Kurt Peter Müller

Begriffsbildung und Dynamische Geometrie-Systeme (am Beispiel DynaGeo und Cinderella)

Die in der Primarstufe (dort noch sehr an Handlungen orientiert, was sich auch in der Sprechweise, etwa „Kante“, nicht „Strecke“, ausdrückt) und der Sekundarstufe I vorkommenden geometrischen Begriffe werden zusammengestellt und daraufhin untersucht, wie die Begriffsinhalte in Dynamischen Geometrie-Systemen (als DGS-Beispiele dienen DynaGeo Euklid und Cinderella) umgesetzt werden. Es wird dargestellt, dass einerseits die Umsetzung in einem DGS nicht immer den gewohnten Begriffsbildungen entsprechen (z. B. bei „Strecke“) und dass andererseits das dynamische Verändern neue Einsichten bei der Begriffsbildung ermöglicht (z. B. bei „Kreis“ und „Tangente“).

1. Dynamische Geometrie-Systeme

1.1 Begriffsbestimmung

1.1.1 Geometrie auf dem Computerbildschirm

Schon vom Anfang der persönlichen Computer an war es ein Anliegen der Programmier (weil es viele Nutzer wollten), grafische Darstellung auf dem Bildschirm zu realisieren. Das begann in der Zeit des Apple II und setzte sich nach Einführung des PC in der „guten alten DOS-Zeit“ fort. Noch stärker wurde der Trend zur Grafik am Bildschirm mit der Einführung der grafikorientierten Oberflächen, insbesondere mit Windows. Dabei geht es nicht einfach um Grafik, sondern um Geometrie – nicht etwa um Balken- oder Kreisdiagramme, die Programme wie Excel (fast) automatisch herstellen können, sondern um geometrische Zeichnungen.

In diesem Umfeld gibt es mächtige Programme, die z. B. von Maschinenbauern und von Architekten eingesetzt werden, um dreidimensionale Objekte in verschiedenen Ansichten darzustellen. Etwas einfachere Programme begnügen sich mit der Unterstützung der Zeichnung für zweidimensionale Teilansichten, etwa Grundrisse usw. Daneben gibt es Programme, die „nur“ das elementare Zeichnen mit Zirkel und Lineal – die klassischen Konstruktionen – beherrschen. Man kann mit ihnen Geraden zeichnen (gleich euphorisch formuliert, wie wenn man sagt, dass man auf dem Papier Geraden zeichnen kann: Wir werden bei der Begriffsbildung auf diese Problematik zurückkommen). Diese Programme sind für den Einsatz in der Schule geeignet – meist sind sie direkt für diesen Gebrauch entstanden. Ein erster, wichtiger Vorteil dieses Zeichnens mit dem Computer ist, dass der „Computer“ üblicherweise genauer zeichnet als es Schüler mit Zirkel und Lineal könnten, und dass bei etwaigen Fehlern des Schülers eine Korrektur leichter möglich ist: Ein mit dem Computer gezeichnetes Objekt lässt sich ohne „Nebenwirkungen“ gezielt löschen, was mit dem Radiergummi so nicht möglich wäre. Damit – und dieser Aspekt darf nicht unterschätzt werden – vermeidet das Zeichnen mit dem Computer viel Frustration.

Dass die auf dem Bildschirm erstellte Zeichnung dann mit Hilfe des Druckers auch auf Papier gebracht werden kann, wird ganz dem Programm überlassen und wird deshalb hier nicht weiter angesprochen.

1.1.2 Dynamik

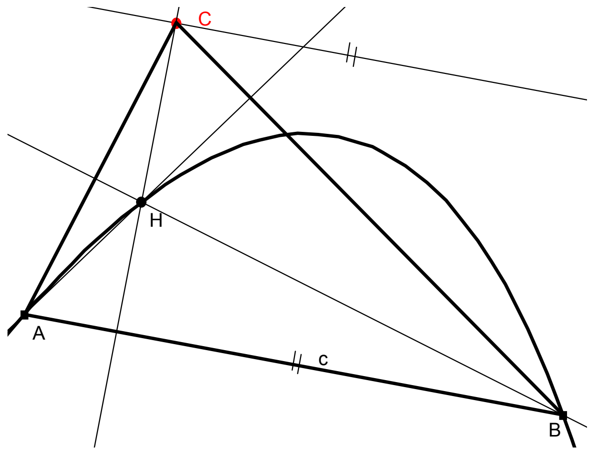
Schon beim Arbeiten mit einer Textverarbeitung merkt man, dass ein Text leicht verändert werden kann. Man kann z. B. schnell einen Satz markieren und ihn mit Hilfe der Maus an eine andere Stelle ziehen. Entsprechend kann man – und nun wird der Bestandteil „dynamisch“ der Überschrift erklärt – mit einem DGS Teile der Zeichnung variieren.

Lässt man Schüler ein „beliebiges“ Dreieck zeichnen, wird fast immer ein spitzwinkliges Dreieck gezeichnet. Mit den hier beschriebenen Programmen kann man nun – mit Hilfe der Maus – z. B. einen Punkt des Dreiecks greifen und an eine andere Stelle verschieben: Man kann die Figur dynamisch verändern, und dabei z. B. ein spitzwinkliges Dreieck zu einem stumpfwinkligen Dreieck machen und – wenn man genau beobachtet – bemerken, dass man dabei als „Zwischenlage“ auch ein rechtwinkliges Dreieck hatte.

Es scheint trivial, dass man so stets ein Dreieck behält – bis man seinen „Zugpunkt“ so bewegt, dass die drei Eckpunkte kollinear sind. Es lohnt scheinbar kaum, auf diesen Grenzfall einzugehen. Denkt man sich aber in dem ursprünglich spitzwinkligen Dreieck die drei Höhen eingezeichnet, so hat es eine andere Qualität, wenn man einen Eckpunkt zieht und erkennt, dass sich die drei Höhen nicht nur im willkürlich als Ausgangsfigur gezeichneten Dreieck in einem Punkt zu schneiden scheinen, sondern auch für die anderen Lagen – zumindest, solange das Dreieck spitzwinklig bleibt.

Auf das Problem, dass bei stumpfwinkligen Dreiecken sowohl die Seiten als auch die Höhen Geraden sein müssen, damit es den von uns erwarteten Höhenschnittpunkt gibt, werden wir später bei den Begriffen noch zurückkommen.

Hier soll noch ein anderer Aspekt der DGS angesprochen werden: Es ist mit solchen Programmen möglich, beim Ziehen den Zugpunkt nur auf einer Kurve zu bewegen. So kann man z. B. die Frage stellen, wie sich der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks bewegt, wenn ein Eckpunkt auf der Parallelen zur Gegenseite verschoben wird. Die meisten Programme der hier besprochenen Art lassen es zu, die Spuren bei einer solchen Bewegung aufzuzeichnen. Figur 1 zeigt das Ergebnis beim hier vorgestellten Beispiel, die Bahnkurve des Höhenschnittpunkts H, wenn sich C auf einer Parallelen zu c bewegt.



Bei den meisten Programmen sind diese Spurkurven zu sehen, sie stehen aber nicht als Objekte für weitere Konstruktionen zur Verfügung.

1.1.3 Makro-Fähigkeit

Denkt man an das eben verwendete Beispiel eines Dreiecks mit seinen Höhen, so erinnert man sich an die Grundkonstruktionen wie das Halbieren einer Strecke oder eines Winkels, das Fällen bzw. das Errichten eines Lots – inklusive der Konstruktion des Mittellots einer Strecke. Früher wurden diese Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal durchgeführt – heute meist mit Hilfe eines Geodreiecks. Wenn ein Geometrie-Programm nun das Zeichnen mit Zirkel und Lineal „übernimmt“, so ist es wünschenswert, dass man eine Folge von Teilschritten – etwa zur Konstruktion der Höhen, also das Fällen von Loten – zusammenfasst und mit einem „großen“ Befehl – „Makro“ genannt – ausführen kann. Einige Standard-Makros sind bei fast allen Programmen implementiert – wie das hier gebrauchte Lot-Fällen. Oft kann man aber auch „eigene“ Befehlsfolgen – etwa die Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks – in einem Makro(-Befehl) zusammenfassen. Das erleichtert das Lösen von komplexeren Problemen. Man wünscht bei solchen Programmen – so die Terminologie – die „Makro-Fähigkeit“.

1.1.4 Zusammenfassung

Programme, die über diese drei Merkmale verfügen, nennt man üblicherweise Dynamische Geometrie-Systeme, abgekürzt DGS. In diesem Sinn sind DynaGeo und Cabri-gèométre ebenfalls DGS. Es sei darauf hingewiesen, das gelegentlich – z. B. derzeit noch bei Cinderella und bei GeoNext – auf die Makro-Fähigkeit verzichtet wird. Im weiteren Sinn sind dies ebenfalls DGS. Will man über Begriffsbildungen nachdenken, muss nicht streng getrennt werden. Die beiden erstgenannten Vertreter werden daher bei Beispielen herangezogen.

1.2 Aspekte für und wider den Einsatz von DGS in der Schule

Die allgemeinere Frage lautet: Wie kommt es zu Neuerungen in der Schulmathematik? Einerseits gibt es allgemeine Überlegungen. Als Beispiele seien die Bemühungen von FELIX KLEIN und die Einführung der „Neuen Mathematik“ um 1968 genannt. Andererseits gibt es Anstöße durch technische Neuerungen.

Dies soll zunächst am Beispiel der Taschenrechner erörtert werden. Die Taschenrechner waren in den Siebziger-Jahren des vorigen Jahrhunderts die ersten Geräte, die sozusagen von außen her „in Konkurrenz“ zum bisherigen Rechnen traten. Damals wurde von zwei Richtungen her argumentiert. Erstens überlegte man, wie die Taschenrechner „Neues“ in die Schulmathematik bringen könnten. Es gab eine Fülle von Vorschlägen, von denen allerdings nur wenig umgesetzt wurde. Zweitens wurde auch die Schulmathematik daraufhin geprüft, was mit den Taschenrechnern anders (und vielleicht sogar besser) gemacht werden könnte und was vom seitherigen Stoff dann auch nicht mehr gemacht werden müsste. So sind dann z. B. mit der Einführung von Taschenrechnern, mit deren Hilfe man Werte für trigonometrische Funktionen per Tastendruck abrufen kann, die Funktionstafeln aus den Schulen verschwunden.

Entsprechende Überlegungen gibt es mit dem Computer, speziell im Umfeld der DGS. „Die neuen Programme ‚können‘ das, also muss es doch auch in der Schule gemacht werden“, „Schüler machen das auf ihrem Computer, da muss die Schule doch reagieren“, „Das macht den Schülern offensichtlich Freude“ und ähnlich wird oft argumentiert. Man kann durchaus von den Möglichkeiten der DGS ausgehen und überlegen, ob diese Möglichkeiten in den Unterricht eingebracht werden können. Z. B. wird, wenn mit Cinderella gearbeitet wird, die Behandlung nichteuklidischer Geometrien diskutiert. Letztlich sollte aber die Entscheidung, was im Unterricht behandelt wird, nicht derart einseitig von einem „Markt“ diktiert werden.

Man kann auch von den gültigen Lehrplänen ausgehen. „Der Schulstoff liegt fest. Was davon kann man eventuell auch mit einem DGS machen?“ könnte dann die umgekehrte Überlegung sein. Folgt man diesem Gedankengang, werden DGS an passender Stelle als Hilfsmittel im sonst unveränderten Mathematikunterricht eingesetzt. Das könnte sich allerdings auf lange Sicht als zu eng erweisen. Das Verabsolutieren des Schulstoffs kann nicht akzeptiert werden. Einmal liegt der Schulstoff keinesfalls unumstößlich fest, wie jede Lehrplanänderung zeigt. Dann kann der Stoff – wenn andere Hilfsmittel zur Verfügung stehen – auch auf verschiedene Weise behandelt, können Probleme bzw. Aufgaben auf verschiedene Weise gelöst werden. So ist es durchaus denkbar, dass DGS bei Lehrplanänderungen Einfluss auf die dort geforderten Inhalte nehmen und dass die DGS neue Denkweisen, Lösungsmethoden und auch neue Fragestellungen im Umfeld des kanonischen Stoffs ermöglichen.

