für das „Kilometer-Gramm-Stunde"-System (km-g-h). Jedes dieser Systeme gehört in die LMZ-Klasse, weil man jedes System in dieser Klasse in ein anderes System derselben Klasse mit Hilfe von drei positiven Konstanten L, M und T umrechnen kann, z. B. ist

Einheit der Länge = $\frac{\text{m}}{L}$, Einheit der Masse = $\frac{\text{kg}}{M}$, Einheit der Zeit = $\frac{\text{s}}{T}$

die Umrechnung des Meter-Kilogramm-Sekunde-Systems in ein anderes System der LMZ-Klasse. Wählt man etwa L = 100, M = 1000 und T = 1, dann wäre man im Zentimeter-Gramm-Sekunde-System; mit L = 0.001, M = 1000, T = 1/3600 kommt man ins Kilometer-Gramm-Stunde-System.

Rechnen wir einmal die Einheit einer Geschwindigkeit um, und zwar von einem LMZ-System mit den Einheiten l_{alt}, μ_{alt}, t_{alt} für Länge, Masse, Zeit in ein LMZ-System mit neuen Einheiten

$$l_{neu} = \frac{l_{alt}}{L}, \quad \mu_{neu} = \frac{\mu_{alt}}{M}, \quad t_{neu} = \frac{t_{alt}}{T}.$$

Nun ist die Einheit der Geschwindigkeit *v* im alten System gegeben durch $[v]_{alt} = \frac{l_{alt}}{t_{alt}}$. Wegen $l_{alt} = L \cdot l_{neu}$ und $t_{alt} = T \cdot t_{neu}$ gilt dann $[v]_{alt} = \frac{L \cdot l_{neu}}{T \cdot t_{neu}} = \frac{l_{neu}}{t_{neu}} \cdot L \cdot T^{-1} = [v]_{neu} \cdot L \cdot T^{-1}$, also $[v]_{neu} = \frac{[v]_{alt}}{L \cdot T^{-1}}$. Da sich die Geschwindigkeit also so von einem System in ein anderes umrechnet, nennt man die Funktion $\mathrm{Dim}(v) := L \cdot T^{-1}$ die **Dimensionsfunktion** von v.

Beispiele 3.1.1: Ist *x* eine Länge, dann ist $\mathrm{Dim}(x) = L$. Ist *y* eine Masse, dann ist $\mathrm{Dim}(y) = M$. Die Dichte ρ hat die Einheit $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$, also ist die Dimensionsfunktion der Dichte $\mathrm{Dim}(\rho) = M \cdot L^{-3}$. Die Dimensionsfunktion der Beschleunigung a ist $\mathrm{Dim}(a) = L \cdot T^{-2}$, denn die Einheit der Beschleunigung ist $[a] = \frac{m}{s^2}$.

3.2 Die Dimensionsfunktion

Alle in der elementaren Mechanik auftretenden Einheiten des Meter-Kilogramm-Sekunde-Systems sind von der Form $m^b \cdot kg^c \cdot s^d$, wobei b, c und d rationale Zahlen sind. So ist die Einheit der Kraft $[F] = [m \cdot a] = [m] \cdot [a] = \frac{kg \cdot m}{s^2}$, also b = c = 1 und d = – 2. Damit sind auch alle auftretenden Dimensionsfunktionen von dieser Bauart, d. h. **Potenzfunktionen**. Für den schulischen Unterricht nicht wichtig, aber doch sehr interessant, ist die Tatsache, dass man sogar *beweisen* kann, dass Dimensionsfunktionen *immer* Potenzfunktionen sind. Im Beweis spielt jedoch eine subtile Anwendung der Kettenregel und ein Studium der Lösungen gewisser Funktionalgleichungen eine entscheidende Rolle, vgl. BARENBLATT [1]. Größen mit der Dimensionsfunktion 1 (d. h. b = c = d = 0) heißen **dimensionslose Größen**. Für uns wichtig ist eine prinzipielle Unterscheidung von physikalischen Größen.

Definition 3.2.1 Physikalische Größen heißen **dimensionsunabhängig**, wenn keine der Größen eine Dimensionsfunktion besitzt, die sich aus dem Produkt der verbleibenden Größen ergibt.

Beispiele 3.2.2: Kraft, Geschwindigkeit und Dichte sind dimensionsunabhängig, $\mathrm{Dim}(F) = M \cdot L \cdot T^{-2}$, $\mathrm{Dim}(v) = L \cdot T^{-1}$ und $\mathrm{Dim}(\rho) = M \cdot L^{-3}$. Wäre das nicht der Fall, dann müsste es Exponenten a und b geben, so dass sich z. B. die Dimensionsfunktion der Dichte aus den beiden anderen Dimensionsfunktionen zu
$M \cdot L^{-3} = (M \cdot L \cdot T^{-2})^a \cdot (L \cdot T^{-1})^b$ ergibt. Ausrechnen der rechten Seite liefert
$M \cdot L^{-3} = M^a \cdot L^{a+b} \cdot T^{-2a-b}$.
Damit auf beiden Seiten wirklich das Gleiche steht, müssen die Exponenten übereinstimmen und so erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem für a und b:
$a = 1, \quad a + b = -3, \quad -2a - b = 0$
Aus der ersten und zweiten Gleichung folgt $b = -4$, aber $-2a - b = -2 \cdot 1 - (-4) = 2 \neq 0$, so dass wir auf einen Widerspruch geführt werden.
Geschwindigkeit v, Weg x und Zeit t sind dimensionsabhängig, denn die Dimensionsfunktion der Geschwindigkeit ist $\mathrm{Dim}(v) = L \cdot T^{-1} = \mathrm{Dim}(x) \cdot \mathrm{Dim}(t)^{-1}$.

Wir wollen nun eine physikalische Größe G untersuchen, die von anderen Größen abhängig ist. Da wir schon wissen, dass es dimensionsunabhängige und dimensionsabhängige Größen gibt, wollen wir die Variablen gleich entsprechend ordnen:
$G = f(p_1, ..., p_k, q_1, ..., q_m)$,

wobei die p_i die dimensionsunabhängigen Größen sein sollen und die q_j die dimensionsabhängigen. Das heißt, wir könnten die beteiligten Dimensionsfunktionen darstellen als

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dim}(G) = \mathrm{Dim}(p_1)^{g_1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{Dim}(p_k)^{g_k}\\
&\mathrm{Dim}(q_1) = \mathrm{Dim}(p_1)^{h_1^1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{Dim}(p_k)^{h_k^1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathrm{Dim}(q_m) = \mathrm{Dim}(p_1)^{h_1^m} \cdot \ldots \cdot \mathrm{Dim}(p_k)^{h_k^m}
\end{aligned}$$

mit gewissen ganzen Exponenten $g_1, \ldots, g_k, h_1^1, \ldots, h_k^1, \ldots, h_k^m$. Dann können wir aber auch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\Pi := \frac{G}{p_1^{g_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{g_k}}\\
&\Pi_1 := \frac{q_1}{p_1^{h_1^1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^1}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Pi_m := \frac{q_m}{p_1^{h_1^m} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^m}}
\end{aligned}$$

bilden, mit denen wir uns dem eigentlichen Zentrum der Theorie der Dimensionsanalyse nähern. Durch ihre Konstruktion sind sämtliche $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_m$ **dimensionslose Größen**. Setzen wir für G in der ersten Gleichung die (gesuchte!) Funktion f ein, dann folgt

$$\Pi = \frac{f(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m)}{p_1^{g_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{g_k}}.$$

