Wolfgang Metzler, Stephan Rosebrock

Das Pizzaproblem oder: Zerlegungen des $\mathbb{R}^n$ durch Hyperebenen

1. Einführung

Wir möchten eine Pizza teilen, so dass es möglichst viele Stücke gibt. Weil unser Messer so lang ist, sind aber nur gerade Schnitte erlaubt. Schneiden wir die Pizza, wie man allgemein üblich Pizzas zerschneidet, indem alle Schnitte durch den Mittelpunkt der Pizza gehen, so erhalten wir mit m Schnitten 2m Stücke wie man sich leicht klar macht. Es geht aber hinsichtlich der Anzahl der Schnitte viel besser.

In Abbildung 1 haben wir mit 4 Schnitten 11 Stücke hergestellt. Am meisten Stücke erhalten wir, wenn, wie in Abbildung 1, je zwei Geraden sich schneiden, aber niemals drei Geraden sich im selben Punkt schneiden.

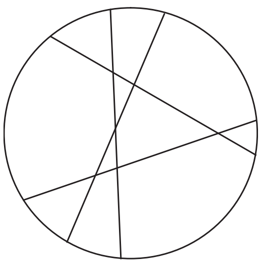

Abbildung 1

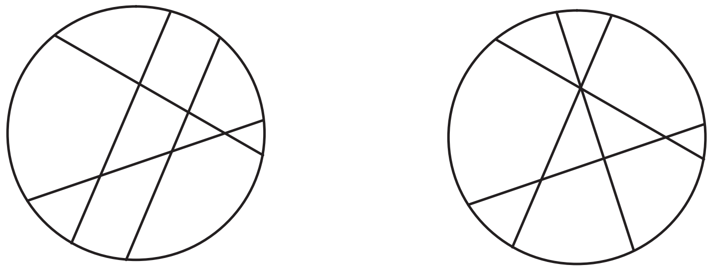

Abbildung 2

In Abbildung 2 links und rechts haben wir jeweils nur 10 Stücke. Links schneiden sich 2 Geraden gar nicht und rechts gehen 3 Geraden durch einen Punkt.

> *Aufgabe 1:* Finden Sie eine Formel f(m), die angibt, in wie viele Stücke eine Pizza mit m Schnitten höchstens geteilt werden kann.

Man kann dieselbe Frage auch für eine Dampfnudel stellen (wer Dampfnudeln nicht kennt, stelle sich einen Block Käse vor). Wenn die Dampfnudel mit Ebenenschnitten geteilt wird, wie viele Stücke bekommt man höchstens? Auch in n Dimensionen macht dieses Problem einen Sinn: Unser "Messer" zerteilt eine n-dimensionale Dampfnudel, also einen Block im $\mathbb{R}^n$, entlang *Hyperebenen*, das sind (n – 1)-dimensionale Unterräume. Wie viele Dampfnudelstückchen bekommen wir höchstens, wenn wir m Schnitte machen?

Alle diese Probleme haben mit zählen zu tun, also mit Kombinatorik, der Wissenschaft vom Zählen. Das Wechselspiel von kombinatorischem Rechnen und geometrischen Erkenntnissen machen das gestellte Problem spannend, und wir wollen dieses Problem und ein damit verwandtes in diesem Artikel erforschen.

In einem Video erarbeitet der bekannte Mathematiker und Mathematikdidaktiker GEORG POLYA das Problem mit Studenten (siehe [5]). COXETER behandelt das Problem knapp in [1]. In [4] gibt es eine schöne Internetseite dazu. FRICKE behandelt in [2] das Problem in der Dimension 2 und in [3] in der Dimension 3. Dabei geht er noch auf verschiedene andere Aspekte ein (die minimale Anzahl Stücke, die Anzahl der Punkte und Kanten, usw.). Die erste Behandlung dieses Problems in der Literatur findet sich in [6] für den dreidimensionalen Fall.

2. Etwas Kombinatorik (Wiederholung)

Die Anzahl Möglichkeiten, aus r Objekten k auszuwählen, wird bekanntlich mit $\binom{n}{k}$ (gelesen n über k) bezeichnet. Wegen ihres Vorkommens im binomischen Lehrsatz heißen diese Zahlen *Binomialkoeffizienten*. Sie sind ursprünglich nur für r ≥ k ≥ 0 definiert, wobei $\binom{r}{0} = 1$ gesetzt wird, denn aus r Objekten keines auszuwählen ist genau eine Art möglich: Man wählt nichts. Für r < k definieren wir $\binom{\mathrm{r}}{\mathrm{k}} = 0$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie: a) $\binom{5}{3} = 10$; b) $\binom{r}{k} = \binom{r}{r-k}$; c) $\binom{r}{1} = r$; d) $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$.