Damit ist dann klar, dass im Mathematikunterricht auch (und selbstverständlich nicht ausschließlich) mit DGS gearbeitet wird. Damit ist nicht gemeint, dass DGS nur als Demonstrationsmittel des Lehrers dienen soll – auch wenn das oft von großem Nutzen sein kann. Vielmehr sollen Schüler selbst am Computer sitzen und mit DGS arbeiten. Verfährt man so, dann ergeben sich verschiedene Fragekreise, z. B.:

- Wie kommen Schüler mit dem Programm zurecht? Wie intuitiv lässt sich das Programm bedienen?
- Wie ändert sich bei den Schülern das Beweisbedürfnis, wenn eine Vermutung (etwa die, dass sich die Mittellote der Dreiecksseiten stets in einem Punkt schneiden) doch – unterstützt durch den Zugmodus – immer wieder „vor Augen geführt“ wird und wenn die Genauigkeit der Zeichnung nicht von den Unzulänglichkeiten des Umgangs mit Zirkel und Lineal abhängig ist, sondern wenn der „Computer“ doch „genau“ zeichnet?
- Welchen Einfluss hat der Einsatz von DGS auf das Bilden von Begriffen in der Elementargeometrie?
- Welche Wünsche hat „die Schule“ an DGS? Was soll das Programm „können“?

Hier soll, von gelegentlichen Randbemerkungen abgesehen, nur auf den Dritten der genannten Punkte eingegangen werden. Zum vierten Punkt sei nur bemerkt, dass es nicht unrealistisch ist, hier einen Einfluss der Schule zu erhoffen. Bei den üblichen Taschenrechnern waren die Schulen nur ein kleiner Teil der Abnehmer, und sie hatten deshalb kaum Einfluss auf den Markt. Bei DGS (und ähnlich wohl bei grafikfähigen Taschenrechnern) sind die Schulen der Hauptmarkt und könnten durchaus Einfluss haben

2. Geometrie-Begriffe in der Primarstufe und der Sekundarstufe I

2.1 Geometrie-Begriffe in der Primarstufe

2.1.1 Vorbemerkung

Bekannt ist das allgemeine Vorurteil: Mathematik geht nach dem Schema „***Definition*** – ***Satz*** – ***Beweis***“ vor, allenfalls ***Hilfssätze*** und ***Folgerungen*** sowie ***Anwendungen*** kommen dazu.

Auf die Schule bezogen sind die ***Definitionen*** oft die **Begriffe**, die gelernt werden müssen. Dazu gehören (aus fachlicher Sicht) die **undefinierten Grundbegriffe** (wie *Punkt* und *Gerade*) und die durch Definitionen erklärten **abgeleiteten Begriffe** (wie z. B. *Kreis*). Wir kommen darauf ausführlich zurück.

Die ***Anwendungen*** sind die Aufgaben – und das könnten auch interessante, umfangreiche Probleme sein. Darauf wird – wie oben bei der Frage nach der Ortskurve des Höhenschnittpunkts – als Ausblick hingewiesen.

Folgerungen können aus bereits bewiesenen ***Hilfssätzen*** oder ***Sätzen*** gefolgert werden (für die es einen Beweis braucht) oder aus **Beobachtungen** an Experimenten (die es in der Schule im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I leider viel zu selten gibt) erwachsen, bei denen man nach einem Beweisbedürfnis fragen kann. Solche Beobachtungen sind „**Entdeckungen**" – ein Bereich, für den eine DGS ausgesprochen geeignet ist. Besonders interessant könnte die Frage sein, ob es denn in der strengen Geometrie angeht, eine Aussage sozusagen „statistisch" (statt symbolisch) zu beweisen: Eine geometrische Aussage gilt in einer **Vielzahl** (!) von **beliebigen** (!) Anordnungen der „Ausgangskonstellation", also ist die Aussage allgemeingültig und gilt als bewiesen (so Cinderella – hier etwas vereinfacht dargestellt). Dieser Bereich wird nicht weiter behandelt.

2.1.2 Geometrie-Schlagwörter aus einem Lehrplan für die Grundschule

Um einen Überblick darüber zu bekommen, welche geometrischen Begriffe in der Schule vorkommen, soll exemplarisch der Lehrplan von Baden-Württemberg aus dem Jahr 1994 betrachtet werden. Er nennt in der Primarstufe folgende **Begriffe** (im weiteren Sinn: Stichworte mit Geometrie-Bedeutung):

Anfangsunterricht, Klassen 1 und 2:
Vorspann:
Die Kinder gewinnen anhand von Situationen aus ihrer Umwelt geometrische Vorerfahrungen qualitativer Art, die später in quantitative Aussagen übergehen. Auch der Geometrieunterricht erweitert die sprachliche Kompetenz.
Sie erwerben durch Tätigkeiten umfangreiche Handlungserfahrungen zu formenkundlichen Begriffsbildungen. ... Kindgemäße Sprechweisen werden ... entwickelt.
An ... ebenen Figuren entdecken die Kinder Symmetrien und stellen achsensymmetrische Figuren her. Wesentlich für die ... Formerfahrung ist das freihändige Nachzeichnen von Formen.
Schlagwörter:
Vierecke, Dreiecke, Kreis erkennen, benennen und zeichnen.
Begrenzungsflächen von Körpern erkennen.
Rechtecke, Quadrate.
Die Vielfalt der Formen (nicht nur die Spezialfälle *Rechteck, Quadrat, gleichseitige, gleichschenklige und rechtwinklige Dreiecke*) betrachten.
Flächige Ornamente aus geometrischen Grundformen zusammensetzen.
Achsensymmetrische ebene Figuren herstellen und in der Umwelt erkennen.

Klasse 3
Vorspann:
Einsatz von Zeichengeräten.
Symmetrische Figuren werden gezeichnet. Das Gitternetz ist dabei Orientierungshilfe.
Schlagwörter:
Ecken, Kanten, Flächen.
Rechtecke, Quadrate, Dreiecke.
Spiegelsymmetrie.
Zeichnen mit Schablone.

Klasse 4
Vorspann:
Lineal und Zirkel. Symmetrie. Saubere Zeichnung.
Schlagwörter:
Konstruieren von *rechten Winkeln* und *Parallelen* mit dem Geodreieck.
Sprechweise „ist parallel zu" und „steht senkrecht auf".
Kreis mit *Durchmesser* und Radius.
Drehsymmetrische Figuren zeichnen.

2.1.3 Zusammenfassung / Wertung

Begriffe im engeren Sinn sind unter den inhalt-orientierten Schlagwörtern zunächst

- **Grundelement-Namen**, noch in umgangssprachlicher Form: Ecke, Kante und Fläche.
- **Figuren-Namen**, schon abstrakt: *Quadrat, Rechteck; Dreieck*; *Kreis* mit *Radius* bzw. *Durchmesser*.
- **Symmetrie** als Spiegelsymmetrie bzw. Drehsymmetrie von Figuren.

2.2 Begriffe in der Sekundarstufe I

2.2.1 Aufzählen von Vorspann und Schlagwörtern aus dem Lehrplan

Der Lehrplan von Baden-Württemberg aus dem Jahr 1994 nennt in Sekundarstufe I die hier zusammengefassten **Begriffe** (wie oben im weiteren Sinn). Die Schuljahres-Angaben beziehen sich auf die Hauptschule. Stoff-Ergänzungen für die Realschule bzw. das Gymnasium werden evtl. nicht der dortigen Klassenstufe entsprechend hier eingefügt. Für die Sekundarstufe findet man eine ebenfalls nach Klassenstufen geordnete, teilweise kürzere, teilweise über das hier Dargestellte hinausführende Sammlung vorkommender Begriffe auch in HOLLAND [1], Seite 14 ff.

Klasse 5
Vorspann:
Handlungen als natürlicher Zugang zu den grundlegenden Begriffen der Geometrie.
Schlagwörter:
Geometrische Grunderfahrungen: *Punkt, Strecke, Gerade, Halbgerade; parallel, senkrecht; Abstand.*
Haus der Vierecke.

Klasse 6
Vorspann:
Einführung des *Winkelbegriffs.*
Schlagwörter:
Kreis: *Mittelpunkt, Radius, Durchmesser, Sehne, Bogen, Ausschnitt, Abschnitt.*
Winkel: Winkelmessung, Winkelarten, *Stufenwinkel, Wechselwinkel.*
Achsenspiegelung, Drehung, Punktspiegelung, Schiebung, Deckungsgleichheit, Drehpunkt, Drehwinkel.

Klasse 7
Vorspann:
Mathematisches Argumentieren.
Schlagwörter:
Grundkonstruktionen: **Halbieren einer Strecke, Halbieren eines Winkels, Zeichnen einer Senkrechten zu einer Geraden durch einen Punkt, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende,**
Koordinatensystem (1. Quadrant).

Klasse 8
Vorspann:
Konstruieren mit Zirkel und Lineal.
Schlagwörter:
Dreieckstypen, Konstruktion von Dreiecken, Winkelsumme, *Umkreis, Höhe*, Kongruenzsätze, Satz des Thales.
Viereckstypen, Konstruktion von Vierecken, Winkelsumme im Viereck.
Kreis und Gerade (*Tangente*, Tangentenkonstruktion).

Klasse 9
Vorspann:
Mathematisieren im Umfeld des Satzes von Pythagoras.
Schlagwörter:
Satz des Pythagoras. Berechnen von Streckenlängen.
Kreisbogen, Kreisausschnitt.
Zentrische Streckung, Strahlensätze.
Höhensatz, Kathetensatz.

Klasse 10
Vorspann:
Trigonometrie.
Schlagwörter:
Verhältnisse von Seitenlängen.
Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck und am Einheitskreis.

2.2.2 Zusammenfassung / Wertung

Begriffe im engeren Sinn sind von den inhaltsbezogenen Schlagwörtern zunächst:

- Grundelement-Namen abstrakt: Punkt, Strecke, Gerade, Halbgerade; Winkel und Winkelarten, Stufenwinkel, Wechselwinkel.
- Grundfiguren: Quadrat, Rechteck, Viereck, Dreieck, Kreis mit Radius und Durchmesser, Sehne, Bogen, Ausschnitt, Abschnitt.
- Relationen: parallel, senkrecht.
- Messende Geometrie: Abstand bei Punkten und bei zueinander parallelen Geraden, Winkelmessung, Winkelsumme im Dreieck und im Viereck.
- Abbildungen: Achsenspiegelung, Drehung, Punktspiegelung, Schiebung, Deckungsgleichheit, Drehpunkt, Drehwinkel; Zentrische Streckung.
- Grundkonstruktionen: Halbieren einer Strecke, Halbieren eines Winkels, Zeichnen einer Senkrechten zu einer Geraden durch einen Punkt, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende. Kreis und Gerade: Tangentenkonstruktion.
- Abgeleitete Elemente: Tangente, Umkreis, Höhe, Kongruenzsätze.

2.3 Art der Begriffsbildung und Verbindung zu DGS

2.3.1 Primarstufe

Das Vorgehen im Mathematikunterricht der Primarstufe ist stets handlungsorientiert. Es ist **nicht** das Ziel, abstrakte Begriffe sofort zu definieren. Die Erarbeitung von Begriffen erfolgt vielmehr weitgehend analog zum **Spracherwerb** in der Muttersprache durch Aufzeigen von Beispielen und Gegenbeispielen. Es schließt sich aber durchaus auch ein Argumentieren an, bei dem Eigenschaften aufgezählt werden.

Dieser Grundüberlegung entsprechend werden von den Begriffen im engeren Sinn **Grundelement-Namen** zunächst noch in umgangssprachlicher Form verwendet: Ecke, Kante, Fläche.

Figuren-Namen werden ebenfalls spracherwerbs-analog eingeführt, dann aber durchaus schon abstrakt mit Eigenschaften verbunden: Viereck, insbesondere Quadrat, Rechteck – leider werden, auch wenn es im Lehrplan anders steht, nur ganz selten andere Vierecke eingeführt; Dreieck; Kreis mit Radius bzw. Durchmesser.