Ersetzen wir nun noch die q_j durch die Ausdrücke in den Π_i, dann erhalten wir

$$\Pi = \frac{1}{p_1^{g_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{g_k}} \cdot f\left(p_1, \ldots, p_k, \Pi_1 \cdot p_1^{h_1^1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^1}, \ldots, \Pi_m \cdot p_1^{h_1^m} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^m}\right).$$

Letzten Endes hängt also Π nur von den p_i und den Π_i ab, d. h. wir können eine neue (ebenfalls unbekannte) Funktion Ψ einführen und schreiben:

$$\Pi = \Psi(p_1, \ldots, p_k, \Pi_1, \ldots, \Pi_m). \qquad (1)$$

Lemma 3.2.3 Die Größen $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$ ändern sich nicht, wenn sich irgendein p_i um einen Faktor ändert.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigen wir, dass sich Π_1 nicht ändert, wenn sich p_2 um einen Faktor ändert.
Dazu wechseln wir in ein System der LMZ-Klasse, in dem sich nur p_2, nicht aber alle anderen $p_1, p_3, \ldots, p_k$ ändern (Man mache sich klar, dass man ein solches System immer finden kann.). Im neuen System habe sich p_2 um einen Faktor $\lambda \neq 0$ zu $\lambda \cdot p_2$ verändert. Dann gilt für den Übergang vom alten zum neuen System

$$\frac{q_1}{p_1^{h_1^1} \cdot (\lambda \cdot p_2)^{h_2^1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^1}} \to \frac{Q_1}{p_1^{h_1^1} \cdot (\lambda \cdot p_2)^{h_2^1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^1}},$$

wobei sich q_1 in eine Größe Q_1 transformiert hat, da q_1 dimensionsabhängig ist. Nun ist aber die Dimensionsfunktion von Q_1 gerade

$$\mathrm{Dim}(Q_1) = \mathrm{Dim}(p_1)^{h_1^1} \cdot \mathrm{Dim}(\lambda \cdot p_2)^{h_2^1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{Dim}(p_k)^{h_k^1} = \lambda^{h_2^1} \cdot \mathrm{Dim}(p_1)^{h_1^1} \cdot \mathrm{Dim}(p_2)^{h_2^1} \cdot \ldots \cdot \mathrm{Dim}(p_k)^{h_k^1} = \lambda^{h_2^1} \cdot \mathrm{Dim}(q_1),$$

also folgt

$$\Pi_1 = \frac{\lambda^{h_2^1} \cdot q_1}{p_1^{h_1^1} \cdot (\lambda \cdot p_2)^{h_2^1} \cdot \ldots \cdot p_k^{h_k^1}}$$

und damit verändert sich Π_1 im neuen System nicht; q.e.d.
Ebenso ist jetzt klar, dass sich auch Π nicht ändert, wenn sich eines der p_i ändert. Damit kommen wir zu unserem wichtigsten Gedankenexperiment: Ändern wir p_1 um einen Faktor, dann ändern sich $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_m$ nicht. Ein Blick auf die Gleichung (1) zeigt uns aber dann, dass **Π von p_1 unabhängig ist**. Nun ändern wir p_2 um einen Faktor und stellen wieder durch Blick auf (1) fest, dass **Π von p_2 unabhängig ist**. Insgesamt können wir

also festhalten, dass Π **von allen** p_i **unabhängig ist.** Damit können wir unser wichtigstes Ergebnis festhalten im

Satz 2.2.4 Mit einer (unbekannten) Funktion Δ gilt: $\Pi = \Delta(\Pi_1,...,\Pi_m)$

Dieser Satz ist berühmt, denn es handelt sich um das so genannte **BUCKINGHAMsche Π-Theorem** (BUCKINGHAM [3]). Man formuliert es häufig so: *Wenn eine physikalische Größe von k dimensionsabhängigen und m dimensionsunabhängigen Größen abhängt, dann lässt sich diese Abhängigkeit stets schreiben als Beziehung zwischen einer dimensionslosen Größe und genau m dimensionslosen Größen, die sich aus den dimensionsabhängigen Variablen ergeben.*

4. Beispiele

4.1 Noch einmal das Fadenpendel

Nach all dem Formalismus, den wir jetzt entwickelt haben, kommen wir noch einmal zum Fadenpendel zurück. Wir hatten eine Beziehung für die Schwingungsdauer gesucht und festgestellt, dass diese nur von der schwingenden Masse, von der Fadenlänge und von der Erdbeschleunigung abhängen kann, also $\Theta = f(\mu, l, g)$.

Es sind also vier Größen beteiligt mit den physikalischen Einheiten $[\Theta] = s$, $[\mu] = kg$, $[l] = m$, $[g] = \frac{m}{s^2}$. Die Variablen Masse, Länge und Erdbeschleunigung sind dimensionsunabhängig, denn man kann keine der drei aus Produkten der beiden anderen ausdrücken. Setzen wir also $p_1 := \mu$, $p_2 := l$, $p_3 := g$ und es gibt keine q_j. Nun müssen wir überlegen, wie wir die gesuchte Größe der Schwingungsdauer dimensionslos machen können. Das ist offenbar der Fall für $\Pi = \frac{\Theta}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$ und wir wissen nun, dass dieser Ausdruck eine Konstante ist. Einfaches Umstellen liefert damit das Resultat $\Theta = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.

4.2. Fallende Dominosteine

Wir betrachten eine japanische Domino-Olympiade, bei der Tausende Dominosteine aufrecht und in konstantem Abstand gestellt werden. Irgendwann wird der erste Dominostein umgestoßen und nun läuft eine Welle über die Steine und erzeugt zum Teil wunderbare Muster.

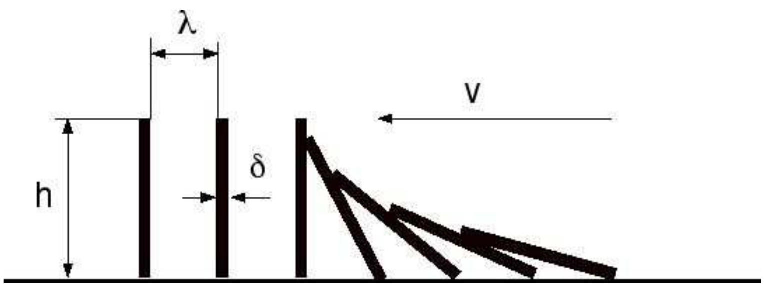


Abb. 2

Wir wollen berechnen, wie die Geschwindigkeit *v* der Welle von den Größen Dominosteinhöhe h, Abstand λ, der Dicke δ der Dominosteine und von der Erdbeschleunigung *g* abhängt, d. h. wir suchen $v = f(h, \lambda, \delta, g)$.

