

Besondere Punkte und Linien im Dreieck

Meist sieht der Lehrplan der Jahrgangsstufe 7 oder 8 die Behandlung der besonderen Punkte im Dreieck vor. Im Allgemeinen handelt es sich hierbei aber nur um jeweils den Schnittpunkt der drei Höhen, Schwerlinien (Seitenhalbierenden), Mittelsenkrechten bzw. Winkelhalbierenden, wobei bei letzteren nur in den seltensten Fällen der Kreis des APOLLONIUS VON PERGE (Kleinasien ca. 262 bis 190 v. Chr.) behandelt wird (vgl. ZWERTGER-KLUG [1] oder MEYER [1]; da die letzteren Literaturstellen schon lange vergriffen sind, werden die früher dargestellten Inhalte im vorliegenden Artikel verändert aufgenommen). Nur in seltenen Fällen wird man am Gymnasium etwas über die FEUERBACH-Gerade und den FEUERBACH-Kreis erfahren können; im Rahmen einer Begabtenförderung sind dies aber sehr geeignete Inhalte, die im Folgenden in Anlehnung an HEFENDEHL-HEBEKER [1] behandelt werden. KARL WILHELM FEUERBACH wurde am 30. 5. 1800 in Jena geboren und starb am 12. 3. 1834 in Erlangen. Er war dort Gymnasialprofessor.

Geht man von den Erwartungen der Wettbewerbsaufgaben wie etwa der Mathematik-Olympiade aus, so reichen diese Kenntnisse nur bedingt. Man benötigt dort das Umfeld des Satzes von CEVA, wie dies etwa in der Habilitationsschrift von BAPTIST [1] zu finden ist. Die folgende Abhandlung wird die zuletzt genannte Literaturstelle für eine Benutzung im Unterricht ausbauen. Über den weiteren Einsatz der besonderen Dreieckspunkte im Unterricht findet man Weiteres in MEYER [2] und [3].

Das Gebiet der „besonderen“ oder auch „merkwürdigen“ Punkte reizt also offenbar auch noch heute so manchen Mathematiker, auch wenn es nicht mehr so intensiv wie im 19. Jahrhundert (siehe BAPTIST [1]) betrieben wird. Trotz vieler Publikationen ist es jedoch bis heute nicht gelungen, im Sinne der Grundlagenforschung zu klären, worin nun eigentlich das Besondere dieser Punkte besteht. So gab es zwar 1956 am Mathematischen Seminar der Universität Hamburg einen Kolloquiumsvortrag von dem bekannten Algebraiker REDEI aus Ungarn, der viermal vertagt und fortgesetzt wurde über vier Wochen hin, doch jedes Mal, wenn REDEI glaubte, ein vollständiges Axiomensystem für die Besonderheit dieser Punkte gefunden zu haben, wurden seine Vorstellungen von ARTIN, BRAUN, BURAU, SPERNER oder anderen zunichte gemacht. Sie zeigten nämlich, dass jeder neue Ansatz von einem Axiomensystem sich auf alle Punkte der Ebene bezog, also eine Besonderheit nicht nachgewiesen werden konnte.

1. Der Kreis des APOLLONIUS

Definition 1.1: Eine Gerade, die ein Dreieck „schneidet“ heißt Transversale. Eine Transversale, die durch genau eine Dreiecksecke geht, heißt **Ecktransversale**.

Definition 1.2: Jede Ecktransversale eines Dreiecks teilt die der Ecke gegenüberliegende Seite in zwei **Seitenabschnitte**.

Definition 1.3: Auf \overline{AB} liege P . Man sagt dann **P teilt die Strecke \overline{AB} im (Teilungs)-Verhältnis λ**

innen, wenn P zwischen A und B liegt, und definiert $\lambda = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|} > 0$,

außen, wenn P kein Punkt der Strecke \overline{AB} ist und definiert $\lambda = -\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|} < 0$.

Ist $A = P$, so sei $\lambda = 0$ und ist $B = P$, so sei $\lambda = \infty$ ein Symbol, das als „unendlich“ gelesen wird.

Definition 1.4: Teilt P die Strecke \overline{AB} im Verhältnis λ_P innen und Q im Verhältnis λ_Q außen, so spricht man von einer Teilung innen und außen im **Doppelverhältnis** $\lambda_P : \lambda_Q$.

Ist $\lambda_P : \lambda_Q = -1$, so sagt man \overline{AB} ist **harmonisch geteilt** und nennt das Punktequadrupel $(A, B; P, Q)$ ein **harmonisches**.

