

# FOURIER-Reihen im Unterricht

## Einleitung

Dieser Artikel soll kein Skriptum für eine systematische Behandlung der FOURIER-Theorie an der Schule sein. Vielmehr will er dazu anregen, mit der FOURIER-Transformation bzw. der FOURIER-Analyse im Unterricht der Mittelstufe zu „spielen“. Die dazu nötige Software dürfte an jeder Schule zur Verfügung stehen. Dabei geht es vordergründig um Musik und um MP3, die Schüler entdecken die im Unterricht behandelte Mathematik unvermutet im Alltag. Die für den Lehrer nötigen Hintergrundinformationen werden kurz vorgestellt, wer mehr wissen will, findet ein kommentiertes Literaturverzeichnis. In der Oberstufe kann die FOURIER-Analyse nochmals aufgegriffen und motivierend eingesetzt werden, wenn Basen und Koordinaten in Vektorräumen behandelt werden. In diesem Zusammenhang ist JPEG2000 (ein Standard für die Kompression von Bilddateien) ein weiteres in den Alltag der Schüler hineinwirkendes Anwendungsbeispiel aktueller mathematischer Forschung. Die zugrundeliegende Theorie der Wavelets kann hier nur kurz erwähnt werden, Literatur zum Weiterlesen ist angegeben.

JOSEPH FOURIER (1768-1830) war ein enger Vertrauter Napoleons, begleitete dessen Ägyptenfeldzug als Ägyptologe, war später Präfekt des Departements Isère ( um Grenoble) und Sekretär der Académie des Sciences. In seinem Klassiker *Théorie analytique de la chaleur* (1822) löste er eine Vielfalt von Problemen aus der Wärmeleitung, indem er die dort auftretenden Funktionen als trigonometrische Reihen entwickelte. Er war der Überzeugung, auch *unstetige* Funktionen durch Sinus- und Kosinusfunktionen approximieren zu können. Damit schloss er an die alte Diskussion an, wie „beliebig“ eine durch trigonometrische Reihen dargestellte Funktion sein könne und belebte deren Erforschung entscheidend wieder (siehe [Walter] Seite 354ff und [Bracewell])

Im Gegensatz etwa zu den TAYLOR-Reihen sind diese *FOURIER-Reihen* mit unseren Sinnen wahrnehmbar: Ein Prisma macht die FOURIER-Zerlegung von Licht *sichtbar*. Mit dem Equalizer nehmen wir *hörbaren* Einfluss auf die FOURIER-Komponenten von Schall. In diesem Artikel geht es um *Schall*.



Abb. 1

## 1. Musik im Kopf

Im Innenohr findet man unser Hörorgan, das wegen seiner Form *Schnecke* genannt wird. Die Schnecke hat einen komplizierten inneren Aufbau aus verschiedenen, durch Membranen voneinander getrennten flüssigkeitsgefüllten Kanälen. Auf der so genannten *Basilarmembran* sind etwa 3 500 *Haarzellen* angeordnet (wirkliche Haare sind viel dicker!), die durch den auf das Trommelfell einwirkenden und in Form von *Wanderwellen* weitergeleiteten Schalldruck verbogen werden, was wiederum zu Ionenströmen führt. Dabei wandern unterschiedliche Frequenzen unterschiedlich weit in die Schnecke hinein, wobei die tiefsten Frequenzen am weitesten kommen: In der Schnecke findet sichtlich eine *Spektralanalyse* statt (vgl. Abb. 2)!

Die von den Wanderwellen ausgelösten elektrischen Reize werden stufenweise weiterverarbeitet und aufbereitet, woran eine immer größere Anzahl von Neuronen beteiligt ist. Soweit dies sinnvoll ist, erfolgt die Verarbeitung und Weitergabe der Information immer noch nach Frequenzen geordnet. Endstation ist der aus 100 Millionen Neuronen bestehende *primäre Hörkortex*. Auch dort findet man eine Tonlandkarte: Es sprechen kleine Gruppen von Nervenzellen auf einzelne Frequenzen an, und diese kleinen Gruppen von Nervenzellen sind systematisch angeordnet (siehe Abb. 3).

Genauereres findet man in [Spitzer], woraus auch die folgenden Zeichnungen der Abb. 2 und 3 entnommen sind.

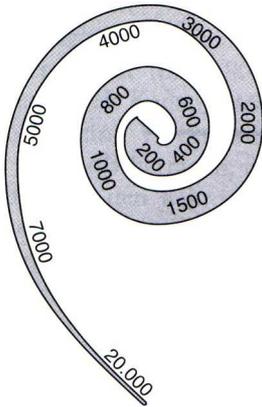


Abb. 2

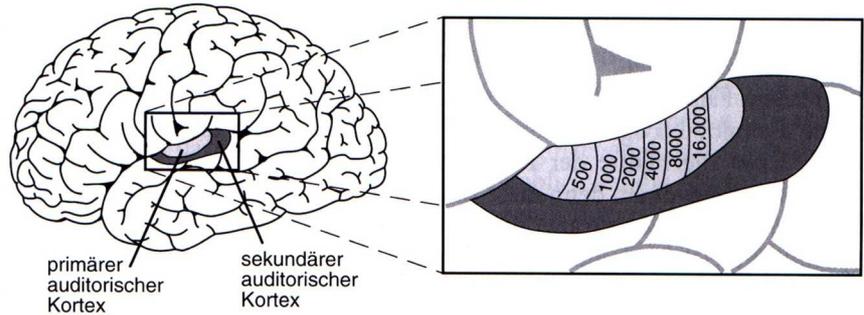


Abb. 3

## 2. Trigonometrische Summen

Folgende Darstellungen für eine *trigonometrische Summe* sind äquivalent:

$$(1) \quad a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$(2) \quad \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

Die Koeffizienten lassen sich ineinander umrechnen:

$$(3) \quad c_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Dabei ist  $x$  reell, die Koeffizienten können reell oder komplex sein.