Für unsere Überlegungen benötigen wir im Weiteren insbesondere die folgende Formel:

Satz 2.1: Für ganze Zahlen r ≥ k ≥ 0 gilt: $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}$

Beweis: Wir haben eine Menge $X=\{x_1,\ldots,x_r\}$ mit r Elementen und möchten zählen, auf wie viele Weisen wir eine k-elementige Teilmenge wählen können.

Wie viele Teilmengen enthalten das Element x_r? So viele, wie es Möglichkeiten gibt, aus den übrigen Elementen (k-1)-elementige Teilmengen zu bilden, also $\binom{r-1}{k-1}$ viele.

Wie viele Teilmengen enthalten das Element x_r nicht? So viele, wie es Möglichkeiten gibt, aus den übrigen r-1 Elementen k-elementige Teilmengen zu bilden, also $\binom{r-1}{k}$ viele. Addiert man die beiden Binomialkoeffizienten, so erhält man die Behauptung.

Mit dieser Formel entsteht das so genannte PASCAL'sche Dreieck. Man schreibt in die r-te Zeile alle Binomialkoeffizienten:

$$\binom{r}{0} \qquad \binom{r}{1} \qquad \ldots\ldots \qquad \binom{r}{r-1} \qquad \binom{r}{r}$$

und erhält immer als Summe der beiden darüber stehenden den nächsten darunter (wobei man sich fehlende Zahlen als Nullen vorstellt):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Zum Schulstoff gehört es, wie Binomialkoeffizienten mit dem binomischen Lehrsatz zusammenhängen, z. B. ergibt die 4. Zeile $(a + b)^3 = \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + \mathbf{1}\cdot b^3$.

3. Höhere Dimensionen

Das Pizzaproblem in der Ebene lautet: In wie viele Teile zerlegen m Geraden die Ebene höchstens? Es wird also nicht mehr nur eine Pizza, also ein endlicher Ausschnitt der Ebene, zerlegt, sondern gleich die ganze Ebene. Das macht aber für das Ergebnis keinen Unterschied, weil alle Schnitte von Geraden in der Ebene sich in einem endlichen Ausschnitt der Ebene befinden; und machen wir die Pizza nur groß genug, so befinden sich alle Schnitte im Inneren der Pizza und es genügt, Pizzastücke zu zählen.

Wir zerteilen auch statt einer Dampfnudel den gesamten $\mathbb{R}^3$ und haben also im 3-dimensionalen die Frage: In wie viele Teile zerlegen m Ebenen den 3-dimensionalen Raum höchstens?

Wir möchten unser Pizzaproblem im $\mathbb{R}^n$ formulieren. Der $\mathbb{R}^n$ wird durch einen $\mathbb{R}^{n-1}$ in zwei Teile zerlegt. Zum Beispiel erhält man den $\mathbb{R}^4$ als Menge aller Punkte der Form (x_1, x_2, x_3, x_4) mit $x_i \in \mathbb{R}$ und der Teilraum $\mathbb{R}^3$ der durch alle Punkte der Form $(x_1, 0, x_3, x_4)$ gegeben ist, halbiert den $\mathbb{R}^4$ in die Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) mit positivem x_2 und in die anderen mit negativem x_2.

Ein (n – 1)-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^n$ heißt *Hyperebene*. Unser verallgemeinertes Pizzaproblem lautet dann: In wie viele Teile zerlegen m Hyperebenen den $\mathbb{R}^n$ höchstens? Diese Zahl sei H(n,m).

Zwei Ebenen schneiden sich im $\mathbb{R}^3$ in einer Geraden (wenn sie sich schneiden). Zwei Hyperebenen a und b aus $\mathbb{R}^4$ schneiden sich in einer 2-dimensionalen Ebene (wenn sie sich schneiden). Eine dritte Hyperebene, die a und b schneidet, hat mit beiden nur noch eine Gerade gemeinsam. Vier Hyperebenen schneiden sich im Allgemeinen nur noch in einem Punkt. Das kann man sich klar machen, indem man als Hyperebenen jeweils eine Komponente von (x_1, x_2, x_3, x_4) auf null setzt.