Daher ist es **vom Begriffs-Aspekt her** kaum denkbar, mit DGS schon in der Primarstufe zu arbeiten. Die einzige Grundfigur, die in DGS in der Terminologie der Primarstufe vorkommt, ist der Kreis.
Es ist aber durchaus denkbar, dass

- ➢ es Aspekte gibt, die ein DGS auch in der Primarstufe für Schüler interessant macht (zum Beispiel das spielerische Erzeugen von „allgemeinen“ Vierecken – sofern spezielle Vierecke, insbesondere Rechtecke und Quadrate – in beliebiger Lage – auch leicht erzeugt werden können);
- ➢ ein DGS vom Lehrer als Demonstrationsmittel bereits in der Primarstufe eingesetzt wird (und wenn es nur zum Verändern der Lage bzw. der Form von Vierecken ist).

2.3.2 Sekundarstufe I (Haupt- und Realschule, Gymnasium)

In der Sekundarstufe I werden – anders als in der Primarstufe – die Grundelement-Namen allmählich abstrakt verwendet: *Punkt, Strecke, Gerade, Halbgerade*. Die Fachsprache wird bei *Winkel* und Winkelarten, etwa bei *Stufenwinkeln* und *Wechselwinkeln*, sofort verwendet.

Die Namen der **Grundfiguren** werden weiter abstrakt verwendet. *Quadrat, Rechteck, Viereck, Dreieck, Kreis* mit *Radius* und *Durchmesser* kamen schon in der Primarstufe vor. *Sehne, Bogen, Ausschnitt, Abschnitt* kom-

men neu hinzu. Vermehrt werden nun explizite Definitionen verwendet. Teilweise erfolgt dabei eine vollständige Beschreibung („Ein Quadrat ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln“), oft aber wird eine Obermenge (als bekannt vorausgesetzt) genannt und eine aussondernde Eigenschaft angegeben („Ein Quadrat ist eine Raute mit einem rechten Winkel“).
Das gilt analog für **Relationen** *parallel* und *senkrecht*, für die **Abbildungen** *Achsenspiegelung, Drehung, Punktspiegelung, Schiebung, Zentrische Streckung* und für abgeleitete Begriffe wie z. B. *Deckungsgleichheit, Drehpunkt, Drehwinkel*.

Grundkonstruktionen (Halbieren einer Strecke, Halbieren eines Winkels, Zeichnen einer Senkrechten zu einer Geraden durch einen Punkt, *Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende*) zielen zunächst auf elementare **Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen**. Hier kann ein **DGS** dann **als anderes**, „modernes“ und außerdem zugleich immer genaues „**Zeichenwerkzeug**“ verwendet werden, wenn die betreffenden Konstruktionen entweder direkt vorhanden sind oder den Schülern als Makro zur Verfügung gestellt werden können. Hierbei handelt es sich also um den **Konstruktions-Anteil** eines DGS, der üblicherweise weit einfacher zu handhaben (und damit auch Schülern zugänglich) ist als die meisten eingangs erwähnten umfassenden Konstruktionsprogramme. Dazu kommt noch der Preisunterschied dieser Programm-Typen.

Die Tangentenkonstruktion an den Kreis stellt zuerst die Frage nach dem Begriff der *Tangente*. Hier kann der **Dynamik-Anteil** eines DGS zweifellos wirkungsvoll eingesetzt werden. Wir kommen darauf in 3.2.2 zurück.

Die **messende Geometrie** (Abstand bei Punkten und bei zueinander parallelen Geraden, Winkelmessung, Winkelsumme im Dreieck und im Viereck) dokumentiert den empirischen Zugang in der Sekundarstufe I, wie er schon bei BENDER-SCHREIBER und bei STRUVE beschrieben ist. Alle gängigen DGS enthalten Werkzeuge, die es gestatten, Längen und Winkel zu messen.

Der durch seine Anschaulichkeit überzeugende (und später dann auch oft zu Unrecht verabsolutierte und das Beweisbedürfnis überdeckende) Aspekt einer dynamischen Darstellung ist sehr hoch! Dies wird noch verstärkt, wenn man die in einem DGS vorhandene Berechnungen einsetzt. Man kann Längen und Winkel messen und die Messergebnisse anzeigen lassen. Bei Variation der Figur im Zugmodus werden die Maße stets neu berechnet. Man „sieht“ also z. B. nicht nur, dass die drei Mittellote von Dreiecksseiten einander in einem Punkt schneiden. Man kann – an den Maßen – auch ablesen, dass dieser Schnittpunkt von den drei Dreieckseckpunkten gleich weit entfernt ist.

Dazu kommt in den Lehrplänen schließlich ein **Abbildungs-Anteil**. Bei den DGS gibt es deshalb Abbildungs-Werkzeuge. Sie dienen bei den Kongruenzabbildungen eher als Kurzkonstruktion, also als eine Art Makro. Bei der Zentrischen Streckung dagegen ist der Dynamik-Anteil fast nicht zu unterdrücken. Hier kommt man in die Problematik, dass eine Abbildung (so ist der mathematische Begriff definiert) eine Beziehung zwischen Ausgangslage und Endlage meint, dass mit einem DGS aber mit den „eingebauten“ Abbildungen im mathematischen Sinn jedem Punkt einer Figur in der Ausgangslage ein eindeutig entsprechender Punkt der Endlage zugeordnet ist, dass andererseits aber auch ein kontinuierliches Überführen aus der Ausgangslage in die Endlage (bei Translation und Drehung, natürlich nicht bei der Achsenspiegelung, aber wieder bei der zentrischen Streckung) als kontinuierliche Bewegung dargestellt werden kann. Hier ist ein **Kinematik-Aspekt** dabei, der bedacht werden muss.

Abgeleitete Elemente: *Umkreis, Höhe.*
In der Sekundarstufe I gibt es also etliche Begriffe im Lehrplan, die mit den in einem DGS implementierten Begriffen übereinstimmen. Dazu kommen noch die Grundkonstruktionen, die in einem DGS auch vorhanden sind. Falls ein makrofähiges DGS (wie DynaGeo Euklid, noch nicht Cinerella) verwendet wird, kann der Lehrer über Makros eine Umgebung zur Verfügung stellen, die noch mehr Möglichkeiten bietet. Im Einzelnen wird in 3. darauf genauer eingegangen.

Offen bleibt bei dieser ersten Betrachtung, ob der Umgang mit einem DGS auch – der Denkweise der Schüler in der S I entsprechend – empirisch ist.

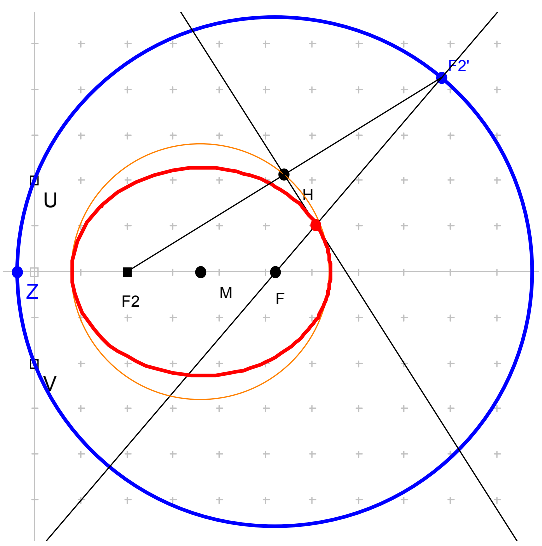
2.3.3 Ausblick auf die Sekundarstufe II

Für die Sekundarstufe II soll nur ein Beispiel angegeben werden, das Querverbindungen zu DGS zulässt:

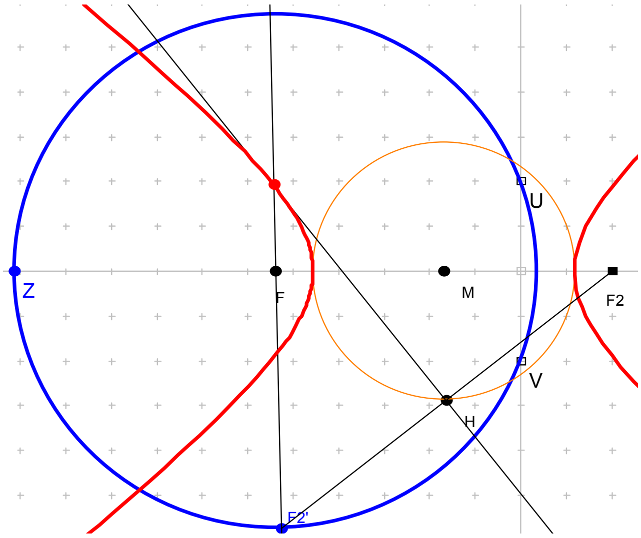
Ellipsen können verschieden eingeführt (definiert) werden, nämlich
- als Kegelschnitte,

- als orthogonal-affine Bilder eines Kreises oder
- mit Hilfe der Brennpunktsdefinition.

Die Brennpunktsdefinition lässt sich dann auch auf Hyperbeln und – leicht modifiziert – auf Parabeln ausweiten. Dort kann man dann bei den Ellipsen und Hyperbeln statt der Abstände zu den Brennpunkten den Abstand zu einem Brennpunkt und zu einem Leitkreis heranziehen. Bei der Parabel ist es sofort der Abstand von einer Leitgeraden (siehe auch LANGE und MEYER). Eine **Verwandtschaft** der Kegelschnitte ist mit einem DGS vielleicht dann zu erkennen, wenn es möglich ist, den Leitkreis in eine Leitgerade zu verwandeln. In den folgenden Figuren sind U, V und F_2 fest. Z wird auf der Horizontalen bewegt. F ist der Mittelpunkt des Kreises durch U, V und F.



Brennpunkte und Leitkreis: Ellipse



Brennpunkte und Leitkreis: Hyperbel

Schaut man eng auf die Begriffe, so muss man sagen, dass in der Sekundarstufe II die Grund-Begriffe der ebenen Geometrie bereits zur Verfügung stehen. Definitionen von Kurven kommen kaum noch vor – wenn man nicht der Meinung ist, dass viele Kurven (die nicht Funktionsgraphen sind!) durch das DGS wieder in den Schulkanon aufgenommen werden können / sollen / müssen. Gerade bei den Kegelschnitten spricht insgesamt (nicht nur wegen des DGS) einiges dafür, sie wieder intensiver in der Schule zu behandeln!

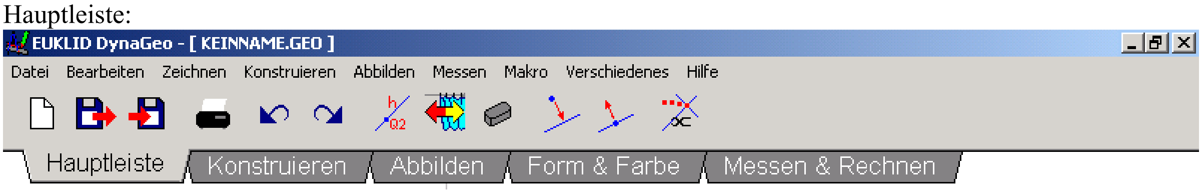
3. Beispiele mit DynaGeo und Cinderella

3.1 Grundelemente

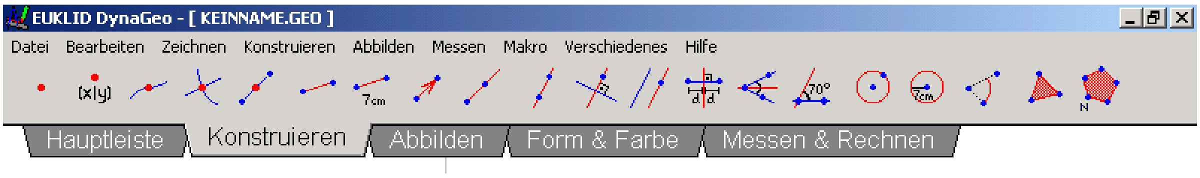
3.1.1 Punkte, Strecken

Von **DynaGeo** Euklid sind hier die ersten drei Schaltleisten angegeben. Für die Grundelemente ist insbesondere die zweite Leiste für das Konstruieren von Bedeutung.