Im Folgenden kommen ausschließlich *reellwertige* Funktionen vor: Die Koeffizienten in (1) sind alle reell, die Koeffizienten in (2) sind konjugiert komplex. Statt (1) kann man auch nur phasenverschobene Sinusterme oder nur phasenverschobene Kosinusterme addieren.

## 3. Fourier-Reihen

Sei  $f$  eine stetig differenzierbare Funktion der Periode  $2\pi$ . Die Werte der folgenden Integrale werden als *FOURIER-Koeffizienten* der Funktion  $f$  bezeichnet:

$$(4) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(5) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Die damit gebildeten Summen (1) und (2) konvergieren für  $N \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f$ . Kurz: Die von  $f$  erzeugte *FOURIER-Reihe* konvergiert gegen  $f$ .

Obige Formeln lassen sich für Funktionen beliebiger Periode  $T$  verallgemeinern, wobei beispielsweise  $\sin x$  zu ersetzen ist durch  $\sin \frac{2\pi}{T} x$ .

## 4. Musikinstrumente und ihre Spektren

Der uns umgebende Schall hat ein kompliziertes, zeitlich sich dauernd änderndes Frequenzspektrum. Viele *Musikinstrumente* dagegen erzeugen in guter Näherung ein zeitlich *periodisches* Signal: Bedingung hierfür ist, dass

nach dem Einschwingvorgang ein Ton von einigermaßen konstanter Tonhöhe, Klangfarbe und Lautstärke abgestrahlt wird. Bleiben diese Eigenschaften über „viele“ Schwingungen hinweg erhalten, so macht ein Ansatz mit trigonometrischen Funktionen Sinn. Dies ist zunächst eher erstaunlich, müsste doch ein reiner Sinuston physikalisch gesehen „von Ewigkeit zu Ewigkeit“ erklingen. Tatsächlich machen sich Abweichungen von der strengen Periodizität (lokale und durch die zeitliche Begrenzung jeden Signals globale Abweichungen) bei der FOURIER-Analyse eines Tonsignals störend bemerkbar. Es zeigt sich aber, dass durch eine derartige Approximation wesentliche Charakteristika des Klangs erfasst werden.

Soll die mathematische Formel (1) zusammen mit (4) und (5) auf reale Klänge angewandt werden, so muss zunächst eine Zeiteinheit festgelegt werden. Gibt man Frequenzen auf ganze Hertz gerundet an, so passt in (1) zu einer Sekunde die Intervalllänge  $2\pi$ . Eine Schwingung der Frequenz 1 Hz wird also mathematisch modelliert durch  $(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$ . Der Term  $(a_{440} \cos 440x + b_{440} \sin 440x)$  steht für den Kammerton a'. Soll auf Zehntel Hertz genau gemessen werden, so entspricht der Intervalllänge  $2\pi$  die Zeitdauer 10s. Also beschreibt  $(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$  eine Schwingung der Frequenz 0,1 Hz, die sich nach 10 s wiederholt.

Es gibt auf dem Hobbysektor viele Programme für den heimischen PC, die als eines von vielen Features eine FOURIER-Analyse anbieten. Schüler, die (vielleicht in Zusammenarbeit mit dem Musik- oder Physiklehrer) FOURIER-Analysen von selbst eingespielten Klängen in den Unterricht mitbringen, können so entdecken:

- Bei vielen Musikinstrumenten tritt eine äquidistante Folge von Frequenzpeaks auf.
- Diese optische Regelmäßigkeit bedeutet mathematisch: Die auftretenden Frequenzen sind alle Vielfache einer Grundfrequenz  $f_0$ . In der Musik spricht man vom Grundton und den zugehörigen Obertönen.

Damit bietet sich eine neue Interpretation der trigonometrischen Summen in (1) an: Die Intervalllänge  $2\pi$  modelliert die Periodenlänge der zu  $f_0$  gehörigen *Grundschiwingung*, die verwendete Zeiteinheit beträgt somit  $1/f_0$ . Der Term  $(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$  steht für die Grundschiwingung,  $(a_n \cos nx + b_n \sin x)$  für die n-te *Oberschiwingung*. Auf Darstellungen der Form  $(a_n \cos \omega t + b_n \sin \omega t)$  kann man im Mathematikunterricht verzichten, sie bedeuten in der Mittelstufe nur unnötigen formalen Ballast. Man braucht sie in der Physik, da dort die Einheit Sekunde vorgeschrieben ist.