Aufgabe 3: Beweisen Sie: 2 Hyperebenen in einem $\mathbb{R}^n$ schneiden sich in einem $\mathbb{R}^{n-2}$ oder sind parallel.

Kommt eine dritte Hyperebene hinzu, so bleibt nur noch ein $\mathbb{R}^{n-3}$ im Schnitt. n Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ schneiden sich im Allgemeinen in einem Punkt. Kommt eine weitere Hyperebene hinzu, kann man sie so legen, dass sie nicht mehr durch diesen Punkt geht, und will man möglichst viele Teile erhalten, dann ist es auch günstig, diese Ebene nicht auch noch durch den Punkt zu legen.

Der $\mathbb{R}^n$ wird durch k Hyperebenen in die meisten Teile zerlegt, wenn die Hyperebenen *allgemeine Lage* zueinander haben, das heißt: Die k Hyperebenen liegen so zueinander, dass jeweils n aber niemals n + 1 Hyperebenen durch einen Punkt gehen. Hat man nicht allgemeine Lage, so kann man durch leichtes Verwackeln von einigen dieser Hyperebenen allgemeine Lage erzeugen. Legt man die k Hyperebenen „zufällig“ in den $\mathbb{R}^n$, so haben sie allgemeine Lage zueinander.

Haben die Hyperebenen allgemeine Lage zueinander, so entstehen die meisten Teile: Keine 2 der Hyperebenen sind parallel, je zwei schneiden sich in einem $\mathbb{R}^{n-2}$ und die Phänomene aus Abbildung 2 treten nicht auf.

4. Die Lösung des Pizzaproblems

Für die Dimension 2 löst uns die Aufgabe 1 das Pizzaproblem: $m \geq 1$ Geraden erzeugen

$H(2,m) = f(m) = 1 + m(m+1)/2$ Gebiete. Das kann man auch schreiben als:

$H(2,m) = 1 + m + m(m-1)/2$ oder, nach 3. und 4. von Aufgabe 2,

$$H(2,m) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2}. \tag{1}$$

Wir versuchen das Pizzaproblem in Dimension 3. Der Anfang ist leicht: $H(3,0) = 1$, $H(3,1) = 2$.

Haben wir bereits m - 1 Ebenen $E_1,\dots,E_{m-1}$ mit H(3, m - 1) vielen Teilen, dann werden durch eine weitere Ebene E_m manche Gebiete zerteilt und andere bleiben bestehen. Durch die Ebene E_m kommen genau so viele Teile neu hinzu, wie zerteilt werden, also: $H(3,m) = H(3,m-1) + z$, wobei z die Anzahl der Brocken ist, die zerteilt werden. In E_m entsteht durch jede Ebene E_i mit $i < m$ eine Gerade und jedes Gebiet der durch diese Geraden zerlegten Ebene E_m führt zu einem neuen unterteilten Teil im 3-dimensionalen. Es gilt also $z = H(2, m-1)$ und damit:

$$H(3, m) = H(3, m-1) + H(2, m-1). \tag{2}$$

Damit beweisen wir:

$$H(3,m) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}. \tag{3}$$

Dazu machen wir Induktion über m. Die Formel stimmt offensichtlich für m = 0 und nach Induktion nehmen wir an, es gilt:

$$H(3,m-1) = \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{3}$$

Setzt man das, (3) und (1) in (2) so erhält man:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} = 1 + \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{3} + \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2}$$

Man erhält durch geschicktes Zusammenfassen der Terme der rechten Seite mit Hilfe von Satz 2.1 gerade die linke Seite und (3) ist bewiesen.

Aufgabe 4: Beweisen Sie allgemein: $H(n, m) = H(n, m-1) + H(n-1, m-1)$ (4)

Jetzt können wir das Pizzaproblem allgemein lösen:

Satz 4.1: m Hyperebenen in allgemeiner Lage zerlegen den $\mathbb{R}^n$ in

$$H(n,m) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{n} \text{ Gebiete.}$$

Beweis: Wir wählen ein festes n > 3 für das wir den Satz beweisen wollen und nehmen an, für alle kleineren n sei der Satz bereits bewiesen. Wegen Aufgabe 4 können wir Induktion über m machen: Der Induktionsanfang ist leicht: H(n,0) = 1 und H(n,1) = 2. Nach Induktionsannahme ist

$$H(n,m-1) = \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2} + \ldots + \binom{m-1}{n}$$

und

$$H(n-1,m-1) = \binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2} + \ldots + \binom{m-1}{n-1}.$$

Aus Aufgabe 4 folgt $H(n,m) = H(n,m-1) + H(n-1,m-1) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{n}$ durch Zusammenfassen entsprechender Terme und man benutze $\binom{m-1}{0} = \binom{m}{0}$ und $\binom{m-1}{0} = 1$.