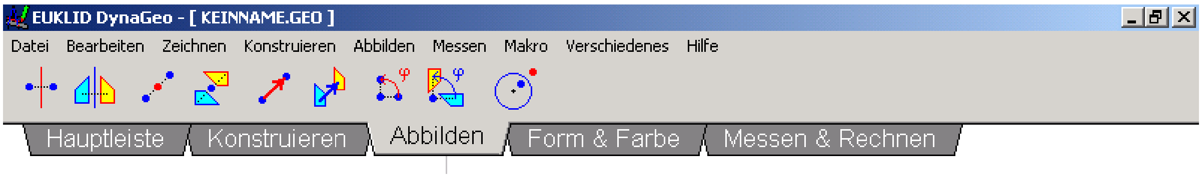
Hauptleiste:



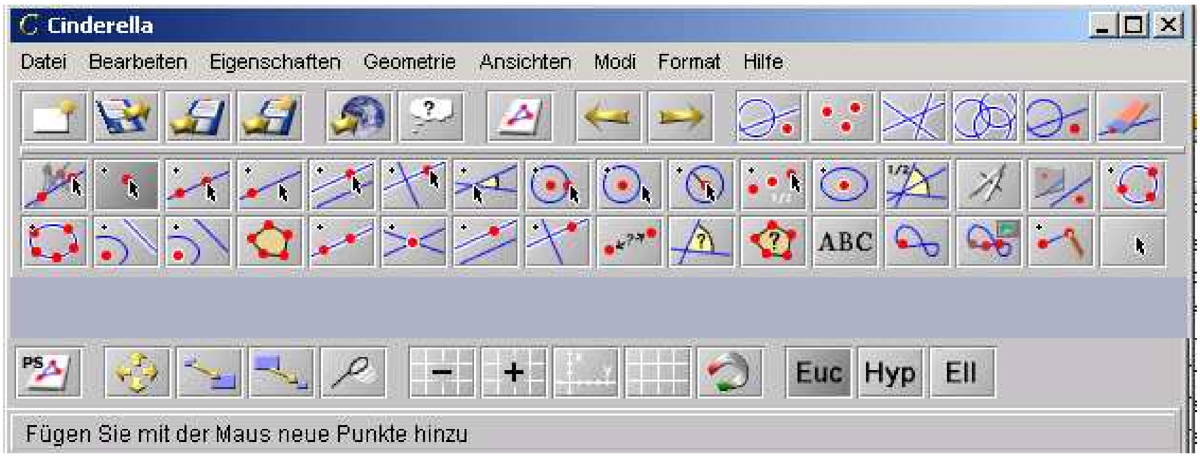
Konstruieren:



Abbilden:



Cinderella hat eine umfangreichere Auswahl stets gleichzeitig zur Verfügung. Bei jedem Icon erscheint, wenn man es mit der Maus anfährt (bei den Rechnern, mit denen ich Erfahrung habe: sehr langsam) eine Erklärung, was nach dem Anklicken des Icons ausgeführt werden kann. Die Icons sind hier dargestellt:



Zeichenwerkzeuge:

Punkte können in DynaGeo
- **mit der Maus frei gesetzt** werden (was dem freien Zeichnen auf dem Zeichenblatt entspricht);
- **über ihre Koordinaten definiert** werden (was in der Schule erst später gebraucht wird);
- **als Schnittpunkte zweier Linien** (insbesondere Geraden und Kreise) **eingeführt** werden (es genügt nicht, dass man die Punkte sieht, man muss sie als Objekte für das Programm sozusagen mit dem Schnittpunkt-Werkzeug „erzeugen").

Punkte können mit Cinderella
frei gesetzt und, wenn es gewünscht wird, dann an bestimmte Koordinaten gebunden werden. Die Nutzung ist – für jemand, der schon klassisch mit Zirkel und Lineal konstruieren kann – weit weniger intuitiv als DynaGeo. Die Wertung kann für Schüler, die über keine Zirkel-Lineal-Erfahrung verfügen, anders ausfallen! Die Konstruktion von Schnittpunkten von Geraden ist per Icon möglich, bei Kreisen und Strecken kann man einen Punkt gezielt setzen.

Strecken können mit DynaGeo
- durch **Anklicken** der vorher schon vorhandenen **Endpunkte** (Anfangs- und Endpunkt genannt, aber in vollkommen symmetrischer/gleichwertiger Bedeutung), was dem Verbinden zweier Punkte mit dem Lineal entspricht,
- durch **Anklicken** eines (je **neuen**) **Anfangs**- und **Endpunkts** und
- durch **Angabe** der **Streckenlänge**, Zeichnen des **Anfangspunktes** (mit der Maus) und Festlegen der **Richtung** der Strecke (wieder mit der Maus)

gezeichnet werden.

Mit Cinderella kann man **Strecken** dadurch zeichnen („aufziehen“), dass man den Anfangspunkt anklickt, mit gedrückter Maustaste zum Endpunkt fährt und dort die Maustaste loslässt. Beim Ziehen der Maus wird in jeder Zwischenlage auf dem Bildschirm die Verbindungsstrecke zwischen dem gewählten Anfangspunkt und dem aktuellen Maus-Punkt (der stets der „aktuelle“, noch nicht notwendig der „endgültige“ Endpunkt ist) angezeigt. Ferner kann man Strecken als Teile von Geraden definieren. Vgl. dazu auch die Darstellung bei Geraden.

Zur Begriffsbildung:
Beim Begriff „**Punkt**“ allgemein erfolgt die Abstraktion zum Begriff Punkt in der Sekundarstufe I ausgehend von „Ecke“ und von „Schnittpunkt“ aus der Primarstufe. Genau so, wie ein Punkt mit klassischem Zeichenwerkzeug gezeichnet wird, kann er mit einem DGS mit der Maus „gesetzt“ werden. Hierbei trägt das DGS praktisch nichts zur Begriffsbildung bei.

Etwas anderes ist es beim Ausgang von einem Schnittpunkt. Man zeichnet in der Primarstufe ja nie Punkte, sondern Linien und „sieht“ dass sie Schnittpunkte haben. Solche Schnittpunkte müssen definiert (DynaGeo) oder gesetzt (Cinderella) werden. Nur aus der Tatsache, dass sich zwei Linien einander „nach Augenschein“ kreuzen, ist der Schnittpunkt nicht für das DGS vorhanden. Die beim Zeichnen dreidimensionaler Objekte (z. B. ein Würfel-Schrägbild) bekannte Unterscheidung zwischen Deckpunkten von Linien, die keine Schnittpunkte der Linien im Raum sind, wird hier praktisch vorweggenommen. Auf das Bestimmen von Schnittpunkten wird noch einmal beim Dynamik-Aspekt im Zusammenhang mit Strecken einzugehen sein.
Beim Begriff „**Strecke**“ muss man verschiedene Aspekte betrachten:

➢ Abstraktion:
Einerseits wird „Strecke“ aus „Kante“ – genauer aus „Faltkante“ abstrahiert. Der Anteil „geradlinig“ wird bei einem DGS nicht gebraucht, er wird sozusagen „automatisch“ vom Programm mit eingebracht. Da ohne DGS aber mit dem Lineal gezeichnet wird, ist dieser Begriffs-Anteil auch beim Lineal-Konstruieren „im Werkzeug versteckt“ – das würde keinen Unterschied zwischen klassischer Konstruktion und einem DGS bedeuten. Für Schüler ist eine Kante aber nicht zwangsläufig geradlinig (man denke an die Kanten an einem Zylinder, die bereits aus der Grundschule bekannt sind), eine Strecke ist es aber. Der Übergang ist also nicht nur eine Abstraktion, sondern eine Einschränkung der Menge der angesprochenen Objekte.

➢ Strecke als Teil einer Geraden:
Andererseits muss „Strecke“ auch im Zusammenhang mit „Gerade“ gesehen werden. Dies soll deshalb im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

➢ Implementierung in ein DGS:
Denkt man zunächst an das Zeichnen einer Strecke mit dem Lineal, so kann man auf zwei Arten vorgehen:
- Man zeichnet erst Anfangs- und Endpunkt, legt danach das Lineal entsprechend an und zeichnet die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten. Diese Strecken sind dann Objekte, mit denen man weiter arbeiten kann. So geht man mit DynaGeo vor.
- Man legt einfach das Lineal auf das Zeichenblatt und zeichnet längs der Linealkante eine Strecke (als beliebig langes Stück einer Geraden). So kann man mit Cinderella Strecken zeichnen. Diese Strecken sind dynamisierbar, man kann aber keine Schnittpunkte solcher Strecken definieren.

Fazit:
Beim Begriff **Punkt** wird mit einem DGS beim Zeichnen einzelner Punkte praktisch gleich wie auf dem Papier gearbeitet. **Schnittpunkte** müssen eigens definiert werden (sofern das möglich ist). Der Aspekt der *Geradlinigkeit* einer **Strecke** wird von einem DGS nicht deutlich gemacht.

3.1.2 Halbgeraden, Geraden

Schon beim Begriff „Strecke“ ist auf „geradlinige Kante“ verwiesen worden. Klassisch gibt es drei Zugänge (Handlungen – also nicht die vorgestellte kräftefreie Bewegung von realen Objekten auf einer Geraden, vgl. dazu BENDER/SCHREIBER) zum Phänomen, geradlinig zu sein, die dann schließlich zu Begriffen führen:

- Faltkante eines gefalteten Blatts Papier;
- gespannter Faden;
- Visier-Linie / Lichtstrahl.

Die Faltkante führt durch **Abstraktion** zur „Strecke“ – und im Kopf dann schließlich durch die Überlegung, dass das Papier beliebig ausgedehnt sein könnte, zur „Geraden“. Hier kommt zur Abstraktion noch die Idee der **Komplettierung** hinzu (vgl. HOLLAND [1], S. 171f.)! Alternativ kommt man zur Geraden durch das überlappende Aneinanderfügen von Strecken – genau so, wie man auf dem Papier Strecken zeichnet, die länger als das zur Verfügung stehende Lineal sind.

Analog ist beim gespannten Faden zu argumentieren. Zunächst kommt man zur „Strecke“, indem man von der Fadendicke und einem eventuell schwerkraftbedingten Durchhängen abstrahiert, durch überlappendes Aneinanderfügen dann gedanklich, aber nicht mehr real, zur „Geraden“.

Beide Ansätze, das ist der entscheidende Aspekt dieser beiden Zugänge, bleiben zunächst – solange man anschaulich arbeitet – im Endlichen. Die Visier-Linie führt dagegen schon in der anschaulichen Vorstellung sofort zur „Halbgeraden“, zum „Strahl“ (ein Begriff, der in der Geometrie absolut entbehrlich ist, der aber an die handlungsorientierte Einführung erinnert.

Mit DynaGeo kann man zwei Punkte zeichnen und die Gerade durch diese beiden Punkte festlegen. Man kann diese beiden Punkte schon vorher haben oder im Moment des Geraden-Zeichnens mit der Maus festlegen. Entsprechend konstruiert man eine Halbgerade (mit dem zuerst gezeichneten Punkt bzw. dem zuerst festgelegten Punkt als Anfangspunkt) bzw. beides ist eine klassisch-statische Auffassung.

Bei Cinderella legt man – so beim Zeichnen mit Zirkel und Lineal eigentlich nicht üblich – einen ersten Punkt einer Geraden fest (Mausklick) und zieht dann *bei gedrückter Maustaste* (ohne nachzudenken, siehe nächsten Punkt: geradlinig) in eine Richtung (dann ist auf der Geraden nur ein Punkt markiert) oder zu einem zweiten Punkt. Welche Art man zeichnet, muss man vorher festlegen. Beides ist gewissermaßen ein dynamischer Geraden-Begriff, in dem die Gerade durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und eine Richtung festgelegt ist.

