Karlhorst Meyer

Vorbereitungen zur Analysis[1]

FELIX KLEIN war es wohl, der veranlasste, dass in den so genannten Meraner Plänen um 1900 Infinitesimalrechnung für das Gymnasium in Europa vorgesehen wurde. Wie man weiß, ist dieser Unterricht auch heute noch umstritten. Vor allem den Mathematiker selbst stört es, dass im Rahmen dieses Unterrichts weder die reellen Zahlen noch das RIEMANNsche Integral oder ein anderes „sauber" definiert wird. Geht man noch eine Stufe tiefer, so ist durchaus auch zu bemängeln, wie unvollkommen nur über den Begriff der Funktion am Gymnasium gesprochen werden kann.

Immer wieder ist deshalb in Lehrbüchern zu beobachten, wie RIEMANNsche Integrale als Grenzwerte definiert werden oder gar der Versuch gemacht wird, den Begriff Funktion über eindeutige Relationen zu definieren; man hat dabei übersehen, dass die Probleme nur verschoben werden, da man eben nicht auf der Schule sagen kann, was eine Relation ist. Auch die Lehrbuchautoren sollten wissen, dass diese Definition bei HILBERT-ACKERMANN [1] ca. 68 Seiten umfasst und trotzdem nicht mehr als vollständig angesehen wird, weil BOURBAKI [1] auf 312 Druckseiten die Funktion zusammen mit dem Begriff Menge so ausführlich definiert hat, dass kaum noch jemand über diese lange Definition den Überblick wahren kann, geschweige so etwas in ein Schulbuch übernehmen kann. Da ist der Lehrer schon besser mit der Vorstellung des Mathematikers HURWITZ bedient, der gesagt haben soll, dass man als Lernender die richtige Vorstellung des Begriffs Funktion dadurch erhält, wenn man seitens eines Lehrers eine bestimmte Folge geeigneter Beispiele vorgeführt bekommt. Dieser Standpunkt soll im Folgenden leiten.

Es gibt aber auch Probleme in diesem Zusammenhang, die durch die historische Entwicklung des Gymnasiums während der vergangenen 50 Jahre verursacht worden sind. Analysis wurde irgendwann am Gymnasium zur Lehre der Kurvendiskussion, die allerdings auch nicht entsprechend den Anforderungen der Anwender gelehrt worden ist, wie sich in Kapitel 2 herausstellen wird. Unter Kurvendiskussion verstand man aber vor allem die Untersuchung gewisser Funktionen hinsichtlich der Errungenschaften der Analysis. Da aber Analysis mit der Grenzwertdefinition in der 11. Jahrgangsstufe erst beginnt, glaubte man alles, was mit Kurvendiskussion zusammenhängt erst ab Klasse 11 lehren zu dürfen. Dies führt unweigerlich zu einer Überfrachtung dieser Klasse, daran stört man sich aber nicht, weil man heute sein ganzes Augenmerk auf das *Entfrachten* des Mathematikunterrichts legt. Man zählt viele Möglichkeiten auf, was man alles in Vorklassen weglassen kann. Im Laufe der Zeit sind dann so wenige Funktionsbeispiele geblieben, dass man sich neuerdings durchaus mit Recht überlegt, ob es noch sinnvoll ist, am Gymnasium über Grenzwertbetrachtungen und Funktionen zu sprechen, da insbesondere bei letzteren die Beispielkette, an die wohl HURWITZ dachte, längst nicht mehr existiert.

Wer in diesem Gesamtbild als erster die Meinung vertreten hat, die reellen Zahlen gehören **deshalb** in die Jahrgangsstufe 9, entzieht sich meiner Kenntnis. Tatsache ist, dass man dort ohne Grenzwertdefinition versucht, über Intervallschachtelungen zu reden, quasi als Vervollständigung der Zahlengeraden der rationalen Zahlen. Man übersieht allerdings dabei, so weder zeigen zu können, dass man mit diesen Gebilden *rechnen* kann, noch dass die verwendete Darstellung der reellen Zahlen eindeutig ist (z. B. $0,\overline{9} = 1,\overline{0}$), was ebenfalls zu Verwirrungen führt. Es ginge ja noch an, wenn man in Klasse 11 die Lücken schließen würde; doch in dieser Klasse stellt man sich dann unverständlicherweise auf den Standpunkt, die reellen Zahlen existieren seit der 9. Klasse.

Der vorliegende Artikel versucht aufzuzeigen, wie der Funktionsbegriff am Gymnasium ab Klasse 5 präsent ist und geprägt werden kann. Es wird hierbei dokumentiert, dass es durchaus Sinn macht, am Gymnasium die Eingangsklasse in Mathematik von derselben Art Lehrer führen zu lassen, die die Analysis in der Oberstufe lehrt.

Es wird gezeigt, wie viele Bereiche der heutigen so genannten Kurvendiskussion sehr wohl vor der Klasse 11 etabliert sein können, ja müssen, um in der 11. Klasse die Schülerinnen und Schüler nicht zu überfordern.

Ein wichtiger Punkt wird sein zu zeigen, was Kurvendiskussion alles bedeuten kann.

[1] Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Arthur Krämer für viele Hinweise und Korrekturen.

Einleitend wird betont: Es soll niemand glauben, dass je ein Student das Rechnen mit Integralen in den die Vorlesung begleitenden Übungen innerhalb 4 Stunden gelernt hat, und mehr Unterrichtszeit steht hierzu an der Universität nicht zur Verfügung. Immer wieder konnte ich an der TU München feststellen – und das war sicher keine Eigenart bayerischer Studenten –, dass nur diejenigen Ingenieurstudenten, die dies auf der Schule lernten, ohne Probleme integrierten. Ob Computersoftware, also z. B. CAS (Computer Algebra Systeme), das Berechnen von Integralen in Zukunft ersetzen können, ist im Moment nicht entscheidbar, weil nicht zu klären ist, zu welchen „Denkmängeln" der alleinige unkritische Einsatz von CAS zukünftig führen wird (vgl. WETH [1]).

Das Folgende ist kein Curriculum für einen Ergänzungsunterricht. Es soll vielmehr dazu dienen, den Alltagsunterricht u. U. im Rahmen einer Binnendifferenzierung laufend zu vertiefen. Es ist daran gedacht, an manchen Stellen des Unterrichts dem gehobenen Drittel einer Gymnasialklasse gelegentlich eine Extrastunde zu geben.

Auf die im Unterricht übliche Vermittlung erster Grenzwertbeispiele wird in der vorliegenden Arbeit verzichtet, da das Normalcurriculum immer noch hinreichend viele davon bringt und davon ausgegangen werden kann, dass diese (wie etwa die Kreisrektifikation) in aller Breite gelehrt werden.

1. Extrema und Funktionen im Unterricht immer präsent

1.1 Jahrgangsstufe 5

1.1.1 Minimax-Aufgaben

Da heute der Unterricht bereits an der Grundschule neben Gleichungen auch Ungleichungen behandelt, kann man stets Aufgaben stellen, in denen nach einem größten oder kleinsten Element gefragt wird:

> *Aufgabe 1.1.1.1:* In einer Holzhandlung findet man Stangen der Längen 2,89m, 3,05m, 1,99m, 2,50m und 2,38m. Welche Stangenlänge ist die kleinste, welche die größte?

Es versteht sich von selbst, dass man diesen Aufgabentyp am Gymnasium schwieriger werden lässt:

> *Aufgabe 1.1.1.2:* Finde unter den im Folgenden gegebenen Längen ohne die Ausführung der angegebenen Rechenoperationen die größte und die kleinste: 0,9 m + 1,3 m; 0,9 m + 2,1 m; 0,9 m – 0,3 m; 0,6 m + 2,8 m; 1,1 m + 2,0 m
> Beschreibe deine Überlegung.

Schon im Rechenbereich der natürlichen Zahlen kann man Extremwertaufgaben lösen:

> *Aufgabe 1.1.1.3:* Gegeben sind Rechtecke mit gleichem Umfang U = 24 cm. Welche Kantenlängen hat das Rechteck mit dem größten (kleinsten) Flächeninhalt? Begründe dein Vorgehen.

> *Aufgabe 1.1.1.4:* Gegeben sind Rechtecke mit dem gleichen Flächeninhalt A = 36 cm^2. Bestimme das Rechteck mit dem größten (kleinsten) Umfang. Begründe dein Vorgehen.

Man kann vielleicht darauf hinweisen, dass für das Finden solcher Extrema die Anordnung der Zahlen entscheidend ist. Man kann aber in einer 5. Klasse nicht deutlich machen, welche Anordnungsaxiome benötigt werden, um ein größtes Element einer Menge festzulegen. Man grenzt deshalb durch Beispiele ab:

> *Aufgabe 1.1.1.5:* Welche Farbe ist die größte? Welche Farbe ist die schönste? Begründe.

Gerade am Gymnasium, vor allem in Lateinklassen wird man das größte Element einer Menge **Maximum** und das kleinste Element **Minimum** nennen.

1.1.2 Funktionsbegriff

Gerade die letzten Aufgaben lassen deutlich werden, dass in jedem Mathematikunterricht von Anfang an ein intuitiver Funktionsbegriff präsent ist, z. B.: Zu je zwei Seitenlängen eines Rechtecks gehört genau ein Umfang.

Um die Aufgaben 1.1.1.3 und 1.1.1.4 zu lösen, muss man jeweils die Vielzahl von zunächst zu betrachtenden Möglichkeiten in einer Tabelle zusammenstellen. Sicher wird man Schülerinnen und Schülern, die sich mit dem Vergleichen von Zahlen schwer tun, zeigen, wie man den Vergleich der Zahlen durch eine graphische Darstellung „anschaulicher" werden lässt. In MEYER U.A. [1] Kommentarband 6 findet man:

„Man vermutet einen Zusammenhang zwischen zwei Größen und möchte ihn unter Umständen vertieft erkennen. Eine Graphik gibt dann in der Regel einen besseren Ein- und Überblick als andere Darstellungsformen. Das ist wohl der Grund, weshalb Mathematiker und Anwender die graphische Darstellung bevorzugen. Um den Schüler frühzeitig die Vorteile dieser Darstellungsform erkennen zu lassen, beginnt man mit

1. **Wertetabellen**. Da wir schlecht über das Auge, noch schlechter über das Gehör, Zahlenkolonnen erfassen können, empfindet auch der Schüler die erste anschließende
2. **graphische Darstellung** als informativer."

Selbstverständlich muss dieser erste Einstieg in funktionale Zusammenhänge geübt werden. Es werden **Balken- und Strichdiagramme** u. U. anhand von Zahlenkolonnen aus der Presse und dem Geometrieunterricht (siehe oben) benutzt. Die folgenden Aufgaben sind MEYER U. A. [1] Band 5, Seite 19 ff entnommen:

Aufgabe 1.1.2.1: Die Ausfuhr der Bundesrepublik Deutschland in den Jahren 1983 bis 1988 kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

Jahr	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Ausfuhr (in Milliarden DM)	432	488	537	526	527	568

Wähle einen geeigneten Maßstab und zeichne den Zusammenhang sowohl als Strichdiagramm wie auch als Blockdiagramm.

Hinweis: Hier kommt durch die Maßstabssuche ein zusätzliches Problem: Einerseits muss der Schüler sich Minimum und Maximum der Ausfuhr beschaffen, bevor er sich Gedanken über den Maßstab macht. Andererseits kann er das Zeichnen nur bewältigen, wenn er Runden gelernt hat.
Man kann auch darauf hinweisen, dass häufig die Zahlenskala nicht bei null sondern irgendwo (wie bei der Zeitachse) oder beim Minimum (in der Musterlösung bei 1983) beginnt. Durch derartige Tricks kann ein Betrachter auch irre geführt werden. So sollte man es nicht versäumen, den Schülern eine Graphik vorzuführen, bei der die Ausfuhrachse beim Minimum der Ausfuhr beginnt. Weitere Aufgabenstellungen kann man der zitierten Literatur entnehmen.

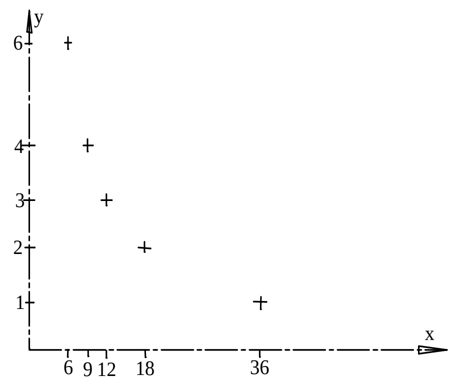
Bereits an dieser Stelle kann die Einführung von **Koordinaten** stehen:

Statt die zu vergleichenden Größen durch Balken u. ä. zu repräsentieren, genügt es, die einzelnen Zahlenwerte durch Sternchen zu fixieren, wie wir an einer Voruntersuchung zu Aufgabe 1.1.1.4 zeigen:

Da A = xy gilt, muss zunächst die Zahl 36 cm^2 in die Kantenlängen x und y zerlegt werden. Hierzu muss man systematisch vorgehen:

x	1	2	3	4	6
y	36	18	12	9	6

Die Tabelle zeigt einen Zusammenhang, der anschließend in einem Koordinatensystem dargestellt wird. Man bezeichnet zwar die Koordinatenachsen mit x und y, geht aber nicht weiter darauf ein. Einigen Schülern fällt auf, dass der **Maßstab** nicht auf beiden Achsen gleich gewählt worden ist. Man nimmt auch andere Maßstäbe und vergleicht die Ergebnisse, bzw. versucht das Wesentliche der Ergebnisse zu beschreiben.



Manche Schulbuchautoren sehen sich veranlasst, jede Koordinatenachse nur als Zahlengerade, also *benennungsfrei*, zu benutzen. Bei ihnen findet man dann z. B. an einer Achse, die eine Geschwindigkeit wiedergibt, den Zusatz $\frac{v}{km/h}$. Ich möchte darauf hinweisen, dass auch diese Überlegung noch als unvollständig angesehen werden muss, da ja grundsätzlich auf den Achsen nur Strecken gemessen und abgetragen werden können. Deshalb müsste eigentlich die Angabe $\frac{v}{km/h} \cdot cm$ heißen. Ich bin allerdings überzeugt, dass durch solche Spitzfindigkeiten nichts gewonnen wird. Schulbücher sollten sich hier den Gepflogenheiten der Anwenderpraxis anschließen, wo Geschwindigkeiten z. B. als km/h an den Achsen angegeben werden.

Rechenausdrücke heißen im Unterricht Terme. Bei der Untersuchung dieser Terme kommt dem Gliedern derselben ein hoher Stellenwert zu. Dabei zeigt sich, dass Terme aus Handlungsanweisungen aufgebaut sind, die man mit Worten beschreiben kann. In den Jahrgangsstufen 5 und 6 handelt es sich hierbei meist um die Verkettung der Grundrechenarten, die ja auch als (zweistellige) **Funktion** aufgefasst werden können. Aus den Formulierungen der Rechengesetze erfährt der Schüler **Formeln, d. h. Terme in Abhängigkeit von Variablen**. Die Unterscheidung von **Variablen** (Veränderlichen) und **Parametern** ist kontextabhängig. Deshalb wird ein Beherrschen dieser Begriffe durch den Schüler lange Zeit nicht erwartet. Doch werden diese Worte vom Lehrer exakt mit dem Ziel benutzt, der Schüler möge sie dann eines Tages richtig anwenden. Wertetabellen entstehen durch die Abhängigkeit der Termwerte von den Variablen im Term, wenn hierfür Zahlen eingesetzt werden. Die Wertetabellen führen erneut zu graphischen Darstellungen.

> *Aufgabe 1.1.2.2 :* Gegeben ist der Term $x \cdot x \cdot x + (-30\,x + 100)$.
> a) Gliedere diesen Term in Worten und zeichne die Gliederung als Baum.
> b) Finde durch geschicktes Einsetzen mit einer Tabelle ein x, für das der Term den Wert null bekommt.
> c) Stelle graphisch die Termwerte für verschiedene x dar.
> d) Welche Vorteile hat man, wenn man zuerst c) und dann b) löst?

Weitere Aufgabenbeispiele findet man in MEYER U. A. [1] Band 5, Seite 35ff.