Aufgabe 1.1: Teile eine Strecke innen und außen im selben Verhältnis 2:3. Zeichne möglichst wenige Linien.

Zeichnet man zur Winkelhalbierenden CX im Dreieck ABC die Parallele BD, so erhält man eine Strahlensatzfigur (vgl. die Abbildung) mit

$$\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{BX}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CD}|}.$$

Um \overline{CD} durch Stücke des ursprünglich gegebenen Dreiecks ABC auszudrücken, erkennt man Z- bzw. F-Winkel an den parallelen Geraden:

$$\frac{\gamma}{2} = \angle CBD = \angle CDB$$

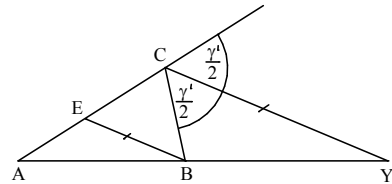
Also ist das Dreieck CBD gleichschenkelig und $\overline{CD} = \overline{CB}$. Damit hat man die „eine Richtung“ des folgenden Satzes gefunden:

Satz 1.5: Eine Ecktransversale eines Dreiecks ist genau dann Winkelhalbierende, wenn sie die der Ecke gegenüberliegende Seite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Die „zweite Richtung“ des Satzes (also seine Umkehrung) erhält man wie folgt: Nimmt man an, die Ecktransversale, die die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, wäre keine Winkelhalbierende, dann würde die dazugehörige Winkelhalbierende im selben Teilungsverhältnis die gegenüberliegende Seite in einem anderen Teilungspunkt X' treffen. Eine Strecke hat aber zu einem Teilungsverhältnis nur einen inneren Teilungspunkt; also ist $X = X'$.

Satz 1.6: Eine Ecktransversale eines Dreiecks ist genau dann äußere Winkelhalbierende, wenn sie die gegenüberliegende Seite außen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Aufgabe 1.2: Beweise den Satz anhand der nebenstehenden Skizze.



Aufgabe 1.3: Die Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die Gegenseite in zwei Abschnitte von 6,5 cm und 10,4 cm. Wie groß sind die beiden anderen Dreiecksseiten, wenn ihre Summe 26 cm beträgt? Ist es gleichgültig, welchen Wert man für diese Summe angibt?

Aufgabe 1.4: Die Summe der drei Seiten eines Dreiecks ABC ist 25,0 cm; die Winkelhalbierende des Winkels bei C teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte von 5,1 cm und 3,4 cm. Wie groß sind die Seiten a, b und c?

Aufgabe 1.5: Gegeben ist ein Winkel α und ein Punkt P innerhalb des Winkelfeldes von α .

- Zeichne durch P eine Gerade so, dass die von ihr auf den Schenkeln abgeschnittenen Strecken sich wie 5:2 verhalten.
- Zeichne durch P eine Gerade so, dass das zwischen den Schenkeln liegende Stück der Geraden durch P im Verhältnis 5:2 geteilt wird.

Man kann nun die Sätze 1.5 und 1.7 zusammenfassen zum

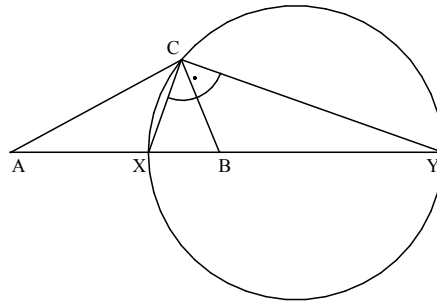
Satz 1.7: Die Winkelhalbierenden eines Dreieckswinkels und seines Außenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der dem Winkel anliegenden Dreiecksseiten.

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks in der Normbezeichnungsweise, so erhält man durch harmonische Teilung von c im Verhältnis a:b Teilungspunkte, die zu den Winkelhalbierenden des c gegenüberliegenden Winkels und dessen Außenwinkels führen.

Man kann die bisher behandelte Fragestellung noch in anderer Weise umkehren:

Hat man eine Strecke \overline{AB} im Verhältnis λ harmonisch geteilt, wo liegen dann alle Dreiecksspitzen C mit $|\overline{CA}| : |\overline{CB}| = \lambda$? Oder: *Wie bestimmt man alle Punkte C , deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein bestimmtes Verhältnis λ haben?*

Hierzu muss man erkennen, dass die Winkelhalbierende an einer Dreiecksecke mit der dazugehörigen äußeren Winkelhalbierenden einen rechten Winkel bildet. Da offenbar für alle gesuchten C dies gelten muss, sind diese C die Punkte eines THALES-Kreises über \overline{XY} .