Um falschen Vorstellungen entgegenzuwirken: Auch wenn die Frequenz des n-ten Peaks kein exaktes Vielfaches von  $f_0$  ist, spricht man in der Musik von Obertönen. Dies ist bei vielen Blasinstrumenten der Fall oder bei Klavieren, deren Oktaven absichtlich „gespreizt“ gestimmt werden.

## 5. Wave-Dateien

Dieses Kapitel soll dazu anregen, im Unterricht mit der *FOURIER-Synthese* zu spielen, es sollen also sinus- und kosinusartige Funktionen addiert werden. Ein PC mit einer einfachen Soundkarte genügt hierfür. Zuvor müssen die Schüler verstanden haben, was Schwingungen sind: Man kann sie an Lautsprechermembranen sehen und fühlen. Das Verständnis für die Darstellung einer Schwingung als *Funktion* der Zeit kann am PC spielerisch gefördert werden: Jede Soundkarte verfügt über einen Mikrofoneingang, die mitgelieferte Software erzeugt *Wave-Dateien* und macht diese am Bildschirm sichtbar. Die Interpretation der x-Achse als Zeitachse wird verständlich, wenn man beispielsweise Klatschgeräusche aufnimmt und wiedergibt.

Gibt es Musikinstrumente, die nahezu reine *Sinustöne* erzeugen? Eine Fundgrube für verschiedenste, insbesondere auch einfache, übersichtliche Spektren sind die Klänge von *Orgelpfeifen*. So erzeugt das Register *Nachthorn* fast nur den sinusförmigen Grundton. Das beweisen die folgenden Screenshots, die mit der Soundkarten-Software *Creative Wave Studio* erzeugt wurden. Der Orgelklang wurde in einer Kirche auf Minidisc aufgezeichnet und über den Line-In Eingang der Soundkarte auf die Festplatte gespielt. Der wiedergegebene Zeitabschnitt ließ sich durch einen Zoomschalter sukzessive verkürzen. Die Abbildungen unten links geben Anlass, die Voraussetzungen unseres mathematischen Modells zu problematisieren: Macht es Sinn, von einer periodischen Funktion zu sprechen? In größtmöglicher Auflösung erkennen wir rechts oben eine Sinuskurve: Tatsächlich lässt sich eine mit *Excel* erstellte Sinuskurve (Mitte rechts) durch Ziehen und Stauchen so verändern, dass sie nach Augenmaß zur Wave-Datei passt.

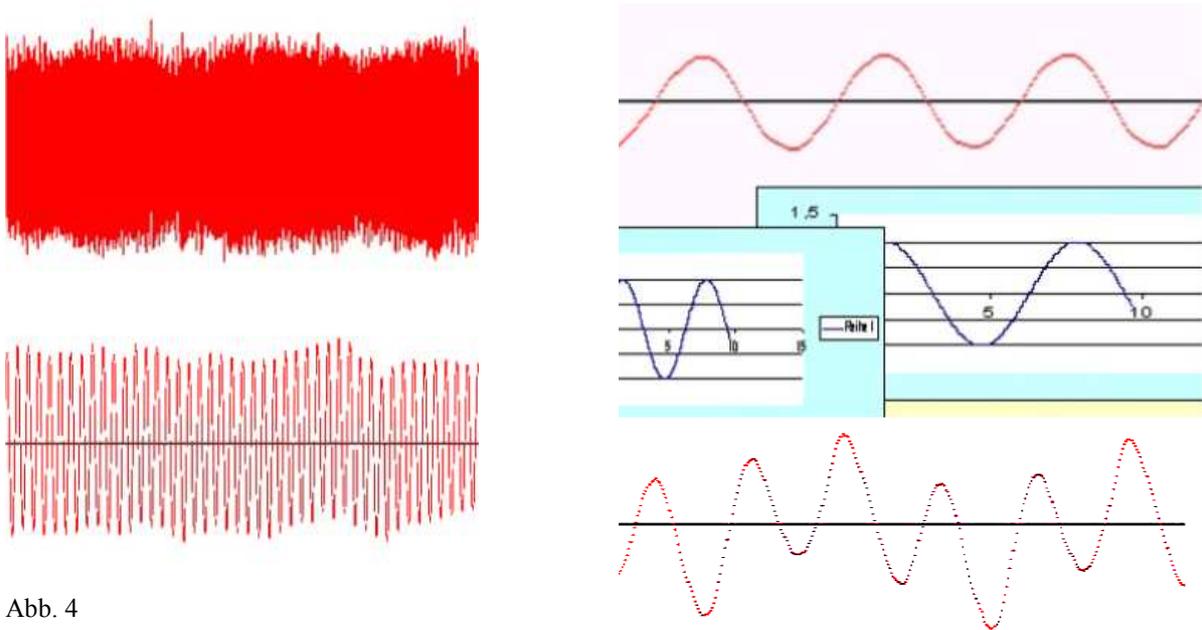


Abb. 4

Unten rechts ist eine weitere Wave-Datei abgebildet, die zu einem Puzzlespiel einlädt: Eingespielt wurde ein mit dem Register *Quintade* erzeugter Ton. Bei der Quintade kommt zum Grundton fast nur die eine Oktave höhere Quinte (Name!) dazu. In der FOURIER-Reihe spielen also nur eine eventuelle Konstante, der erste Summand (Grundschwingung) und der dritte Summand (dritte Oberschwingung) eine wesentliche Rolle. Es sollte möglich sein, auch diese kompliziertere Wave-Datei mathematisch „nachzubauen“!