Am Gymnasium ist wichtig, dass der Lehrer im Unterricht stets spätere Klassenziele vor Augen hat. Hinsichtlich des weiteren Ausbaus – etwa in Klasse 6 – ist wichtig, schon in Klasse 5 zu runden. Es ist hierbei nicht unwesentlich, auf welche Dezimale gerundet wird; genauer: Man muss stets angeben, auf welche Dezimale gerundet werden soll:

> *Aufgabe 1.1.2.3:* Runde die Zahl 3141 a) auf Einer (Welche Eigenart stellst du fest?),
> b) auf Zehner, c) auf Hunderter, d) auf Tausender, e) auf Zehntausender. f) Welche Besonderheit stellst du bei Aufgabe e) fest? Ist das immer so?

1.2 Jahrgangsstufe 6

Die Zahlengerade wird in Klasse 5 zur Darstellung der ganzen Zahlen benutzt. In Klasse 6 wird jetzt diese Einrichtung für rationale Zahlen herangezogen, wenigstens findet man einschlägige Hinweise in allen Lehrplänen. In Wirklichkeit nutzt man via Zahlengerade bereits die reelle Zahlenmenge, weil sie den Punkten der Zahlengeraden isomorph ist.

Wie man dies in einer 6. Klasse erklären kann, haben MEYER U. A. [1] Band 6 und KRÄMER, MEYER [1] gezeigt:

Nachdem festgestellt ist, dass es unendliche Dezimalbrüche gibt, die zwar zunächst als Quotient natürlicher Zahlen periodisch sind, ist die Existenz nicht periodischer Dezimalzahlen naheliegend. Man gibt auch Beispiele hierfür an z. B. 2,02002000200002..., wenn man „.....“ erklärt; hier liegt sicher keine periodische Zahl vor. Die Schüler können sich auch vorstellen, wo diese Zahl auf der Zahlengeraden ihren Platz hat: Mit jeder Dezimale wird der Zahlengeradenraum zwischen zwei Werten der vorangegangenen Dezimale in 10 gleiche Teile geteilt. Dieses Verfahren kann man offensichtlich immer wieder fortsetzen und damit sich dem oben gegebenen Wert **beliebig genau nähern**. Am Rande sei nur erwähnt, dass die Isomorphie der Menge der gemeinen Brüche mit der Menge der periodischen Dezimalzahlen (genannt Dezimalbrüche) am Gymnasium gezeigt werden muss. Hierbei sind die endlichen Dezimalzahlen periodisch mit der Periode 0.

Aufgabe 1.2.0.1: Gib die Zahl 0,2202002000200002... auf der Zahlengeraden auf vier Dezimalen hinter dem Komma genau an.

Aufgabe 1.2.0.2: Ordne die Zahlen 3,14; 3,15; 3,141...

Aufgabe 1.2.0.3: Kannst du die Zahlen 3,141 und 3,141.... anordnen? Welche Bedingung müssen Dezimalzahlen erfüllen, damit man sie anordnen kann? Überprüfe dies an den Zahlen 3,141.... und 3,14...

In Wirklichkeit hat man eine **Intervallschachtelung** konstruiert, ohne auf deren Eigenarten einzugehen. Der Schüler braucht auch dieses Wort nicht zu kennen; Hauptsache ist, dass er begreift, jede Dezimalzahl hat auf der Zahlengeraden ihren Platz und umgekehrt kann man jeder solchen Punkt eindeutig eine Dezimalzahl zuordnen. Man kann zwar die Dezimalzahlen mit ihren unendlich vielen Ziffern nicht schreiben, man muss an irgendeiner Dezimale abbrechen; das stört aber Schüler nicht, wenn man sagt, jede Dezimalzahl wird durch endliche Dezimalzahlen angenähert. Man deutet die weiteren, nicht angeschriebenen Dezimalen durch „...“ an und sagt, die Zahl ist beliebig genau anzugeben.

Alle Dezimalzahlen nennt man bereits in Klasse 6 **Menge R der reellen Zahlen**. Damit kann dieser Lehrplanpunkt in Klasse 9 entfallen. Der „primitivere“ Standpunkt, den man in Klasse 6 gegenüber der Klasse 9 einnehmen kann, hat jetzt den Vorteil, dass man durchaus in Klasse 6 die Summe (u. a.) zweier Dezimalzahlen beliebig genau angeben kann (siehe KRÄMER, MEYER [1]), auch wenn kein Grenzwert zur Verfügung steht.

1.2.1 Intervalle

MEYER U. A. [1] Band 6 haben Intervalle im Zusammenhang mit dem Runden von Dezimalzahlen eingeführt. Offenbar gibt es viele Dezimalzahlen, die gerundet denselben Dezimalbruch ergeben.

Aufgabe 1.2.1.1: Runde die folgenden Zahlen auf Tausendstel: 3,1416...; 3,1417...; 3,1418...; 3,1419..; 3,1420...; 3,1421...; 3,1422...; 3,1423...; 3,1424...; 3,1425...; 3,141....;
Welche Dezimale muss man kennen, um eine Dezimalzahl auf Tausendstel runden zu können?

Aufgabe 1.2.1.2: Begründe: Wie genau ist dein Winkelmesser?

Aufgabe 1.2.1.2 kehrt bereits die Situation um: Zu einer gerundeten Zahl gehören viele Dezimalzahlen, die man durch eine Doppelungleichung festlegen kann:

Aufgabe 1.2.1.3: Welche Dezimalzahlen gehören zu der gerundeten Zahl 3,142?

Es muss hier nicht weiter ausgebaut werden, dass Runden nicht nur im Bereich der Dezimalen ein wichtiges Unterfangen ist: Man kann Zeiten im 60er-System u. a. runden, man kann auch Geldwerte auf 20 ct usw. runden.

Das Runden führt zu halboffenen Intervallen auf der Zahlengeraden. Man erweitert die gefundene Begriffsbildung und definiert die Intervalle als die folgenden Mengen:

Definition: $\{x: a \le x \le b\} = [a;b]$ heißt abgeschlossenes Intervall,
$\{x: a < x \le b\} =]a;b]$ heißt (links) halboffenes Intervall,
$\{x: a \le x < b\} = [a;b[$ heißt (rechts) halboffenes Intervall,
$\{x: a < x < b\} =]a;b[$ heißt offenes Intervall.

Satz: Zu einer gerundeten Zahl gehört ein (rechts) halboffenes Intervall.

Definition: M sei eine Menge aus Zahlen. Gilt $a \le x$ für alle $x \in M$, so heißt a eine **untere Schranke** für M; entsprechend wird die **obere Schranke** einer Menge definiert.

Aufgabe 1.2.1.4: Hat man eine untere Schranke a und eine obere Schranke b für eine Zahlenmenge M gefunden, so gibt es weitere untere und obere Schranken. Gib alle an.

Offenbar gibt es viele Schranken, wenn es eine solche gibt.

Man bringt jetzt diese Intervalle in Verbindung mit früher Gelehrtem: Beim abgeschlossenen Intervall sind die Grenzen a und b für den Wert x **Minimum** bzw. **Maximum**; bei allen anderen gibt es Grenzen, die nicht zur Menge der Werte im Intervall gehören. Es handelt sich hierbei um kleinste obere bzw. größte untere Schranken.

Definition: Die kleinste obere Schranke einer Menge M heißt **Supremum** von M, i. Z. sup M; die größte obere Schranke einer Menge M heißt **Infimum** von M, i. Z. inf M.

Aufgabe 1.2.1.5: Gib jeweils Infimum und Supremum für die verschiedenen Arten von Intervallen an.

Aufgabe 1.2.1.6: Wann ist ein Supremum Maximum einer Menge, wann ein Infimum Minimum?

Aufgabe 1.2.1.7: Gib Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Zahlmengen an:
a) Menge der natürlichen Zahlen N b) Menge der ganzen Zahlen c) Menge der rationalen Zahlen
d) $\{\frac{1}{n} : n \in N\}$ e) $\{1 - \frac{1}{n} : n \in N\}$ f) $\{1 + \frac{1}{n} : n \in N\}$
g) $\{3x - 7 : x \in [4;6]\}$

Eine weitere Anwendungskette dieser Begriffe bekommt man, wenn man in Anlehnung zu MEYER U. A. [1] Band 6 den Begriff der technischen Toleranz ins Spiel bringt:

Definition: In der Technik bedeutet z. B. 3,4 mm ± 0,1 mm, dass ein Maß in mm gemessen im Intervall [3,3; 3,5] liegen muss.

Auch relative und absolute Fehler geben bereits in einer gymnasialen Klasse 6 Anlass, sich über die Addition bzw. Multiplikation von Fehler behafteten Zahlen Gedanken zu machen. Bei Subtraktion und Addition solcher addieren sich die Fehler; bei der Multiplikation und Division von fehlerbehafteten Zahlen ist die Fehlerbestimmung vom Produkt bzw. Quotienten schwieriger, weshalb man eine Faustregel benutzt:

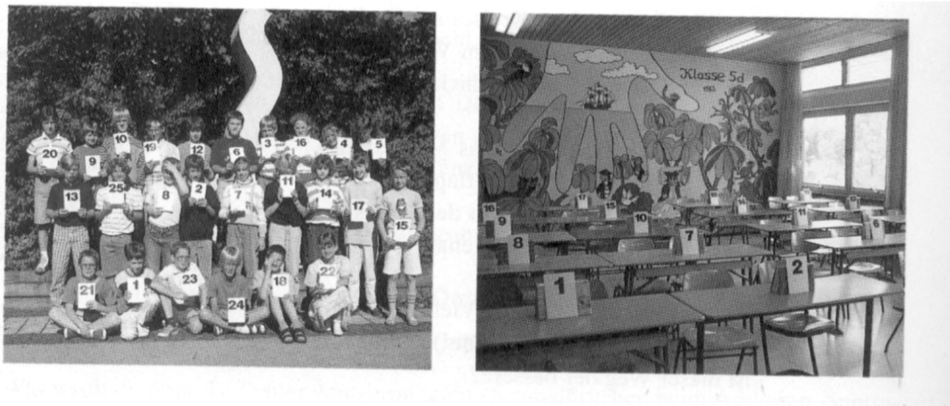
Vereinbarung: Es werden nur Zahlen addiert und subtrahiert, die dieselbe Genauigkeit haben, u. U. erzwingt man diese.
Zwei endliche Dezimalzahlen werden multipliziert, indem man die Zahlen ihrer Ziffernfolgen ohne Beachtung des Kommas multipliziert. Anschließend wird das Komma so gesetzt, dass das Produkt so viele Ziffern hinter dem Komma hat, wie beide Faktoren zusammen haben.
Bei der Division zweier endlicher Dezimalzahlen verwandelt man den Quotienten in einen solchen aus natürlichen Zahlen, führt den Divisionsalgorithmus aus und setzt das Komma, sobald man beim Dividenden das (nicht vorhandene) Komma überschreitet.
Hinsichtlich der Genauigkeit bei Multitplikation und Division wird vereinbart: Das Ergebnis kann nicht genauer als die ungenaueste beteiligte Zahl sein.

Die Richtigkeit dieser Vereinbarungen kann man an Beispielen überprüfen. Die oben eingeführten Begriffe spielen in der Praxis eine Rolle, wie das folgende Beispiel zeigt:

Aufgabe1.2.1.8: In einem Hafen werden 8600 t Kohle in Güterwagen umgeladen. Jeder Güterwagen fasst 24,5 t. Je 46 Güterwagen werden zu einem Zug zusammengestellt. Wie viele Züge bekommt man? Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man berücksichtigt, dass die Umladevorrichtung nur bis auf ± 0,5 t genau geht?

1.2.2 Funktionen auf dem Kontinuum: Beispiele und Gegenbeispiele

Diese Überschrift für Inhalte einer 6. Klasse mag überraschen; trotzdem werden die folgenden Beispiele zeigen, dass sie durchaus Themenstellungen für diese Klasse sind. Wie in MEYER U. A. [1] Band 6 wird zunächst einmal die folgende Paarbildung im Zusammenhang mit einer Zuordnung untersucht: Gegeben ist ein Klassenfoto, auf dem jedes Kind eine Nummer trägt. Dann hat man ein zweites Foto, auf dem die Tische der Klasse mit Nummern zu sehen sind. Die Zuordnung $x \rightarrow y$, die untersucht wird, besteht darin, dass jedes Kind x seinen festen Sitzplatz y hat. Es entsteht eine Menge aus **geordneten Paaren** $(x \mid y)$. Diese Paarung wird auf verschiedene Weisen dargestellt:



Aufgabe 1.2.2.1: Das linke Foto zeigt die Schüler einer Klasse. Jeder Schüler hat eine Nummer. Das rechte Foto zeigt die nummerierten Tische des Klassenzimmers. Jeder Schüler sitzt an einem Tisch.
a) Führe Pfeile zwischen jedem Kind und seinem Platz. Erfinde eine Zuordnung.
b) Die Nummern der Kinder auf einer Zahlengeraden werden durch Pfeile mit den dazugehörigen Nummern der Tische auf einer zweiten Zahlengeraden verbunden. Erfinde einen Zusammenhang; berücksichtige 2 Kinder, die gelegentlich an verschiedenen Tischen sitzen.
c) Man kann den Zusammenhang von b) durch Angabe der Menge der Paare $(x \mid y)$ darstellen.
d) Man kann in ein Koordinatensystem die Schülernummern gegen die Tischnummern eintragen und den Zusammenhang von b) durch Kreuze darstellen.
e) Letzteres stellt sich auch durch Angabe einer Wertetabelle dar. Fertige diese.

a) wirkt sehr unübersichtlich; b) ist schon besser, aber immer noch ein Gewirr; c) und e) stellen sich schön dar, man kann aber nicht allzu viel mit den Augen erkennen. Die Darstellung d) dürfte hier die größte Information „auf einen Blick“ vermitteln.

In allen Fällen kann man sehr einprägsam auseinander setzen, was der Mathematiker jetzt unter einer **eindeutigen Zuordnung** versteht. Wenn jedes Kind der Klasse *einen* festen Sitzplatz im Klassenzimmer hat, ist die Zuordnung eindeutig. Wenn aber ein Kind in der Klasse ist, das einmal hier und einmal dort sitzt, dann ist die Anordnung nicht mehr eindeutig.

Zwischenwerte in den Darstellungen a) und b) sind offenbar sinnlos. Das muss bei Zuordnungen nicht immer so sein:

Aufgabe 1.2.2.2: Ein Temperaturschreiber in einem Wetterhäuschen zeichnet eine kontinuierliche Kurve, obwohl die Temperatur nur alle 5 Minuten gemessen wird. Weshalb ist das zulässig?

Aufgabe 1.2.2.3: Tommy sieht am Zugfenster alle 9 s ein Markierungsschild der Eisenbahn vorbeiflitzen. An der Aufschrift liest er ab, dass alle 200 m ein Schild am Bahnkörper steht. Er schließt daraus die folgende Zuodnung:

Weg s (in m)	100	150	200	400	600
Zeit t (in s)	4,5	6,75	9	18	27

a) Wie erhält er die Zahlen und in welcher Reihenfolge hat er sie wohl berechnet?
b) Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit Tommy Recht hat?
c) In 500 m beginnt eine Steigung; ist dann die Berechnung von Tommy für eine Entfernung 600 m richtig? Hätte er weitere Zwischenwerte berechnen können?

Sicher kann es sich bei den bisher vorgeführten Erfahrungen nur um Einstiegsbeispiele handeln, die in den Folgeklassen aufgegriffen werden müssen, um allmählich ein *Gefühl für das Kontinuum* beim Schüler zu erzeugen. Fehlen aber solche Voruntersuchungen – wie leider heute häufig zu beobachten – völlig, so ist das mit ein Grund, weshalb so mancher Lehrer zu Beginn der Oberstufe scheinbar unüberwindbare Probleme bekommt und so manche Schülerin oder so mancher Schüler nie begreifen, was Epsilontik in der Oberstufe eigentlich will.

Wir sind also mitten im Kapitel über direkte und indirekte Proportionalität bzw. der Schlussrechnung (auch Dreisatz genannt). Man sollte sich als Lehrer die Zeit nehmen, beides zu unterrichten. Man darf nur nicht vergessen, dass zwei Größen nur proportional oder umgekehrt proportional sind, wenn es eine *dritte* Größe gibt, die konstant bleibt. Man darf aber auch nicht vergessen, immer wieder darauf hinzuweisen, dass diese Konstanz i. Allg. nur *innerhalb gewisser Grenzen*, also in einem Intervall, Gültigkeit hat. Das ist gerade für moderne Naturwissenschaften ein unerlässlicher Punkt.