Aufgabe 1.6: Konstruiere alle Punkte C , die von A, B mit $|\overline{AB}| = 5,0$ cm das Abstandsverhältnis $|\overline{CA}| : |\overline{CB}| = 5 : 3$ haben.

Satz 1.8 (Kreis des APOLLONIUS 200 v. Chr.): Die Menge aller Punkte C , die von zwei gegebenen Punkten A und B ein festes Abstandsverhältnis λ haben, ist ein Kreis. Die beiden Punkte X und Y , die \overline{AB} innen und außen im Verhältnis λ teilen, bestimmen den Kreisdurchmesser.

Beweis:

Man zeichnet durch X eine Parallele zu CY , die die beiden „anderen“ Dreiecksseiten in E und F schneidet. Zweimal den Vierstreckensatz angewendet ergibt:

$$\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{AY}|} = \frac{|\overline{EX}|}{|\overline{CY}|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|\overline{BX}|}{|\overline{BY}|} = \frac{|\overline{FX}|}{|\overline{CY}|}. \quad \text{Da } X \text{ und } Y \text{ die harmonischen Teilungspunkte von } A \text{ und } B \text{ sind, gilt}$$

$$\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{BX}|} = \frac{|\overline{AY}|}{|\overline{BY}|}. \quad \text{Damit ergeben die drei Proportionalitäten } |\overline{EX}| = |\overline{FX}|. \quad \text{Nach Voraussetzung ist } CY \text{ senkrecht zu}$$

CX und damit CX senkrecht zu EF . Das Dreieck EFC ist also gleichschenkelig und so CX die Winkelhalbierende. Weil CY auf CX senkrecht steht, ist dann CY die äußere Winkelhalbierende in C . W. z. b. w.

Der Kreis des APOLLONIUS findet bei Konstruktionsaufgaben Verwendung, wenn von zwei Strecken nur ihr Verhältnis bekannt ist, nicht aber ihre Längen gegeben sind.

Aufgabe 1.7: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 8,0$ cm, $a:b = 3:7$ und der Höhe $h_c = 3,0$ cm.

Aufgabe 1.8: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 4,8$ cm, $a:b = 5:3$ und $\alpha = 30^\circ$.

Aufgabe 1.9: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 10,0$ cm, $a:b = 1:3$ und $\gamma = 90^\circ$ bzw. 60° .

Aufgabe 1.10: Konstruiere ein Dreieck aus $c = 13,0$ cm, $a:b = 4:9$ und der Winkelhalbierenden $w_\gamma = 10,0$ cm.

Aufgabe 1.11: Konstruiere ein Dreieck aus c , $a:b = m:n$ und der Länge der Seitenhalbierenden s_c .

Aufgabe 1.12: Konstruiere ein Dreieck aus den Längen der Seitenhalbierenden s_a und der Höhe h_c und dem Winkel α .

Aufgabe 1.13: Die Winkelhalbierende w_γ teilt die Seite c eines Dreiecks ABC in die Abschnitte u und v . Konstruiere das Dreieck ABC aus $u = 2,7$ cm und $v = 7,2$ cm und $\gamma = 60^\circ$.

Aufgabe 1.14: In einem Dreieck verhalten sich die drei Seitenhalbierenden wie $s_a:s_b:s_c = 6:5:7,5$; der durch den Schwerpunkt geteilte größere Abschnitt von s_a ist $6,4$ cm. Wie lang sind die Seitenhalbierenden?

Aufgabe 1.15: Wie lang sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse durch die Halbierende des rechten Winkels in zwei Abschnitte von 12,0 cm und 9,0 cm zerlegt wird?

Aufgabe 1.16: Gegeben sind

a) zwei sich schneidende Geraden;

b) zwei parallele Geraden.

Zeichne den geometrischen Ort der Punkte, deren Abstände von den gegebenen Geraden sich wie $m:n = 4:3$ verhalten.

Aufgabe 1.17: Bestimme einen Punkt, dessen Abstände von den drei Seiten eines Dreiecks sich wie $u:v:w$ verhalten.

2. Die Sätze von MENELAOS und CEVA

Aufgabe 2.1: Zeichne ein Dreieck ABC und eine Transversale, die keine Ecktransversale g ist. g schneidet AB in P, BC in Q und CA in R. Miss bei den Geraden AB, BC und CA die Teilungsverhältnisse λ , μ bzw. ν und berechne $\lambda\mu\nu$.

