Stephan Rosebrock

Aus Spiegelachsen Figuren bauen

1. Einleitung

Werden in der Schule Spiegelungen behandelt, so untersucht man unter anderem gegebene Figuren auf Spiegelsymmetrie. Umgekehrt lässt man auch Figuren mit Hilfe von Spiegelungen erzeugen. Fast immer geschieht dieses aber auf dieselbe Art und Weise: Man gibt eine halbe Figur vor, die von einer Spiegelachse begrenzt wird, und fordert auf, das Bild zu ergänzen. Lässt man jedoch bei der Erzeugung solcher Bilder mehr Spiegelungen zu als nur eine, so kommt man zu einer wesentlich größeren Vielfalt an Figuren, und kann damit hervorragend das geometrische Vorstellungsvermögen schulen und Anfänge von Algebra lehren, was in dem Artikel erläutert werden wird. In der didaktischen Literatur findet man nur ansatzweise die Thematik für die Grundschule (siehe z. B. [2]) und in Schulbüchern für die Sekundarstufe I.

Der mathematische Hintergrund dazu geht zurück auf wichtige Sätze von POINCARÉ und SVARC-MILNOR (siehe etwa [1] oder etwas elementarer [3]). Dort wird dargestellt, wie Spiegelungen Symmetriegruppen von Figuren erzeugen können und wie Figuren zerlegt durch ihre Spiegelachsen (bis auf quasi-Isometrie) eineindeutig auf ihre Symmetriegruppen abbildbar sind. Die mathematische Theorie dazu ist schwierig und wird für den Leser sowie für die Schüler nicht benötigt. Ideen dazu lassen sich jedoch vermitteln. In diesem Aufsatz stellen wir die geometrischen Inhalte elementar für die Sekundarstufe I aufbereitet dar. In Fußnoten werden die Zusammenhänge zur Gruppentheorie[1] erläutert.

2. Spiegelungen und Fundamentalbereiche

Eine *Figur* ist für uns eine Teilmenge der Ebene. Figuren können beschränkt sein, wie reguläre n-Ecke, oder unbeschränkt, wie Bandornamente. Ist F eine Figur in der Ebene, so sei S(F) eine Menge von Geradenspiegelungen der Ebene auf sich – manchmal auch die Menge der dazugehörigen Spiegelachsen – die F auf sich abbilden. Wir wollen fordern, dass die Geraden aus S(F) die Figur F in lauter kongruente Teile zerlegt. Das ist für die meisten Figuren immer erfüllt, wenn S(F) die Menge *aller* Spiegelungen von F ist und das ist für unsere Anwendungen normalerweise der Fall.

Wir wollen unsere Überlegungen an dem Beispiel der Figur eines Quadrats nachvollziehen (siehe Abbildung 1).

Das gestrichelt gezeichnete Quadrat sei unsere Figur F. Die Spiegelachsen S(F) sind durchgezogen gezeichnet.

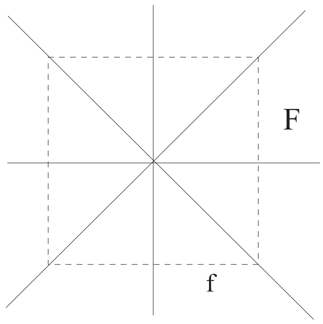

Abb. 1

Die Spiegelachsen zerlegen die Figur F in lauter kongruente Teile. Ein beliebiges dieser Teile heißt *Fundamentalbereich* f der Figur[2]. Im Fall des Quadrats besteht ein Fundamentalbereich also aus der Hälfte einer Seite des Quadrats. Streng genommen besteht ein Fundamentalbereich aus dem gesamten, in unse-

[1] Ich danke Frau BARBARA SCHMIDT-THIEME für wertvolle Kommentare zu diesem Artikel.

[2] f hängt streng genommen nicht nur von der Figur ab, sondern auch von der gewählten Menge S(F) von Spiegelungen.

rem Fall unbeschränkten Gebiet zwischen den beiden Spiegelachsen, in dem f liegt.