Aufgabe 1.2.2.4: Franziska liest im Supermarkt: 1 kg Äpfel kostet 2,40 €.
a) Berechne, was 3 kg dieser Äpfel kosten.
b) Wie viele Äpfel bekommt Franziska für 4,00 €?
c) Eine Steige Äpfel enthält 10 kg. Weshalb hat Franziska nicht Recht, wenn sie glaubt, die Steige Äpfel um 24 € zu bekommen?
d) Franziska erfragt im Supermarkt den Einkaufspreis der Äpfel für die Filiale und erfährt, dass man 1 kg um 1,10 € erhalten hat. Fanziska weiß, dass die Firma Supermarkt für all ihre Läden einen Güterwaggon Äpfel mit ca. 15 t Inhalt erwirbt. Sie rechnet sich mit Hilfe des erfahrenen Einkaufspreises aus, was der Gesamteinkauf gekostet hat. Weshalb hat sie nicht Recht?

Das Ganze kann noch ein wenig naturwissenschaftlicher geschehen, wenn man im Mathematikunterricht bereit ist, ein Experiment samt den Grenzlagen für das HOOKEsche Dehnungsgesetz mit einem Kupferdraht vorzuführen, weil dann Messungen zeigen, dass dieses Gesetz nur in kleinen Intervallen gilt und zwischen diesen Intervallen der Draht irreversibel „fließt“. Man trägt hierzu den Zusammenhang dehnende Kraft → Dehnungslänge in ein Koordinatensystem ein und muss durch die Messpunkte – die Messwerte ausgleichend – eine Gerade eintragen usw. Unwichtig erscheint mir an dieser Stelle darauf zu sprechen zu kommen, dass das Auge auf diese Weise die Gerade so gelegt hat, dass sich die Abstandssumme zu den Messpunkten links und rechts nahezu aufhebt.

Ich halte derartige Erfahrungen, dass eine gesetzmäßige Zuordnung nur idealisiert zu Stande kommt und darüber hinaus nur innerhalb gewisser Grenzen gültig ist, für sehr wichtig. Man kann damit nicht früh genug beginnen, um ein für heutige Zeiten richtiges naturwissenschaftliches Verständnis zu erzeugen. Und das ist auch Aufgabe für den Mathematikunterricht, auch in der gymnasialen Unterstufe.

1.3 Jahrgangsstufe 7

1.3.1 Abbildung und Funktion

Das Entstehen-lassen eines Funktionsbegriffs wird in Klasse 7 im Geometrieunterricht fortgesetzt. Man will zwar heute nicht mehr so viel über Spiegelungen sprechen, doch sollte man auch hier nicht umhinkommen, die Zuordnungsvorschrift herauszuarbeiten, vor allem deshalb, weil ganz unterschiedliche Zuordnungsvorschriften für dieselbe Abbildung, z. B. eine Spiegelung, zu Stande kommen:

Anweisung:
Zeichnet man eine Figur auf ein Blatt mit einer Geraden, faltet das Blatt längs der Geraden und überträgt die Figur auf die andere Blatthälfte, so sagt man, man habe die Figur gespiegelt.

Aufgabe 1.3.1.1: Ermittle eine Konstruktionsvorschrift, wie du die Anweisung mit dem rechten Winkel des Geodreiecks und Abstandsmessungen realisieren kannst.

Aufgabe 1.3.1.2: Ermittle eine zweite Konstruktionsvorschrift, wie du allein durch Winkelmessungen die Anweisung verwirklichen kannst.

Unterschiedliche Handlungsanweisungen führen also u. U. zur selben Zuordnung. Ist das eine Besonderheit der Geometrie? Sicher nicht, wie das folgende algebraische Beispiel zeigt:

Aufgabe 1.3.1.3: Zeige, dass die beiden algebraischen Zuordnungsvorschriften gleichwertig sind:
$y = (a + b)^2$ und $y = a^2 + 2ab + b^2$

Weitere Aufgaben hierzu werden durch die folgende Aufgabe initiiert:

Aufgabe 1.3.1.4: Weshalb handelt es sich bei den folgenden beiden Zuordnungsvorschriften um dieselbe Zuordnung?
Die Geraden a und b schneiden sich im Punkt P. Spiegle zuerst an a und dann an b.

Drehe um $a \cap b$ um den zweifachen Winkel, unter dem sich a und b schneiden, den Punkt $P \neq a \cap b$ in Richtung von a nach b.

Man möge beachten: Obwohl der Schüler die Realisierung der Zuordnungsvorschriften immer nur an Figuren, also Teilen der Zeichenebene durchführt, gelten die Vorschriften in der ganzen Zeichenebene, wenn es keine Einschränkungen gibt.

Aufgabe 1.3.1.5: Eine waagrechte Gerade g teilt die Zeichenebene in zwei Hälften, einen oberen und einen unteren Bereich. Die Punkte der oberen Hälfte werden im Uhrzeigersinn um 90^o um einen Punkt P auf g gedreht. Wo liegen dann die gedrehten Punkte? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 1.3.1.6: Zeichne ein Quadrat ABCD samt Diagonale AC. Spiegle das Dreieck ABC um AC.

Aufgabe 1.3.1.7: Addiere zu allen Zahlen von [3; 5[die Zahl 2,1 und gib das Ergebnis als Intervall und mit Ungleichungen an.

Aufgabe 1.3.1.8: Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift: $x \to \pm x$ für alle $x \in \mathbf{R}$. Beschreibe die Bildmenge. Weshalb ist die Zuordnung nicht eindeutig?

Aufgabe 1.3.1.9: Es gibt so genannte Grundfarben: rot, gelb, blau. Manche Farben ergeben sich als eins zu eins Mischungen aus zwei dieser Grundfarben. Wie viele solche Mischungen gibt es? Begründe, ob die Zuordnung: Paare aus Grundfarben $\to$ Mischfarben eindeutig ist.

Definition: Gleichwertige Zuordnungsvorschriften nennt man äquivalent.

Die Darstellung von Zahlenpaaren wird weiter z. B. zu Nomogrammen und weiteren „Wertetabellen“ ausgebaut. Es zeigt sich, dass nicht alle Darstellungsmöglichkeiten gleichwertig sind. So ist z. B. zunächst eine Koordinatendarstellung einer Wertetabelle nur gleichwertig, wenn die Koordinatendarstellung eine Punktfolge ist. Verbindet man aber die gefundenen Punkte durch eine Kurve, so erhält man eine Darstelllungsform einer Zuordnung, die man in einer Wertetabelle nicht mehr zum Ausdruck bringen kann, weil man hier nicht mehr *alle* Zwischenwerte angeben kann. Umgekehrt gibt es wie oben bereits gezeigt auch Zuordnungen, die die Bildung von Zwischenwerten nicht mehr zulassen:

Aufgabe 1.3.1.10: Wer lange telefoniert, zahlt mehr als ein anderer, der nur kurze Zeit telefoniert. Die Telefongebühr ist also zeitabhängig. Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Minute kostet 0,1 €. Telefoniert man weniger als 1 Minute, so kostet das Gespräch auch 0,1 €. Man sagt, jede angebrochene Minute kostet 0,1 €. Stelle eine Wertetabelle auf für Telefongespräche der Länge 1 bis 10 Minuten und zeichne einen dazugehörigen Graphen. Ist die Zuordnung Zeit $\to$ Telefongebühr eindeutig?

Definition: Ist eine Zuordnung $x \to y$ eindeutig, d. h. zu jedem x gehört genau ein y, dann heißt die Zuordnung **Funktion** oder **Abbildung**. Die Tradition der Mathematik legt fest, wann man eine eindeutige Zuordnung Funktion, wann Abbildung nennt.

Aufgabe 1.3.1.11: Untersuche die bisher kennen gelernten Zuordnungen auf Eindeutigkeit.

In der Geometrie nennt man die Funktionen in aller Regel Abbildungen.

Aufgabe 1.3.1.12: Oben haben wir bereits festgestellt, dass das nacheinander Ausführen zweier Spiegelungen eine Drehung, also eine neue Abbildung, ist. Begründe, wann das nacheinander Ausführen von zwei Funktionen wieder eine Funktion ergibt.

Der Geometrieunterricht der Klasse 7 benutzt vor allem im Bereich der Kongruenzen solche Mehrfachspiegelungen, auch wenn der dazugehörige Hintergrund nur sehr selten gelehrt wird:

Definition: E sei die Zeichenebene, S_a eine Spiegelung der Zeichenebene an der Geraden a. Man nennt dann die folgende Gesamtabbildung G eine Mehrfachspiegelung oder Bewegung, wenn gilt:

$$E \xrightarrow{S_a} E \xrightarrow{S_b} E \xrightarrow{S_c} E \to \dots\dots\dots \xrightarrow{S_z} E$$ und schreibt $G = S_z \dots\dots S_c S_b S_a$

Aufgabe 1.3.1.13: Die horizontale Gerade g teilt die Zeichenebene in zwei Halbebenen. Untersuche, ob die folgende Zuordnungsvorschrift zu einer Abbildung führt:
Die obere Halbebene bleibt punktweise fest, während die Punkte der unteren Halbebene an g gespiegelt werden.

Aufgabe 1.3.1.14: Betrachtet man sich in einem Zerrspiegel, dann sieht man sich entweder viel zu dünn oder aber auch viel zu dick usw. Begründe: Entsteht das Bild eines Zerrspiegels durch eine Abbildung oder nicht?

In der Geometrie hat man häufig Abbildungen A, zu denen es eine andere Abbildung B so gibt, dass diese die Abbildung A rückgängig macht. Man nennt deshalb die Abbildung B die **Umkehrabbildung** zu A und schreibt $B = A^{-1}$. Manche nennen B auch die zu A **inverse Abbildung**.

Aufgabe 1.3.1.15: Suche zu den folgenden Abbildungen die dazugehörigen Umkehrabbildungen:
a) Spiegelung S_a b) Doppelspiegelung S_bS_a c) Dreifachspiegelung $S_cS_bS_a$
d) Drehung um P um α e) Verschiebung t längs der Geraden g um die Länge a
f) Schubspiegelung g) Spiegle an drei Geraden a, b und c (in dieser Reihenfolge), wenn die drei Geraden ein Dreieck bilden. Wenn der so genannte Dreispiegelungssatz bekannt ist, kann man die entstehende Gesamtabbildung auch anders beschreiben?

Definition: Eine Abbildung, die nur aus Fixpunkten besteht, nennt man **identische Abbildung**, i. Z. „id“.

Aufgabe 1.3.1.16: Benutze den Begriff der identischen Abbildung bei Aufgabe 1.3.1.15.

Aufgabe 1.3.1.17: Finde zu Aufgabe 1.3.1.13 die Umkehrabbildung. Begründe.

Man kann jetzt einen für die Schule wichtigen Begriff prägen:

Definition: Zwei Figuren heißen kongruent, wenn es eine Bewegung gibt, die eine Figur in die andere durch eine Bewegung überführt.

Im Algebraunterricht der Klasse 7 findet man eine weitere wichtige Funktion, den Betrag $|a|$ von a:

Definition: Abstände sind stets positiv. Der Abstand einer Zahl a zu null auf der Zahlengeraden sei $|a|$. D. h. $|a| = \begin{cases} -a \text{ für a kleiner als null} \\ a \text{ für a größer oder gleich null} \end{cases}$

Aufgabe 1.3.1.18: Berechne $|3-4|$, $|a-b|$, $|3-x| = 2$, $|x-3| = 2$, $|x-3| < 2$, $|x-3| > 2$; schreibe die Lösungen der beiden letzteren Fälle mit Hilfe von Ungleichungen.

Aufgabe 1.3.1.19: Welche ganzen Zahlen haben auf der Zahlengeraden
a) von 5 höchstens den Abstand 2; b) von 2,5 höchstens den Abstand 4;
c) von – 2,5 mindestens den Abstand 3,5; d) von 9 mindestens den Abstand 6,5.

Aufgabe 1.3.1.20: Löse die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:
a) $3|-2{,}44+x| = 6$ b) $-3|-2{,}44+x| = 6$ c) $-3|-2{,}44+x| < 6$ d) $-3|-2{,}44+x| > 6$
e) $|3-x||2+x| = 0$ f) $|3-x||2+x| > 0$ g) $|3-x||2+x| < 0$ h) $x|x-3| > 0$
i) $|x| + 3 > 7 + 2|x|$

1.4 Jahrgangsstufe 8

Mittlerweile spielt Raumgeometrie im Unterricht eine Rolle; man sollte hierbei nicht versäumen darauf hinzuweisen, dass die Darstellungen räumlicher Konfigurationen Abbildungen sind. In aller Regel wird zunächst nur die Parallelprojektion insbesondere die orthogonale benutzt. Solche Abbildungen des $\mathbf{R}^3$ auf den $\mathbf{R}^2$ sind nicht mehr umkehrbare Funktionen.

1.4.1 Erstes Abstrahieren des Funktionsbegriffs

Offenbar handelt es sich bei den Zuordnungen $x \to y$ mit $y = 2x - 1$ und $x \in [-1; 3]$ oder $x \in \mathbf{R}$ nicht um die gleichen Funktionen. Aus diesem Grund reicht es nicht, nur die Zuordnungsvorschrift anzugeben, sondern man muss auch sagen, aus welchem Bereich die Veränderliche x zu wählen ist.

Es ist sicher auch nicht gleichgültig, wohin man zuordnet. Ein einfaches Beispiel: In einer Produktion gibt es Hosen, die verschieden sind, je nachdem sie für eine Frau oder für einen Mann gefertigt werden. Die folgende Funktion {Hosenproduktion} $\to$ {weiblich, männlich} ist sicher nicht dieselbe, wie wenn man z. B. bei einer Computererfassung weiblich durch 1 und männlich durch – 1 bezeichnet. Aus diesem Grund gehört zur Definition einer Funktion auch die Angabe der Menge, in die man abbildet.

> **Definition:** Zu einer Funktion oder Abbildung gehört die Angabe
> a) einer eindeutigen Zuordnungsvorschrift,
> b) der abzubildenden Menge, die man Definitionsmenge (oder Definitionsbereich) nennt, und
> c) der Menge, in die abgebildet wird, genannt Wertemenge (oder Wertebereich).

Man wird jedenfalls den zweiten Anlauf beim Begriff Funktion auf den bisher bereits kennen gelernten eindeutigen Zuordnungen aufbauen und dann erst durch zusätzliche Beispiele erweitern. Man sollte hierbei bereits in Jahrgangsstufe 8 nicht die folgenden Klassen vergessen, da zu häufig – auf Grund der zu vermittelnden Techniken – allzu leicht der Eindruck entsteht, als habe der Begriff vor allem mit den Punkten der Geometrie bzw. den Zahlen der Algebra zu tun. Die Stärke der Mathematik liegt aber vor allem darin, dass eine solche Einschränkung nicht besteht. Man sollte die folgenden Beispielgruppen spätestens im Unterricht der Klasse 8 (vgl. MEYER U.A. [1] Kommentarband 6) ansprechen:

1.4.1.1: Funktionieren und Funktion in der Umgangssprache:

> *Aufgabe 1.4.1.1:* Ist es im Sinne der Mathematik richtig, wenn man sagt: „Das Getriebe meines Autos funktioniert.“ Was meint man damit? Finde ähnliche umgangssprachliche Feststellungen.

1.4.1.2: Es gibt Funktionen, die – u. U. zunächst nur – nicht durch Zahlen erfasst werden können:

> *Aufgabe 1.4.1.2:* Das Wetter der Erde ist eine Funktion vom Geschehen im Weltall.

1.4.1.3: Es gibt Funktionen, bei denen nur Definitions- oder Wertemenge durch Zahlen erfasst werden können:

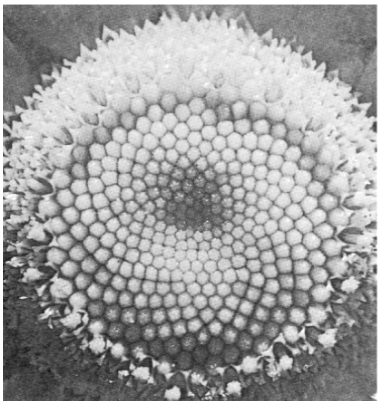
> *Aufgabe 1.4.1.3:* Untersuche, ob es sich bei dem Folgenden um Funktionen handelt:
> a) Jedes Lebewesen hat Längenmaße. Die Anzahl der Verkehrstoten in Oberbayern ist eine Funktion des Föhns.
> b) Die Funkstörungen auf der Erde sind abhängig von der Anzahl der Sonnenflecken.