Grundannahme: Wir betrachten die so genannte **angeordnete Ebene**. Hierbei wird an dieser Stelle nicht genau auseinander gesetzt, was hierunter verstanden wird. Es wird nur darauf hingewiesen, dass stets geklärt ist, ob ein Punkt auf einer Geraden zwischen zwei anderen, also im Inneren der Strecke, die sie bilden, liegt oder nicht im Inneren liegt, dass ein Dreieck oder ein Kreis die Gesamtebene in zwei Teile zerlegt, dem Inneren und dem Äußeren des Dreiecks bzw. des Kreises. Genauso ist bei jeder Geraden „klar“, was rechts oder links von ihr oder oben bzw. unten von ihr liegt. Nur ein Anordnungsaxiom soll hier genannt werden:

Axiom von PASCH 2.1: Trifft eine Gerade das Innere eines Dreiecks, so hat sie genau zwei Punkte mit dem Dreieck gemeinsam.

Aufgabe 2.2: Für jede Dreieckstransversale, die nicht durch eine Ecke geht und die drei Seiten in den Verhältnissen λ , ν und μ teilt, gilt $\lambda\nu\mu < 0$.

Satz des Menelaos (Alexandria um 100 n. Chr.)

2.2: Die Seiten eines Dreiecks ABC werden von den Punkten P, Q und R in den Verhältnissen λ , μ bzw. ν geteilt. Es ist hierbei auf den Umlaufsinn zu achten. Genau dann ist $\lambda\mu\nu = -1$, wenn die Punkte P, Q und R eine Transversale, die durch keine Ecke geht, bilden.

Beweis:

1. Aus der Konfiguration folgt die Verhältnisgleichung:

$$\text{Es sei } \lambda = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|},$$

$$\mu = \frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{QC}|}, \quad (1)$$

$$\nu = -\frac{|\overline{CR}|}{|\overline{RA}|}.$$

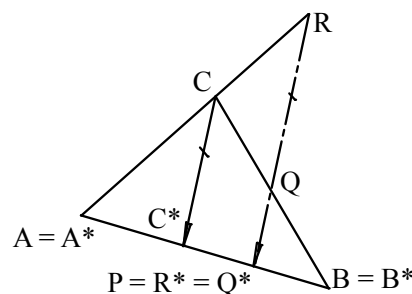
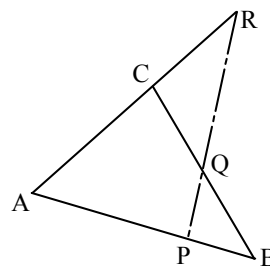
Man projiziert längs PQR die bisherige Konfiguration auf die Gerade AB (vgl. die Zeichnung).

Nach dem Vierstreckensatz gilt dann:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{A^*P}|}{|\overline{PB^*}|},$$

$$\frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{QC}|} = \frac{|\overline{B^*P}|}{|\overline{PC^*}|},$$

$$\frac{|\overline{CR}|}{|\overline{RA}|} = \frac{|\overline{C^*P}|}{|\overline{PA^*}|}.$$



Mit (1) folgt hieraus: $\lambda\nu\mu = -\frac{|A^*P|}{|PB^*|} \cdot \frac{|B^*P|}{|PC^*|} \cdot \frac{|C^*P|}{|PA^*|} = -1$

Aufgabe 2.3: Prüfe durch weitere Zeichnungen, dass dieser Beweis nicht von der in der Zeichnung gewählten Anordnung abhängig ist. Man kann auch auf eine beliebige Gerade längs PQR projizieren.

2. Aus der Verhältnisgleichung folgt die Konfiguration, nämlich, dass P, Q und R auf einer Geraden liegen: Man nehme an, R liege nicht auf der Geraden PQ. PQ schneidet dann AC in R' und nach dem bereits bewiesenen Teil des Satzes gilt für die entsprechenden Teilungsverhältnisse $\lambda\nu\mu' = -1$. Da aber nach Voraussetzung gilt $\lambda\nu\mu = -1$, folgt $\mu = \mu'$ und damit $R = R'$ im Widerspruch zur Annahme. Also liegen die Punkte P, Q und R auf einer Geraden.

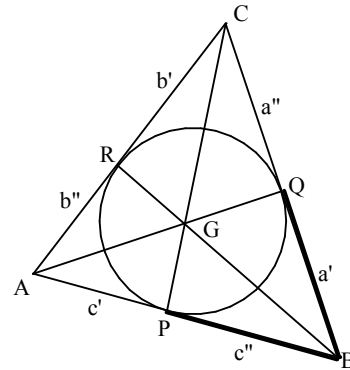
Aufgabe 2.4: Zeichne ein Dreieck ABC und drei Ecktransversalen, die sich in einem Punkt schneiden, der kein Eckpunkt des Dreiecks ist. Die Transversalen schneiden die Dreiecksseiten in den Punkten P gegenüber C, Q gegenüber A und R gegenüber B. Miss und berechne $(\overline{AP} \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{CR}) : (\overline{AR} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CQ})$.