Würden wir dasselbe mit einem Kreis statt mit einem Quadrat versuchen, würden wir scheitern, weil durch den Kreismittelpunkt unendlich viele Spiegelachsen verlaufen. Wir fordern also, dass unsere Figur F so beschaffen sein muss, dass durch jeden Punkt der Ebene nur endlich viele Spiegelgeraden aus S(F) verlaufen[3].

Wir betrachten jetzt nur den Fundamentalbereich f und die Spiegelungen a, b aus S(F), deren zugehörige Spiegelachsen f beranden (siehe Abbildung 2).

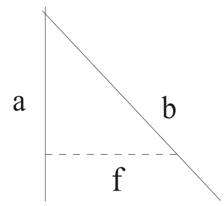

Abb. 2

a und b *erzeugen* das Quadrat aus f in folgendem Sinn[4]: Spiegelt man f an a oder an b, so erhält man a(f) bzw. b(f). Spiegelt man b(f) an a, so erhält man ab(f), usw. Die Beschriftungen werden also von rechts nach links gelesen: ab(f) heißt: Spiegele f zuerst an b und dann an a. Ebenso kann man die Bilder der Spiegelachsen betrachten: Spiegelt man b an a, so erhält man a(b). Insgesamt ergibt sich aus Abbildung 2 durch fortgesetztes Spiegeln die Abbildung 3.

Aufgabe 1: Stelle Spiegel auf die beiden durchgezogenen Linien in Abbildung 2 (oder stelle dir vor, es stünden welche da). Was siehst du in den Spiegeln, wenn du hineinguckst?

Aufgabe 2: Wie musst du zwei Spiegelgeraden mit einem Fundamentalbereich f zeichnen, damit du ein reguläres 6-Eck erhältst? Wie musst du zwei Spiegelgeraden mit einem Fundamentalbereich f zeichnen, damit du ein reguläres n-Eck für beliebige n > 2 erhältst?

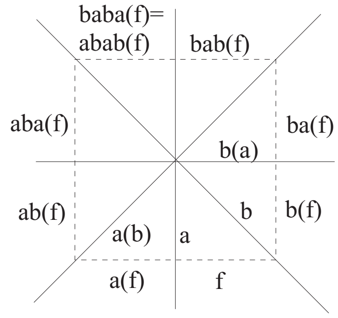

Abb. 3

Wir formulieren unsere bisherigen Erkenntnisse. Dazu sei F eine Figur mit Fundamentalbereich f und S(F) eine Menge von Spiegelungen, die F auf sich selbst abbilden und deren Achsen F in Teile zerlegen, die alle kongruent zu f sind[5]:

Satz 1: Sind $s_1, \ldots, s_n \in S(F)$ die Spiegelungen, deren zugehörige Spiegelachsen im Rand von f liegen, so erzeugen diese Spiegelungen F aus f. Ebenso erzeugen die Elemente $s_1, \ldots, s_n$ alle Spiegelungen aus S(F).

Einerseits gibt es 8 Symmetrien, die das Quadrat auf sich abbilden: Die Identität, 3 nicht-triviale Drehungen und 4 Spiegelungen. Andererseits zerlegen die Spiegelachsen das Quadrat in acht Teile. Jedes Teil g enthält als Bezeichnung genau die Abbildung, die den Fundamentalbereich f auf g abbildet – also genau eine Symmetrie des Quadrats auf sich. Es gilt allgemein[6]:

---

[3] mathematisch ausgedrückt: Die Symmetriegruppe der Figur F soll diskontinuierlich auf F operieren.

[4] a und b sind Erzeugende der Symmetriegruppe des Quadrats (oder einer ihrer Untergruppen) und erzeugen damit aus f die gesamte Figur.

[5] Satz 1 besagt gruppentheoretisch: Die Spiegelungen entlang Achsen aus dem Rand des Fundamentalbereichs erzeugen die gesamte durch Spiegelungen aus S(F) erzeugte Gruppe.