Die Einheiten der drei Variablen sind $[h] = m$, $[\lambda] = m$, $[\delta] = m$, $[g] = \frac{m}{s^2}$ und damit sind zwei von ihnen dimensionsabhängig. Wir wählen (das ist wirklich Geschmackssache) $q_1 := \lambda$, $q_2 := \delta$ und $p_1 := h$, $p_2 := g$. Damit bestimmen wir die dimensionslosen Größen

$$\Pi = \frac{v}{\sqrt{h \cdot g}}, \Pi_1 = \frac{\lambda}{h}, \Pi_2 = \frac{\delta}{h}$$

Wir wissen aus unseren Überlegungen bereits, dass immer

$$\Pi = \Delta(\Pi_1, \Pi_2)$$

gilt, also folgt

$$v = \sqrt{h \cdot g} \cdot \Delta(\Pi_1, \Pi_2) = \sqrt{h \cdot g} \cdot \Delta\left(\frac{\lambda}{h}, \frac{\delta}{h}\right).$$

Dieses Ergebnis erlaubt uns nun wichtige Folgerungen.

(i) Die Wellengeschwindigkeit hängt mit $\sqrt{g}$ von der Erdbeschleunigung ab. Würde man die Domino-Olympiade auf dem Mond spielen, dann würde wegen $g_{Mond} \approx \frac{g}{6}$ die Wellengeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0.408$ kleiner sein als auf der Erde.

(ii) Nehmen wir an, die Dominosteine seien sehr viel dünner als hoch. Dann ist das Verhältnis δ/h vernachlässigbar klein und wir würden

$$v = \sqrt{h \cdot g} \cdot \Delta\left(\frac{\lambda}{h}\right)$$

erhalten. Die Wellengeschwindigkeit geht also mit $\sqrt{h}$ bzw., was dasselbe ist, mit dem Quadrat des Steinabstandes, denn der Quotient λ/h muss konstant bleiben.

4.3 Das schwingende U-Rohr

Dimensionsanalyse eignet sich hervorragend, um relevante von irrelevanten Größen zu unterscheiden. Bereits im Beispiel des Fadenpendels haben wir *en passant* gesehen, dass die schwingende Masse für die Schwingungsdauer des Pendels irrelevant ist. Wir betrachten nun eine Flüssigkeit der Dichte ρ, die in einem U-Rohr schwingt und wir wollen die Schwingungsdauer bestimmen. Spielt die Dichte dabei eine Rolle?
Die beteiligten Größen sind neben der Schwingungsdauer Θ und der Dichte noch die Erdbeschleunigung g und die Länge l der Flüssigkeitssäule, also

$$\Theta = f(\rho, g, l).$$

Aus den beteiligten Dimensionen $[\Theta] = s$, $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$, $[g] = \frac{m}{s^2}$, $[l] = m$ sehen wir sofort, dass die Dichte die einzige Größe ist, in der eine Masseneinheit auftritt. Die Dichte kann damit keinerlei Einfluss auf die Schwingungsdauer haben, denn hätte sie es, dann müsste noch eine weitere beteiligte Größe mit Masseneinheit im Spiel sein, um die kg in der Dichte zu kompensieren.

4.4. Der Satz des PYTHAGORAS

Die Dimensionsanalyse kann sogar benutzt werden, um den Satz des PYTHAGORAS zu beweisen:
Dazu sei ein rechtwinkliges Dreieck wie in der Abbildung gegeben. Die Fläche A dieses Dreiecks ist sicher bestimmt durch die Seite c und den Winkel Φ, also

$$A := f(c, \Phi).$$

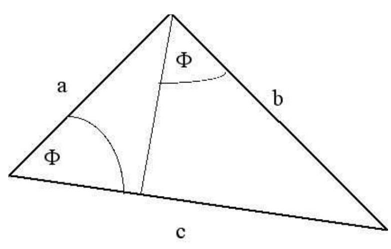


Abb. 3

Der Winkel Φ ist dimensionslos und die einzige Größe mit unabhängiger Dimension ist c, denn die Dimension der Fläche ist lediglich das Quadrat der Dimension von c. Daher ist $\Pi_1 = \Phi$ und $\Pi = \frac{A}{c^2}$, also $A = c^2 \cdot \Pi = c^2 \cdot \Pi(\Pi_1) = c^2 \cdot \Pi(\Phi)$. Die Höhe auf der Hypotenuse c zerlegt das Dreieck in zwei ähnliche Dreiecke mit Hypotenusen a bzw. b. Genau wie eben zeigen wir für die beiden Teildreiecke $A_1 = a^2 \cdot \Pi(\Phi)$ und $A_2 = b^2 \cdot \Pi(\Phi)$, wobei die A_i die beiden Teilflächen sind. Da die Fläche des großen Dreiecks sich ergibt aus

$A = A_1 + A_2$, folgt $c^2 \cdot \Pi(\Phi) = a^2 \cdot \Pi(\Phi) = b^2 \cdot \Pi(\Phi)$ und nach Division durch die Konstante $\Pi(\Phi)$ erkennen wir den Satz des Pythagoras.

5. Die SZIRTESsche Matrixmethode

Wir haben versucht, die Mathematik hinter der Dimensionsanalyse zu beleuchten. Für einen Praktiker ist es jedoch gar nicht nötig, sich über Details oder Hintergründe zu informieren, denn es gibt eine einfache „Merkmethode“, die auf der Verwendung von Matrizen basiert und die in dem Buch [4] von THOMAS SZIRTES dargelegt wird. Wir wollen die Matrixmethode am Beispiel der fallenden Dominosteine erläutern.

Wie auch wir berechnet SZIRTES erst einmal die Anzahl dimensionsabhängiger Größen. Dann schreibt er ein Tableau auf, in dem horizontal alle beteiligten Größen geschrieben werden und vertikal die beteiligten Einheiten aus der LMZ-Klasse. Bei den fallenden Dominosteinen tauchen nur zwei Einheiten aus unserem LMZ-System auf, nämlich die Längeneinheit m und die Zeiteinheit s. Da wir an einer Formel für die Wellengeschwindigkeit interessiert sind, muss für die Dimensionsfunktion der Geschwindigkeit die Beziehung $\mathrm{Dim}(v) = L \cdot T^{-1}$ gelten. Der Exponent der Längeneinheit ist also 1, der Exponent der Zeiteinheit ist -1. Entsprechend tragen wir für alle beteiligten Größen die Exponenten in das Tableau ein und finden damit die folgende Matrix, wobei wir die beiden dimensionsunabhängigen Größen nach rechts geschrieben haben.