Strecken kann man in Cinderella auch *nachträglich* als Teile einer Geraden festlegen. *Sichtbar* ist dann nur die Strecke mit ihren Endpunkten. Für die Schnittpunkt-Festlegung (die dann möglich ist) werden aber stets die ganzen Geraden herangezogen. Es gibt außerdem die Möglichkeit, als reine *grafische Elemente* „Pfeile ohne Spitze“, also Strecken, direkt zu zeichnen, indem man den Anfangspunkt bei gedrückter Maustaste auf den Endpunkt zieht. Man kann rein grafisch auch Schnittpunkte zeichnen. Diese werden dann aber – im Gegensatz zu den Strecken selbst – beim dynamischen Verändern nicht mit dynamisiert.

Die Strecke ist bei Cinderella also eine abgeschnittene Gerade oder ein nur grafisches Objekt mit weit eingeschränkten Dynamik-Funktionen. Genetisch ist die Gerade – siehe oben – meist durch überlappendes Aneinanderfügen von Strecken entstanden.

Hier ist in der Begrifflichkeit sicher ein Unterschied zwischen Lineal-Zeichnen und DGS-Zeichnen. Dennoch ist klar, dass es die (unendlich ausgedehnten) Geraden nur in unseren (zweifellos endlichen) Köpfen gibt. Zeichnen kann man (gemeint ist zunächst) mit einem Lineal nur Strecken (die aber länger als das Lineal sein können). Das führt bei Schülern oft zu einer unbewussten Identifizierung der Begriffe Strecke, Halbgerade und Gerade.

Mit dem DGS (die Erfahrung beruht auf dem Einsatz von DynaGeo in einer 6. Klasse Hauptschule) muss man vor dem Anklicken des Icons entscheiden, was man zeichnen will. Das DGS macht stets etwas, das manche Lehrer als methodisches Hilfsmittel schon früher manchmal eingesetzt haben: Es wird genau das gemacht, was die Schüler anweisen, nicht etwa das, was sie vermutlich meinen. Wenn sie „Strecke“ anklicken, wird eine Strecke gezeichnet und wenn sie „Gerade“ anklicken, wird eine Gerde gezeichnet – aber natürlich wie auch auf dem Zeichenblatt nur ein endliches Stück davon. Dies ist für Schüler zunächst einmal beeindruckend und führt dazu, dass sie darüber nachdenken, welches Icon sie anklicken wollen.

Das DGS **DynaGeo** macht es aber noch anders möglich, den Unterschied offensichtlich zu machen:

- Man zeichnet zwei Strecken, die (offensichtlich) einen Schnittpunkt haben. Dieser Punkt wird als Schnittpunkt definiert. Eine der Strecken wird dann so bewegt, dass zwar noch die Trägergeraden auf dem Bildschirm (Zeichenblatt) einen Schnittpunkt hätten, nicht aber die Strecken. Der vorher festgelegte Schnittpunkt wird für eine solche Lage der Strecken aber nicht mehr angezeigt.

- Auf etwas höherer Ebene überlegt man: Der Satz „Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt“ gilt für spitzwinklige Dreiecke, wenn die Dreiecksseiten und die Höhen Strecken sind. Diese Deutung ist naheliegend, weil die Seiten und die Höhen für Konstruktionen ja oft eine Länge zugewiesen bekommen: Es müssen Strecken sein. Der Grenzfall des rechtwinkligen Dreiecks ist uninteressant, weil der Höhenschnittpunkt dort in den Scheitel des rechten Winkels wandert – und die Formulierung „wandert" lässt sofort an den Zugmodus eines DGS denken. Für stumpfwinklige Dreiecke liegt nur eine Höhe als Strecke im Dreieck. Interessant ist, dass die Lote auf Strecken aber automatisch Lote auf die Trägergeraden sind!

Fazit:
Die Begriffe *Halbgerade* und *Gerade* werden von einem DGS klassisch aufgenommen. Beim Zeichnen – auch zusammen mit den Strecken – zwingt das DGS die Schüler oft, genau differenzierend zu überlegen bzw. bei der Konstruktion genau hinzusehen. Die präzise Unterscheidung der DGS führt zu einer bewussten Unterscheidung der Begriffe auch im aktiven Sprachgebrauch: Aktiver Sprachgebrauch sind auch „Konstruktionsanweisungen" zumindest für Mitschüler.

Insgesamt handelt es sich hier aber um Präzisierungen, die durch den **Computer** (der „Software-Anteil von DGS) bedingt wird. Die Maschine arbeitet exakt nach Anweisungen (und nur nach exakten Anweisungen).

Hier ist bei Cinderella für Schüler sicher eine Problematik enthalten, weil der Begriff der Strecke, will man die Dynamik nutzen, nur eingeschränkt umgesetzt ist.

3.1.3 Senkrecht und parallel

- Senkrecht:

Der Begriff „senkrecht" ist eng gekoppelt an den „rechten Winkel", der schon in der Grundschule als „Faltwinkel" eingeführt wird. Damit stehen Strecken oder Geraden dann *aufeinander senkrecht*, wenn sie sich rechtwinklig schneiden – sie müssen sich also tatsächlich schneiden. Schon in der zur ebenen Geometrie führenden Realität muss man den Begriff „senkrecht" ausweiten. Nicht nur zwei aneinander stoßende Leisten eines Bilderrahmens sind zueinander senkrecht, sondern auch eine (richtig ausgewählte) Kante des Passepartout und eine Leiste (und die andere Kante des Passepartout führt vielleicht mit der gleichen Leiste zum Parallel-Begriff).

Hinweise:
Hilfreich wäre der meist nicht verwendete Begriff der „Richtung". Zum Aufeinander-senkrecht- stehen hätte man „zueinander senkrechte Richtungen", die „zueinander normal" (an der Schule selten) sind. Es entstehen „Normale" (wieder häufiger) (vgl. ARNOLD).
Bei der Einführung der Parallelität hätte man dann einfach eine einzige Richtung: Zwei Geraden (Strecken, Halbgeraden) sind zueinander parallel, wenn sie die gleiche Richtung haben.

In der Raumgeometrie kann man auf dieser Überlegung aufbauen, wenn man zueinander windschiefen Geraden einen Winkel („Schnitt"-Winkel ist ja nicht passend) zuordnen will.

In einem DGS kann man *Normalen* zeichnen. Normale sind im DGS Geraden (vgl. aber die Überlegungen zu Höhen im Dreieck). DynaGeo erlaubt es, eine Normale zu einer Strecke zu zeichnen (auch dann, wenn der Schnittpunkt in der Ausgangslage, in der konstruiert wird, nicht existiert), während Cinderella auch hier wieder nur Geraden zulässt. Verändert man die Strecke dynamisch so, dass der Schnittpunkt existiert, wird er von DynaGeo auch angezeigt. Man kann – im Sinne der klassischen Grundkonstruktionen – sowohl Lote errichten als auch Lote fällen. In beiden DGS sind Normalen Geraden mit einem Punkt und einer Richtung (senkrecht auf der Bezugslinie).

Zur Begriffs**bildung** trägt ein DGS insgesamt **wenig** bei – **der Begriff muss schon vorher da sein**, er wird durch das DGS aber auch nicht wesentlich eingeschränkt oder modifiziert. Der Begriffs**umfang** kann aber mit einem DGS ausgeweitet werden, wenn man, wie oben dargestellt, dynamisch arbeitet und den Punkt, durch den die Normale geht, verschiebt. Keine Ausweitung erfährt man (mit DynaGeo), wenn man den Punkt auf einer Strecke nimmt (Lot errichten). Fällt man aber von einem Punkt außerhalb das Lot, dann kann dieses Lot auch auf eine Strecke konstruiert werden. Man kann den Schnittpunkt mit dem entsprechenden Werkzeug definieren. Wenn der Schnittpunkt real existiert, sieht man ihn dann auch. Wenn man den „Aufpunkt" aber so bewegt, dass die Normale die Strecke nicht mehr trifft, dann „verschwindet" der Schnittpunkt – die Strecke und die Normale (stets eine Gerade) sind aber noch immer zueinander orthogonal.

Die in der traditionellen Konstruktions-Sprechweise (unnötigerweise, da von der Sache her nicht begründet) vorgenommene Unterscheidung zwischen „Lot fällen“ und „Lot errichten“ ist mit beiden DGS nicht von Bedeutung.

- Parallel:

Anschaulich gibt es mindestens drei „Parallel“-Definitionen: Zwei Geraden sind in der Ebene zueinander parallel, wenn sie
- keinen Schnittpunkt haben (oder identisch sind, zusammenfallen),
- überall gleichen Abstand haben oder
- ein Gemeinlot haben.

Die ersten beiden hier genannten Erklärungen haben den Nachteil, dass sie nicht empirisch kontrolliert werden können. Ein DGS macht zumindest die erste Erklärung aber plausibel. Der Schnittpunkt zweier sich einander schneidender Geraden „wandert“, dreht man eine der Geraden um einen fest bleibenden Punkt, in der einen Richtung aus dem Bildschirm (dem Zeichenblatt) hinaus und kommt aus der Gegenrichtung wieder herein. Dazwischen *muss* es doch eine Lage geben, in der er „*weder* links *noch* rechts“ sein kann (punktfremd), also nicht existiert.

Hinweis: Studierende argumentieren an der Stelle oft „Es muss beides sein“, und sie sind nur durch den Hinweis, dass zwei voneinander verschiedene Punkte *eindeutig* eine Verbindungsgerade bestimmen, dazu zu bringen, dass man diese beiden Punkte dann sozusagen (in einer Art „Klassenbildung“) identifizieren muss. Man ist an der Schwelle zur Projektiven Geometrie (und Cinderella ist im Sinne der Projektiven Geometrie tatsächlich über homogene Koordinaten programmiert).

Eine andere Frage ist, wie man die Parallele zu einer Geraden g durch einen Punkt P *konstruiert*. Hier zeigt sich schon in der Zirkel-und-Lineal-Geometrie der Unterschied zwischen den Definitionen deutlich. Mit einem DGS wird aber zum Zeichnen nicht auf eine der Definitionen zurückgegriffen, weil das Werkzeug „Parallele“ eingesetzt wird. Auch Hilfsüberlegungen wie etwa zum Konstruieren einer Parallelen zur Geraden g durch einen außerhalb liegenden Punkt P mit Hilfe einer Rauten-Konstruktion (und damit der Rauten-Eigenschaft, dass Gegenseiten als Strecken zueinander parallel sind) sind hierbei völlig überflüssig.

Fazit:
Der „**Dynamisch**“-Anteil des DGS hilft bei der Ausweitung des Normalen-Begriffs. Auch beim Parallelen-Begriff kann man gängige Sprechweisen wie „zueinander parallele Geraden schneiden einander im Unendlichen“ dadurch plausibel machen, dass man eine Gerade g fest lässt und eine zweite Gerade h dynamisch um einen Punkt P auf h, aber außerhalb von g, dreht (Geradenbüschel mit Trägerpunkt P). Hier kann man das Drehen auf dem Bildschirm bei Cinderella sogar „automatisch“ ablaufen lassen.

3.2 Kreis

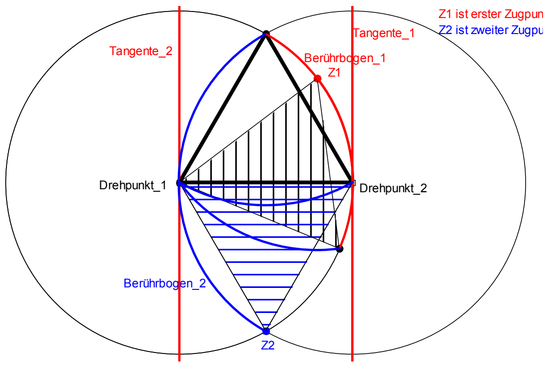
3.2.1 Kreis-Definitionen

Kreise kommen an Gegenständen des Alltags vor. Der Begriff wird also sowohl umgangssprachlich als auch fachsprachlich verwendet. In Klasse 2 wird „Kreis“ in gewisser Weise synonym zu „rund“ verwendet. Erst in Klasse 4 kommt der Radius bzw. der Durchmesser dazu. Ebenso folgt die Konstruktionsvorschrift mit dem Zirkel. Diese (klassische) Definition führt – je nach Betrachtungsweise – auf zwei Kreis-Definitionen:

- Ein Kreis ist der Ort aller Punkte einer Ebene, die vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand r haben. Der Radius r (und damit auch der Durchmesser $d = 2 \cdot r$) ist bei dieser Erklärung – zusammen mit dem Mittelpunkt M – kennzeichnend für einen Kreis (als Linie). Fordert man, dass der Abstand $\leq r$ ist, kommt man analog zur Kreisscheibe (Fläche). Dies ist jeweils eine statische Definition.