Die Autoren haben Satz 4.1 auch direkt, ohne Induktion, durch Auswahl von Gebieten über verschiedene Dimensionen bewiesen.

5. Die unbeschränkten und die beschränkten Teile

Nachdem jetzt das Problem vollständig gelöst ist, ist die folgende Frage nahe liegend: Wie viele der Pizzastücke sind Randstücke? Oder: C(n,m) sei die Anzahl der Brocken von H(n,m) im $\mathbb{R}^n$, die unbeschränkt sind. Man bestimme C(n,m).

Betrachten wir zuerst das Problem in der Ebene: Keine Gerade erzeugt ein unbeschränktes Gebiet, d. h.
C(2,0) = 1. Eine Gerade erzeugt 2 unbeschränkte Gebiete, d. h. C(2,1) = 2. Jede weitere Gerade in der Ebene erzeugt zwei neue unbeschränkte Teile. Daraus folgern wir leicht C(2,m) = 2m.

Aufgabe 5(schwer): Beweisen Sie allgemein

$$C(n, m) = 2 \cdot H(n-1, m-1). \tag{5}$$

Hat man (5) erst mal bewiesen, so kann man mit Hilfe von Satz 4.1 leicht

$$C(n,m) = 2\left(\binom{m-1}{0} + \binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{2} + \ldots + \binom{m-1}{n-1}\right)$$

folgern und (4) führt zu

$$C(n, m) = C(n, m-1) + C(n-1, m-1), \tag{6}$$

also derselben Rekursion wie für H(n, m).

Auch die beschränkten Teile im $\mathbb{R}^n$, also $B(n, m) = H(n, m) - C(n, m)$ kann man betrachten und erhält ebenso:

$$B(n, m) = B(n, m-1) + B(n-1, m-1). \tag{7}$$

Der Beweis von Formel (7) ist nicht schwer: Sind m – 1 Hyperebenen im $\mathbb{R}^n$ gegeben, so hat man B(n, m – 1) beschränkte Teile. Kommt die m-te Hyperebene hinzu, so erhält man genau für jeden der beschränkten Teile auf dieser Hyperebene (also einer Dimension niedriger) einen neuen beschränkten Brocken eine Dimension höher. Letzterer durchtrennt nämlich immer ein Gebiet so, dass ein neuer beschränkter Teil dabei ist. Man benötigt hier allgemeine Lage: Hätte man nämlich beispielsweise zwei parallele Geraden, also nicht allgemeine Lage, in der Ebene und führt als m-te Gerade eine dazu senkrechte Gerade g ein, so enthält g einen beschränkten Teil, obwohl es keinen beschränkten Teil in der Ebene abtrennt.

Ein ganz ähnlicher Beweis funktioniert auch für Formel (6).

Satz 5.1: $B(n, m) = \binom{m-1}{n}$

Beweis: Für n = 1 ist die Formel wahr, wegen: $B(1, m) = m - 1$ und $\binom{m-1}{1} = m - 1$. Der Beweis ist mit doppelter Induktion ganz ähnlich dem von Satz 4.1: Wir wählen ein festes $n \geq 2$ für das wir den Satz beweisen wollen und nehmen an, für alle kleineren n sei der Satz bereits bewiesen. Wir wollen $B(n,m) = \binom{m-1}{n}$ zeigen und wir wissen bereits wegen Formel (7) und der Induktionsannahme:

$$B(n, m) = B(n, m-1)+B(n-1, m-1) = \binom{m-2}{n} + \binom{m-2}{n-1}$$

Satz 2.1 mit r = m – 1 und k = n beweist uns das Gewünschte.

Mit Hilfe von Formel (7) und Satz 5.1 kann man die schwere Aufgabe 5 auch leichter beweisen, hat aber dadurch keinen direkten Beweis sondern nur einen Induktionsbeweis.