Ein geeignetes Programm hierfür ist *WinFunktion*, eine ganze Klasse kann wetteifern, wer durch Addition von Sinus- und Kosinustermen der Vorlage am nächsten kommt. Man kann das *gezielte Probieren rationalisieren*, indem man mit *Parametern*, also mit *Scharen von Funktionen*, arbeitet. Für manchen überraschend kommt man mit reinen Sinustermen nicht zum Ziel, man muss wie in (1) Kosinusterm (oder Phasenverschiebungen) mit einbauen. Tatsächlich ist die Tonerzeugung in der Orgelpfeife ein komplexer Vorgang (die Anregung der Oberschwingungen lässt sich erst durch nicht lineare Differentialgleichungen zufriedenstellend erklären), so dass man sich an dieser Stelle nicht wundern sollte.

Das Eintippen der Funktionsterme in *WinFunktion* lässt den Bezug zum Unterrichtsthema „Funktionen“ direkt erleben. Im Internet zu findende Java-Applets zur FOURIER-Synthese arbeiten – zugegebenermaßen bequemer – mit Schiebereglern und liefern zusätzlich noch den Ton mit.

Eine überraschende Entdeckung kann in diesem Zusammenhang sein, dass der Höreindruck von den Amplituden der FOURIER-Komponenten abhängt, *nicht* aber von der Phase. Dies ist bereits v. HELMHOLTZ aufgefallen. So wichtig die Phase für die Form der Wellenfunktion auch ist – man hört sie nicht. Völlig verschiedenartig schwingende Lautsprechermembranen können also dieselbe Musik erzeugen. Wäre dies anders, würde der polyphone Gesamtklang eines Chores davon abhängen, wo genau Tenor oder Sopran stehen...

## 6. DFT und FFT

Die didaktische Grundidee des vorangegangenen Abschnitts war es, eine FOURIER-Analyse von empirisch gewonnenem Datenmaterial durch *gezieltes Probieren* zu finden. Die „Probe“ war dabei die FOURIER-Synthese. In diesem Abschnitt soll die FOURIER-Analyse mit Hilfe einer Tabellenkalkulation (am verbreitetsten ist wohl *Microsoft Excel*) durchgeführt werden, die FOURIER-Synthese mit *WinFunktion* zeigt anschließend, wie gut diese Approximation ist. Im Rahmen einer fächerübergreifenden Projektarbeit könnte ein Informatikkurs die FFT (*Fast FOURIER Transformation*) auch selbst programmieren.

Für empirisch gewonnenes Datenmaterial haben sich die Integralformeln (4) und (5) als zu rechenaufwändig erwiesen. Es war ein der diskreten Struktur des Datenmaterials angepasster Ansatz, der den Siegeszug der FOURIER-Analyse in vielen Anwendungsbereichen ermöglicht hat. Entscheidend war dabei die Entdeckung eines

schnellen Algorithmus: Die FFT berechnet die Koeffizienten der im Folgenden definierten *diskreten FOURIER-Transformation* (vgl. [Neumann] Kapitel 1).

Sei  $f$  eine reellwertige periodische Funktion der Periodenlänge  $N$ . Mit  $x_n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1$  werden  $N$  Stellen bezeichnet, an denen die Funktion die Werte  $y_{-\frac{N}{2}}, \dots, y_{-1}, y_0, \dots, y_{\frac{N}{2}-1}$  annimmt (dabei sei  $N$  eine gerade Zahl). Die zugehörigen *diskreten FOURIER-Koeffizienten* sind dann wie folgt definiert:

$$(6) \quad c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \cdot y_k \quad \left( n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \right)$$

Die *Umkehrformel* reproduziert an den Stützstellen  $x_n$  *exakt* die Ausgangswerte:

$$(7) \quad y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \cdot c_k \quad \left( n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \right)$$

Obwohl in (7) komplexe Summanden auftreten, kann man sich schnell überzeugen, dass die Ergebnisse tatsächlich alle *reell* sind: Wie man in (6) sieht, sind die Koeffizienten  $c_{-\frac{N}{2}+n}$  und  $c_{\frac{N}{2}-n}$  konjugiert komplex,  $c_0$  und

$c_{\frac{N}{2}+1}$  sind reell. Entsprechendes gilt für die Exponentialfaktoren. Außerdem sieht man an (7) sofort, dass nur  $\frac{N}{2}$  verschiedene Frequenzen beteiligt sind. Dies ist für die Interpretation der mit *excel* gewonnenen Ergebnisse wichtig. Darstellung (6) lässt außerdem die Analogie zur klassischen FOURIER-Analyse (5) ahnen, Genaueres findet man bei [Neumann].