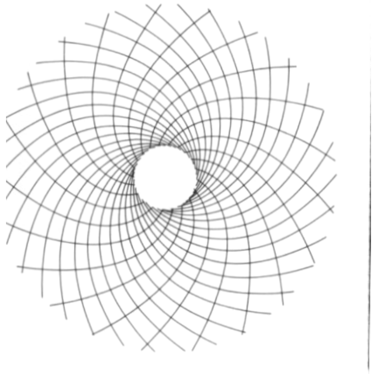
1.4.1.4: Es gibt Funktionen mit Definitions- und Wertemenge aus Zahlen, deren eindeutige Zuordnungsvorschrift aber nicht als algebraischer Term geschrieben werden kann, weil man z. B. den Zusammenhang noch nicht genau analysieren kann:

> *Aufgabe 1.4.1.4:* a) Es gibt nur endlich viele Gene, die man nummerieren kann. Die Erbanlagen setzen sich aus den Genen zusammen, können demzufolge auch durch Nummern erfasst werden. Untersuche ob die folgende Ausdrucksweise mathematisch ist: Die Erbanlagen eines Kindes sind eine Funktion der Erbanlagen seiner Eltern. Ist das richtig?
> b) In einer Galerie werden Hygrometer aufgestellt, die in Abhängigkeit der Zeit die vorhandene Luftfeuchtigkeit in einem Koordinatensystem aufzeichnen. So ist zu jeder Zeit eine Luftfeuchtigkeit zugeordnet; trotzdem kennt man keinen „formelmäßigen“ Zusammenhang. Handelt es sich trotzdem um eine Funktion?

1.4.1.5: Es ist also in Wirklichkeit ein Glücksfall, wenn man Zahlenmengen durch eine Zuordnung bei einer Funktion verbindet, die durch einen algebraischen Term wiedergegeben wird. Da es im Unterricht vor allem ums Rechnen geht, wird man sich im Folgenden vor allem mit diesem letzten Fall beschäftigen.

1.4.1.6: Bei vielen Beispielen zu 1.4.1.5 gibt man Definitions- und Wertemengen zwar durch Zahlen an und arbeitet mit einem Term (oder mehreren) zur Darstellung der eindeutigen Zuordnungsvorschrift, aber dies alles ist nicht exakt richtig, weil man – und das ist in der Anwendung sehr häufig – das Zahlenmaterial und die Algebra nur näherungsweise ins Spiel bringt. Aus MEYER U. A. [1] Algebra 8 ist das folgende Beispiel:





Aufgabe 1.4.1.5: Untersuche, ob es sich beim folgenden Beispiel um eine Funktion handelt und gib an, mit welchen Mitteln in welchen Grenzen solche Aussagen noch anerkannt werden können:
Die Blüten im Körbchen der meisten Gänseblümchen sind in Spiralen angeordent (siehe die Abbildungen): 21 Spiralen im Uhrzeigersinn und 34 entgegengesetzt. Auch Schuppen von Kiefernzapfen 5 in der einen, 8 in der anderen Richtung und die Hochblätterenden der Frucht Ananas (8 und 13) besitzen ähnliche Spiralen.
Diese Zahlen sind bereits von dem Mathematiker LEONARDO DA PISA, genannt FIBONACCI, um 1250 n. Chr. mittels einer *Funktion* f gefunden worden:
$f(1) = 1$; $f(2) = 1$; $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ für $n \in \mathbf{N}\backslash\{1; 2\}$
Man nennt eine so definierte Funktion, bei der alle weiteren Funktionswerte erst aus vorangegangenen Werten ermittelt werden können, eine *rekursiv definierte Funktion.*

Hierher gehören auch Beispiele, die zunächst gar keine Funktionen sind, die aber dann doch durch Funktionen recht gut beschrieben werden können:

Aufgabe 1.4.1.6: Wie kann man den folgenden Fall (aus MEYER U. A. [1] Algebra 8) gut durch eine Funktion beschreiben:
Eine Geschäftsfrau stellt den folgenden Zusammenhang zwischen der Zahl x der gefertigten Produkte und die dadurch entstandenen Geschäftskosten $y = g(x)$ fest:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	4	5	8	10	10	12	10	10	8	5	3	1
y in 1000 €	32	36	54	62	63	72	61	60	51	37	28	17

Wie würde sich die Geschäftsfrau verhalten, wenn im Mai der „Ausreißer“ 83 stehen würde? Was könnte als Ursache für den Ausreißer genannt werden?

Für weitere Beispiele wird auf MEYER U. A. [1] Algebra 8 verwiesen.

Hat man Definitions- und Wertemenge als Zahlenmengen und ein algebraischer Term verbindet beide, so ist die damit zu beschreibende Funktion bereits durch Term und Definitionsmenge festgelegt.

1.4.2 Die lineare Gleichung

Hier kann man sich sehr kurz fassen, weil der „Normalunterricht“ diesen Punkt in aller Regel erfasst. Es muss nur darauf hingewiesen werden, dass sehr häufig der Graph zu $y = mx$ für $x \in$ | „vom Himmel fällt“, was nicht sein muss, auch wenn der Strahlensatz (auch Vierstreckensatz genannt) noch nicht zur Verfügung steht (siehe MEYER U. A. [1] Algebra 8). Es versteht sich auch von selbst, dass jetzt schon in der Klasse 8 die so genannte „Ein- und Zweipunktegleichung“ abgeleitet und benutzt wird. Es ergeben sich dann viele Möglichkeiten, die für manche unbegründeterweise ein Vorgriff auf die gymnasiale Oberstufe sind, in Wirklichkeit diese entlasten und vor allem den Algebraunterricht in Klasse 8 interessanter machen. Da anzunehmen ist, dass alle Kolleginnen und Kollegen sich ein geeignetes Zahlenmaterial ohne großen Aufwand selbst beschaffen können, soll hier nur Grundsätzliches aufgezählt werden:

Die Geradengleichung $y = mx + t$ wie auch in der Form $ax + by + c = 0$ wird hinsichtlich der Parameter m, t, a, b, c diskutiert.

Es werden die Geradengleichungen aufgestellt, wenn 2 Punkte der Geraden oder 1 Punkt und die Steigung gegeben sind. Es werden Parallelen zu einer Geraden berechnet.

Man erfasst Strecken durch Gleichungen in Koordinaten, z. B. $y = mx + t$ mit $x \in [d; e]$, und übt die Umkehrung.

Man fragt nach extremalen Lösungen zu Problemen der Art $y = mx + t$ mit $x \in [d; e]$ und kommt in diesem Zusammenhang auch auf Infimum und Supremum zurück.

Es werden lineare Ungleichungen graphisch als Halbebenen dargestellt und umgekehrt zu solchen die Ungleichungen gesucht.

Bei den linearen Gleichungssystemen werden mehrere Lösungsverfahren besprochen. Es wird die Lösungsmannigfaltigkeit untersucht, im Fall zweier Gleichungen auch geometrisch interpretiert. Das Substitutions- und das Eliminationsverfahren wird auch in einfachen Fällen von 4 Gleichungen geübt, um zu zeigen, dass diese Verfahren in allen Fällen, wenn auch nicht händisch, ausgeführt werden können.

Für eine lineare Gleichung ist genau eine der folgenden Aussagen wahr:
1. Die lineare Gleichung hat genau eine Lösung.
2. Die lineare Gleichung ist über der Definitionsmenge der Gleichung unerfüllbar, d. h. $L = \emptyset$.
3. Die lineare Gleichung ist über der Definitionsmenge allgemeingültig.

Begründen kann man diese Aussage z. B. mit Diskussion des Graphen, der zu einer linearen Funktion gehört.

Man sollte nicht vergessen:

Aufgabe1.4.2.1: Zeichne die Graphen der Funktionen zu $y = |x|$ für $x \in \mathbf{R}$, $y = |2x - 3|$ für $x \in \mathbf{R}$, $y = |2x - 3| - |4 - x|$ für $x \in \mathbf{R}$.

Zugegebenermaßen werden Anwendungsaufgaben nicht immer dem Stellenwert des Kapitels gerecht, da in aller Regel außermathematische Kenntnisse erforderlich sind. Deshalb ist das Folgende besonders wichtig, um dem Schüler auseinander zu setzen, dass lineare Gleichungen und Ungleichungen Problemstellungen aus dem Alltag lösen können.

1.4.3 Lineares Optimieren

Analog zu MEYER U. A. [1] Band Algebra 8 wird empfohlen:
Bei Planungsaufgaben gibt es oft mehrere Lösungen. Der Planer versucht deshalb, unter den vorhandenen Möglichkeiten für seine speziellen Bedingungen die beste auszuwählen, d. h. das Planungsproblem zu **optimieren**.

Es wird zunächst ein Beispiel vorgeführt:

Beispiel: Für den Anbau von Weizen und Kartoffeln stehen einer Erzeugergemeinschaft 60 ha zur Verfügung. Für das Ausbringen des Saatgutes benötigt man pro ha bei Weizen 2 h, bei Kartoffeln 3 h. Insgesamt stehen hierfür 144 h zur Verfügung. Die Ausgaben für das Saatgut betragen pro ha 200 € für Weizen und 1 400 € für Kartoffeln. Insgesamt kann die Gemeinschaft 48 000 € für das Saatgut ausgeben.

Stelle ein System von Ungleichungen für die Planungsgaufgabe auf und verdeutliche sie graphisch. Welche Einnahmen kann die Erzeugergemeinschaft maximal erzielen, wenn sie für einen Hektar Weizen 1 500 € und für einen Hektar Kartoffeln 4 500 € erhält?

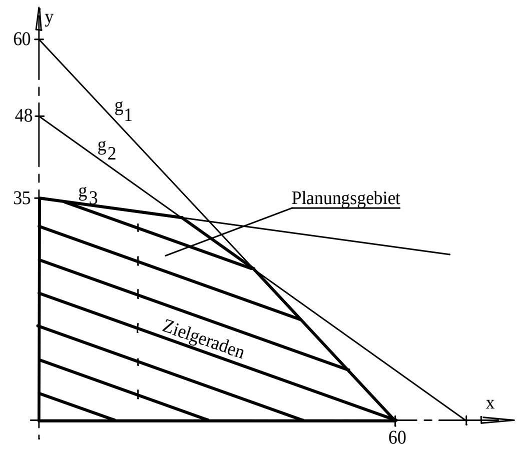
Lösung:

1. **Benenne die Variablen**: Anzahl der Hektar Weizen: x
   Anzahl der Hektar Kartoffeln: y

2. **Stelle ein lineares Ungleichungssystem auf**:

Text	Ungleichungen
Es stehen 60 ha Land zur Verfügung:	$x + y \leq 60$
Arbeitszeit für die Aussaat:	$2x + 3y \leq 144$
Kosten für das Saatgut:	$200x + 1\,400y \leq 48\,000$

3. **Zeichne das Planungsgebiet**:
   Das Planungsgebiet wird von Geraden begrenzt, deren Gleichungen sich aus den gefundenen Ungleichungen ergeben:
   g_1: $x + y = 60$
   g_2: $2x + 3y = 144$
   g_3: $200x + 1\,400y = 48\,000$
   g_4: $x = 0$
   g_5: $y = 0$



   Die Geraden g_1 bis g_3 haben die folgenden expliziten Darstellungen:
   g_1: $y = -x + 60$
   g_2: $y = -\frac{2}{3}x + 48$
   g_3: $y = -\frac{1}{7}x + 35$

   Jedem Punkt $P(x|y)$ des Planungsgebietes wird ein Betrag z in € (die zu P gehörende Einnahme) zugeordnet, den man **Zielwert** nennt. Die Funktion, die jedem Punkt des Planungsgebietes genau einen Wert zugeordnet, heißt **Zielfunktion**. Ihre Definitionsmenge ist das Planungsgebiet. Bei unseren Aufgaben ist die Zielfunktion stets linear. Optimieren heißt, für z den *besten* Wert finden.

4. **Stelle die Zielfunktion auf**: Jeder Hektar Weizen bringt 1 500 €, jeder Hektar Kartoffeln bringt 4500€. Die Einnahmen betragen also: $z = 1\,500x + 4\,500y$

5. **Stelle den Graphen der Zielfunktion für verschiedene Zielwerte dar**:
   Für ein festes z ist der Graph der Zielfunktion eine Gerade. Die Gesamtheit dieser **Zielgeraden** stellt den Graphen der Zielfunktion dar. Erhebt sich z als 3. Koordinatenachse über die x-y-Ebene, so ist die Zielfunktion eine Ebene, was man aber nur sehr bedingt Schülern der 8. Klasse erklären kann.

   Beispiele für die Zielgeraden:
   $z = 10 = 1\,500x + 4\,500y$
   $z = 100 = 1\,500x + 4\,500y$ usw. (1)
   Alle Zielgeraden sind also parallel, später wird man sagen: Die Zielgeraden sind die Höhenlinien der Zielebene.

6. **Bestimme die maximale Einnahme**: Die größtmögliche Einnahme kann aus derjenigen Zielgeraden bestimmt werden, die gerade noch das Planungsgebiet trifft.

   1.Weg: Aus der Zeichnung lesen wir ab, dass die optimale Zielgerade durch den Eckpunkt mit etwa den Koordinaten $(25|31)$ festgelegt ist. Für die optimale Einnahme ergibt sich dann ungefähr der Wert: $z = 1500 \cdot 25 + 4500 \cdot 31 = 354000$

   2.Weg: Wir zeichnen die optimale Zielgerade durch die genannte Ecke und lesen ihren y-Abschnitt als t = 40 ab; diese Gerade hat die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + 40$. Sie multiplizieren wir mit einem Faktor so, dass man nach (1) bei y den Koeffizienten 4 500 erhält: $z = 4500 \cdot 40 = 360\,000$

3. Weg: Will man den genauen Betrag der optimalen Einnahme ermitteln, muss man zuerst die Koordinaten der betreffenden Ecke, hier $g_2 \cap g_3$ berechnen.

$g_2 \cap g_3$: $-\frac{2}{3}x + 48 = -\frac{1}{7}x + 35$ Hieraus ergibt sich:

$$x = 24\frac{9}{11}$$

Eingesetzt in g_3 findet man $y = 31\frac{5}{7}$. Setzt man dies in die Zielfunktion ein, so erhält man

z = 359 883,12.

4.Weg: Weil das Planungsgebiet von Geraden berandet wird, muss das Optimum über einem oder zwei Eckpunkten zu finden sein. D. h. man berechnet die Zielfunktion *für alle* Eckpunkte und findet in dieser Zahlenmenge den optimalen Wert. Sollte dies an 2 Ecken der Fall sein, so liefert auch die lineare Verbindung zwischen den beiden Ecken optimale Werte.

Antwort: Optimale Einnahmen von etwa 180 000 € werden erzielt, wenn etwa 25 ha Weizen und etwa 32 ha Kartoffeln angebaut werden. Die Restfläche bleibt ungenutzt.

1.4.4 Betrags- und Bruch(un)gleichungen

Beim Lösen von Bruchgleichungen spielt zum ersten Mal im Unterricht die Definitionsmenge einer Gleichung eine entscheidende Rolle. Die Lösung kann stets mit dem folgenden Verfahren gewonnen werden:

Verfahren:

1. Bestimme die Definitionsmenge D der Bruchgleichung als **R**\{Nennernullstellen}.
2. Forme die Gleichung so um, dass auf einer Seite der Gleichung null steht.
3. Forme die andere Seite zu einem einzigen Bruchterm um.
4. Hat ein Bruch den Wert null, so muss sein Zähler diesen Wert haben. Bestimme deshalb die Zählernullstellen.
5. Überprüfe die so gefundenen Zahlen auf ihre Zugehörigkeit zu D und bestimme die Lösungsmenge.