6. Rekursionen in Mathematica

Die Rekursionsformeln (4) und (6) erlauben uns, H(n,m) und C(n,m) rekursiv auf dem Computer zu berechnen. Man braucht aber Abbruchbedingungen, die Anfangswerte vorgeben. Leicht sieht man

$$H(1, m) = m + 1, \tag{8}$$

denn m verschiedene Punkte zerlegen eine Gerade in m + 1 Teile. Die Dimension 1 ist natürlich auch für die unbeschränkten Komponenten leicht:

$$C(1, m) = 2, \quad \text{für } m > 0 \tag{9}$$

Wenn eine Gerade von mindestens einem Punkt geteilt wird, so gibt es genau zwei unbeschränkte Teile.

Aufgabe 6: Beweisen Sie: $C(n, m) = H(n, m) = 2^m$ für $m \leq n$ (10)

Mit Hilfe von Satz 4.1 und (10) sieht man $\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + ... + \binom{m}{m} = 2^m$, eine bekannte Formel.

Die beiden Abbruchbedingungen (8) und (10) ergeben zusammen mit (4) das folgende rekursive Mathematica-Programm. Dabei heißt `/;` *unter der Bedingung, dass*

```
H[n_,m_] := 2^m    /; m<=n
H[1 ,m_] := m+1;
H[n_,m_] := H[n,m-1] + H[n-1,m-1];
```

Seine Laufzeit ist exponentiell. Mit geschicktem ”merken” der bereits berechneten Werte lässt sich ein Programm auf dieser Basis in linearer Laufzeit schreiben.

Für C(n,m) erhalten wir aus (9) und (10) zusammen mit (6) ein analoges Programm:

```
c[n_,m_] := 2^m     /; m<=n
```

```
c[1 ,m_] := 2        /; m>0
c[n_,m_] := c[n,m-1] + c[n-1,m-1];
```

Die beiden Programme unterscheiden sich nur in der Dimension $n = 1$ voneinander.

7. Lösungen der Aufgaben

Zu Aufgabe 1:

$f(0) = 1$, denn ohne einen Schnitt haben wir 1 Stück. Es gilt $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$ wie man leicht mit entsprechenden Skizzen sieht. Gilt $f(m - 1) = k$, so folgt $f(m) = k + m$. Hat man nämlich bereits $m - 1$ Geraden und nimmt die m-te Gerade hinzu, so hat sie mit den anderen $m - 1$ Geraden $m - 1$ Schnitte und deswegen werden m alte Gebiete neu unterteilt.

Jetzt brauchen wir nur noch summieren:

$$f(m) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (m - 1) + m$$

Das ist: *eins plus die Summe aller Zahlen von 1 bis m*, also $f(m) = 1 + m(m + 1)/2$.

Zu Aufgabe 2:

a) Von den 5 Objekten $\{A,B,C,D,E\}$ kann man die 10 Tripel

$$(A,B,C), (A,B,D), (A,B,E), (A,C,D), (A,C,E),$$
$$(A,D,E), (B,C,D), (B,C,E), (B,D,E), (C,D,E)$$

wählen.

b) Es gibt genauso viele Möglichkeiten k-elementige Teilmengen zu bilden, wie $(r - k)$-elementige, denn zu jeder k-elementigen Teilmenge gehört genau eine $(r - k)$-elementige: Die Menge der Elemente, die nicht gewählt wurden.

c) Ein Element lässt sich aus einer r-elementigen Menge auf r Weisen wählen: Jedes Element kann gewählt werden.

d) Für das erste Element gibt es m Möglichkeiten, für das zweite nur noch $m - 1$. Beide können aber in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.

Zu Aufgabe 3:

Jede Hyperebene hat gegenüber dem Ausgangsraum eine Dimension weniger, so dass der Schnitt der beiden zwei Dimensionen weniger hat.

Zu Aufgabe 4:

Das Argument ist letztlich dasselbe wie im Fall $n = 3$: Haben wir bereits $m - 1$ Hyperebenen $E_1,\dots,E_{m-1}$ mit $H(n,m - 1)$ vielen Teilen, dann werden durch eine weitere Hyperebene E_m manche Gebiete zerteilt und andere bleiben bestehen. Durch die Hyperebene E_m kommen genau so viele Teile neu hinzu, wie zerteilt werden, also: $H(n,m) = H(n,m - 1) + z$, wobei z die Anzahl der Brocken ist, die zerteilt werden. In E_m entsteht durch jede Hyperebene E_i mit $i < m$ ein $\mathbb{R}^{n-2}$ und jedes Gebiet der durch diese $\mathbb{R}^{n-2}$ zerlegten Hyperebene E_m führt zu einem neuen unterteilten Teil im n-dimensionalen. Es gilt also $z = H(n - 1, m - 1)$, und wir erhalten die gewünschte Formel.