[6] Satz 2 besagt gruppentheoretisch: Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen der durch S(F) erzeugten Gruppe und der Menge der Teile, in die F durch S(F) zerlegt wird.

Satz 2: Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen der Menge der Abbildungen von F auf sich, die durch die Spiegelungen aus S(F) erzeugt werden, und der Menge der Teile, in die F durch S(F) zerlegt wird.

Aufgabe 3: Gegeben sei ein reguläres 6-Eck F. In wie viele Teile zerlegen dessen Spiegelachsen die Figur F? Welche Symmetrien des regulären 6-Ecks auf sich gibt es?

Aufgabe 4: Beantworte Aufgabe 3 für das reguläre n-Eck für beliebiges n > 2.

Aufgabe 5: Was erhältst du, wenn du zwei Spiegel senkrecht zueinander aufstellst und dazwischen eine gestrichelte Linie wie in Abbildung 4 ist?

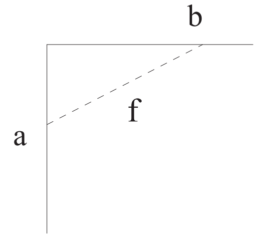

Abb. 4

Als Beispiel einer unendlichen Figur betrachten wir die Spiegelungen a und b und den Fundamentalbereich 1 in Abbildung 5.

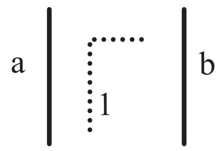

Abb. 5

Daraus erzeugen wir das Bandornament aus Abbildung 6. Natürlich geht das Bandornament nach rechts und nach links unendlich weiter.

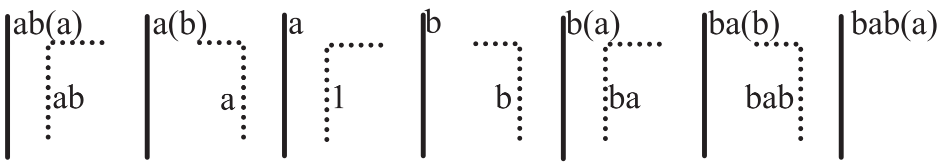

Abb. 6

Dabei bezeichnen wir zur Vereinfachung den Fundamentalbereich als 1 und seine Bilder, statt beispielsweise ab(f) nun kürzer als ab.

Aufgabe 6: Verbinde, vielleicht nur gedanklich, in Abbildung 5 die oberen Randpunkte von a und b mit einem zusätzlichen Spiegel. Welche Figur erzeugst du jetzt? Beschrifte die Figur entsprechend Abbildung 6.

Man kann schon anhand der Beispiele des Bandornaments und des Quadrats elementare Sätze über das Verknüpfen von Spiegelungen einsehen: In Abbildung 2 kann das Teil ab(f) des Quadrats auch durch eine 90^o-Drehung im Uhrzeigersinn aus f gewonnen werden. Es gilt also, dass die Verknüpfung zweier Spiegelungen, deren Achsen einen Winkel von 45^o bilden, nämlich a und b, eine Drehung um 90^o ergeben. Aus der Beziehung baba(f)=abab(f), die wir aus Abbildung 3 ablesen, erkennen wir, dass $(ab)^4 = 1$ gilt. Das erstaunt nicht: da ab eine 90^o-Drehung ist, muss $(ab)^4$ eine 360^o-Drehung und damit die Identität sein.

Aufgabe 7: Zeige mit Hilfe von Abbildung 6, dass die Hintereinanderausführung der Spiegelungen an zwei parallelen Geraden eine Translation um das Doppelte des Abstands der beiden Geraden ist.