Beispiele hierzu findet man in nahezu allen Lehrbüchern, wenngleich zugegeben werden muss, dass man gelegentlich nur sehr einfache Aufgaben findet, die nicht ausreichen, eine Fertigkeit im Lösen von Gleichungen zu erzeugen. Das Verfahren kann auch bei der Lösung von Ungleichungen benutzt werden.

Dem Autor ist es ein Anliegen, in jeder Klasse auch Bruchgleichungen mit Parametern lösen zu lassen, da in diesem Zusammenhang Fallunterscheidungen geübt werden können, die man stets mit dem logischen Gegenteil eines bereits untersuchten Falls aufbauen sollte (vgl. MEYER U. A. [1] Algebra 8). Jeder untersuchte Fall gibt dann einen Beitrag zur Lösungsmenge, d. h. diese ist die Vereinigung aller gefundenen Teilmengen.

Hat man solches „eingeübt“, so kann man sich jetzt – zumindest bei den interessierten Schülerinnen und Schülern – auch ans Lösen von Ungleichungen und Betragsgleichungen heranwagen. Zu letzteren geben wir einige Beispiele aus MEYER U. A. [1] Algebra 8:

Aufgabe1.4.4.1: Löse die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

a) $702x + 702 - |702x + 702| > 0$ b) $3|x - 4| - |x - 4| \geq 0$

c) $|5 - x - |5 - x|| = 14$ d) $|x - 1| + |x + 1| \geq 2x$

Aufgabe 1.4.4.2: Löse die folgenden Ungleichungen:

a) $\frac{x}{|2x+3|} - \frac{x-14}{|2x+3|} \leq 1$ b) $\frac{12}{|15x-30|} + \frac{9}{|14-7x|} \leq \frac{1}{|x-2|}$

c) $\frac{3}{121x^2 + 22x + 1} \leq \frac{5}{11x+1}$ d) $\frac{(2-3x)(12+5x)}{x^2 - x + 0{,}25} + \frac{2-3x}{(0{,}5-x)^2} \geq 0$

1.5 Jahrgangsstufe 9

In Klasse 9 wird eine weitere Funktionsklasse, die quadratischen Funktionen, untersucht; ihre Graphen werden Parabeln genannt; sie haben stets Achsen parallel zu einer Koordinatenachse. In der vorliegenden Arbeit wird auch hier nur auf Besonderheiten eingegangen, die in aller Regel – angeblich wegen einer Überlastung der Schülerinnen und Schüler – im Regelunterricht ausgelassen werden. Man sollte aber versuchen, zumindest im Rahmen der Binnendifferenzierung des Unterrichts Interessierten entsprechende Probleme zu stellen oder diesen „Besseren“ einmal an einem Nachmittag einen Ergänzungsunterricht zu geben.

Aufgabe 1.5.0.1: Löse die folgenden Ungleichungen:

a) $-x^2 + 3x + 10 > 0$ b) $(3x^2 + x - 2)(x - 2) \geq 0$ c) $\frac{2x^2+1}{1^{2-x}} < 1$

1.5.1 Umkehrfunktion

Bei den geometrischen Abbildungen haben wir schon kennen gelernt, dass manche Abbildung eine inverse dahingehend hat, dass das Nacheinander-ausführen beider zur identischen Abbildung führt. Für die Funktionen einer Veränderlichen, die der Schüler kennen gelernt hat, äußert sich das so, dass dem Graphenpunkt $(x|y)$ der Funktion der Punkt $(y|x)$ der Umkehrfunktion zugeordnet wird, was im Koordinatensystem einer Spiegelung an der Geraden $y = x$ gleichkommt und die Definitionsmenge mit der Wertemenge vertauscht.

Aufgabe 1.5.1.1: Weshalb gibt es kein Interesse, eine Umkehrfunktion einer linearen Funktion zu untersuchen?

Anders ist das jetzt bei den quadratischen Funktionen, z. B. bei $y = x^2$ für alle x, weil das Vertauschen von x und y und wiederum auflösen nach y zu $y = \pm\sqrt{x}$ führt, was einmal nicht mehr für alle x definiert ist und zum anderen zunächst wegen der durch $\pm$ hervorgerufenen Zweideutigkeit keine Funktion mehr ist.

Hier hilft nur eine Beschränkung der ursprünglichen Definitionsmenge und eine Entscheidung für eines der Vorzeichen.

Aufgabe 1.5.1.2: Schränke die Definitionsmenge einer allgemeinen quadratischen Funktion so ein, dass sie eine Umkehrfunktion hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Dies wirkt sich beim Lösen von Wurzelgleichungen aus: Das Quadrieren einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung. Da man aber im Lösungsverfahren nicht auf das Quadrieren verzichten kann, muss man die Ergebnisse überprüfen, ob sie überhaupt zur Definitionsmenge der Gleichung gehören, um zu entscheiden, was die Lösungsmenge ist.

Aufgabe 1.5.1.3: Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x - \sqrt{2x-1} = 2$ b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x+10} = \sqrt{11x+9}$

c) $\sqrt{x - \sqrt{2x+1}} = 1$ d) $2\sqrt{x} + 2 : \sqrt{x} = 5$

1.5.2 Erste Kurvendiskussion

Bei Parabeln wird der Normalunterricht stets bringen:

- Scheitelbestimmung und Symmetrieachse durch quadratische Ergänzung;
- Nullstellen- bzw. a-Stellenbestimmung;
- Zeichnen von Parabeln, die man dann beim Betrachten auch als Parabeln wieder erkennen kann.

Schülerinnen und Schüler, die mehr als nur die 10. Klasse eines Gymnasiums besuchen, und Interessierte sollten jedoch mehr erfahren:

Zwischenzeitlich haben sie die Monotoniegesetze kennen gelernt.

Definition: Gilt für eine Funktion $y = f(x)$ für alle x_1 und x_2 aus [a; b] mit $x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$, so heißt die Funktion in [a; b] **streng monoton steigend**,
$f(x_1) \leq f(x_2)$, so heißt die Funktion in [a; b] **monoton steigend**,

$f(x_1) > f(x_2)$, so heißt die Funktion in [a; b] **streng monoton fallend**,
$f(x_1) \geq f(x_2)$, so heißt die Funktion in [a; b] **monoton fallend**.

Damit kann man die folgenden Aufgaben lösen:

Aufgabe1.5.2.1: Untersuche das Monotonieverhalten
a) einer linearen Funktion, b) einer quadratischen Funktion; c) einer Wurzelfunktion.

Aufgabe 1.5.2.2: Welches Symmetrieverhalten haben
a) lineare Funktionen, b) quadratische Funktionen; c) Wurzelfunktionen?

Da man im Geometrieunterricht der Klasse 9 in aller Regel Ähnlichkeiten untersucht, sollte auch das folgende Problem bearbeitet werden:

Aufgabe 1.5.2.3: Alle Parabeln sind ähnlich.

Der Scheitel einer Parabel zur Funktion $y = f(x)$ mit $x \in \mathbf{R}$ liefert stets einen **absoluten Extremwert** der Wertemenge. Betrachtet man die Funktion für $x \in [a; b]$, so kann der Scheitel $(s|t)$ ein $s \in [a; b]$ haben und damit ein absolutes Extremum der Funktion liefern; wegen des Monotonieverhaltens der Parabelfunktion liefert dann einer der Werte f(a), f(b) das andere absolutes Extremum.

Aufgabe 1.5.2.4: Gegeben ist die Funktion $y = 2x^2 – 3x + 4$ für $x \in\ ]0; 3]$. Bestimme die absoluten Extrema und eventuell Supremum oder Infimum. Welches Monotonieverhalten ergibt sich hieraus?

Man sollte aber auch das, was man normalerweise am Gymnasium Kurvendiskussion nennt, frühzeitig umkehren. Welcher Zusammenhang hier mit der Anwenderpraxis besteht, wird erst in Kapitel 2 auseinander gesetzt.

Aufgabe 1.5.2.5: Gesucht wird eine Parabel, die bei $(3|4)$ ein absolutes Maximum hat. Wie viele Punkte kann man für das eindeutige Finden der Parabel noch vorgeben?

Aufgabe 1.5.2.6: Die Symmetrieachse einer verschobenen Normalparabel ist gegeben durch die Gleichung $x = 3$. $P_1(7|?)$ ist ein Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse.
a) Bestimme die Koordinaten des 2. Schnittpunkts der Parabel mit der x-Achse.
b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes der Parabel mit der y-Achse.

Aufgabe 1.5.2.7: Die Parabel zu $y = x^2 + bx + c$ für alle x und reellen b und c schneidet die x-Achse in den Punkten $(-2|0)$ und $(1|0)$.
a) Auf welcher Parallelen zur y-Achse liegt der Scheitel?
b) Beschreibe das Monotonieverhalten der Parabel.
c) Bestimme die Koordinaten des Scheitels (gib hierzu 2 verschiedene Wege an).
d) Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 1.5.2.8: Gib eine allgemeine Formel für die Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge x an. Bestimme graphisch und mit dem Taschenrechner die Kantenlänge x, die zu einer Oberfläche von 50 cm^2 führt.

Aufgabe 1.5.2.9: Bestimme die Gleichung der Parabel durch die Punkte $(-2|54)$, $(1|12)$, $(4|6)$. Weshalb ist das Problem i. Allg. bei vorgegebenen 4 Punkten unlösbar?

Aufgabe 1.5.2.10: Kennzeichne graphisch die Menge aller Punkte $(x|y)$, deren Koordinaten jeweils die angegebene(n) Bedingung(en) erfüllen:
a) $y < x^2 + 4x + 4$ b) $y \geq x^2 – 6x + 11$ c) $y > x^2 – 2x – 1$ *und* $y < 2$
d) $y \geq x^2 – 2x – 1$ *oder* $y \leq x^2 – 2x + 1$ e) $y \geq x^2 – 2x + 1$ *und* $y < – x^2 + 2x + 4$

1.5.3 Absolute Extrema

Es ist ein Jammer, wenn Kollegiaten bei der Frage nach Extremwerten von quadratischen Funktionen zum Hilfsmittel Differentialquotient greifen, obwohl z. B. der Scheitel unmittelbar erraten werden kann. Schuld an dieser Situation ist wohl der Unterricht der Jahrgangsstufe 9, der zu selten auf solche Probleme zu sprechen kommt. Aus diesem Grund sollen hierzu einige Textaufgaben aus MEYER U. A. [1] Algebra 9 genannt werden:

Aufgabe 1.5.3.1: Gegeben ist ein quadratischer Karton der Kantenlänge a. Durch gleich lange Parallelschnitte der Länge x zu den Quadratseiten entsteht die Abwicklung einer oben offenen Schachtel. Berechne den Inhalt der Bodenfläche in Abhängigkeit von x und bestimme die Extrema des Flächeninhalts.

Aufgabe 1.5.3.2: Sabine will in ihrem Garten mit einem 10 m langen Drahtzaun für ihre Kaninchen ein rechteckiges Gehege mit möglichst großem Flächeninhalt abgrenzen. Für welche Maße wird der Flächeninhalt des Geheges maximal? (Begründe durch Rechnung)

Aufgabe 1.5.3.3: Eine Elektronikfirma verkauft während eines Monats 1 000 Bauteile zu einem Stückpreis von 15 €. Marktforscher stellen fest, dass bei einer Absenkung des Stückpreises um p% in einem Monat 20p Bauteile mehr verkauft werden. Bei welcher Preissenkung p wird der Umsatz maximal? Wie groß wäre der Umsatz in diesem Fall? Welche Preissenkungen kämen in Frage, wenn sich die Firma begnügt das beste p nur auf 10% genau zu erreichen?

Aufgabe 1.5.3.4: Aus einer Glasscheibe, die ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen von 40 cm und 80 cm ist, soll eine rechteckige Platte herausgeschnitten werden. Für welche Kantenmaße wird diese maximalen Flächeninhalt haben?

Aufgabe 1.5.3.5: Aus einem Blechstreifen der Breite 24 cm und der Länge 4,00 m soll eine Ablaufrinne mit einem rechteckigen Querschnitt gebogen werden. Die Höhe der Rinne sei x. Für welche x wird die Querschnittsfläche der Rinne maximal?

Aufgabe 1.5.3.6: Multipliziere eine beliebige reelle Zahl mit der um 15 kleineren Zahl. Für welche Zahl x ist der Wert dieses Produkts am kleinsten? Gib das Minimum an.

Aufgabe 1.5.3.7: Subtrahiere eine beliebige reelle Zahl x von 45 und multipliziere diese Differenz mit dem doppelten Wert von x. Für welche Zahl x wird der Wert dieses Produkts extremal? Gib das Extremum an und begründe.

Aufgabe 1.5.3.8: Der Preis p eines Produkts mit der Stückzahl x (in 10 000) wird durch die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -0{,}3x + 1{,}5$ beschrieben.
Die Gewinnfunktion (ohne Steuern) lautet $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5x - 1$; hierbei gibt der Term y zu jeder Stückzahl den zugehörigen Gewinn ($y > 0$) oder Verlust ($y < 0$) an.
a) Bei welcher Anzahl x erzielt der Hersteller den größten Gewinn?
b) Für welche Anzahl x hat der Hersteller keinen Gewinn?

Aufgabe 1.5.3.9: Aus einem Quader mit 10 cm und 4 cm langen Grundkanten und der Höhe 3 cm entstehen neue Quader, indem man die 10 cm lange Grundkante um x cm verkürzt und gleichzeitig die Höhe um x cm verlängert.
a) Für welche Belegung von x beträgt die Länge der Raumdiagonalen $\sqrt{125}$ cm?
b) Für welchen Wert x erhält man den Quader mit dem größten Volumen? Gib das maximale Volumen an.
c) Für welche x ist das Volumen größer als 150 cm^3?

Auch bei der folgenden Aufgabe muss man nicht unbedingt zu einem Lösungsverfahren der Analysis greifen:

Aufgabe 1.5.3.10: Zeichne nach Augenmaß an die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 - 2x + 3$ Tangenten durch den Punkt $(-0{,}5 \mid 6)$ und bestimme dann rechnerisch die Gleichungen dieser Tangenten.

Aufgabe 1.5.3.11: Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ sowie die Gerade durch die Punkte $A(-2 \mid -3)$ und $B(6 \mid -3)$.
a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wenn $C(x \mid y)$ ein beliebiger Punkt der Parabel ist.
b) Wie muss man C wählen, dass der Flächeninhalt von a) extremal wird?
Eine Zeichnung kann helfen.

Aufgabe 1.5.3.12: Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

a) Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $y + x + 2 = 0$ mit der Hyperbel.
b) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Hyperbel durch $(1|1)$?

Zum Schluss noch eine allgemeine Bemerkung, den Geometrieunterricht betreffend: Immer wieder bekommt man auf die Frage. „Was verstehen Sie unter einer Abbildung“ auch von Lehramtsstudenten die Antwort, „eine Bewegung“. Das liegt wohl auch daran, dass sich der Geometrieunterricht unverhältnismäßig lang mit Kongruenzabbildungen aufhält. Wichtig ist es deshalb, im Geometrieunterricht wenigstens gelegentlich das Vorhandensein anderer Abbildungen zu erwähnen:

Man verändert die Vorstellungswelt hinsichtlich des Begriffs Abbildung beim Schüler sehr, wenn man Scherungen als Abbildungen einführt, wie sie etwa bei der Flächengleichheit geradlinig begrenzter Flächen vorkommen oder auch bei einem Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS. Wie bereits erwähnt, muss der gymnasiale Geometrieunterricht die Projektion samt ihren Eigenschaften bei der Darstellung räumlicher Gebilde in der Ebene lehren und vor allem betonen, dass das nicht umkehrbare Abbildungen sind. Auch das Abwickeln von gewissen Flächen im Raum ist eine Abbildung im eigentlichen Sinn, was erwähnt werden muss, wenn etwa die Kurve eines ebenen schiefen Schnittes auf einem Rotationszylinder oder ein Weg auf einem Kegelmantel abgewickelt werden. Eine Fülle von neuen Funktionen, ja Funktionsklassen lernt der Schüler in der Klasse 10:

1.6 Jahrgangsstufe 10

1.6.1 Potenzfunktionen – Höhere Wurzelfunktionen

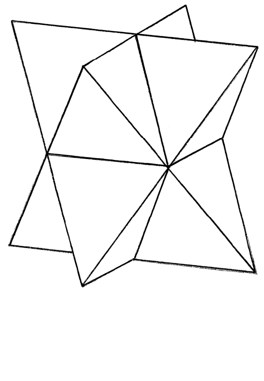
Ich glaube nicht, dass es Schüler gibt, die etwa in Klasse 9 verstehen, dass das Wurzelzeichen etwas sehr Symbolisches ist, auch wenn sie wissen, dass das Symbol auf dem Taschenrechner nur einen rationalen Approximationswert angibt. Erst in Klasse 10 wird es einige Schüler geben, die einsehen, dass dieser Trick über die Unberechenbarkeit von Wurzeln hinweg hilft und sie werden sich wundern, dass man damit exakte Eigenschaften und Funktionalgleichungen wiedergeben kann.