- Ein Kreis ist in der Ebene die Bahn des Endpunkts P einer Strecke der Länge r bei Rotation um den anderen Endpunkt M. Dies ist eine dynamische Definition einer Kreislinie. Nimmt man alle Bahnen aller Punkte dieser Strecke, kommt man zur Kreisscheibe.

Die erste, statische Erklärung verführt zur Verwechslung einer Eigenschaft, die ein Kreis hat, mit einer kennzeichnenden Eigenschaft (einer zur schon bekannten äquivalenten Definition): Der Kreis hat in jeder Richtung die gleiche „Dicke“. Diese Überlegung kann in der Sekundarstufe I mit Hilfe eines DGS deutlich gemacht werden. Die Figur rechts in DynaGeo ist ein Beispiel dafür: Es liegt ein gleichseitiges Dreieck mit angesetztem Kreisbogen, ein „Gleichdick“ vor. Weil die Drehpunkte wechseln, hilft eine Animation in Cinderella nicht weiter.



Man geht (hier nur in Gedanken) von der oberen Ausgangslage des dick gezeichneten Dreiecks samt den drei Kreisbogen aus. Z1 ist der erste Zugpunkt, der auf dem Berührbogen_1 bis zum Drehpunkt 2 laufen kann. Drehpunkt dieser Drehung ist Drehpunkt_1. Eingezeichnet ist eine Zwischenlage, das zugehörige Dreieck ist vertikal schraffiert. Hat man die Endlage dieser Drehung erreicht (eingezeichnet mit einem horizontal schraffierten Dreieck), wechselt man zu dem eingezeichneten Zugpunkt Z2, der auf dem Berührbogen_2 läuft, und dreht das Gleichdick wieder (mit Drehpunkt_2 als Drehpunkt) in die Ausgangslage. Die beiden vertikalen Parallelen belegen, dass das Gleichdick stets genau zwischen diesen beiden Parallelen liegt, also seinen Namen zu Recht trägt.

Nun zur Kreis-Konstruktion mit DGS:
Mit DynaGeo zeichnet man einen Kreis um einen Mittelpunkt durch einen zweiten Punkt oder um einen Mittelpunkt mit einem vorher eingegebenen Radius. Das entspricht genau der Zirkel-Anwendung. Beim Dynamisieren kann man jeden der beiden Punkte (unabhängig voneinander) variieren oder den Mittelpunkt bei konstant bleibendem Radius verändern.

In Cinderella fällt auf, dass drei Kreis-Definitionen vorliegen:

- Kreis mit Mittelpunkt und Kreispunkt durch Aufziehen:
  Beim so definierten Kreis kann man im Bewegungsmodus den Mittelpunkt verschieben. Der Peripheriepunkt bleibt fest, der Radius ändert sich. Man kann aber auch den Peripheriepunkt verschieben. Der Mittelpunkt bleibt fest, der Radius ändert sich.
- Kreis mit Mittelpunkt durch Aufziehen:
  Beim so definierten Kreis kann man im Bewegungsmodus den Mittelpunkt verschieben. Der Radius bleibt dann fest. Man kann aber auch irgendeinen (nicht gekennzeichneten!) Peripheriepunkt anwählen und verschieben. Der Mittelpunkt bleibt dann fest, der Radius ändert sich.
- Kreis mit vorgegebenem festen Radius:
  Beim so definierten Kreis kann man im Bewegungsmodus den Mittelpunkt verschieben. Der Radius bleibt dabei fest.

Die Unterscheidung ist insbesondere beim Dynamisieren von Bedeutung. Für die Bildung des Kreis-Begriffs scheint dies nicht bedeutsam zu sein.

3.2.2 Tangenten-Definitionen

Eine Tangente hat mit dem Kreis – anschaulich geometrisch gesprochen – genau einen Punkt gemeinsam.
Diese Grundeigenschaft ist nur eine anschaulich-geometrische Definition zur ersten Einführung! Später – nicht mehr beim Kreis – muss noch
- auf Besonderheiten algebraischer Zählung, die auf zwei oder gar mehrere, aber jeweils zusammenfallende Punkte führt und
- auf die Tatsache, dass man nur eine Umgebung des Berührpunkts betrachtet,

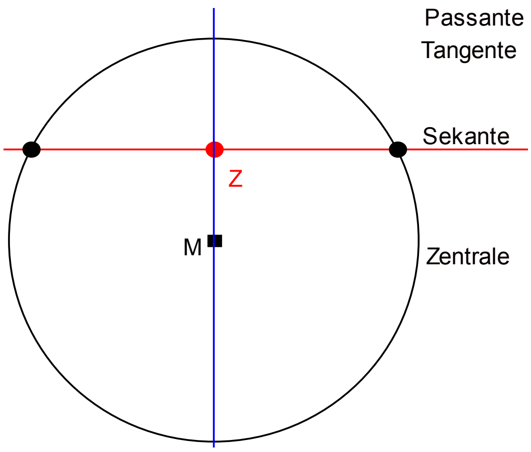
hingewiesen werden.

Dennoch sollte schon bei der ersten Einführung des **Tangenten-Begriffs** – und das ist in der Sekundarstufe I beim Kreis, lange vor der Differentialrechnung – auf die Grundeigenschaft hingearbeitet werden. Das ist das Ziel – wenn es erreichbar ist. Eine andere Frage ist es dann, wie man diese so erklärte Tangente konstruiert. Man braucht „zum Zeichnen“ auch noch eine **Konstruktionsvorschrift**.

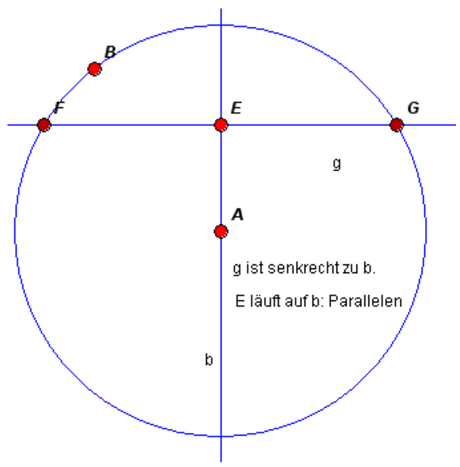
Eine Tangenten-Konstruktion per Mausklick ist in beiden betrachteten DGS nicht implementiert. Mit einem DGS kann man jedoch leicht auf zwei verschiedene, wohldefinierte (sonst gibt es natürlich beliebig viele) Arten zu einer Tangente kommen. Bei beiden Arten hat man Fälle mit zwei verschiedenen Schnittpunkten einer Geraden mit einem Kreis, zwei Fälle mit offensichtlich zusammenfallenden Schnittpunkten und schließlich keinem (reellen) Schnittpunkt. Die Übergänge zwischen den genannten drei Klassen sind wohl definiert und deshalb übersichtlich. Außerdem erhält man damit gleichzeitig verschiedene Konstruktionsvorschriften bzw. Eigenschaften einer Kreistangente.

- Kreistangente als Grenzlage zueinander paralleler Geraden (aus einem Parallelenbüschel):

Aus der Symmetrie der Anordnung ist zu erkennen: Die Mittellote der ausgeschnittenen Kreissehnen liegen alle auf der gleichen Geraden, der Symmetrieachse, die durch den Kreismittelpunkt geht. Daher ist die Tangente das Lot auf dieser Symmetrieachse in ihrem Schnittpunkt (es gibt 2) mit dem Kreis.

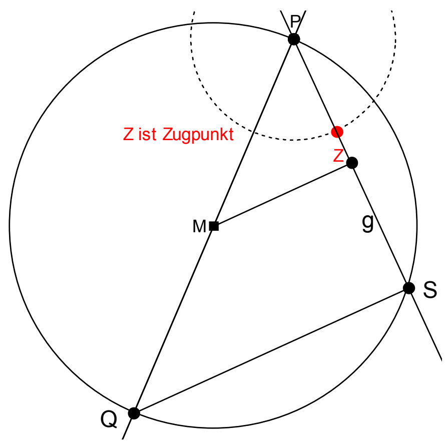


DynaGeo



Cinderella

- Kreistangente als Grenzlage eines Geradenbüschels mit Trägerpunkt auf dem Kreis:



Zu jeder Geraden des Geradenbüschels mit Trägerpunkt P auf dem Kreis wird außer dem Durchmesser (PQ) durch P die Verbindung des 2. Schnittpunkts S einer Büschelgraden g mit Q (sowie die „Mittelparallele“ parallel zu (QS)) eingezeichnet.

Z ist der Zugpunkt, der nur auf dem gestichelt eingezeichneten Kreis um P bewegt werden kann. Mit Z ändert sich dann die Gerade g = (PZ).

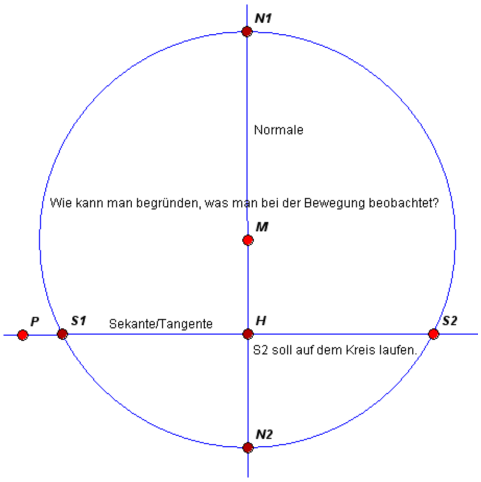
Mit dem Satz von THALES (rechter Winkel bei S; auch die Figur zum Strahlensatz ist erkennbar) folgt die Orthogonalität von g zu (QS). Wandert nun S nach P, so wird (in der Grenzlage) g zur Tangente in P und (QS) wird in dieser Grenzlage zu QP. Also gilt:

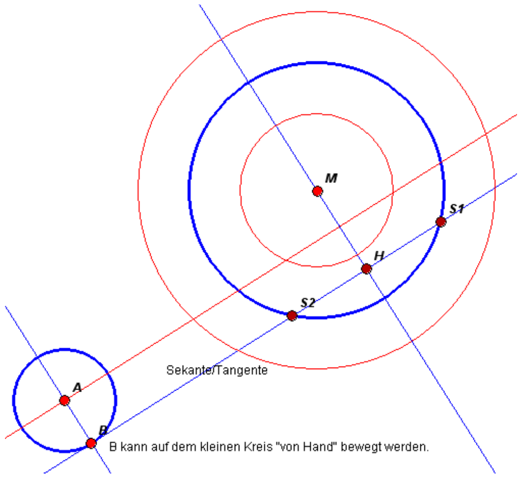
Die Tangente in einem Kreispunkt P ist orthogonal zum zugehörigen Berührdurchmesser (bzw. zum Berührradius).

Hier sollen als Ausblick noch zwei weitere, durchaus auch wohl definierte Arten angegeben werden, wie man die Lage von Geraden verändern und dabei darauf achten kann, ob sie einen gegebenen Kreis berühren.

- Kreistangente als Grenzlage eines Geradenbüschels mit Trägerpunkt außerhalb des Kreises:

Interessant ist die Überlegung, was passiert, wenn der Trägerpunkt P des Geradenbüschels außerhalb des Kreises liegt. Dies ist unten links mit Cinderella dargestellt. S2 läuft (in Cinderella automatisch) auf dem Kreis als „Straße“.