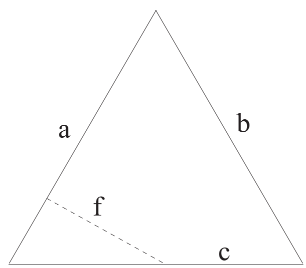

Abb. 7

Aufgabe 8: Stelle gedanklich Spiegel auf die drei durchgezogenen Linien aus Abbildung 7, ein gleichseitiges Dreieck, und zeichne einige Bilder des Fundamentalbereichs f und die Bilder der Spiegel. Beschrifte deine Zeichnung.

Aufgabe 9: Stelle gedanklich Spiegel auf die 4 Kanten eines Quadrats. Was erhältst du? Man kann, indem man geschickt den Fundamentalbereich einzeichnet, schöne Muster erhalten.

3. Methodisches für den Unterricht

Zentrale Voraussetzung zur Behandlung dieses Stoffs im Unterricht ist der souveräne Umgang mit Spiegelungen. Von daher eignet sich die Einheit etwa ab der 7. Klasse. Der Autor hat in einer siebten Realschulklasse die Sequenz getestet.

Lernziele sind dabei insbesondere:

- Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens,
- klarere Vorstellung von der Symmetrie der untersuchten Figuren gewinnen,
- Hintereinanderausführung von Spiegelungen, und elementare Sätze im Zusammenhang von Hintereinanderausführung von Spiegelungen plausibel machen,
- mathematische Begriffe lernen, wie Fundamentalbereich, erzeugen von Abbildungen durch andere, etc.

Die Hintereinanderausführung von Spiegelungen ist normalerweise nicht Schulstoff. Sie ist für die Schüler schwer nachzuvollziehen. Mehrere Abbildungen hintereinander auszuführen ist im Allgemeinen ein recht komplexer Vorgang. Die Hintereinanderausführung ergibt sich aber hier auf ganz kanonische Weise, ja man „sieht" sie sogar ganz direkt beim Hineinschauen in den Spiegel. Dabei ist es leichter zu verstehen, was es heißt, dass Abbildungen hintereinander ausgeführt werden, als wenn traditionell rein zeichnerisch Figuren etwa an zwei verschiedenen Achsen in Folge gespiegelt werden.

Lohnend ist insbesondere auch der sich durch die Beschriftung ergebende Übergang von der Geometrie zur Algebra. Beim Beschriften notieren die Schüler die Sequenz von geometrischen Spiegelungen algebraisch und beschreiben sie damit präzise.

Vor der Unterrichtssequenz sollten Spiegelungen noch einmal wiederholt werden. Insbesondere sollte geklärt werden, dass eine Strecke, die auf eine Gerade g im Winkel α im Punkt P trifft, beim Spiegeln an g auf eine Strecke abgebildet wird, die im Punkt P den Winkel $-\alpha$ zu g bildet.

Die Idee ist nun, den Schülern auf einem Arbeitsblatt die Zeichnung aus Abbildung 8 zu geben und sie aufzufordern, zu zeichnen, was sie sehen würden, wenn auf den durchgezogenen Linien Spiegel stünden. Dabei kann der Lehrer an der Tafel die ersten ein oder zwei Bilder des Fundamentalbereichs zeichnen um zu verdeutlichen, was gemeint ist. Wichtig ist, auf die Größen der Winkel hinzuweisen und die Schüler aufzufordern, sehr genau zu zeichnen.

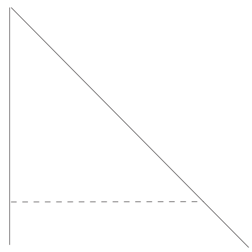

Abb. 8

Schüler mit einem guten geometrischen Vorstellungsvermögen werden schnell das Prinzip erkannt haben und können diese und die weiteren Aufgaben ohne Probleme lösen. Schülern mit mangelndem Vorstellungsvermögen kann man einen Spiegel zur Hilfe geben. Man kann ihn im Wechsel auf die beiden durchgezogenen Linien stellen und jeweils wieder neue Spiegelbilder sehen, die man aus den bereits gezeichneten erhält.