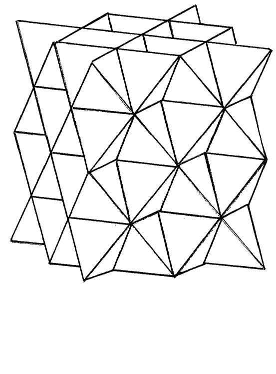
Man muss natürlich viel Zeit für die Herleitung der Potenzgesetze – und dann auch Wurzelgesetze, bzw. Potenzgesetze für gebrochene Exponenten – und für das Einüben derselben verwenden, aber man sollte auch Zeit haben, klarzustellen, dass ab sofort Arithmetik gemacht wird, die sich auf der Zahlengeraden mit Näherungen begnügt. Daran ändert sich nichts, wenn in manchen Ländern zur Unterstützung einige unendliche Reihen und Folgen aufgestellt werden, die ja dann auch, wenn es ums Berechnen geht, durch endliche Abbrüche ersetzt werden, ohne berechnen zu können, wie gut die Näherung ist.

Ich hoffe nicht, dass Didaktiker eines Tages dieses historische Vorgehen dahingehend verändern, dass der Stoff der Klasse 10 – um „sauber“ zu sein – erst nach dem Grenzwertrechnen behandelt wird, weil so wichtige Beispiele für das Hinführen zum Infinitesimalen zu spät gelehrt werden würden.

So sollte durchaus das folgende Beispiel spätestens in Klasse 10 seinen Platz haben:

*Aufgabe 1.6.1.1**(Geometrische Folge und Reihe erforderlich)**:* Man betrachte ein Tetraeder, dessen Seitenflächen in jeweils vier kongruente Teildreiecke zerlegt werden. Über dem jeweils „mittleren“ wird ein neues Tetraeder errichtet. Mit den Begrenzungsflächen des entstehenden Körpers wird entsprechend verfahren usw.





Zeige:
a) Die Oberflächen dieser Körper wachsen über alle Grenzen.
b) Die Volumina dieser Körper haben als Supremum den Wert 3V, wobei V das Volumen des Ausgangstetraeders ist.
c) Der Körper unterscheidet sich immer weniger von einem umschriebenen Würfel.

Schon bei der Untersuchung der Graphen der allgemeinen Parabeln sollte man sich an das früher Gelehrte erinnern und jetzt ausbauen:

Aufgabe 1.6.1.2: Die Graphen der Funktion[2] $y = x^n$ mit $n \in \mathbf{N}$ heißen Parabeln.
a) Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich und den jeweils dazu gehörigen Wertebereich.
b) Bestimme die gemeinsamen Punkte dieser Parabeln.
c) Welche Symmetrien sind zu beobachten? Erfasse sie durch Gleichungen.
d) Was lässt sich über Monotonie feststellen?
e) Was lässt sich hinsichtlich n über die Nähe zur x-Achse aussagen?

Die Graphen zu $y = x^n$ nennt man wiederum Normalparabeln. Eine „ganz“ allgemeine Parabel liegt vor, wenn ihre Punkte die Gleichung $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ erfüllen.

Aufgabe 1.6.1.3: Gegeben ist die Parabel $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ mit $x \in \mathbf{R}$.
a) Weise durch Rechnung nach, dass es sich bei $y = (x + 1)^3 + 3$ um dieselbe Zuordnungsvorschrift handelt.
b) Weiter ist die Funktion $y = x^3 – 6x^2 + 12x – 7$ mit $x \in \mathbf{R}$ gegeben. Führe diese Gleichung in eine zu der in a) gegebenen Form über.
c) Durch welche Abbildungen wird der Graph zu der Funktion aus a) in den der Funktion aus b) übergeführt? *Hinweis:* Man überlege sich als Zwischenschritt die Abbildungen, die in den Graphen zu $y = x^3$ überführen.

Aufgabe 1.6.1.4: Gegeben ist der Kreis um $(0|0)$ mit Radius 5 cm.
a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel $y = – x^2 + 5$ (bzw. $y = x^2 + 3$) mit dem Kreis.
b) Stelle in einer Tabelle die Anzahl der Schnittpunkte der Parabel $y = x^2 + a$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ dar und gib die Bedingung für a in Abhängigkeit vom Radius r an.

Man nennt eine zur y-Achse symmetrische Funktion **gerade**, eine zum Ursprung symmetrische Funktion **ungerade.**

Aufgabe 1.6.1.5: Gegeben ist die Funktion $y = x^3 – x$ für $x \in \mathbf{R}$.
a) Bestimme die Nullstellen der Funktion.
b) Sind $f = x^3$ und $g = – x$ zwei auf $\mathbf{R}$ definierte Funktionen, so nennt man $y = f + g$ auf $\mathbf{R}$ die **Summenfunktion** s. Den dazugehörigen Graphen erhält man durch Streckenaddition (beachte die Vorzeichen!); dies nennt man eine **Superposition**. Zeichne den Graphen von s in $[–2; 2]$.
c) Beweise, dass die Funktion s ungerade ist.
d) Gib anhand der Zeichnung das Monotonieverhalten an.

Analog werden allgemeine **Hyperbeln** eingeführt und nach gerader oder ungerader Ordnung unterschieden.

Aufgabe 1.6.1.6: Gegeben ist die Funktion $y = x^{-n}$. Die Graphen hierzu nennt man Hyperbeln.
a) Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich und den jeweils dazu gehörigen Wertebereich.
b) Bestimme die gemeinsamen Punkte dieser Hyperbeln.
c) Welche Symmetrien sind zu beobachten? Erfasse sie durch Gleichungen.
d) Was lässt sich über Monotonie feststellen?
e) Was lässt sich hinsichtlich n über die Nähe zur x- bzw. y-Achse aussagen?

Nach geeigneten Voraufgaben sollte zu bearbeiten sein:

*Aufgabe 1.6.1.7:*Gegeben sind $O(0|0)$, $T(-6|4{,}5)$ und $S_n(n|y)$ für $n\in \mathbf{N}$, wobei S_n auf dem Hyperbelast $y = 12x^{-1}$ mit $x \in \mathbf{R}^+$ liegt.

[2] Sind im Folgenden Funktionen ohne Definitionsbereich gegeben, so ist jeweils der maximale gemeint.

a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks OS_nT.
b) Unter diesen Flächeninhalten gibt es welche mit der Größe 29,25 cm^2; finde diese.
c) Zeige durch algebraische Umformungen die Gültigkeit der Identität

$$x + 16x^{-1} = \left(\sqrt{x} - 4\left(\sqrt{x}\right)^{-1}\right)^2 + 8 \text{ für } x > 0.$$

d) Bestimme unter allen Dreiecken OS_nT das mit dem geringsten Flächeninhalt.

Zu den bereits bekannten Monotoniegesetzen kommen jetzt die Monotoniegesetze für Potenzen. Damit kann das Monotonieverhalten von Potenzfunktionen genauer untersucht werden.

Aufgabe 1.6.1.8: Ordne (ohne Benutzung eines Taschenrechners) zu einer fallenden Ungleichungskette: 18^{-3}; $(0{,}5^{-1}\cdot 9)^{-4}$; $-2\cdot 3^2$

Aufgabe 1.6.1.9: Bestimme diejenigen Zahlen, die jeweils der Doppelungleichung genügen:
a) $2^5 \leq x^2 \leq 3^4$ b) $10^2 < x^3 < 2^{17}$ c) $3^5 \leq x^4 < 2^{20}$

Genauso werden die Umkehrfunktionen der u. U. eingeschränkten Potenzfunktionen untersucht.

1.6.2 Exponentialfunktionen samt Umkehrungen

Wie man in die Exponentialfunktion „einsteigt“ ist eigentlich unwesentlich; mag es sein, dass man eine Wachstumsfunktion als Ausgangspunkt wählt, mag es auch nur sein, dass man die Frage stellt: Ist $y = a^x$ für alle x eine Funktion? Man wird die Graphen dieser Funktionen untersuchen:

Aufgabe 1.6.2.1: Wir betrachten Funktionen der Art $y = a^x$, die auch als $y = \exp_a(x)$ geschrieben werden, bzw. deren Graphen:
a) Für welche a kann es sich hier nur um Funktionen handeln?
b) Was ist ihr größter Definitionsbereich?
c) Bestimme zum Ergebnis von b) den Wertebereich.
d) Haben diese Funktionen Nullstellen? Begründe.
e) Welches Monotonieverhalten haben diese Funktionen?
f) Welche Werte nehmen diese Funktionen für große x, für kleine x an?
g) Welche gemeinsamen Punkte haben diese Funktionen?
h) Welche der Exponentialfunktionen liegen zur y-Achse symmetrisch?
i) Beweise die Funktionalgleichung $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)$.
j) Mit i) lässt sich beweisen: Durch jeden Punkt $P(x|y) \neq (0|1)$ und $y > 0$ gibt es genau eine Exponentialkurve. Wie lassen sich die Koordinaten weiterer Punkte ohne Kenntnis der Basis berechnen?
k) Zeichne Graphen für einige markante a.

Einfache Exponentialgleichungen sollten ohne Hinzunahme einer log-Definition berechnet werden können:

Aufgabe 1.6.2.2: Berechne x:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{128}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $1^x = 10$

e) $13^{4x} = 169$ f) $81^{2x} = 3$ g) $0{,}\overline{1}^{\,4x} = 3$ h) $25^x = 125$

Aufgabe 1.6.2.3: Man sagt: „Jede Exponentialfunktion wächst rascher als jede andere Funktion“. Durch gezieltes Einsetzen soll auf eine Dezimale die Stelle gefunden werden, ab der die Exponentialfunktion größer als die zu vergleichende Potenzfunktion ist. Vergleiche:
a) $y = 1{,}5^x$ mit $y = x^2$ b) $y = 2^x$ mit $y = x^{10}$ c) $y = 25^x$ mit $y = x^{100}$ Es genügt hier eine grobe Abschätzung.

Aufgabe 1.6.2.4: Durch welche geometrischen Abbildungen geht der Graph der folgenden Funktionen aus dem Graphen der Exponentialfunktion $y = 1{,}2^x$ hervor:
a) $y = 1{,}2^x - 1{,}5$ b) $y = 1{,}2^{2x}$ c) $y = -2{,}5\cdot 1{,}2^x$ d) $y = -1{,}2\, x^{-x+2} - 2$

Potenzen – und über solche haben wir zunächst die Exponentialfunktion erklärt – können für rationale Exponenten berechnet werden, wenn die Wurzeln bekannt sind. Was machen wir aber, wenn der Exponent nicht rational ist? Der Umgang mit irrationalen Werten sollte dem Schüler zwischenzeitlich so vertaut sein, dass er von selbst darauf kommt, dass jede reelle Zahl beliebig genau von oben wie auch von unten durch zwei rationale Zahlen angenähert werden kann und dann wegen der Monotonie der Exponentialfunktion durch die entsprechenden Potenzen der gesuchte Wert der Exponentialfunktion ebenso angenähert wird. Dies alles muss mathematisch „bewiesen" werden; nur sollte man die historische Entwicklung nicht vergessen, die sich offenbar bei jedem Lernenden wiederholt: Zuerst muss ein gewisses Gefühl für die Sache da sein, man braucht Vermutungen, bevor man gewillt ist, in exakte Beweise einzusteigen. Das Gymnasium ist an dieser Stelle nur in der Lage, dieses Gefühl zu entwickeln und gleichzeitig Rechenverfahren zu lehren, mehr sicher nicht.

Das bisherige Vorführen von Funktionen im Sinne von HURWITZ (siehe die Einleitung) sollte die Schüler veranlassen, immer nach der Umkehrbarkeit der Funktionen zu fragen. So ist es eigentlich eine Selbstverständlichkeit bei einem Zusammenhang $y = a^x$ bei gegebenem y und a nach dem dazugehörigen x zu fragen, zudem nach Obigem bekannt ist, dass die Funktion in **R** streng monoton und damit überall umkehrbar ist. Ob diese Frage im Rahmen eines Anwendungsbeispiels gestellt wird (siehe unten) oder rein abstrakt wie gerade, ist eigentlich gleichgültig. Ich habe stets dazu geneigt, hier den abstrakten Weg zu gehen, weil ich befürchtet habe, dass die Anwendung den mathematischen Hintergrund zu sehr verschleiert.

Definition: Gegeben ist die Exponentialfunktion $\exp_a$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+\setminus\{0\}$ durch $y = a^x$. Vertauscht man x und y und löst wieder nach y auf, so erhält man die Umkehrfunktion $y = \log_a x$: $\mathbf{R}^+\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, genannt Logarithmus x zur Basis a. D. h.:

Satz: $\log_a(\exp_a x) = x$ und $\exp_a(\log_a x) = x$

Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegeln an der Geraden y = x. Auch die Umkehrfunktion ist streng monoton. Für welche Basen liegt steigende bzw. fallende Monotonie vor? Die Graphen der Logarithmusfunktionen zur Basis a und zur Basis a^{-1} sind symmetrisch zur x-Achse. Man möge beachten, dass wie bei der Wurzelfunktion kaum ein Wert des Logarithmus algebraisch berechnet werden kann. Die meisten Werte – und damit die Werte des Taschenrechners – sind angenähert durch endliche Dezimalzahlen. Umso überraschender ist es, trotzdem einige exakte allgemein gültige Aussagen über den Logarithmus angeben zu können.

Leider ist dies heute für die meisten Gymnasiasten schon alles. In der Oberstufe wird dieses Wissen noch ergänzt durch die Ableitung des Logarithmus. Die Anwenderpraxis, die es auch heute noch gibt, zeigt, dass hier die Schule zu wenig lehrt, was noch zu Zeiten der Logarithmentafeln anders war.

Zunächst einmal ist es auch heute noch zweckmäßig, wenn man spezielle Werte des Logarithmus erkennt und berechnen kann:

Aufgabe1.6.2.5: Berechne: a) $\log_7 1$ b) $\log_4 \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 3$ d) $\log_{10} 1000\,000$

e) $3^{\log_9 3}$ f) $8^{\log_2 3}$ g) $2^{\log_2 5 - \log_2 25}$ h) $\log_a |x|$ i) $\log_a(-x^2)$

Aufgabe 1.6.2.6: Löse die folgenden Gleichungen: a) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = c$ b) $\left(\frac{u}{v}\right)^{2x} = ab$

Aufgabe 1.6.2.7: Gib Gleichungen an, zu denen die folgenden Lösungen gehören können:

a) $x = \log_3 19$ b) $x = \log_y \frac{1}{z}$ c) Wehalb verlangt die Aufgabe a) eine eindeutig bestimmte Lösung, während die Aufgabe b) nicht diese Eigenschaft hat?

Aufgabe 1.6.2.8: Gib jeweils die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion an:

a) $y = \log_2(-x)$ $y = \log_5 \sqrt{x}$

Auch wenn man auf der Schule nicht die Transzendenz der meisten Logarithmen zeigen kann, sollte man doch in Analogie zur Irrationalität der meisten Wurzeln die folgende Aufgabe stellen:

Aufgabe 1.6.2.9: Beweise, dass die folgenden Logarithmen irrational sind:
a) $\log_5 8$ b) $\log_2 8$ c) Welche Bedingung benötigt man, dass $\log_a b$ mit natürlichen Zahlen a und b irrational ist?