Im angesprochenen Algorithmus FFT wird dann aber (aus programmiertechnischen Gründen) anders indiziert, was mathematisch einer Verschiebung um eine halbe Periode entspricht und an den jeweils berechneten Werten nichts ändert: Der Index  $k$  in  $y_k$  und  $c_k$  sowie in den Summen (6) und (7) läuft bei FFT jeweils von 0 bis  $N-1$ , wobei zuvor die erste Hälfte der Zahlen bzw. Summanden als Block nach hinten gestellt wird:

$$(8) \quad \begin{aligned} y_0, \dots, y_{\frac{N}{2}-1}, y_{\frac{N}{2}}, \dots, y_{N-1} &\rightarrow y_0, \dots, y_{N-1} \\ c_0, \dots, c_{\frac{N}{2}-1}, c_{\frac{N}{2}}, \dots, c_{N-1} &\rightarrow c_0, \dots, c_{N-1} \end{aligned}$$

Es ist sinnvoll, sich die Funktion  $f$  jetzt auf dem Intervall  $[0; N-1]$  vorzustellen (die Periodenlänge ist  $N$ ). Die Zahlen  $y_0, \dots, y_{N-1}$  sind dann die  $y$ -Werte an den Stützstellen  $x_n = 0, \dots, N-1$ , die wiederum *exakt* reproduziert werden. Mit der Indexverschiebung wird aus (7) folgende Umkehrformel:

$$(9) \quad y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \cdot c_k \quad (n = 0, \dots, N-1)$$

Unter Ausnutzung der Periode  $N$  (beachte die neue Obergrenze beim Summenzeichen) wird daraus:

$$(10) \quad y_n = \frac{1}{N} \cdot \left( c_0 + c_{\frac{N}{2}} \cdot \cos \frac{2\pi}{N} \frac{N}{2} \cdot n + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{Re} c_k \cdot \cos \frac{2\pi}{N} k \cdot n - \operatorname{Im} c_k \cdot \sin \frac{2\pi}{N} k \cdot n \right) \quad (n = 0, \dots, N-1)$$

Um es zusammenzufassen: FFT ist ein Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten der diskreten FOURIER-Transformation (9) und (10). Diese wiederum ist eine Näherung für die ersten  $N$  Summanden der klassischen FOURIER-Transformation. Alle oben erwähnten Programme zur FOURIER-Analyse am PC verwenden die FFT. Im Folgenden soll eine FOURIER-Analyse „von Hand“ durchgeführt werden. Im Gegensatz zum PC können wir eine Wave-Datei *sehen* und ein Periodizitätsintervall auswählen. Damit haben wir weder Probleme mit einem willkürlich ausgewählten zeitlichen Fenster, das eigentlich gar nicht zur Wave-Datei passt, noch mit der Interpretation der in (10) auftretenden „Frequenzen“. Letztere sind bei der FFT an die Abtastrate gekoppelt und haben a priori *nichts* zu tun mit physikalischen Tonhöhen. Die Analyse „von Hand“ soll am bereits bekannten Beispiel der Quintade vorgeführt werden. In der Abbildung unten wurde ein Periodizitätsintervall mit Hilfe eines Bildbearbeitungsprogramms ausgeschnitten.

FFT ist ein rekursiver Algorithmus, der mit Halbieren arbeitet. Daher muss die Zahl der eingegebenen Werte eine Zweierpotenz sein. Günstig ist  $N = 16$ : Lässt man eine Periode einer Wave-Datei auf einer Breite von 16 cm ausdrucken, kann man die Funktionswerte bequem ablesen und erhält genügend viele Summanden.

Die obere Zeichnung der Abb. 5 zeigt die Wave-Datei der Quintade. Die Stützstellen  $0, \dots, N$  erscheinen in der ersten Spalte des excel-Arbeitsblattes, die gemessenen  $y$ -Werte daneben. Rechts sind die von *excel* ermittelten komplexen Koeffizienten für (9) und (10) zu sehen.

Um die untere Zeichnung in Abb. 5 mit Hilfe von *WinFunction* zu erstellen, muss zunächst die Summe (10) geeignet interpretiert werden. Die Stützstellen  $0, \dots, N$  werden als  $x$ -Werte aufgefasst, es wird also überall  $n$  durch  $x$  ersetzt. Außerdem wird (10) so umgeschrieben, dass die Grundschwingung ( $k = 1$ ) nicht mehr die Periodenlänge  $N$  hat, sondern die Periodenlänge  $2\pi$ . Damit erhalten wir:

$$(11) \quad y = \frac{1}{N} \cdot \left( c_0 + c_{\frac{N}{2}} \cdot \cos \frac{N}{2} x + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{Re} c_k \cdot \cos kx - \operatorname{Im} c_k \cdot \sin kx \right)$$

In diese Formel wurden für  $c_0, c_1$  und  $c_3$  die in der *excel*-Tabelle grau unterlegten Real- und Imaginärteile eingesetzt. Die übrigen Koeffizienten sind betragsmäßig so klein, dass sie in (11) gleich Null gesetzt wurden. Schließlich wurde das mit Hilfe von *Winfunction* erzeugte Bild auf passende Größe und Form gebracht.