Der Lehrer stellt immer wieder die Frage: Welche Figur wird aus dem Fundamentalbereich mit Hilfe der Spiegelungen erzeugt? Begabteren Schülern kann man nach einer Einführungsphase erklären, was „erzeugen" heißt und sie dann an vielen Beispielen arbeiten lassen.

In einem weiteren Schritt kann man gemeinsam mit den Schülern die entstehenden Figuren beschriften wie in Abbildung 3. Ganz nebenbei lernen die Schüler hier, Spiegelungen durch Hintereinanderausführung miteinander zu verknüpfen. Das geschieht mit Aussagen wie: „Spiegelt man b(f) im Spiegel a, so erhält man ab(f). Man erhält also ab(f), indem man f zuerst in b und dann in a spiegelt."

Anschließend können die Schüler selbstständig Beispiele probieren. In Frage kommen:

- Reguläre n-Ecke, also zwei Spiegel, die in einem Winkel von 180/n Grad aufgestellt sind.
- Das Rechteck oder die Raute, erzeugt durch zwei Spiegel, die in einem Winkel von 90^o aufgestellt sind.
- Die Zerlegungen der euklidischen Ebene, erzeugt beispielsweise von den Spiegeln aus Abbildung 7 oder von vier, im Quadrat aufgestellten Spiegeln oder erzeugt von Spiegeln die ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck bilden.
- Reguläre Polyeder im R^3. Zum Beispiel sieht man zwei Seiten eines Würfels, wenn man außer den beiden Spiegeln in Abbildung 8 noch auf die gestrichelte Linie einen Spiegel stellt, den man um 45^o nach hinten abkippt. In diesem Fall ist eine „Figur" also ein dreidimensionaler Körper und statt Spiegelachsen nehmen wir Spiegelebenen. Ansonsten gelten die obigen Sätze und die Theorie analog. Man kann Analoges mit jedem regulären Polyeder machen. Wenn man die Spiegel entsprechend stellt, sieht man wirklich Teile des jeweiligen Polyeders.
- Bandornamente, wie das aus Abbildung 6 und Abbildung 9

Sind die Beispiele genügend gefestigt, so kann man leicht Aussagen der folgenden Form finden:

Das Produkt von Spiegelungen entlang zweier Achsen, die sich in einem Punkt P im Winkel α schneiden, ist eine Drehung um P um den Winkel 2α, wobei die Drehrichtung davon abhängt, welche Spiegelung man zuerst ausführt.

oder

Das Produkt von Spiegelungen entlang zweier paralleler Geraden mit dem Abstand k ist eine Translation um den Abstand 2k senkrecht zu den Spiegelachsen, wobei die Translationsrichtung davon abhängt, welche Spiegelung man zuerst ausführt.

Diese Aussagen sieht man, wie oben erläutert, am regulären n-Eck und an Bandornamenten.

4. Lösungen zu den Übungsaufgaben

Zu Aufgabe 1: Man sieht das Quadrat aus Abbildung 1 zusammen mit den Bildern der Spiegel als durchgezogene Linien in Abbildung 1.

Zu Aufgabe 2: Die Spiegelgeraden werden im Winkel von 30° zueinander gezeichnet. Die gestrichelte Linie verläuft senkrecht zu einem der beiden Spiegel. Sieht man dann in die Spiegel, so sieht man ein reguläres 6-Eck. Stellt man die Spiegel im Winkel von 180/n ° Grad auf, so sieht man ein reguläres n-Eck.

Aufgabe 3: Das reguläre 6-Eck wird durch seine Spiegelachsen in 12 Teile zerlegt. Nach Satz 2 gibt es auch 12 Symmetrien des regulären 6-Ecks: 6 Spiegelungen, Drehungen um 60°, 120°, 180°, 240° und 300° und die Identität.

Aufgabe 4: Das reguläre n-Eck wird durch seine n Spiegelachsen in 2n Teile zerlegt. Nach Satz 2 gibt es auch 2n Symmetrien des regulären n-Ecks: n Spiegelungen, Drehungen um 360/n °, 2·360/n °, …. , (n-1)·360/n ° und die Identität.