- Kreistangente, die auch Tangente an einen zweiten Kreis ist:

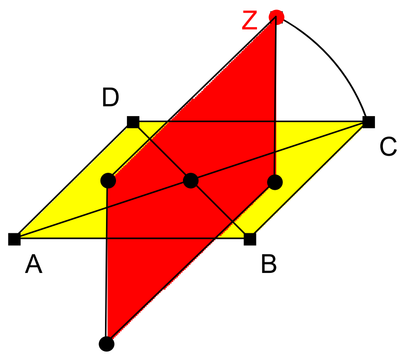
Eine Variation ist es, wenn die sich schneidenden Geraden nicht alle durch einen Punkt außerhalb des Kreises gehen, sondern selbst wieder Tangenten an einen anderen Kreis sind. Hier ist nur der Aspekt „Kreistangente" im Blickfeld. Es sei vermerkt, dass es nur ein kleiner Schritt zum Problem ist, die gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise zu finden. In der rechten letzten Figur wandert B mit der Tangente an den kleinen Kreis auf dem kleinen Kreis. In Analogie zur vorigen Zeichnung wird die Parallele zur Tangente durch den Mittelpunkt A („Sekante/Tangente") mit bewegt. Es ist offensichtlich, dass sich diese Parallele bezüglich der beiden dünner gezeichneten Parallelkreise um M genau so bewegt wie in der Figur weiter oben links – damit ist die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten an zwei Kreise gefunden.

Fazit:
Mit einem DGS kann man beim Tangentenbegriff eine Koppelung zwischen der anschaulichen Definition „die Tangente hat einen Punkt mit dem Kreis (allgemein: in der Umgebung des Punktes mit der Kurve) gemeinsam", der „Zusammenfallen-Idee" und mehreren Konstruktionsvorschriften Querverbindungen aufzeigen. Da man Konstruktionsvorschriften unbedingt braucht, hilft ein DGS hier sicher.

3.3 Vierecke

3.3.1 Definitionen und Zusammenhänge

Für die Definitionen der verschiedenen Vierecksarten kann ein DGS nicht allzu viel beitragen.



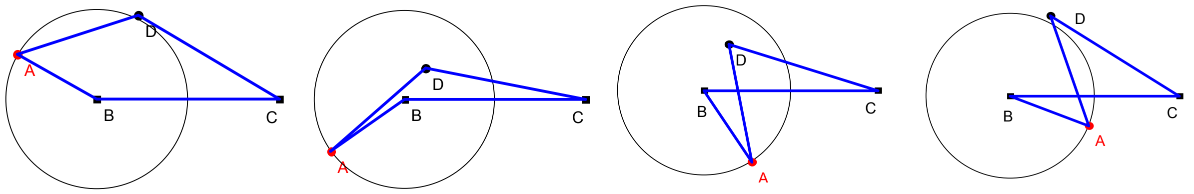
Um Zusammenhänge aufzuzeigen, wie sie gewöhnlich im „Haus der Vierecke" (in welchem?) dargestellt werden, kann man möglicherweise die Abbildungs-Möglichkeiten eines DGS heranziehen.

In der Figur rechts wird ein „Duplikat" des Parallelogramms ABCD um den Mittelpunkt der Diagonalen gedreht. Zugpunkt ist Z. Rechts ist eine „Zwischenlage" dargestellt. Man erkennt so an diesem Beispiel, dass man Z auf A drehen kann und so eine Deckabbildung des Parallelogramms erfolgt.
Entsprechend kann man nach Symmetrien bei allen Vierecken suchen, die man im „Haus der Vierecke" zusammengefasst hat. Wenn Schüler selbst konstruieren, ist der Nutzen sicher höher als bei reiner Demonstration.

3.3.2 Variationen

Variation hilft z. B. bei überschlagenden Vierecken. Die folgende Figuren-Folge soll die Dynamik nahe bringen. Gezeichnet ist ein Viereck ABCD derart, dass A auf dem eingezeichneten Kreis bewegt werden kann. B und C sind feste Punkte. Es ist dafür gesorgt, dass die Längen der Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ konstant bleiben.

Hier sind die Maße so gewählt, dass A den ganzen Kreis durchlaufen kann. Es gibt auch Maße, bei denen A nur einen Kreisbogen durchlaufen kann – die Bedingungen dafür können gefunden werden!



Hier ist aber der Bereich „Begriffe“ eigentlich schon verlassen. Man ist beim Variieren, entdeckendem Lernen, Sätze suchen (Wie müssen die Seitenlängen beschaffen sein, damit es ein überschlagendes Viereck gibt?).

3.4 Winkel

3.4.1 Winkel-Definitionen

Der Winkelbegriff ist bekanntlich sehr vielfältig.

- Geht man vom klassischen Zeichnen aus, so bilden zwei von einem Punkt ausgehende Halbgeraden einen (zwei?) Winkel.
- Als Grundkonstruktion muss man einen Winkel, der an einer Stelle gezeichnet vorliegt, an einer Halbgeraden in deren Endpunkt in eine Halbebene eindeutig abtragen können. Der Winkel ist dann durch seine beiden Schenkel bestimmt.
- Statt des gezeichneten Winkels kann beim zweiten Ansatz auch ein Winkelmaß gegeben sein. Man muss dann einen Winkel bekannter Größe abtragen.
- Auf die Problematik „Winkelfeld“ und „orientierter Winkel“ sei nur hingewiesen.

In DynaGeo kann man Winkel an Strecken, Halbgeraden und Geraden in einem Punkt abtragen. Die Orientierung kann gewählt werden.

In Cinderella werden Winkel bestimmter Größe in einem Punkt an eine Gerade abgetragen. Die Orientierung kann nicht frei gewählt werden.

Zum Winkel**begriff** trägt ein DGS nicht direkt bei. Unterschiede werden aber bei den implementierten Konstruktionsmöglichkeiten deutlich. Für beide Programme gilt, dass man erst eine Winkelgröße eingeben muss und dass beide Winkelschenkel Geraden sind. Mit DynaGeo kann man dann einen Punkt (auf dem Winkelschenkel), den Winkelscheitel und die Halbebene, in die der Winkel gezeichnet werden soll, mit der Maus festlegen. In Cinderella kann man die Gerade festlegen, von der aus der Winkel gemessen wird, und man kann den Scheitel, den man mit dem Festlegen der Geraden konstruiert, auf einen beliebigen anderen Punkt der Geraden schieben. Eine Festlegung der Halbebene ist dagegen nicht möglich. Der Winkel wird stets gegen den Uhrzeigersinn angetragen.

3.4.2 Abgeleitete Winkelbegriffe

In der Schule kommen insbesondere Scheitelwinkel. Stufenwinkel und Wechselwinkel vor.
Für die Begriffsbildung tragen beide hier betrachteten DGS-Versionen kaum bei.

3.5 Höhen in einem Dreieck

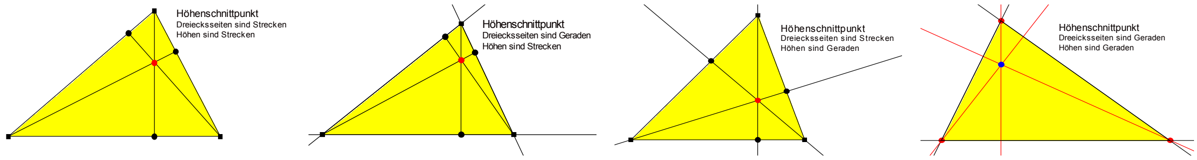
3.5.1 Strecken oder Geraden

Beim Besprechen des Begriffs Normale wurde darauf hingewiesen, dass Normale in den hier berücksichtigten DGS Geraden sind.
Will man den Höhenschnittpunkt in einem Dreieck konstruieren, stellen sich folgende Fragen:

- ➢ Sind Dreiecksseiten Strecken oder Geraden?
- ➢ Sind Dreieckshöhen Strecken oder Geraden?

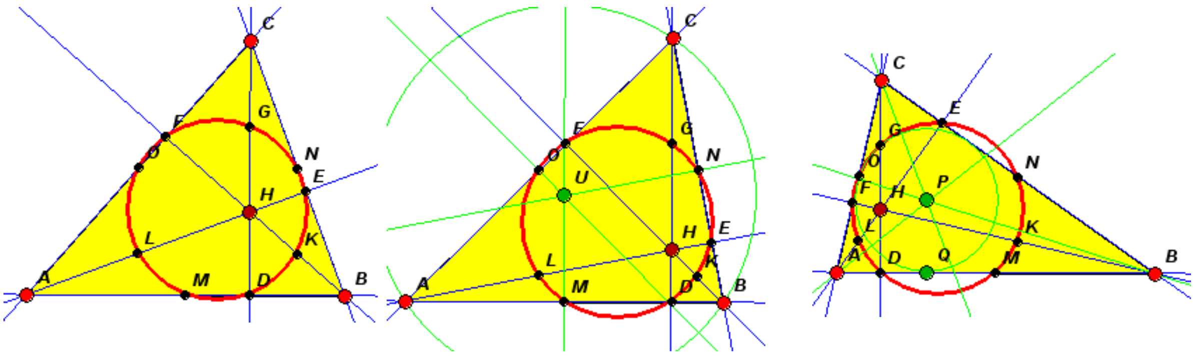
Mit DynaGeo kann man die Variationen
- Dreiecksseiten und Höhen sind Strecken
- Dreiecksseiten sind Strecken, Höhen sind Geraden
- Höhen sind Strecken, Dreiecksseiten sind Geraden
- Dreiecksseiten und Höhen sind Geraden

unterscheiden.



3.5.2 Der Neunpunktekreis (Feuerbach-Kreis)

In Cinderella ist der Feuerbachkreis leicht zu konstruieren, wenn man alle Seiten und Höhen als Geraden definiert. Hier ist besonders die Dynamik eindrucksvoll. Der Vergleich mit dem Umkreis eines Dreiecks hilft als Einstiegsidee für die Konstruktion weniger, lässt aber schon eine Vermutung aufkommen. Der Vergleich mit dem Inkreis eines Dreiecks bestätigt die Vermutung und führt zur Konstruktion, deren Ergebnis – in den Varianten – hier dargestellt ist.



Für einen klassischen Zugang vgl. MEYER.

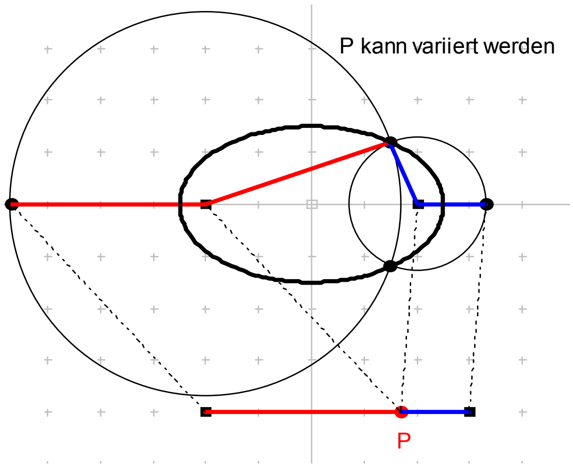
3.6 Kegelschnitte

3.6.1 Definition mit Abstand von einem Punkt und von einer Linie

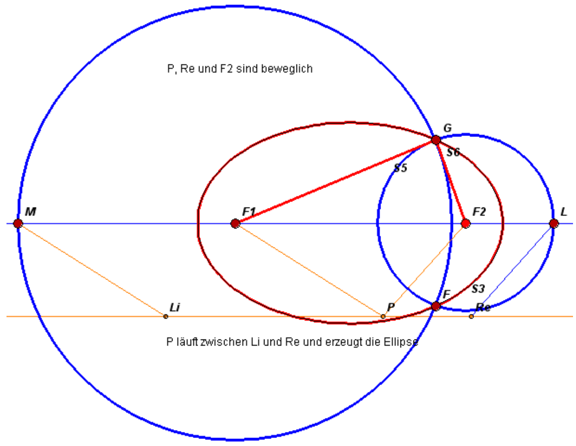
Bereits in 1.3.2 wurde auf die verschiedenen Definitionen von Kegelschnitten hingewiesen. Mathematisch geht es dann zunächst insbesondere um die Äquivalenz der verschiedenen Definitionen. Will man ein DGS einsetzen, kann auch wichtig sein, ob sich eine Definition besser oder schlechter (oder gar nicht) mit dem DGS umsetzen lässt.