Nebenbei bemerkt: Wir haben mit Formel (11) nicht etwa bewiesen, dass die diskrete FOURIER-Analyse (10) auf die trigonometrische Summe (1) führt, sondern wir haben beim Ersetzen von  $n$  durch  $x$  schon *vorausgesetzt*, dass mit (6) näherungsweise die Koeffizienten aus (1) berechnet werden.

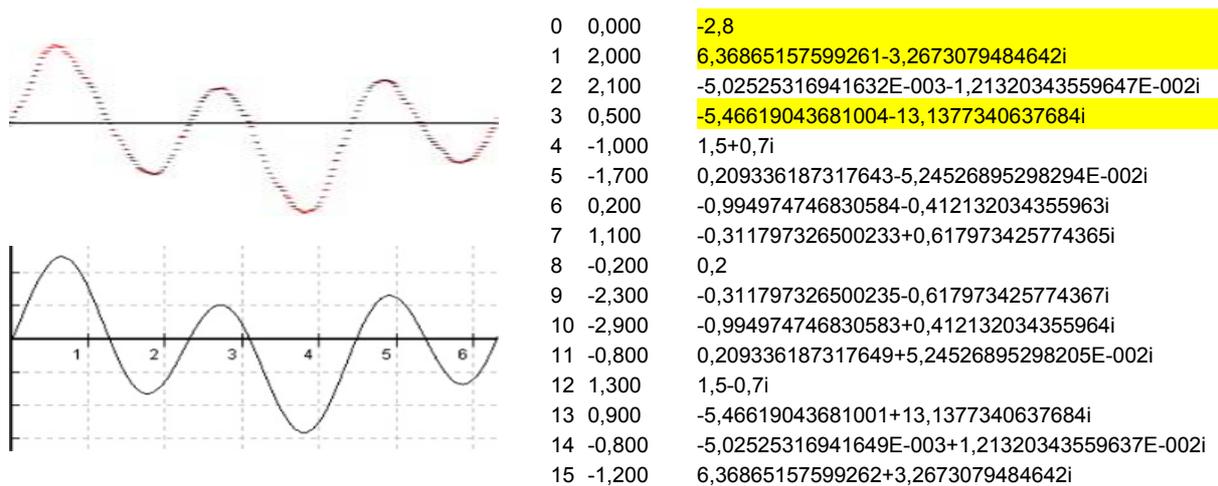


Abb. 5

Ein Tipp für die Suche nach weiterem Beispielmaterial: Professionelle Analyseprogramme stellen das Ergebnis einer FOURIER-Analyse auf der Amplitudenachse logarithmisch dar. Dies ist dem menschlichen Hörempfinden angepasst. Für den optischen Eindruck, den die untere Zeichnung in Abb. 5 hinterlässt, ist aber die tatsächliche Größe der von der FFT gelieferten Koeffizienten entscheidend. Voraussetzung für ein Gelingen einer solchen Analyse „von Hand“ ist also nicht, dass es nur ganz wenige Peaks im Spektrum gibt, sondern es müssen nur einige Peaks die anderen deutlich überragen. Hier ist Ausprobieren angesagt!

Bemerkenswerterweise führen  $N$  Stützstellen *nur* auf  $N/2$  Frequenzen (man darf die *excel*-Ausgabe keinesfalls falsch interpretieren). Damit sind wir dem *Sampling-Theorem* von SHANNON und NYQUEST auf der Spur: Die Abtastrate bei einer digitalen Aufnahme muss mehr als doppelt so groß sein wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz. Für CDs verwendet man 44,1kHz. Damit werden Töne bis über 20kHz erfasst. Weshalb ausgerechnet 44,1kHz? Unter anderem deswegen, weil 44 100 sowohl durch 50 als auch durch 60 teilbar ist: Die ersten digitalen Audioaufnahmen wurden in den Forschungslabors auf Videobänder aufgezeichnet, die Abtastrate sollte mit unterschiedlich genormten Bildfrequenzen (50Hz oder 60Hz) kompatibel sein.

## 7. MP3

Das MP3-Verfahren zur Datenreduzierung nutzt aus, dass unser Gehirn eine Spektralanalyse verarbeitet. Es zeigt sich, dass wir nicht alle Frequenzen gleichzeitig wahrnehmen. Hören wir beispielsweise einen lauten Ton mit 1200 Hz, so sind Frequenzen in der Umgebung *maskiert*. Die Grafik zeigt in dB, wie viel lauter ein frequenzmäßig benachbarter Ton sein muss, um überhaupt wahrgenommen zu werden. Das MP3-Verfahren lässt *nach* einer FFT alles weg, was wir sowieso nicht hören würden (siehe [Spitzer] Seite 67f.).

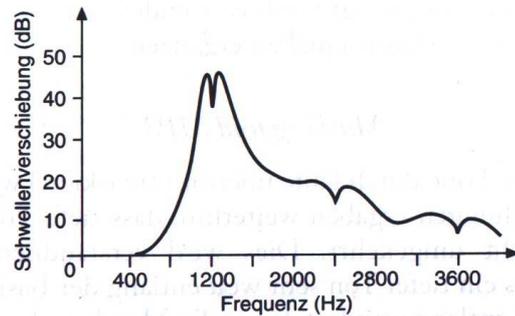


Abb. 7

Das MP3-Verfahren hat über die inzwischen weit verbreiteten *MP3-Player* Eingang in den Alltagswortschatz gefunden: Musik- und Sprachaufnahmen werden mittels MP3 „komprimiert“. Der Speicherplatzbedarf schrumpft im Vergleich zu einer herkömmlichen CD-Aufnahme auf ein Zehntel, der Sound ist verblüffend gut. Entsprechend schneller als die Originalaufnahmen lassen sich die MP3-reduzierten Aufnahmen über das Internet verbreiten, und auch das Handy profitiert von den komprimierten Datenströmen: Jugendliche erleben so in ihrem eigenen Interessensbereich die Alltagsrelevanz von Mathematik.