Aufgabe 1.6.2.10: Gib jeweils die größtmögliche Definitionsmenge an:
a) $y = \log_3 (2x^2 + 3)$ b) $\log_5 (4x^2 – 8x + 4)$ c) $y = \log_2 (\log_3 x)$ d) $y = \log_2 \sqrt{x}$
e) $y = \log_7 (-\sqrt{x}\,)$

Für solche Übungen hat man weder in der Kollegstufe noch im Studium Zeit; aus diesem Grund gehören sie in die Mittelstufe des Gymnasiums, da man ohne sie keine richtige Vorstellung von diesen Funktionen hat. Ähnliches gilt für die beiden **Funktionalgleichungen** des Logarithmus, auf die hier nicht eingegangen werden muss, da man ihre Behandlung in älterer Schulbuchliteratur sehr ausführlich findet (vgl. z. B. ZWERGER, KLUG [1]). Auch sollte man der älteren Literatur entnehmen, dass es reicht, die Logarithmen zu einer einzelnen Basis zu erfassen, weil man aus einer Basis auf jede andere schließen kann. Dagegen findet man Aufgaben der folgenden Art selten:

Aufgabe 1.6.2.11: Sind durch die jeweils vorgegebenen Zuordnungsvorschriften dieselben Funktionen gegeben? Begründe: a) $y = 4 \log_a x$ und $y = \log_a x^4$ b) $y = x$ und $y = \log_{10} 10^x$
c) $y = 4 \cdot \log_{10} \sqrt{2x+3}$ und $y = \log_{10} (2x + 3)^2$

Mathematikunterricht hat auch die Aufgabe, gelegentlich auf die historische Entwicklung hinzuweisen. Da die Zeit, in der noch keine elektronischen Rechner – vor allem in Kleinformat – zur Verfügung standen, nicht allzu lange zurück liegt, sollte man im Gymnasialunterricht durchaus auf den Stellenwert und die Arbeitsweise der Logarithmentafel und des Rechenstabes zu sprechen kommen. Einerseits genügen die Logarithmen zur Basis 10, wenn man ihre Werte für die Numerus zwischen 1 und 10 kennt. Wehalb hat man dann vor allem auf Sternwarten riesige Folianten für diese Werte benötigt?

Wichtig ist es auch, jetzt einfache Exponentialgleichungen zu lösen, um z. B. dem angehenden Ingenieurstudenten das Wissen mitzugeben, dass er bei solchen Gleichungen nicht immer gleich zu Näherungsverfahren greifen muss:

Aufgabe 1.6.2.12: Löse die folgenden Gleichungen; gib u. U. nur Näherungslösungen an:
a) $81^{2x} = 3$ b) $\log_a x = 3 \log_a 2 + 0{,}5 \log_a 4$ c) $3 \log_3 x = 0{,}5 \log_3 a^2 + 4 \log_3 b - \log_3 c - \log_3(a + c)$
d) $3^x = 15$ e) $2^{x - 1} = 5^{-x + 2}$ f) $5 \cdot 100^x - 12 \cdot 10^x - 5/4 = 0$ g) $\log_2 x = 8$
h) $\log_3 (x + 5) + \log_3 (2 - x) - \log_3 (9 - 3x) = 0$ i) $(\log_{10} (2x - 1))^2 - 3 \log_{10}(2x - 1) + 2 = 0$
j) $\log_4(7x^2 +2) = \log_2(4x-1)$ k) $x^{2\log_{10} x} = 100$
l) $x^{\log_a x} = a^2 x$ mit positivem reellen $a \neq 1$ m) $4 \log_4 x + 3 = 2 \log_x 2$
n) $(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b$ mit positiven reellen a und b und $a \neq 1$ und $b \neq 1$.

Aufgabe 1.6.2.13: Ermittle eine Lösung von $\log_3 x + 1 - \frac{1}{2}x = 0$ auf Ganze genau.

Aufgabe 1.6.2.14: Bestimme die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9$

Aufgabe 1.6.2.15: Für $(a|b|c)$ mit reellem $a > 1$ wird eine Funktion zu $y = \log_a(bx + c)$ gesucht, deren Graph durch die Punkte $(2|2)$, $(-1|0)$ und $(0|1)$ verläuft.

Auch wenn die Nutzung der Logarithmen an vielen Stellen heute keine Rolle mehr spielt, wo sie zum Täglichen noch vor 50 Jahren gehörten, so gibt es – wohl wiederum historisch bedingt – Anwenderbereiche, die auch heute noch zur Darstellung ihrer Werte Logarithmen benutzen. Der Logarithmus ist also nicht nur eine mathematisch interessante Funktion, sondern wird auch heute noch gebraucht. Am Gymnasium sollte man deshalb einige dieser Anwendungsbereiche erwähnen. Es würde den Rahmen der vorliegenden Abhandlung sprengen, wenn hierzu ausführliche Aufgabenbeispiele gebracht werden würden:

1. Wachstumsfunktionen haben häufig die Eigenschaft, dass die Veränderung proportional zur vorhandenen Größe ist; dann wächst die Sache mit einer Exponentialfunktion und damit kommt der Logarithmus bei bestimmten Fragestellungen ins Spiel. Man spricht von **exponentiellem Wachstum**; z. B.: Bierschaum fällt so zusammen, radioaktiver Zerfall, Zinseszins bei konstanter Verzinsung, bei konstanter Wachstumsrate entwickelt sich eine Population „längs" einer Exponentialfunktion, die Abnahme des Luftdrucks mit steigender Höhe geschieht exponentiell.
2. Bei vielen Beispielen der Art 1. kann man keine Zwischenwerte betrachten, weil sie von der Sache her nicht passen. Dann ist der exponentielle Zusammenhang durch geometrische Folgen und Reihen zu erfassen, weshalb manche solche Folgen zum Einstieg in die Exponentialfunktionen benutzen. Beispiele dieser Art sind
   - DIN-Format von Papier: DIN-A0 hat einen Flächeninhalt von $1,\overline{0}$ m^2, DIN-A1 entsteht aus DIN-A0 durch halbieren usw.
   - Glasplatten gleicher Dicke lassen jeweils b% des Lichtes durch. Licht, das durch n Platten hindurch muss, lässt dann b^n % Licht durch.
3. Die scheinbaren Helligkeiten m_1 und m_2 von Sternen werden in der Astronomie in Zusammenhang mit den abgestrahlten Energien E_1 bzw. E_2 gebracht:

   $$m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot \log_{10} \frac{E_1}{E_2}$$

   Als Ursache hierfür nimmt man das Gesetz von WEBER UND FECHNER: Die Differenz zweier Sinnesempfindungen ist proportional dem Logarithmus des Quotienten der sie auslösenden Reize.
   Auf dieser Grundlage steht auch bei Lautstärken die Definition des Maßes Dezibel.
4. Die meisten Schwingungen werden längs einer Exponentialfunktion gedämpft.
5. Die RICHTER-Skala für Erdbeben ist durch $\log_{10}$ des Amplitudenausschlages eines Erdbebens definiert.
6. Der pH-Wert der Chemie wird definiert als $-\log_{10}$ der Konzentration der positiven Ionen in einer Flüssigkeit. Destilliertes Wasser hat so den pH-Wert 7. Bei kleinerer Konzentration spricht man von einer basischen Flüssigkeit, also pH-Wert < 7, bei höherem Wert von einer Säure.
7. Logarithmischen Papiers: Eine oder zwei Koordinaten sind nicht wie üblich linear abgetragen sondern in einem logarithmischen Maßstab.
   Vorteil des einfach logarithmischen Papiers: Liegen Messreihen $(x|y)$ auf einer Geraden, die nicht parallel zur y-Achse ist, so gibt es positive reelle Konstanten a und c so, dass gilt: $y = c \cdot a^x$. Man kann also mit diesem Papier aus Messreihen einen exponentiellen Zusammenhang erkennen, was z. B. bei Wachstumsvorgängen wichtig ist.
   Vorteil des doppelt logarithmischen Papiers: Liefern Messreihen $(x|y)$ Punkte auf einer Geraden, die nicht parallel zur y-Achse ist, so gibt es reelle Werte a und c ($c > 0$) mit $y = c \cdot x^a$. Man kann also hiermit Potenzfunktionen erkennen.

Dieses Wissen spielt nicht nur bei Akademikern sondern auch bei Laboranten u. a. eine Rolle und gehört deshalb ans Gymnasium.

1.6.3 Trigonometrische Funktionen samt Umkehrungen

Die Kongruenzsätze, Ähnlichkeitssätze und die Satzgruppe des PYTHAGORAS gestatten – zumindest gelegentlich – aus bekannten Seiten auf die Größe anderer zu schließen bzw. zu rechnen. Jetzt soll der Zusammenhang zwischen Seiten und Winkel in einem Dreieck über die bisherige Erkenntnis, dass der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt, hinausgehend genauer hergestellt werden.

Am Gymnasium werden die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens wohl stets am rechtwinkligen Dreieck für Winkel aus $(0; 90^o)$ definiert. Als besondere Eigenart stellt man von Anfang an eine Fülle von Funktionalgleichungen fest, d. h. von Identitäten, wie z. B. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, die für alle „sinnvollen" α erfüllt sind. Durch ein zu lernendes Minimum solcher Beziehungen kann man dann mit Algebra weitere finden. In rechtwinkligen Dreiecken mit 30^o-, 60^o- oder 45^o-Winkel lassen sich dann die Seitenlängen auch berechnen, also die Werte der trigonometrischen Funktionen angeben. Die übrigen Werte entnimmt man in Näherung dem Taschenrechner. Man kann damit auch die eine trigonometrische Funktion in eine andere umwandeln. Da die sich ergebenden Formeln später auch für größere Argumente angewendet werden, ist z. B. bei

$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ Vorsicht geboten, weil in aller Regel zunächst erst geklärt werden muss, welches der beiden Vorzeichen zuständig ist.

Viele Anwendungsaufgaben aus der ebenen, aber auch aus der räumlichen Geometrie folgen.

Neu gegenüber den bisher kennen gelernten Funktionen ist, dass man mit Geschick den Definitionsbereich einer Funktion u. U. erweitern kann: Man heftet an die in einem Intervall bisher definierte Funktion „passend" – ganz gleich, was das auch immer heißen mag – ein weiteres Intervall an, ja man setzt dies fort, bis auf fast allen reellen Zahlen (immer noch im Gradmaß oder auch nicht) die Funktionen definiert sind. Man kann allerdings bei der Erweiterung der Definitionsmenge schon gleich zum Einheitskreis greifen und einen Zeiger, mit dem die Funktionen erklärt werden, umlaufen lassen. Nur sollte man dann auch „vernünftig" erklären, weshalb der Zeiger im Kreis läuft, also z. B. weil etwa eine Wicklung einen magnetischen Fluss „schneidet" und man über die Auswirkung des Magnetflusses in der Spule Bescheid wissen will.

Weitere Funktionalgleichungen sind die Folge, die man sich zum Teil durch Symmetrien merken kann, aber die es eben doch zu lernen gilt. Mathematik ist auch Lernfach, was heute manchmal vergessen wird. Oder geht es auch anders? Sicher: Man kann alle die Beziehungen, die durch die Erweiterung der ursprünglichen Definition zu Stande kommen an den Funktionsgraphen erkennen, bzw. herleiten.

Hierbei ist z. B. $\sin(90^0 + \alpha)$ dort zu finden, wo man von 90^o um α nach rechts „läuft", wohingegen bei $\sin(90^o - \alpha)$ links von 90^o im Abstand α zu finden ist usw. Hierbei stellt sich heraus, dass man eigentlich nur Sinus und Cosinus zwischen 0^o und 45^o zu tabellieren braucht und daraus alle Werte der trigonometrischen Funktionen algebraisch herleiten kann.

Es versteht sich von selbst, dass man erkennt, die Funktionsargumente bewegen sich über alle reellwertigen Winkel, da ja der Zeiger im Kreis beliebig oft in verschiedenen Richtungen umlaufen kann und so alle diese Funktionen eine Periode bekommen. Spätestens jetzt ist es sinnvoll, das Bogenmaß einzuführen, was ich ab jetzt nur noch benutzen will. Damit hat man die trigonometrischen Funktionen völlig im Reellen erklärt.

Beim Zeichnen der Funktionsgraphen sollte man auf die Extrema achten, also auf die Stellen mit waagerechter Tangente bzw. auf eine spätere Klasse verweisen und mitteilen, dass die x-Achse unter 45^o geschnitten wird. Damit kann man die Graphen zu den trigonometrischen Funktionen besser skizzieren. Das Monotonieverhalten wird untersucht. Dies alles geschieht auch z. B. bei der Funktion $y = A\sin(ax + b)$ bzw. bei $y = |A\sin(ax+b)|$. Auch Beispiele zur Superposition von trigonometrischen Funktionen aber auch anderen werden untersucht und gezeichnet.

All dies wird wohl in jeder Klasse unterrichtet und befindet sich in jedem Lehrbuch. Aus diesem Grund habe ich hier auf die Angabe von Übungsbeispielen verzichtet. Anders ist dies bereits mit goniometrischen Gleichungen, wo es vor allem auf die Vieldeutigkeit der Lösungen m. E. ankommt:

Aufgabe 1.6.3.1: Bestimme die vollständige Lösungsmenge (also über der Definitionsmenge **R**):

a) $5\cos x - 3 = 0$ b) $5 - \sin x = 6\cos^2 x$ c) $2\sin x - \sqrt{2} < 0$

d) $-\frac{1}{2} \le \sin x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e) $|\cos x| \ge \frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $\tan^2 x - 3 = 0$ g) $2\sin x\cos x + \cos x = 0$

h) $\tan x + 3\sin x = 0$ i) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ j) $7 + \sin^2 x - 2\cos = 0$ k) $\sin x + \cos x = 0$

l) $3\cos(\frac{\pi}{2} - x) + 7\cos x = 0$ m) $\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - 3\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = 0$

Aufgabe 1.6.3.2: Begründe, weshalb die folgenden Gleichungen nicht lösbar sind:

a) $3\sin x - 5 = 0$ b) $\cos x = -\sqrt{3}$ c) $\sin x + \cos x = 2{,}1$

Aufgabe 1.6.3.3: Löse zunächst graphisch und verbessere dein Ergebnis mit Hilfe des Taschenrechners durch gezieltes Einsetzen auf 2 gültige Nachkommaziffern:

a) $\cos x = \sqrt{x}$ b) $\sin x - x^2 + 1 = 0$

Es folgen irgendwann Sinus- und Cosinussatz mit den entsprechenden Anwendungen; auch hier kann ich mich kurz fassen, da dies in jedem Unterricht wohl geschieht. Anders ist dies schon mit den Additionstheoremen. Der „moderne“ Unterricht stellt sich auf den Standpunkt, dass man diese in aller Regel als Anwender einer Formelsammlung entnimmt, wozu also die Schüler damit unnötig quälen. Hier kann entfrachtet werden. Dieser Standpunkt vergisst das Folgende: Wenn man nie etwas über Additionstheoreme gehört hat, so kommt man auch nicht auf die Idee solche in einer Formelsammlung zu suchen. Da aber die Anwender – etwa beim Kurzschluss der drei Phasen des Drehstroms – auf Additionstheoreme nicht verzichten können, weil man eben gewisse Dinge ohne sie nicht berechnen kann, ist eine Lehre am Gymnasium unerlässlich, wenn man eine Verlängerung der Studienzeiten wegen solchem vermeiden will. Wie viel man davon kennen muss, darüber lässt sich streiten. Auch bin ich der Meinung, dass man dem Schüler gestatten sollte, die Additionstheoreme samt ihren Umformungen einer Formelsammlung zu entnehmen. Im Folgenden wird an einer Reihe von Gleichungen gezeigt, dass man auf Additionstheoreme nicht verzichten kann:

Aufgabe 1.6.3.4: Finde die Lösungsmenge für die Grundmenge **R**:
a) $\sin 3x - \sin 2x = 0$ b) $\tan 2x - 2 \sin x = 0$

Aufgabe 1.6.3.5: Beweise die folgenden Identitäten:
a) $A \sin x + A \sin (x + \frac{2}{3}\pi) + A \sin (x + \frac{4}{3}\pi) = 0$ b) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha}{2\cos^2+\cos\alpha-1} = 2\cos\alpha$

Aufgabe 1.6.3.6: a) Gegeben sind die Geraden $y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}$ und $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$. Berechne den Winkel unter dem sich die Geraden schneiden.
b) Welche Beziehung gilt zwischen den Steigungskoeffizienten zweier zueinander senkrechten Geraden?