	v	λ	δ	h	g
m	1	1	1	1	1
s	-1	0	0	0	-2

Die dieser Tabelle zugrunde liegende Idee ist einfach. Wir haben nur zwei beteiligte Einheiten, Meter und Sekunde. Aus diesen beiden lassen sich alle möglichen Einheiten durch $m^{\beta_1} \cdot s^{\beta_2}$ berechnen, wobei die β_i irgendwelche rationalen Exponenten sein können. Auf der anderen Seite haben wir fünf beteiligte Größen und wenn wir alle möglichen Einheiten erzeugen wollen, muss

$$[v]^{\alpha_1} \cdot [\lambda]^{\alpha_2} \cdot [\delta]^{\alpha_3} \cdot [h]^{\alpha_4} \cdot [g]^{\alpha_5} = m^{\beta_1} \cdot s^{\beta_2} \qquad (2)$$

gelten, also

$m^{\alpha_1} \cdot s^{-\alpha_1} \cdot m^{\alpha_2} \cdot m^{\alpha_3} \cdot m^{\alpha_4} \cdot m^{\alpha_5} \cdot s^{-2\alpha_5} = m^{\beta_1} \cdot s^{\beta_2}$. Ein Exponentenvergleich liefert zwei Gleichungen für fünf Unbekannte:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \beta_1$$
$$-\alpha_1 - 2 \cdot \alpha_5 = \beta_2$$

bzw. in Matrixschreibweise[1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix heißt **Dimensionsmatrix** und entspricht exakt dem Eintrag in unserem Tableau. Da wir bereits wissen, dass wir nur zwei unabhängige Dimensionen haben, können wir die Matrix aufspalten:

$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Definieren wir nun noch $\mathbf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{O} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann können wir das obige Gleichungssystem erweitern und schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

[1] Man kann alle folgenden Matrizengleichungen durch lineare Gleichungssysteme ersetzen, wenn die Matrixschreibweise unbekannt ist.

Wenn wir nun die inverse Matrix bilden, dann folgt

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{O}\\\mathbf{B} & \mathbf{A}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{O}\\-\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} & \mathbf{A}^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=:\mathbf{E}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

womit wir auch gleich die Matrix $\mathbf{E}$ definiert haben. In unserem Fall ist

$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $-\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & -1\\-\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$, so dass wir für die Matrix $\mathbf{E}$ den Ausdruck erhalten:

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-1&-1\\-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Die Dimensionsmatrix $(\mathbf{B}\quad\mathbf{A})$ hat den Rang 2. Wollen wir dimensionslose Größen berechnen, dann müssen wir $\beta_1=\beta_2=0$ setzen. Bei fünf Unbekannten hat das homogene Gleichungssystem

$(\mathbf{B}\quad\mathbf{A})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ eine dreiparametrige Lösung, d. h. drei linear unabhängige Lösungen sind möglich. Diese drei seien mit $\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\\\alpha_{31}\\\alpha_{41}\\\alpha_{51}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\\alpha_{22}\\\alpha_{32}\\\alpha_{42}\\\alpha_{52}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_{13}\\\alpha_{23}\\\alpha_{33}\\\alpha_{43}\\\alpha_{53}\end{pmatrix}$ bezeichnet und statt nun für jeden Vektor ein einzelnes Gleichungssystem zu notieren, schreiben wir das Matrix-System

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}\\\alpha_{51}&\alpha_{52}&\alpha_{53}\end{pmatrix}=\mathbf{E}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\\\beta_1&\beta_1&\beta_1\\\beta_2&\beta_2&\beta_2\end{pmatrix}=\mathbf{E}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Nun müssen wir die α_{ij} so setzen, dass in den Spalten auf der rechten Seite drei linear unabhängige Vektoren stehen. Das machen wir so:

$$\mathbf{E}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{E}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-\frac{1}{2}&-1&-1\\-\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}=:\mathbf{P}$$

Wie passt nun die Matrix $\mathbf{P}$ in unser obiges Tableau? Jede Zeile gehört zu einer unserer Variablen, jede Spalte gehört zu einer möglichen Exponentenwahl, um zu dimensionslosen Größen zu kommen. Betrachten wir die erste Spalte. Wir wollten ja dimensionslose Größen gewinnen und haben deshalb $\beta_1=\beta_2=0$ gewählt. Nach Gleichung (2) haben wir die α_i so zu wählen, dass

$$[v]^{\alpha_1}\cdot[\lambda]^{\alpha_2}\cdot[\delta]^{\alpha_3}\cdot[h]^{\alpha_4}\cdot[g]^{\alpha_5}=1$$

gilt. Die ersten drei α_i haben wir aber bereits festgelegt, als wir die lineare Unabhängigkeit der Vektoren in der rechten Matrix in (3) sicherstellen mussten, d. h. wir kennen bereits $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ und suchen daher α_4 und α_5, so dass

$$[v]\cdot[h]^{\alpha_4}\cdot[g]^{\alpha_5} = 1$$

gilt. Diese Aufgabe können wir nun natürlich lösen, aber wir haben es bereits getan, und zwar durch stures Ausrechnen bei den obigen Matrixoperationen: In Spalte 1 der Matrix **P** finden wir in den Zeilen 4 und 5 die entsprechenden Einträge für α_4 und α_5, nämlich

$$[v]\cdot[h]^{-\frac{1}{2}}\cdot[g]^{-\frac{1}{2}} = \frac{m}{s}\cdot\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\sqrt{s^2/m} = 1\,.$$

Jede Spalte von **P** gehört also zu einer dimensionslosen Größe, während wir in den einzelnen Zeilen die Exponenten unserer physikalischen Größen finden. Daher brauchen wir nur die Transponierte $\mathbf{P}^T$ in unser Tableau eintragen und wir erhalten:

	v	λ	δ	h	g
m	1	1	1	1	1
s	-1	0	0	0	-2
Π	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Π_1	0	1	0	-1	0
Π_2	0	0	1	-1	0

Dies ist nun das vollständige Tableau. Aus den unteren drei Zeilen können wir direkt ablesen:

$$\Pi = v^1\cdot h^{-\frac{1}{2}}\cdot g^{-\frac{1}{2}} = \frac{v}{\sqrt{h\cdot g}}$$

$$\Pi_1 = \lambda^1\cdot h^{-1} = \frac{\lambda}{h}$$

$$\Pi_2 = \delta^1\cdot h^{-1} = \frac{\delta}{h}$$

und das entspricht genau dem Ergebnis, das wir bereits vorher ermittelt hatten.

Beispiel: Der Spaziergang

Es sei v die angenehmste Gehgeschwindigkeit von Herrn Dim, der l Meter groß ist. Herr Dim geht jeden Mittag mit seiner Freundin, Frau Ension, spazieren. Nun ist Herr Dim außerordentlich klein und Frau Ension ist deutlich größer als Herr Dim und sie klagt oft darüber, dass Herr Dim zu langsam geht. Wie ist denn die angenehmste Gehgeschwindigkeit von Frau Ension?