Zu Aufgabe 5:

Diese Lösung ist nur verständlich für diejenigen, die projektive Geometrie kennen.
Wir betten den $\mathbb{R}^n$, in dem die m Hyperebenen liegen, in den $\mathbb{R}^{n+1}$ ein und wählen einen Punkt $O \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ als Mittelpunkt einer n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Durch Diametralpunktidentifizierung (Identifikation gegenüberliegender Punkte auf der Sphäre) erhalten wir aus S^n den projektiven Raum P^n. Jede Hyperebene $E_i \subset \mathbb{R}^n$ projiziert auf eine S^{n-1} (einen Großkreis im Fall $n = 2$) auf S^n und damit auf eine Hyperebene $P_i \subset P^n$. Der Fernhyperebene in P^n entspricht der Äquator auf S^n. Den unbeschränkten Brocken des zerteilten $\mathbb{R}^n$ entsprechen Brocken dieses Äquators, in dem die $(n - 2)$-dimensionalen Unterräume in allgemeiner Lage liegen, weil die Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage liegen. Wir zählen also die Brocken des Äquators eine Dimension niedriger. Davon gibt es

doppelt so viele wie im zugehörigen projektiven Raum. Die Diametralpunktidentifizierung, die wir durchführen, um aus S^n den P^n zu bauen, führen wir entlang der Projektion einer Hyperebene durch, so dass wir nur die Brocken von m – 1 ”Hypergeraden” in dem projektiven Äquator P^{n-1} zählen, den wir dann als $\mathbb{R}^{n-1}$ auffassen können. In Abbildung 3 ist für den Fall n = 2 der $\mathbb{R}^2$ oben abgebildet und unten sieht man eine halbe 2-Sphäre. Der eingezeichnete Äquator muss diametralpunktidentifiziert werden. Die Geraden im $\mathbb{R}^2$ projizieren auf halbe Großkreise.

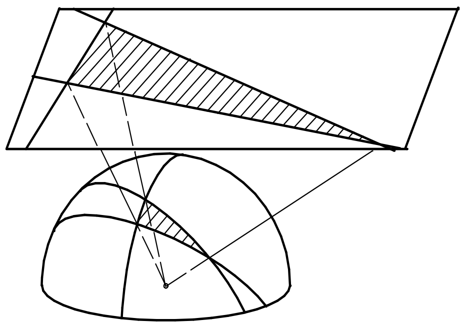

Abbildung 3

Zu Aufgabe 6:

Wir beweisen zuerst $H(n, m) = 2^m$ für $m \leq n$:

Haben wir bereits k – 1 Hyperebenen $E_1,\ldots,E_{k-1}$ im $\mathbb{R}^n$ und gilt $k < m \leq n$, so wird die neue Hyperebene E_k *jeden* bereits bestehenden Brocken des zerteilten $\mathbb{R}^n$ und gilt $k < m \leq n$, so wird die neue Hyperebene in zwei Teile teilen. Die Anzahl Brocken verdoppelt sich also bei jedem Einfügen einer neuen Hyperebene und das führt sofort zur angegebenen Formel. Jeder der entstehenden Brocken ist unbeschränkt und deshalb gilt im Fall von kleinen m die Formel C(n, m) = H(n ,m).

Literatur

H. S. M. Coxeter [1]: Introduction in Geometry, Springer Verlag 1998

Arnold Fricke [2]: Problemlöseprozesse bei Anzahlfragen zur n-Geradenkonfiguration, Teil I; Didaktik der Mathematik, 14(1), 1986

Arnold Fricke [3]: Anzahlfragen zur n-Ebenenkonfiguration, Teil I; Der math. und naturw. Unterricht, 40(8), 1987

Ken Jewell [4]: How to get the Most Out of Your Pizza; 2004

http://mcs.edgewood.edu/math/jewell/presentations/pizza.htm

Georg Polya [5]: Teaching us a lesson; Video der Math. Assoc. of America; 1965

Jakob Steiner [6]: Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes, Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 1, 1826, Seiten 349 - 364

Anschriften der Autoren:

Prof. Dr. Wolfgang Metzler
Fachbereich Mathematik
Johann Wolfgang Goethe Universität
Postfach 111932
D-60054 Frankfurt
hog-angeloni.metzler@math.uni-frankfurt.de

Dr. Stephan Rosebrock
Fakultät für Mathematik
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Bismarckstr. 10
D-76133 Karlsruhe
rosebrock@ph-karlsruhe.de