Aufgabe 1.6.3.7: In einem Dreieck gilt zwischen den Winkeln $\sin \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$. Zeige durch Rechnung, um welches Dreieck es sich handelt.

Wie bereits bei der Exponentialfunktion sollte es eine Selbstverständlichkeit sein, wenn die Schüler nach der Umkehrbarkeit der trigonometrischen Funktionen fragen. Gegenüber dem Beispiel Wurzel treten hier noch weitere Schwierigkeiten durch die unendliche Vieldeutigkeit einer eventuellen Umkehrung auf. Man kann eigentlich nur umkehren, wenn man genau angibt, für welchen Teil der ursprünglichen Definitionsmenge eine Umkehrung angestrebt wird. Auch wenn hier einiges schwieriger wird, wird dadurch doch das Bisherige vertieft und damit gefestigt.

Man muss noch einmal im Unterricht auf die Willkür der Wurzeldefinition zu sprechen kommen: $\sqrt{a} \geq 0$ ist im Gegensatz zu $a \geq 0$ mathematisch nicht zu begründen. Grundsätzlich könnte man auch $\sqrt{a} \leq 0$ definieren; dann aber könnte niemand mehr mit Wurzeln eindeutig rechnen. Deshalb hat man sich international auf $\sqrt{a} \geq 0$ geeinigt. Etwas ganz Entsprechendes muss bei den Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen geschehen. Das Vorgehen ist wie bisher: In $y = \sin x$ mit D = **R** und W = [-1; 1] werden x und y und damit Definitionsmenge D und Wertemenge W vertauscht und wieder nach y aufgelöst. Dies geht nur eindeutig, wenn die neue Funktion eine Definitionsmenge der Art $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ für $k \in$ **Z** hat. Aus diesem Grund hat man sich auch hier durch internationale Norm auf einen Bereich festgelegt. Analoges gilt für die anderen Umkehrfunktionen. Damit ergibt sich Folgendes:

Defintion: Man schränkt die Definitionsmenge der trigonometrischen Funktion auf einen so genannten **Hauptwert** ein, vertauscht x und y, d. h. spiegelt an y = x und löst die dann streng monotone Funktion eindeutig nach y auf:

$y = \sin x$ mit D(sin) = W(arc sin) = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ und W(sin) = D(arc sin) = [-1; 1] hat als

Umkehrfunktion $y = \arcsin x$, gelesen **Arcussinus** von x.

$y = \cos x$ mit D(cos) = W(arc cos) = $[0; \pi]$ und W(cos) = D(arc cos) = [-1; 1] hat als

Umkehrfunktion y = arc cos x, gelesen **Arcuscosinus**.

y = tan x mit D(tan) = W(arc tan) = $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ und W(tan) = D(arc tan) = **R** hat als

Umkehrfunktion y = arc tan x, gelesen **Arcustangens**.

Diese Werte liefert auch der Taschenrechner mit seiner Inverstaste. So kann man z. B. innerhalb einer Rechnung aus $\sin x = \frac{10}{27}$ „herleiten“ $-\frac{\pi}{2} \leq x = \arcsin \frac{10}{27} \leq \frac{\pi}{2}$, obwohl es eigentlich auch andere Lösungen hierfür gibt und das Ganze nur eine andere Schreibweise für denselben Sachverhalt ist, wenn man die Sache mit dem Hauptwert nicht außer Acht lässt.

Satz: Die trigonometrischen Funktionen von ihren Umkehrfunktionen, wie auch die Umkehrfunktionen von ihren trigonometrischen Funktionen sind die identische Abbildung.

Aufgabe 1.6.3.8: Berechne und lege fest, wo die Berechnung richtig ist:
a) sin (arc sin x) b) arc sin (sin x) c) sin (arc cos x)

Man kann aber bereits in Klasse 10 die Bewegungen der Ebene damit auch anders betrachten:

Die Zuordnungsvorschrift z. B. einer Drehung wurde in Klasse 7 in verschiedener Form mit Hilfe synthetischer Geometrie gefunden. Man kann dies auch algebraisch mit Hilfe eines Koordinatensystems bewerkstelligen:

Aufgabe 1.6.3.9: Gegeben ist die Drehung D(φ) der $(x|y)$-Ebene um den Ursprung um den Winkel φ, wobei D(φ): $(x|y) \to (x_D|y_D)$ für alle x, y aus $\mathbb{R}$. Berechne den algebraischen Zusammenhang zwischen den Größen x, y, x_D, y_D. Weshalb handelt es sich hierbei um eine Zuordnungsvorschrift?
Führe dasselbe für eine Spiegelung an der Geraden a durch den Ursprung durch, wobei der Normaleinheitsvektor auf a sei $\vec{a}$.

Um 1950 hat man auf den Oberrealschulen in Bayern noch die **hyperbolischen Funktionen** mit ihren Umkehrfunktionen, den so genannten **Areafunktionen**, gelehrt und z. B. die Hängeparabel als hyperbolischen Cosinus erkannt.

Abschließend kann festgestellt werden: Zu Beginn der Oberstufe hat der Gymnasiast bereits den Kanon an Funktionen, die er vor dem Studium kennen lernt, abgeschlossen. Die Oberstufe verfeinert nur die Kenntnisse und führt vor allem mit der Infinitesimalrechnung weitere Verfahren ein, die sich vor allem in der Anwendung der Mathematik bewährt haben.

2. Kurvendiskussion und ihre Umkehrung

2.1 Relative und absolute Extrema

Definition: f sei eine auf D definierte Funktion einer Variablen $x \in D$. Hat f ein Extremum in D, so heißt dieses absolut. Hat f ein Extremum im Intervall $[x_0 - \varepsilon ; x_0 + \varepsilon]$ für beliebig kleine $\varepsilon > 0$, so spricht man vom relativen Extremum $f(x_0)$.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass der Unterricht Stetigkeit und Differentialquotient $f'(x_0)$ erklärt hat und letzterer als Tangens des Steigungswinkels bei $(x_0|f(x_0)$ bekannt ist. Schülerinnen und Schüler wissen, dass f’ = 0 für die Existenz relativer Extrema differenzierbarer Funktionen notwendig aber nicht hinreichend ist. Sie kennen die notwendige Bedingung f“ = 0 für die Existenz von Wendepunkten bei zweimal differenzierbaren Funktionen f.

Die Standardaufgabe heißt dann vereinfacht:

Aufgabe 2.1.1: Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift $x \to y = 3x^2 - 6x - 7$. Bestimmen Sie
a) den maximalen Definitionsbereich in | und den dazugehörigen Wertebereich,
b) die Monotoniebereiche, den maximalen Stetigkeits- und Differentiationsbereich,
c) die relativen Extrema, die Wendepunkte und in [-7; 5] die absoluten Extrema.
d) Fertigen Sie eine Zeichnung für den Graphen der Funktion.
Später wird dann in aller Regel noch ein Integral berechnet, was hier allerdings nicht untersucht werden soll.

Schon viel seltener wird dies etwa wie folgt eingesetzt:

Aufgabe 2.1.2: Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift $x \to\ y = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 5 \text{ für } -10 < x < 1 \\ 2^x - 1 \quad \text{für } 1 < x < 3 \\ 2\cos \pi x + 9 \text{ für } 3 \le x < \infty \end{cases}$

Bestimmen Sie
a) den maximalen Bereich in |, in dem die Funktion definiert, stetig, differenzierbar, zweimal differenzierbar sein kann, die Monotoniebereiche, beschreiben Sie die Unstetigkeiten,
b) die relativen und absoluten Extrema, bzw. Infimum und Supremum und die Wendepunkte.
c) Fertigen Sie eine Zeichnung für den Graphen der Funktion.

Aufgabe 2.1.3: Gegeben ist die Funktionenschar $x \to f(x) = a^2\, x^3 + x^2$ für $x \in$ | und $a \in$ |.
Bestimmen Sie für jedes a die Wendepunkte und Extremwertpunkte der Funktionen. Für welche a erhält man den tiefsten (höchsten) Extremwertpunkt, die steilste Wendetangente?

Aufgaben von diesem Stil werden geübt und dabei vergessen, dass hinsichtlich der Anwendung hierbei meist vorbei gearbeitet wird:

Aufgabe 2.1.4: Eine Messreihe $(x|y)$ lässt vermuten, dass sie durch eine beliebig oft differenzierbare Funktion entsteht, die durch den Ursprung und $(1|1)$ geht und bei $(3|5)$ ein relatives Maximum hat. Finden Sie eine algebraisch möglichst einfache Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, und geben Sie das Verhalten der Funktion in Unendlich an.

Aufgabe 2.1.5: Eine Messreihe $(x|y)$ lässt vermuten, dass sie durch eine gedämpfte Schwingung verursacht wird und für x = n mit natürlichem n relative Extrema besitzt. Konstruieren Sie eine Funktion, die diese Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 2.1.6: Eine Messreihe lässt vermuten, dass sie in $[0;2\pi]$ durch die Funktion $y = (x - \pi)^2$ dargestellt wird (Wie überprüft man das?) und die Periode 2π hat. Konstruieren Sie hierzu eine passende Funktion.

Aufgabe 2.1.7: Konstruieren Sie möglichst viele Funktionen, die nur für ganzes n Nullstellen haben. Was ändert sich, wenn man verlangt, dass die Funktionen differenzierbar sein sollen?

In einem solchen Unterricht muss auch diskutiert werden, weshalb man in den Mathematik anwendenden Fächern an der Beschreibung von Messreihen durch Funktionen Interesse hat.

Aufgabe 2.1.8: An die Funktion $y = \sin x$ für $x \in\ ]-\infty; 0]$ soll die Funktion $y = f(x)$ mit geeignetem x glatt angesetzt werden:
a) f ist eine ganz rationale Funktion vom Grad 2;
b) f ist eine ganz rationale Funktion vom Grad 3;
c) f ist eine logarithmische Funktion.
d) Was ändert sich an den Beispielen a), b) und c), wenn an der Ansetzstelle x = 0 ein Übergang mit derselben Krümmung erreicht werden soll?

2.2 Extremwertaufgaben

Führen Extremwertaufgaben auf quadratische Funktionen, so kann man sie auch ohne Differentialrechnung lösen. Anders ist dies bei den folgenden Beispielen. Leider findet man im heutigen Analysisunterricht des

Gymnasiums zu selten Anwendungsaufgaben. Aus diesem Grund werden im Folgenden Anwendungsbeispiele bevorzugt:

Aufgabe 2.2.1(nach WÖRLE [1] Seite 175: Ist α der Steigungskoeffizient einer Schraube, $\mu = \tan \rho$ der Reibungskoeffizient zwischen der Schraube und dem Material, so berechnet sich der Wirkunsgsgrad η für die Umsetzung des Drehmoments in die Längskraft gemäß $\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \rho)}$.

Gibt es einen technisch realisierbaren Winkel α, für den der Wirkungsgrad η bei gegebenem ρ optimal wird?

Aufgabe 2.2.2 nach Habler, Schwappach [1] Seite 252: Die Beschleunigung b(t) eines Wagens in t Sekunden nach dem Start beträgt näherungsweise $b(t) = 6(84 + 5t - t^2)$ m/s^2 bis b(t) =0 erreicht ist; anschließend bleibt die Geschwindigkeit des Wagens konstant, die Höchstgeschwindigkeit ist erreicht.
a) Bestimmen Sie die größte Beschleunigung (ohne Differentialrechnung!).
b) Bestimmen Sie die zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit erforderliche Zeit t.

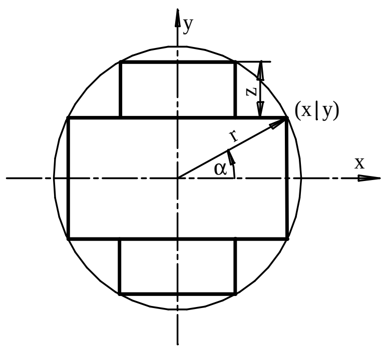
Aufgabe 2.2.3 nach Habler, Schwappach [1] Seite 252: Ein Schiff, das konstant mit z Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile/h) fährt, verbraucht stündlich $1{,}6 + (0{,}1z)^2$ Tonnen Schweröl.
a) Welche Funktion für den Ölverbrauch kann man als Funktion von z für eine Seereise von 2400 Seemeilen angeben?
b) Wie schnell darf nur gefahren werden, wenn man den Ölverbrauch minimieren will?

Aufgabe 2.2.4: Ein Kreis rollt schlupffrei auf einer Geraden ab. Längs eines Durchmessers sei eine Stange befestigt. Man gebe in Abhängigkeit vom Drehwinkel eine Parameterdarstellung für die Bewegung eines allgemeinen Punktes $(x|y)$ auf der Stange an und bestimme die Extremwerte und Wendepunkte in Abhängigkeit des Abstandes a eines Stangenpunktes vom Kreismittelpunkt.

Aufgabe 2.2.5: Man vergleiche die ersten Ableitungen von y = arc tan x und $y = \operatorname{arc\,tan} \frac{1+x}{1-x}$. Welche Folgerung ergibt sich?

Aufgabe 2.2.6: Der Wirkungsgrad η eines Transformators ist $\eta = \frac{P}{a + P + bP^2}$, wenn P die abgegebene Leistung ist und a > 0 und b > 0 vom Werkstoff und den Abmessungen abhängige Konstanten sind. Bei welcher Leistung ist der Wirkungsgrad am günstigsten?

Aufgaben 2.2.7 nach HÄFNER [1] Seite 376: Von allen Flächen mit gleichem Inhalt hat die Kreisfläche den kleinsten Umfang. Da man bei Wechselstromelektromagneten keinen massiven Eisenkern verwenden darf (wegen der entstehenden Wirbelströme), sondern vielmehr gezwungen ist, den Kern aus lamellierten dünnen Eisenblechen zusammenzusetzen – die Blechbreiten aber aus praktischen Gründen nicht zu oft abstufen will –, sucht man durch einen aus verschiedenen Paketen zusammengesetzten kreuzförmigen Querschnitt den kreisförmigen Hohlraum der Spulen möglichst gut auszunutzen.
Welche Abmessungen muss nun das Kreuz der nebenstehenden drehsymmetrischen Abbildung haben, damit es einen Kreis vom Halbmesser r möglichst gut ausfüllt?



Aufgabe 2.2.8 nach HÄFNER [1] Seite 182: Es wird ein Tunnel gebaut, dessen Querschnitt sich aus einem Rechteck und einem aufgesetzten Halbkreis zusammensetzt. Die Querschnittsfläche des Tunnels sei F = 20,000 m^2. Wie groß sind der Kreisradius und die Rechtshöhe zu wählen, damit der Umfang der Gesamtfigur und damit die Baukosten minimiert werden?

Bildnachweis:
Die beiden Bilder auf der Seite 18 und auf Seite 23 sind aus MEYER U. A. [1] Algebra 8.

Literatur

Bourbaki N. [1]: Éléments de Mathématiques, La Theorie des Ensembles, Hermann Paris 1939

Habler, Schwappach [1]: Trigonometrie und Algebraische Geometrie, Diesterweg Frankfurt 1975

Häfner Ph. [1] Einführung in die Differential- und Intergalrechnung, 2. Auflage, Ferdinand Enke Stuttgart 1921

Hilbert D., Ackermann W. [1]: Grundzüge der theoretischen Logik, Springer Heidelberg 1972

Hurwitz A. [1]: Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, 5. Auflage Springer 2000

Krämer A. und Meyer Kh. [1]: Zur Arithmetik der Jahrgangsstufen 5 und 6, Mathematikinformation Nr. 36 (2002), Seiten 11 - 27

Meyer u. a. [1]: Brennpunkt Mathematik, Lehrbuch für das Gymnasium mit Ausgaben für Bayern, Baden-Württemberg und Niedersachsen und Kommentarbänden, Schroedel-Schulbuchverlag GmbH Hannover, erschienen ab 1986, eingestellt 1993

Weth Th. [1]: Computeralgebra – Nein, danke!?, Mathematikinformation Nr. 39 (2003) Seiten 79 - 82

Wörle K. [1] Mathematik in Beispielen für Ingenieurschulen Band 2, Oldenbourg München 1964

Zwerger - Klug [1]: Algebra, J. Lindauer Verlag München 1960

Die Lösungen zu den Aufgaben werden in Mathematikinformation Nr. 45 veröffentlicht.

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstrasse 20
85579 Neubiberg