Es sind drei physikalische Größen an der Modellierung beteiligt, die angenehmste Gehgeschwindigkeit von Herrn Dim, v, mit $[v] = \frac{m}{s}$, die Größe von Herrn Dim, l, mit $[l] = m$ und die Erdbeschleunigung $[g] = \frac{m}{s^2}$. Wir müssen also versuchen, Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so zu finden, dass bei gegebenen β_1, β_2

$$[v]^{\alpha_1}\cdot[l]^{\alpha_2}\cdot[g]^{\alpha_3} = m^{\beta_1}\cdot s^{\beta_2}$$

gilt. Damit ergibt sich

$$[v]^{\alpha_1}\cdot[l]^{\alpha_2}\cdot[g]^{\alpha_3} = m^{\alpha_1}\cdot s^{-\alpha_1}\cdot m^{\alpha_2}\cdot m^{\alpha_3}\cdot s^{-2\alpha_3} = m^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\cdot s^{-\alpha_1-2\alpha_3} = m^{\beta_1}\cdot s^{\beta_2}\,,$$

also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}.$$

Alle drei beteiligten Einheiten sind dimensionsabhängig. Da wir an einem Ausdruck für *v* interessiert sind, verwenden wir die Aufteilung $\mathbf{B} := \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \mathbf{A} := \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ und schreiben das erweiterte Schema

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

was wir durch
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & O \\ -A^{-1} \cdot B & A^{-1} \end{pmatrix}}_{=E} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

auflösen. In unserem Fall ist $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Es gibt nur einparametrige Lösungen, also müssen wir nur α_1 setzen (und zwar auf den Wert 1) und dann $\beta_1 = \beta_2$, denn damit können wir eine dimensionslose Zahl berechnen. Aus dem Matrix-Vektor-Produkt

$$\mathbf{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =: \mathbf{P}$$

folgt nun alles, denn diese Spalte sagt aus: $[v]^1 \cdot [l]^{-\frac{1}{2}} \cdot [g]^{-\frac{1}{2}} = 1$, und damit folgt $\frac{v}{\sqrt{l \cdot g}} = \Pi = \text{const.}$, also

$$v = \text{const.} \cdot \sqrt{l \cdot g}\,.$$

Die angenehmste Gehgeschwindigkeit geht also mit der Wurzel aus der Körperhöhe. Wäre Frau Ension doppelt so groß als Herr Dim, dann wäre ihre angenehmste Gehgeschwindigkeit den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die ihres Freundes. Etwas realistischer: Ist Herr Dim 1,60 Meter groß und Frau Ension 1,90 Meter, dann ist $1.9/1.6 = 1.1875$ und Frau Ensions angenehmste Spaziergeschwindigkeit ist demnach $\sqrt{1.1875} \approx 1.0897$-fach größer als die ihres Begleiters.

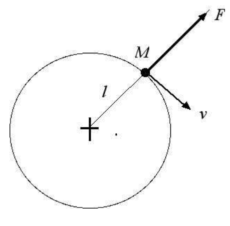
6. Aufgaben

Wir geben sechs weitere Aufgaben mit Lösungen an. Aufgabe 3 soll zeigen, wie weit man mit reinen Plausibilitätsüberlegungen kommen kann. Es ist sicher *nicht* für schulische Belange geeignet, aber zur Dokumentation der Philosophie hinter der mathematischen Modellierung eignet es sich hervorragend.

> *Aufgabe 1 (Der fallende Apfel):* Eine Masse M fällt aus der Höhe h unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft senkrecht nach unten. Der Luftwiderstand sei vernachlässigbar. Wie groß ist die Fallzeit t ?

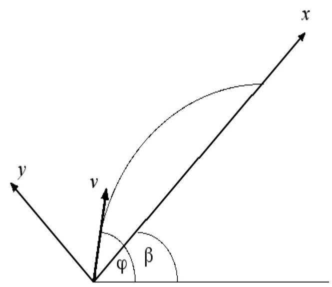
Lösung: $[t] = s, [M] = kg, [h] = m, [g] = \frac{m}{s^2}$. Also ist $\Pi = t^2 \cdot \frac{g}{h} = \text{const.} \Rightarrow t = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$. Die Masse spielt keine Rolle, da keine weitere Größe mit der Einheit kg im Spiel ist.

> *Aufgabe 2 (Der geschleuderte Milcheimer):* Der kleine Uwe wird von seiner Mutter zum Milchholen geschickt. Auf dem Rückweg ist es Uwe langweilig und er fängt an, mit der gefüllten Kanne zu spielen. Die gefüllte Milchkanne der Masse M wird vom kleinen Uwe an einem Band der Länge l auf einer Kreisbahn herumgeschleudert, wobei Uwe die Tangentialgeschwindigkeit v konstant hält. Wie groß ist die Zentrifugalkraft F?



Lösung: $[l] = m, [M] = kg, [F] = \frac{kg \cdot m}{s^2}, [v] = \frac{m}{s}$. Damit gibt es eine dimensionslose Konstante, und zwar $\Pi = \frac{F \cdot l}{M \cdot v^2} = \text{const.}$ Damit folgt für die Zentrifugalkraft $F = \text{const.} \cdot \frac{M \cdot v^2}{l}$.

Aufgabe 3 (Der Kanonenclown): Ein Clown im Zirkus wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v aus einer Kanone unter dem Winkel φ abgeschossen. Um seinen Aufprall zu dämpfen, wird er gegen eine um den Winkel β geneigte Ebene geschossen. Wie lange fliegt der Clown durch die Luft?
Hinweis: Diese Aufgabe führt ohne weitere Überlegungen zu einer nicht sehr befriedigenden Lösung, da die genaue Abhängigkeit der Flugzeit von den Winkeln nicht klar ist. Wenn man aber mit Vektoren und ihren Komponenten arbeitet, und zwar sowohl für Geschwindigkeit und Erdbeschleunigung als auch für die Einheiten(Meter in x- und Meter in y-Richtung), kann man viel mehr erreichen, siehe die Lösung.



Lösung: $[\varphi]=1, [\beta]=1, [t]=s, [v]=\frac{m}{s}, [g]=\frac{m}{s^2}$. Damit gibt es drei dimensionslose Größen:

$\Pi_1=\varphi, \Pi_2=\beta, \Pi=\frac{t\cdot g}{v}=\Pi(\Pi_1,\Pi_2)$ und es folgt $t=\frac{v}{g}\cdot\Pi(\Pi_1,\Pi_2)$. Dieses Resultat erscheint uns aber als etwas enttäuschend, da die genaue Abhängigkeit der Flugzeit von den Winkeln nicht herauskommt. Mehr Informationen bekommt man, wenn man mit Vektoren arbeitet und selbst bei den Einheiten in x- und y-Richtung unterscheidet:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix},\quad \vec{g}=\begin{pmatrix}g_x\\ g_y\end{pmatrix},\quad [v_x]=\frac{m_x}{s},\quad [v_y]=\frac{m_y}{s},\quad [g_x]=\frac{m_x}{s^2},\quad [g_y]=\frac{m_y}{s^2}$$

Dann finden wir die dimensionslosen Größen $\Pi_A:=\frac{v_y\cdot g_x}{v_x\cdot g_y}, \Pi_B:=\frac{t\cdot g_x}{v_x}$. Wir haben bereits beschrieben, dass alle Dimensionsfunktionen Potenzfunktionen sind. Daher machen wir nun den Ansatz $\Pi_B=k\cdot\Pi_A^n$ mit zwei Konstanten k und n. Damit folgt

$$\frac{t\cdot g_x}{v_x}=k\cdot\left(\frac{v_y\cdot g_x}{v_x\cdot g_y}\right)^n \quad\Rightarrow\quad t=k\cdot\frac{v_x}{g_x}\cdot\left(\frac{v_y\cdot g_x}{v_x\cdot g_y}\right)^n.$$