Wie MP3 beruhen übrigens auch JPEG (mit Digitalkameras aufgenommene oder im Internet heruntergeladene Bilder) und MPEG (für Satelliten-TV und DVD) auf einer Fourier-Analyse (siehe auch Abschnitt 9: JPEG2000).

## 8. Funktionenräume

Mit Vektorrechnung löst man in der Schule meist Aufgaben aus der räumlichen Geometrie. Den daraus abstrahierten Begriff des *Vektorraums* sollten die Schüler nicht als „l'art pour l'art“ empfinden. Vektorraumstrukturen gibt es in vielen Teilgebieten der Mathematik. Die mit dem Vektorraumkonzept transportierten geometrischen Bilder können dort durchaus anregend wirken.

Der Schritt von der Analytischen Geometrie zur Analysis ist schnell vollzogen: Aus Vektorkoordinaten werden Funktionswerte, die Vektoraddition wird zur punktwweisen Addition von Funktionen, entsprechend wird die Multiplikation mit einem Skalar interpretiert. Dann wird der „Spieß“ umkehrt: Auf Intervallen oder auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte *Funktionen* lassen sich als *Vektoren* auffassen. Aus einer Menge von stetigen, differenzierbaren, ... Funktionen wird der entsprechende *Funktionsraum*.

Allerdings darf man den Analogieschluss, dass aus Vektorkoordinaten Funktionswerte werden, nicht zu weit treiben: Die Funktionswerte sind im Regelfall *keine* Koordinaten. *Koordinaten* beziehen sich ja auf eine Basis, bezüglich derer sich jeder Vektor als *endliche* Linearkombination schreiben lässt.

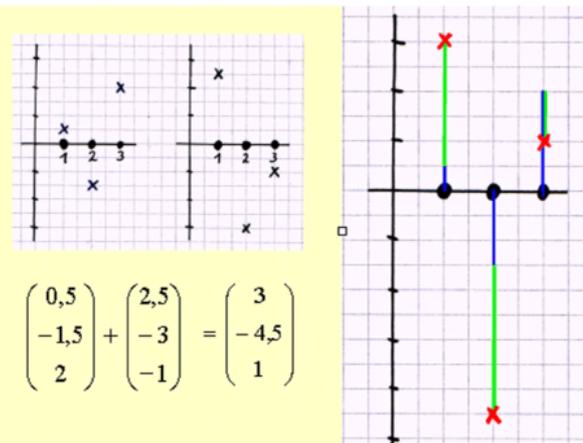


Abb. 8

Koordinaten bezüglich einer Basis sind für praktische Rechnungen ein unverzichtbares Hilfsmittel. Auch jeder Funktionenraum hat eine Basis, die man im Allgemeinen aber nicht kennt. Daher wird das Wort *Basis* in der Literatur allgemeiner verwendet: Im Funktionenraum ist eine Basis eine Menge von Vektoren, bezüglich derer sich jeder beliebige Vektor als *abzählbar unendliche* Linearkombination (Reihe) darstellen lässt. Konvergiert diese Reihe hinreichend schnell, so liefert sie für die Praxis taugliche Approximationen.

Damit sind wir bei der *geometrischen Interpretation* der FOURIER-Analyse: Die Basis des Funktionenraums sind (neben einer konstanten Funktion) die trigonometrischen Funktionen in (1). In (4) und (5) werden *Koordinaten* berechnet.

## 9. JPEG2000

Neben den trigonometrischen Funktionen gibt es im Funktionenraum beliebig viele andere Basen. Wie wir gesehen haben, bietet sich eine von trigonometrischen Funktionen gebildete Basis aus verschiedenen Gründen für die Untersuchung und Verarbeitung von Musik an: Gehör und Gehirn arbeiten mit dieser Basis, und es gibt den Algorithmus FFT, mit der man die entsprechenden Koordinaten auch tatsächlich genügend *schnell* berechnen kann. Konvergenz ist schon deswegen kein Problem, weil wir keine beliebig hohen Frequenzen hören können.

Für die Verarbeitung von Bildmaterial greifen diese Argumente nicht. Beim Standard JPEG zur Kompression von Bilddateien hat man wohl einfach deswegen zur Fourier-Transformation und zur FFT gegriffen, weil diese Verfahren etabliert und vorhanden waren. Dabei sind sinusartige Funktionen für die Verarbeitung von digitalisierten Bildern eher schlecht angepasste Basisvektoren. Der abrupte Übergang von einem Pixel zum nächsten würde besser erfasst durch Funktionen, die außerhalb eines bestimmten Intervalls verschwinden.