Bei einer Ellipse gilt:

- Die Orthogonale Affinität ist in einem DGS üblicherweise nicht implementiert.
- Die Brennpunksdefinition lässt sich meist leicht umsetzen. Zum Verständnis trägt dieses Umsetzen nicht viel bei.
- Die Abstandsdefinition über den Leitkreis ist umsetzbar.



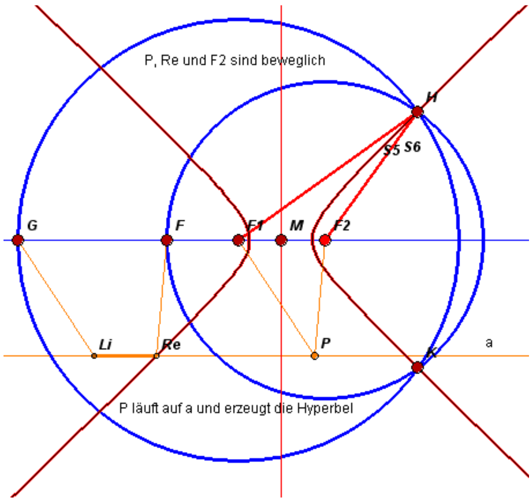
DynaGeo



Cinderella

Bei der Hyperbel gilt:

- Sowohl die Brennpunkts- als auch die Abstandsdefinition sind mit DGS umsetzbar. Die Affinitäts-Definition hat hier kaum Bedeutung. In der Figur rechts ist die Brennpunktsdefinition in Cinderella realisiert. Die Strecke $\overline{LiRe}$ hat die Länge 2a. $\overline{PLi}$ ist der Radius des Kreises um F1, $\overline{PRe}$ der des Kreises um F2. Die Kreise schneiden sich in H und K. Das Programm zeichnet die Ortskurve von H, wenn sich P auf der Geraden a bewegt.



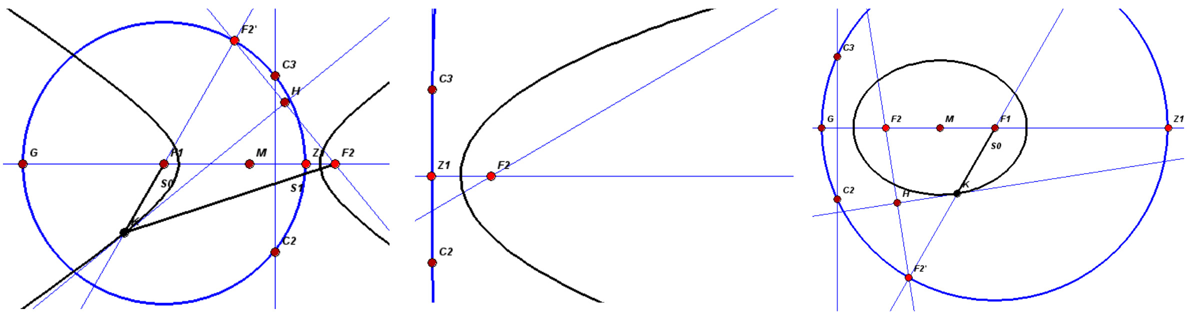
Bei der Parabel gilt:

- Die Brennpunkts-Abstands-Definition ist leicht umsetzbar. Auf eine Figur wird verzichtet.

3.6.2 Dynamische Variation der Linie: Kreis – Gerade – Kreis

Die verschiedenen Lagen des Gegenpunktekreises bzw. der Leitgeraden lassen die folgende Idee aufkommen:

Wenn man den Ellipsen-Leitkreis kontinuierlich in eine Gerade und dann in einen Hyperbel-Leitkreis „verwandeln" könnte, dann müssten sich die entsprechenden Kegelschnitte auch dynamisch ineinander überführen lassen. Damit würde diese Verwandtschaft der Kegelschnitte anschaulich klar. Dies ist – sozusagen auf schon hoher Ebene – eine Festigung des Begriffs Kegelschnitt-Verwandtschaft (wenn das überhaupt noch ein elementarer Begriff ist). Vergleiche dazu die folgenden Figuren, bei denen mit Z_1 der Gegenpunktekreis variiert werden kann. Die mittlere Zeichnung zeigt eine sehr langgestreckte Ellipse – nahezu eine Parabel –, der Gegenpunktekreis ist nahezu eine vertikale Gerade. Die Grenzlage selbst kann das Programm nicht darstellen.



4. Begriffe und Dynamische Geometrie-Systeme

4.1 Erste Begriffsbildung ohne DGS

Viele Begriffe der elementaren Geometrie sind zugleich Worte der Umgangssprache – man denke nur an „Ecke“, „Kante“ oder „Fläche“. Bei diesen Beispielen ist der umgangssprachlich gebildete Begriffsinhalt weitgehend mit dem mathematischen identisch.

Bei einigen Begriffen – man denke etwa an „Würfel“, „Kegel“, „Zylinder“, „Walze“ und „Säule“ – gibt es möglicherweise Unterschiede. Vom Spielwürfel zum mathematischen Objekt braucht es Abstraktion. Beim „Kegel“ ist die Kontextabhängigkeit der Bedeutung deutlich. Spielkegel haben nicht die (mathematische) Form von Kegeln. Entsprechend hat „Zylinder“ umgangssprachlich verschiedene Bedeutung. Auch dann, wenn die Kopfbedeckung dieses Namens heute kaum mehr bekannt ist, muss man daran denken, dass die Zylinder beim Auto erstens nicht zu sehen sind und dass zweitens das, was man dann sieht, die Kühlrippen, nicht die Form eines Zylinders hat. „Walzen“ und „Säulen“ sind üblicherweise durchaus Zylinder im mathematischen Sinn. Die Namen beschreiben dann aber nicht nur die geometrische Form, sondern zugleich die Funktion, die Gegenstände dieser Form haben.

Manche Begriffe – man denke an „Pyramide“ oder „Kegelstumpf“ – werden entweder wie bei „Pyramide“ auch außerhalb der Geometrie praktisch ausschließlich so verwendet, dass die geometrische Bedeutung korrekt abgedeckt ist oder werden, wie „Kegelstumpf“, nur in der Geometrie verwendet.

So ist es selbstverständlich, dass Begriffe ohne DGS gebildet werden können – und das war schließlich auch so, ehe es DGS gab.

4.2 Erste Begriffsbildung mit DGS

Will man ein DGS so einsetzen, dass Schüler selbst mit DGS zeichnen (und nur so ist die Frage nach Begriffen überhaupt sinnvoll, weil sonst die Figur einfach „angeschaut“ wird), so zeichnet man mit den vorgegebenen Zeichenwerkzeugen, allenfalls zusätzlich mit vom Lehrer vorgegebenen oder gar selbst erzeugten Makros (man denke an ein Makro „Umkreis“ oder „Höhe“ usw.). Da diese Werkzeuge bzw. Makros Namen haben, die das vorwegnehmen, was anschließend vom DGS gezeichnet wird, muss dieser Name bei den Schülern schon bekannt sein. Eine erste Begriffsbildung mit DGS ist unter dem Aspekt „Zeichenwerkzeug“ überhaupt nicht sinnvoll möglich.

Anders ist es, wenn mit elementaren Zeichenschritten – gegebenenfalls auch mit Hilfe der von DGS gezeichneten Bahnkurven – neue (aus Schülersicht „höhere“) geometrische Objekte erzeugt werden. So kann z. B. „Parabel“ mit der Brennpunkt-Leitgeraden-Definition gleichwertig mit und ohne DGS eingeführt werden. Die Dynamik, die ein DGS zulässt, kann die Vorstellung, die Schüler von einer Parabel haben, umfassender werden lassen. In dieses Umfeld kann auch das Phänomen gehören, dass alle geometrischen Objekte, die man durch Angabe eines einzigen Längenmaßes eindeutig festlegen (und dann auch zeichnen) kann, zueinander ähnlich sind. Alle Quadrate, gleichseitigen Dreiecke, (allgemein: alle regulären n-Ecke) sind zueinander ähnlich. Das mag noch trivial erscheinen. Dass aber auch alle Parabeln zueinander ähnlich sind, stößt meist auf Erstaunen. Wenn man von Normalparabeln ausgeht, dann scheinen andere Parabeln entweder „gestaucht“ oder „gedehnt“, also durch eine orthogonale Affinität mit der Scheiteltangenten als Achse verzerrt, oder aber einfach „aufgebogen“, wie man einen Draht, der die Form der Parabel hat, in die Richtung der Scheiteltangenten biegen könnte. Durch ein DGS kann man aber ausschließlich den Abstand des Brennpunkts von der Leitgeraden verändern und so durch eine Ähnlichkeit die Parabeln ineinander überführen. Dabei wird auch deutlich, warum man anfangs meist erstaunt ist: Bei dieser Verformung bleibt die Scheiteltangente nicht unverändert, sondern sie ändert sich mit der Parabel, wenn man die Leitgerade fest lässt und den Brennpunkt senkrecht zur Leitgeraden verschiebt.

4.3 Vertiefung der Begriffe

Ganz anders sieht es auch aus, wenn man schon bei elementaren Begriffen vergleicht, wie die Vertiefung, die Festigung von Begriffen ohne bzw. mit DGS erfolgen kann. Dabei kann ein DGS außerordentlich hilfreich sein. Das gilt – wie erwähnt – z. B. bei der Unterscheidung von „Strecke“, „Halbgerade“ und „Gerade“. Dadurch, dass das entsprechende Zeichenwerkzeug (insbesondere in DynaGeo, weil dort die Strecke als Objekt in jedem Fall weiter verwendet werden kann) die Unterscheidung macht.

Aber auch beim „Kreis“ wird eine Vielfalt dadurch erreicht, dass man in DynaGeo einen Kreis durch Vorgabe von
- Mittelpunkt und Radius;
- Mittelpunkt und einem Kreispunkt;
- drei Kreispunkten (wenn man ein Makro definiert hat)

festlegen kann.

In Cinderella kann man einen Kreis dadurch zeichnen, dass man
- den Mittelpunkt festlegt und den Kreis „aufzieht“ (auf dem Kreis liegt dann kein weiterer gekennzeichneter Punkt);
- den Mittelpunkt festlegt und zu einem zweiten (noch nicht vorgegebenen Punkt) aufzieht (so erhält man sogleich einen Punkt auf der Kreislinie);
- zwei vorgegebene Punkte nimmt und einen davon als Mittelpunkt, den anderen als Punkt auf der Kreislinie definiert;
- den Radius festlegt und dann den Mittelpunkt wählt;
- drei vorhandene Punkte als Kreispunkte wählt.

Die wenigen Beispiele sollen genügen um anzudeuten, dass durch die Vielfalt der Möglichkeiten ein offenerer Umgang mit den klassischen Begriffen möglich ist.

Literatur

Arnold, H.-J.:	Über Problemstellungen, an denen Schüler mathematisches Modellieren üben können. In: Mathematikinformation Nr. 37, 2002
Bender, P. / Schreiber, A.:	Operative Genese der Geometrie. Wien: Hölder – Pichler – Tempsky 1985
Holland, G.:	Geometrie in der Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum 1996
Lange, St. / Meyer, Kh.:	Kegelschnitte I, Mathematikinformation Nr. 31, 1999
Meyer, Kh.:	Besondere Punkte und Linien im Dreieck. Mathematikinformation Nr. 40 Seiten 24 – 48, 2004
Struve, H.:	Grundlagen einer Geometriedidaktik. Mannheim/Wien/Zürich: BI 1990

Anschrift des Autors:
Prof. Dr. Kurt Peter Müller
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Bismarckstraße 10
76133 Karlsruhe