Nun schreiben wir unsere Komponenten auf: $v_x=v\cdot\cos(\varphi-\beta),\quad v_y=v\cdot\sin(\varphi-\beta)$ und weiter $g_x=g\cdot\sin(\beta),\quad g_y=g\cdot\cos(\beta)$. Setzt man diese Terme ein, dann folgt

$$t=k\cdot\frac{v}{g}\cdot\frac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin\beta}\cdot\left(\frac{\sin(\varphi-\beta)\cdot\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\cdot\cos\beta}\right)^n. \tag{1}$$

Nun sollten wir etwas nachdenken: Ist $\varphi>0$ und β nahe bei null, dann können wir für (1) schreiben:

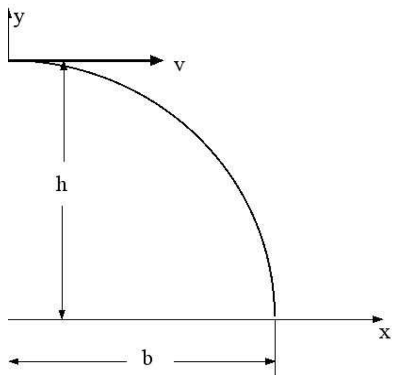
$$t=k\cdot\frac{v}{g}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin^n\varphi\cdot\sin^n\beta}{\cos^n\varphi\cdot 1}=k\cdot\frac{v}{g}\cdot\cos^{1-n}\varphi\cdot\sin^{n-1}\beta\cdot\sin^n\varphi$$

Wäre nun $n>1$, dann wäre $t\approx 0$ und das kann nicht sein. Wäre andererseits $n<1$, dann würde $t\approx\infty$ folgen und auch das ist unmöglich. Daher muss zwangsläufig $n=1$ gelten. Damit gehen wir zurück nach (1) und schreiben nun

$$t=k\cdot\frac{v}{g}\cdot\frac{\cos(\varphi-\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin(\varphi-\beta)\cdot\sin\beta}{\cos(\varphi-\beta)\cdot\cos\beta}=k\cdot\frac{v}{g}\cdot\frac{\sin(\varphi-\beta)}{\cos\beta}. \tag{2}$$

Wir können sogar noch einen Schritt weiter gehen. Die Beziehung (2) muss für alle Winkel φ gelten, also speziell für $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Für diesen Fall erhalten wir $t=k\cdot\frac{v}{g}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\beta}=k\cdot\frac{v}{g}$.

Wenn wir nun aus der Mechanik wissen, dass in diesem Fall (Wurf senkrecht nach oben) $v=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t$ (nach GALILEO GALILEI) gilt, dann haben wir $k=2$ bewiesen. Damit haben wir die vollständige (und richtige) Formel für die Flugzeit des Clowns hergeleitet.



Aufgabe 4 (Tim auf der Schanze): Tim ist ein begeisterter Wintersportler und will nun auch den Sprung von der Schanze ausprobieren. Die Übungs-Skischanze hat eine Höhe von h über dem Boden und Tim erreicht die Absprunggeschwindigkeit v, und zwar springt er genau parallel zum Boden ab. Wie weit kann er springen, wenn man die Luftreibung vernachlässigt?

Lösung: Die beteiligten Größen sind die Sprungweite $[b] = m$, die Absprunggeschwindigkeit $[v] = \frac{m}{s}$, die Erdbeschleunigung $[g] = \frac{m}{s^2}$ und die Absprunghöhe $[h] = m$. Da nur zwei Dimensionen beteiligt sind, muss es zwei dimensionslose Größen geben. Zur Dimensionslosmachung von b wählen wir h, also $\Pi := \frac{b}{h}$, dann bleibt noch

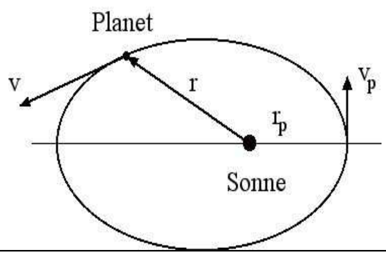
$$\Pi_1 := \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}}.$$

Damit ergibt sich $b = h \cdot \Pi_1 = h \cdot \Psi\left(\frac{v}{\sqrt{g \cdot h}}\right)$. Nun ist Ψ eine unbekannte Funktion und damit ist unser Ergebnis wieder nicht wirklich hilfreich. Wie schon weiter oben führen wir nun richtungsabhängige Einheiten ein, nämlich $[b] = m_x$, $[v] = \frac{m_x}{s}$, $[g] = \frac{m_y}{s^2}$, $[h] = m_y$. Damit haben wir 4 beteiligte Größen aber 3 verschiedene Einheiten, womit nur noch eine dimensionslose Größe $\Pi = \frac{b}{v} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} = \text{const.}$ übrig bleibt. Damit aber haben wir

$$b = \text{const.} \cdot v \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

bewiesen. Die von Tim erreichbare Weite hängt also linear von der Absprunggeschwindigkeit ab und mit der inversen Wurzel von der Schanzenhöhe.

Aufgabe 5 (KEPLERs zweites Planetengesetz): Ein Zeiger, der von der Sonne zu irgendeinem Planeten unseres Sonnensystems führt, überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Das ist der Inhalt des zweiten KEPLERschen Planetengesetzes.



Wir starten mit einer elliptischen Umlaufbahn, die durch den Perihelabstand r_p und die Tangentialgeschwindigkeit im Perihelpunkt, v_p, definiert sein soll. Man leite das 2te KEPLERsche Gesetz mit Hilfe einer Dimensionsanalyse her.

Lösung: Beteiligt sind die folgenden Größen:

Größe	**Symbol**	**Dimension**
Zeit	t	s
Überstrichene Fläche pro Zeit	A	$\frac{m^2}{s}$
Perihelgeschwindigkeit	v_p	$\frac{m}{s}$
Länge des Zeigers	r_p	m
Masse der Sonne	M	kg
Gravitationskonstante	γ	$\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

Wir haben damit sechs physikalische Größen und drei beteiligte Dimensionen: s, m, kg. Damit sind drei dimensionslose Größen zu erwarten. Wir arbeiten mit der Matrixmethode von SZIRTES und starten erst einmal von der folgenden Aufteilung.