Aufgabe 5: Eine Raute mit ihren beiden Spiegelachsen.

Aufgabe 6: Es entsteht das Bandornament aus Abbildung 9. Da die Spiegel a und c senkrecht zueinander stehen, gilt ac = ca (ebenso bc = cb). c kommutiert also mit a und mit b. Daher sind mehrere Bezeichnungen für die Bilder des Fundamentalbereichs möglich. Etwa kann man statt cba auch bca oder bac schreiben. In der Tat ist es egal, ob man zuerst in a und dann in b und zuletzt in c spiegelt oder zuerst in c dann in a und zuletzt in b, wie man sich anhand von Abbildung 9 klar machen kann.

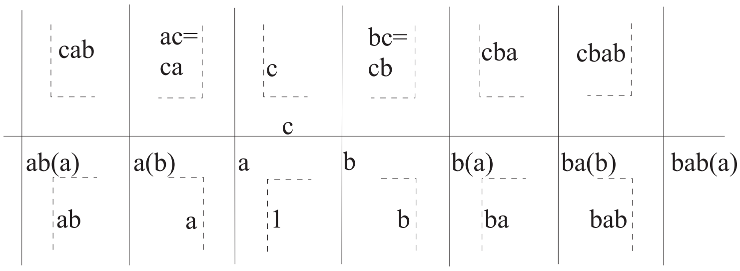

Abb. 9

Aufgabe 7: Das Bild ba des Fundamentalbereichs 1 in Abbildung 6 entsteht durch Verschiebung aus 1. Deswegen ist die Abbildung ba eine Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen, eine Translation.

Aufgabe 8: Es entsteht eine Zerlegung der Ebene in gleichseitige Dreiecke. In Abbildung 10 ist ein Ausschnitt dieser Zerlegung angegeben. Zur leichteren Lesbarkeit wurden außer den Spiegelachsen a, b, c nur die Bilder des Fundamentalbereichs beschriftet aber nicht die Bilder der Spiegel.

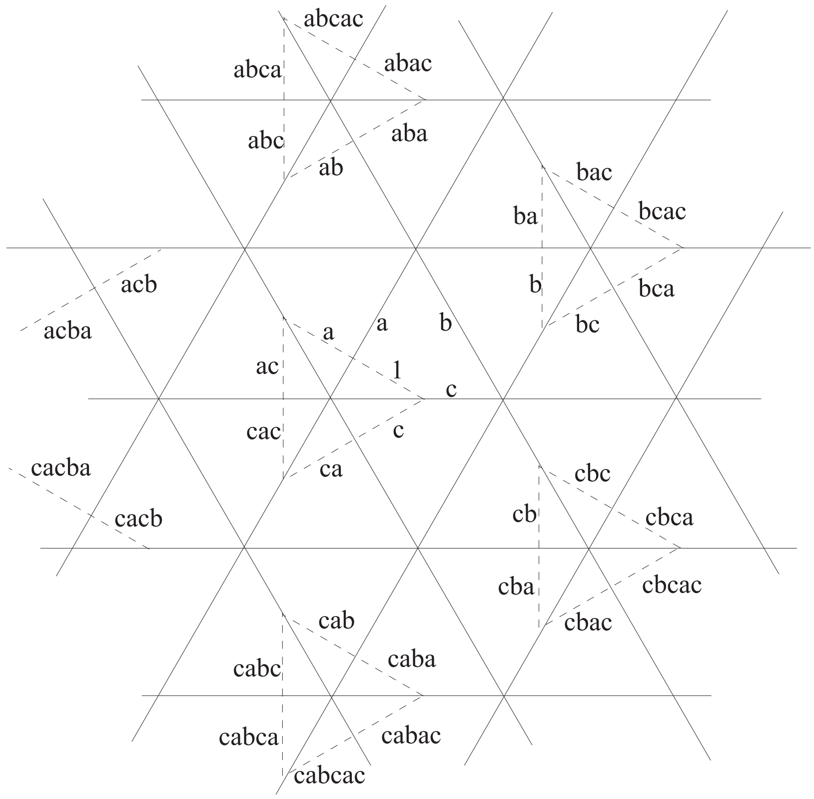

Abb. 10

Aufgabe 9: Es entsteht eine Zerlegung der Ebene in Quadrate. Verbindet man z. B. die Seitenmitten benachbarter Kanten mit einer Strecke als Fundamentalbereich, so erhält man als Bilder des Fundamentalbereichs lauter kleine Quadrate.