Solche Funktionen liegen dem im Dezember 2000 anerkannten Standard JPEG2000 zugrunde. Geometrisch gesehen unterscheidet sich JPEG2000 von JPEG durch die Verwendung von besser angepassten Koordinaten. Die Basisfunktionen werden Wavelets genannt: *Wavelet* steht für „Wellchen“, da die Funktion im Gegensatz zu einer unendlich ausgedehnten Sinusfunktion zum Rand des endlichen Definitionsbereichs hin verschwindet. Tatsächlich erzeugt JPEG2000 bei gleichem Kompressionsgrad deutlich bessere Abbilder eines Originals als JPEG. Die Theorie der Wavelets ist mittlerweile mathematisch ausgefeilt, und JPEG2000 bietet wesentlich mehr Vorteile als nur bessere Kompression: So ist es möglich, von einer ein für allemal Wavelet-transformierten Bilddatei beliebig genaue Versionen abzurufen und die heruntergeladene Version nachträglich durch *ergänzende* Downloads ganz oder in Ausschnitten zu verfeinern.

Im Vergleich zur FFT ist eine Wavelet-Transformation rechenaufwändiger, insbesondere also langsamer. Daher wird die Wavelet-Transformation im neuen Standard MPEG-4, der vor allem für Videoübertragung in Echtzeit gedacht ist, nur für Standbilder verwendet: Trotz der angesprochenen Nachteile ist FFT auch für Bildübertragung noch aktuell.

## 10. Kommentierte Literatur

- |  |   |
|--|---|
| Bracewell, R. N.                       | Die Fourier-Transformation in: Spektrum 8/1989 Seite 90ff<br><i>Eine anschauliche Einführung in die Geschichte der FOURIER-Reihen und in ihre Anwendungen. Insbesondere werden FOURIERS Überlegungen zur Wärmeleitung in einem Eisenring ausführlich dargestellt.</i>   |
| Fletcher, H. und<br>Rossing, N. Th. D. | The Physics of Musical Instruments, Springer-Verlag New York 1998<br><i>Ein Standardwerk, das an die aktuelle Forschung heranführt. Insbesondere kann man über die Tonerzeugung in Orgelpfeifen nachlesen.</i>  |
| Hubbard, B. B.                         | wavelets. Birkhäuser Basel 1997<br><i>Eine populärwissenschaftliche Einführung in das Thema.</i>  |
| Morse, Ph.                             | Vibration and Sound, 2 <sup>nd</sup> Edition McGraw-Hill New York 1948<br><i>Der Klassiker, der an manchen Stellen das Verständnis des Buches von Fletcher/Rossing fördern kann.</i>  |
| Neumann, M.                            | Computational Physics I (insbesondere Kapitel 1):<br><a href="http://www.exp.univie.ac.at/~mn/welcome.html">http://www.exp.univie.ac.at/~mn/welcome.html</a><br><i>Ein Vorlesungsskript, das die diskrete FOURIER-Transformation, ihren Zusammenhang mit der klassischen FOURIER-Transformation sowie den Algorithmus FFT mathematisch exakt darstellt.</i> |
| Niederholz, J.                         | Anwendungen der Wavelet-Transformation in Übertragungssystemen.<br><i>Diese Dissertation bietet eine schöne Einführung in die Theorie der Wavelets.</i><br><a href="http://www.ub.uni-duisburg.de/ETD-db/theses/available/duett-05212001-">http://www.ub.uni-duisburg.de/ETD-db/theses/available/duett-05212001-</a>  |

[101503/](#)

- Reed, M. und Simon, B.      *Methods of Mathematical Physics, I: Functional Analysis* Academic Press  
New York 1980  
*Hier kann man sich eingehender mit dem HILBERT-Raum  $L^2$  beschäftigen. Von Gewinn ist allein schon die Lektüre der vielen historischen „Notes“.*
- Spitzer, M.                      *Musik im Kopf.* Schattauer Stuttgart 2002  
*Eine populärwissenschaftliche Einführung in das Thema, geschrieben von einem Fachmann. Der gleichnamige Abschnitt dieses Aufsatzes folgt der Darstellung im Buch.*
- Walter, W.                        *Analysis 2.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1995  
*Man findet eine ausführliche Darstellung der FOURIER-Reihen auf elementarem Niveau bis hin zum HILBERT-Raum. Die Buchreihe zeichnet sich besonders durch viele verständnisfördernde historische Anmerkungen aus.*

Weiter Internetadressen:*Java-Applets zur FOURIER-Synthese:*<http://www.nst.ing.tu-bs.de/schaukasten/fourier/><http://didaktik.physik.uni-wuerzburg.de/~pkrahmer/ntnujava/sound/sound.html>*Ein Überblick über die Verwendung von Wavelets in JPEG2000 und die Vorteile von JPEG2000 (mit vielen Bildern):*<http://www.fh-jena.de/contrib/fb/et/personal/ansorg/ftp/wavelet/wavelet.htm>

Dr. Alfred Förtsch  
Ludwigstraße 16  
D-63755 Alzenau  
[Alfred.Foertsch@t-online.de](mailto:Alfred.Foertsch@t-online.de)