	M	A	r_p	v_p	γ	t
m	0	2	1	1	3	0
s	0	-1	0	-1	-2	1
kg	1	0	0	0	-1	0

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ auf der rechten Seite des Tableaus ist regulär, d. h. invertierbar und damit ist unsere Aufteilung durchaus möglich. Nun beginnen wir mit den dimensionslosen Größen und fragen im ersten Schritt, wie die Dimension von M von denen von v_p, γ und t entdimensionalisiert werden kann. Wir erhalten $[\gamma]^{-1} \cdot [v_p]^3 \cdot [t] = \text{kg}$ und damit ist $\frac{M \cdot \gamma}{v_p^3 \cdot t}$ dimensionslos. Versuchen wir nun A durch die drei Größen rechts zu entdimensionalisieren, dann finden wir , dass das nicht geht, da die Einheit des kg nicht ohne Zuhilfenahme der Größe M auf der linken Seite eliminiert werden kann. Unsere obige Aufteilung ist also nicht besonders geschickt gewählt, weshalb wir M mit t vertauschen,

	t	A	r_p	v_p	γ	M
m	0	2	1	1	3	0
s	1	-1	0	-1	-2	0
kg	0	0	0	0	-1	1

um zum zweiten Versuch überzugehen. Um die Dimension von t durch die Dimensionen der drei Größen der rechten Seite zu eliminieren, finden wir, dass auch das nicht geht. Das Problem liegt daran, dass wir auf der rechten Seite keine reine Dimension m finden, sondern nur eine Geschwindigkeit. Also tauschen wir noch einmal und versuchen jetzt:

	t	A	v_p	r_p	γ	M
m	0	2	1	1	3	0
s	1	-1	-1	0	-2	0
kg	0	0	0	0	-1	1

Jetzt finden wir für die Dimensionslosmachung der Zeit, dass $\Pi_1 = t \cdot \sqrt{\frac{M \cdot \gamma}{r_p^3}}$ dimensionslos ist. Für die Dimensionslosmachung von A ist $\Pi = \frac{A}{\sqrt{r_p \cdot M \cdot \gamma}}$ dimensionslos und für v_p finden wir die dimensionslose Konstante $\Pi_2 = v_p \cdot \sqrt{\frac{r_p}{M \cdot \gamma}}$. Mit der Indizierung bringen wir lediglich zum Ausdruck, dass wir eigentlich an der Größe A interessiert sind, d. h. wir vergeben für die zugehörige dimensionslose Größe keinen Index. Damit ergibt sich im Tableau:

	t	A	v_p	r_p	γ	M
m	0	2	1	1	3	0
s	1	-1	-1	0	-2	0
kg	0	0	0	0	-1	1
Π_1	1	0	0	-3/2	1/2	1/2
Π	0	1	0	-1/2	-1/2	-1/2
Π_2	0	0	1	1/2	-1/2	-1/2

Wenn wir die drei dimensionslosen Größen betrachten, dann gilt offenbar $\Pi = \Psi(\Pi_1, \Pi_2)$ und wir machen den Ansatz $\Pi = \lambda \cdot \Pi_1^p \cdot \Pi_2^q$ mit einem Faktor λ und unbekannten Exponenten p und q. Einsetzen liefert

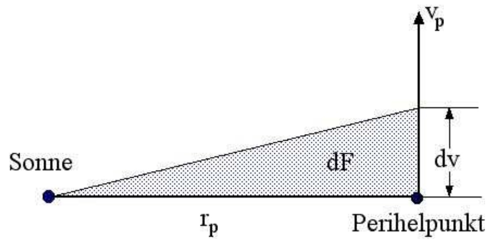
$$A = \lambda \cdot \sqrt{r_p \cdot M \cdot \gamma} \cdot \left(t \cdot \sqrt{\frac{M \cdot \gamma}{r_p^3}} \right)^p \cdot \left(v_p \cdot \sqrt{\frac{r_p}{M \cdot \gamma}} \right)^q .$$

Wir können dieses Ungetüm stark vereinfachen. Wäre p ungleich null, dann würde am Perihelpunkt (t = 0) A = 0 gelten, d. h. der Planet würde sich gar nicht bewegen, er wäre stationär. Also gilt

$$A = \lambda \cdot \sqrt{r_p \cdot M \cdot \gamma} \cdot \left(v_p \cdot \sqrt{\frac{r_p}{M \cdot \gamma}} \right)^q \tag{4}$$

und das ist bereits das zweite KEPLERsche Gesetz, denn A ist unabhängig von der Zeit t, d. h. für alle Planeten gilt, dass in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstrichen werden.

Nun kann man noch weiter gehen und versuchen, den Exponenten q und den Faktor λ genauer zu bestimmen, und wir folgen SZIRTES [4] darin. Erst einmal können wir beweisen, dass q nicht null sein kann, denn sonst wäre A unabhängig von der Perihelgeschwindigkeit v_p und das ist unmöglich. Wenn wir die Bewegung direkt am Perihelpunkt untersuchen, dann erhalten wir in einem infinitesimalen Zeitschritt dt das nebenstehende Bild.



Da im Perihelpunkt die Tangentialgeschwindigkeit senkrecht auf dem Abstand zur Sonne steht, ist die überstrichene Fläche in der Zeit dt

$$dF = \frac{1}{2} \cdot r_p \cdot dv .$$

Nun ist $dv = v_p \cdot dt$, d. h. $dF = \frac{1}{2} \cdot r_p \cdot v_p \cdot dt$. Aber A ist ja die überstrichene Fläche pro Zeit, also $A = \frac{dF}{dt}$ und damit haben wir die wichtige Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot r_p \cdot v_p .$$

Ein Vergleich mit (4) zeigt, dass dort $\lambda = \frac{1}{2}$ und $q = 1$ gelten muss, denn sonst stimmen die beiden Formeln nicht überein.

Aufgabe 6 (Das REYNOLDSsche Gedankenexperiment): Gegen Ende des 19. Jahrhunderts experimentierte der englische Strömungsforscher OSBORNE REYNOLDS mit einer horizontalen Glasröhre vom Durchmesser d, durch die er Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte ρ und unterschiedlicher Viskosität μ fließen ließ. Durch Experimente stellte er fest, dass die Druckänderung im Lauf des Glasrohres jeweils konstant war, also das dp/dx = const. galt, wobei p den Druck bezeichnet. Nun ist die Druckänderung ein Maß für den Widerstand der Flüssigkeit und REYNOLDS wollte eine formelmäßige Beziehung für diesen Widerstand finden. Da die Druckänderung von der Position x im Rohr unabhängig war, machte er den Ansatz

$$\frac{dp}{dx} = f(v, d, \rho, \mu) .$$

Lösung: Die Einheiten der beteiligten Größen sind

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = \frac{\frac{N}{m^2}}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot m^3} = \frac{kg}{s^2 \cdot m^2}, \quad [v] = \frac{m}{s}, [d] = m, \quad [\rho] = \frac{kg}{m^3}, \quad [\mu] = \frac{kg}{m \cdot s},$$

wobei die Einheit der Viskosität aus dem NEWTONschen Gesetz für die Scherspannung einer Fluidschicht zwischen zwei Platten folgt. Wir haben also drei Einheiten (kg, m, s) und fünf beteiligte Größen, so dass wir mit zwei dimensionslosen Größen rechnen können. Wegen

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = [v]^2 \cdot [d]^{-1} \cdot [\rho]$$

erhalten wir

$$\Pi := \frac{dp/dx}{v^2 \cdot d^{-1} \cdot \rho},$$

und wegen $[\mu] = [v] \cdot [d] \cdot [\rho]$ ergibt sich

$$\Pi_1 := \frac{\mu}{v \cdot d \cdot \rho}.$$

Damit haben wir $$\frac{dp}{dx} = v^2 \cdot d^{-1} \cdot \rho \cdot \Phi(\Pi_1) = v^2 \cdot d^{-1} \cdot \rho \cdot \Phi\left(\frac{\mu}{v \cdot d \cdot \rho}\right)$$

gewonnen. Damit ist die Druckänderung abhängig von der einen Größe $\frac{\mu}{v \cdot d \cdot \rho}$. Diese Größe stellte sich später in der Strömungsmechanik als so fundamental heraus, dass man den Quotienten $Re := \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu}$ die „REYNOLDS-Zahl“ nannte.