Literatur

de la Harpe P. [1]: Topics in Geometric Group Theory, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press 2000

Müller G., Wittmann E. [2]: Spiegeln mit dem Spiegelbuch, Ernst Klett Grundschulverla 1997

Rosebrock S. [3]: Geometrische Gruppentheorie – Ein Einstieg mit dem Computer, vieweg ver lag 2004.

Dr. Stephan Rosebrock
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Bismarckstr. 10
76133 Karlsruhe
e-mail: rosebrock@ph-karlsruhe.de

Anweisung für Autoren

Manuskripte sind stets in zweifachem Ausdruck samt Diskette oder als Attachment im Textsystem **MS Word** nach dem Duden 2004 einzureichen. Als Schrift wird **Times New Roman** verwendet. Formeln werden wie der normale Text geschrieben. Abbildungen (Wincad3 empfohlen) und Formeln sind möglichst in derselben Schrift elektronisch einzubinden.

Die Abhandlung ist 1,0-zeilig in der Schriftgröße 10 Punkte im Blocksatz mit Silbentrennung zu schreiben, wobei der
- linke, rechte und obere Rand 26 mm
- der untere Rand 23 mm betragen.

Aufbau und Besonderheiten:

1. Seite:
Name des Autors: 10 Punkte
3 Leerzeilen; alle Leerzeilen in 10 Punkten.

Titel der Abhandlung: 18 Punkte

2 Leerzeilen

Zusammenfassung (auch in einer anderen Sprache) und/oder Vortext 10 Punkte
und/oder 2 Leerzeilen

1. Kapitelüberschrift: 16 Punkte

1 Leerzeile

1.1 Kapitelunterüberschrift: 14 Punkte

1 Leerzeile
Vor weiteren Kapitelüberschriften 3 Leerzeilen, vor Unterüberschriften 2 Leerzeilen usw. Sollten weitere Überschriften erforderlich sein, so kann dies in 12 Punkte-Schrift oder so genannter **Halbfettschrift** (10 Punkte) geschehen mit Buchstaben z. B. **a)** vorab oder es kann auch **Halbfettschrift** (10 Punkte) und z. B. der Nummerierung wie **1.1.1** erfolgen. Im Text können Textstellen **halbfett** oder *kursiv* hervorgehoben werden. Zitierte Namen werden im Text mit KAPITÄLCHEN geschrieben.

Zwischen Textabsätzen ist 1 Leerzeile.

Abbildungen und Formelkästen sind ganzzeilig oder halbzeilig anzulegen. Abbildungen sind stets rechtsgebunden. Nummern für Formelzeilen stehen am rechten Rand.

Die Seiten sind oben in der Mitte zu nummerieren. Die erste Seite hat keine Seitennummer. Am Ende des Artikels erscheint die Überschrift

Literatur 14 Punkte

1 Leerzeile 10 Punkte
Die verwendete Literatur wird in 10 Punkten in der Form
Meyer, Karlhorst [1]:.. zitiert.

Abschließend kommt die Anschrift des Autors in 10 Punkten.

Abbildungen sind in farblosen (transparenten) Tabellen ohne Ränder einzubinden; bitte andere Methoden vermeiden, da sie in aller Regel nicht konvertierbar sind.
Formeln bitte entweder mit dem Formeleditor von msword oder nur mit dem „normalen" Schreibtext erstel-

len. Ansonsten gelten die erschienenen Artikel als Vorbild.