7. Vorschlag zur schulischen Einbindung der Dimensionsanalyse

Befragt man die KMK-Bildungsstandards für die Sekundarstufe I (KMK [6]), lassen sich doch einige der prozessbezogenen Kompetenzen in unseren aufgeführten Beispielen wieder finden. Immerhin vier der geforderten allgemeinen sechs mathematischen Kompetenzen sind abgedeckt. Zur Verdeutlichung:

- Mathematisch argumentieren
- Probleme mathematisch lösen
- Mathematisch modellieren
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

Solchermaßen ausgestattet verfügen die Schülerinnen und Schüler über eine solide Basis für den nachfolgenden Unterricht in der Sekundarstufe II. Die Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe (KMK [7]) beschreibt die grundlegenden Anforderungen an den Unterricht im mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Aufgabenfeld. Die Konkretisierung (KMK [8]) liegt als „Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik“ vor. Auch hier begegnet uns – bei der Festlegung der fachlichen Inhalte und Qualifikationen – die Modellierung ausdrücklich als eigene Leitidee.
Warum nun spielt die Dimensionsanalyse bisher praktisch keine Rolle im Schulalltag, wo sie doch offensichtlich im Einklang mit den intendierten Fähigkeiten und den fundamentalen Ideen steht?
Das Problem ist, sie liegt außerhalb der Schwerpunkte von Analysis, Linearer Algebra/Analytischer Geometrie und Stochastik, die als die drei zentralen Sachgebiete im schulischen Curriculum fungieren. Somit gehört die Dimensionsanalyse nicht zu den direkten fachlichen Inhalten, an denen die geforderten Kompetenzen praktisch aller Lehrpläne der Länder in der Abiturprüfung eingefordert werden sollen.

Wie kann die Dimensionsanalyse in den schulischen Unterricht integriert werden?

Ein pragmatischer Vorschlag muss da ansetzen, wo die Methode zur vertiefenden Behandlung vorgesehener zentraler Inhalte sinnvoll einsetzbar ist und sich, indem ihre Vorzüge klar zu Tage treten, nicht nur als Anhängsel erweist.

In der Sekundarstufe I passt dieses Verfahren gut in das Curriculum der Jahrgangsstufe 10. Hier eignen sich die Fälle, in denen der vereinfachte Zugang (siehe Fadenpendel, Domino, U-Rohr, Lehrsatz des PYTHAGORAS) zum Erreichen der Ergebnisse ausreicht.

- Anbindung an den Themenblock „Funktionen mit Potenzen“
- Einsatz im Bereich Potenzgesetze (n-te Wurzel, negative und gebrochene Exponenten)
- Besondere Hervorhebung des Aspekts „Modellieren zur Lösung realitätsnaher Probleme“

Dagegen ist die Matrixmethode in idealer Weise im Bereich der Sekundarstufe II anzuwenden.

- Anbindung an das Gebiet „Lineare Algebra“ als Vertiefung im Leistungskursfach
- Einsatz im möglichen Inhaltsstrang „Anwendung von Matrizen bei Abbildungen“

- Besondere Hervorhebung des Aspekts „Modellieren zur Lösung realitätsnaher Probleme“

Ist der glückliche Umstand gegeben, dass Ergänzungsunterricht oder ein AG-Angebot für interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler zur Verfügung stehen, kann die Thematik etwa in Jahrgangsstufe 10 als eigenständiges Projektthema durchgeführt werden.

Die vorgestellten Beispiele zeigen in besonderer Weise den Vernetzungsaspekt für die Gebiete Physik, Technik und Mathematik und die Nützlichkeit der Dimensionsanalyse als methodisches Werkzeug zur mathematischen Modellierung. Dabei geht es ohne Zweifel um eine vertiefte Beherrschung der ohnehin geforderten fachlichen Methoden und somit um einen deutlichen Kompetenzzuwachs. In diesem Sinn halten wir die skizzierte Umsetzung der Dimensionsanalyse für eine echte Bereicherung des Mathematikunterrichts.

8. Zusammenfassung

Wir haben einen Abriss der so genannten Dimensionsanalyse gegeben und zwei verschiedene Zugänge motiviert. Die Dimensionsanalyse ist ein wichtiges methodisches Werkzeug zur mathematischen Modellierung technischer und naturwissenschaftlicher Phänomene und wenn der Modellierer gar keine Idee mehr hat, dann hilft die Dimensionsanalyse trotzdem noch weiter. In unseren Augen verbindet dieses Gebiet Physik, Technik und Mathematik in sehr schöner Weise und lohnt einen tieferen Blick.

Wir müssen allerdings auch zugeben, dass das Gebiet der mathematischen Modellierung im Gegensatz zu anderen Gebieten der Mathematik über keine einheitliche Theoriebildung verfügt, wodurch sie Anfängern als undurchschaubar und schwer erlernbar erscheint. Sie wird – ganz wie im 19. Jahrhundert – nach wie vor durch das Durchrechnen zahlloser Beispiele erlernt. Allerdings lohnt sich dieser Zugang ganz besonders, denn wie „nebenbei“ kommt man immer wieder an schöner Mathematik vorbei und lernt so im „Vorbeigehen“.

Literatur

Barenblatt, G.I. [1]: Scaling. Cambridge University Press 2003

Barenblatt, G.I. [2]: Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics. Cambridge University Press, 1996

Buckingham, E. [3]: On Physically Similar Systems. Physical Reviews, vol.4, #2, 2nd series, p.345ff, 1914

Szirtes, Th. [4]: Applied Dimensional Analysis and Modeling. McGraw-Hill, 1998

Simony, K. [5]: Kulturgeschichte der Physik von den Anfängen bis heute. Verlag Harri Deutsch, 2001

KMK [6]: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss: KMK-Beschluss vom 4.12.2003 unter http://www.kmk.org

KMK [7]: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 07.07.1972 i.d.F. vom 16.06.2000

KMK [8]: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i.d.F. vom 24.05.2002 unter http://www.kmk.org

Prof. Dr. Thomas Sonar, StR Uwe Feyerabend, Tim Scharlau
Lehrerfortbildungszentrum „Mathe-Lok“
c/o Computational Mathematics
TU Braunschweig
Pockelsstrasse 14
D-38112 Braunschweig
t.sonar@tu-bs.de, uwe.feyerabend@t-online.de, t.scharlau@tu-bs.de