Satz von CEVA (Mantua 1647 bis 1734) 2.3: Drei Ecktransversalen teilen die Seiten eines Dreiecks in den Verhältnissen λ , μ und ν . Es ist hierbei auf den Umlaufsinn zu achten. Genau dann ist $\lambda\mu\nu = 1$, wenn die drei Ecktransversalen durch einen Punkt gehen (genannt **Ceva-Punkt G**) oder parallel sind. D. h. es gilt:

$$a'b'c' = a''b''c''$$

$$a'b'c' = (a - a')(b - b')(c - c')$$

Hinweis: In BAPTIST [1] Seite 41 findet man auch zwei trigonometrische Darstellungen dieser Formel, die hier weggelassen wurden.



Teil 1: Aus der Existenz des CEVA-Punktes folgt $\lambda\mu\nu = 1$:

1.1 *Beweis aus dem Hebelgesetz der Physik:*

Man belegt – wie bei einem Mobile – die Ecken A, B und C mit den Massen m_A , m_B und m_C so, dass P der gemeinsame Schwerpunkt von A und B ist, also nach dem Hebelgesetz gilt:

$$m_A \cdot |\overline{AP}| = m_B \cdot |\overline{BP}| \quad (1)$$

Die Masse bei C wählt man schließlich so, dass Q der gemeinsame Schwerpunkt von B und C wird, also nach dem Hebelgesetz gilt:

$$m_B \cdot |\overline{BQ}| = m_C \cdot |\overline{CQ}| \quad (2)$$

R sei der gemeinsame Schwerpunkt von A und C, also

$$m_C \cdot |\overline{CR}| = m_A \cdot |\overline{AR}| \quad (3)$$

Also ist R der gemeinsame Schwerpunkt von A und C. Der gemeinsame Schwerpunkt von A und Q, also der gemeinsame Schwerpunkt von A, B und C muss dann auf der Geraden AQ liegen. Genauso schließt man, dass dieser Punkt auch auf den Geraden CP bzw. BR liegen muss. Also ist der Schnittpunkt der drei Ecktransversalen der gemeinsame Schwerpunkt von A, B und C.

Multipliziert man die drei Gleichungen (1), (2) und (3), so erhält man die Behauptung.

1.2 Beweis von J. I. BERNOULLI 1742 (nach BAPTIST [1]):

Aus der Konstruktion der nebenstehend gezeichneten Parallelen ergeben sich wegen der Winkel an parallelen Geraden viele Paare ähnlicher Dreiecke. Man sucht sich diejenigen aus, deren Seiten in der Formel des Satzes von CEVA vorkommen, wie z. B.:

$$\triangle ASU \sim \triangle BTS \quad \text{und} \quad \triangle ASP \sim \triangle BTP$$

Hieraus folgt:

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AS} : \overline{BT} = \overline{SU} : \overline{ST}$$

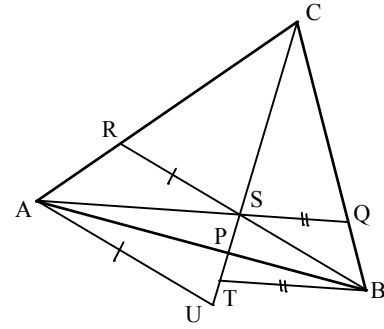
(4)

$$\triangle AUC \sim \triangle RSC$$

$$\text{Hieraus folgt: } \overline{AR} : \overline{RC} = \overline{SU} : \overline{SC}$$

$$\text{also: } \overline{SU} = \frac{\overline{AR} \cdot \overline{SC}}{\overline{RC}}$$

(5)



$$\triangle TBC \sim \triangle SQC \text{ ergibt: } \overline{BQ} : \overline{CQ} = \overline{ST} : \overline{SC} \quad \text{also: } \overline{ST} = \frac{\overline{BQ} \cdot \overline{SC}}{\overline{CQ}}$$

(6)

$$\text{Aus (4), (5) und (6) findet man: } \frac{\overline{SU}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{AR} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{CQ}}{\overline{RC} \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{SC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$$

Diese Formelzeile kann man umformen zu:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BQ} \cdot \overline{CR} = \overline{AR} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CQ} \quad \text{W. z. b. w.}$$

1.3 In der folgenden Aufgabe wird noch der Rest des Beweises zum Teil 1 gezeigt, wenn die drei Ecktransversalen parallel sind.

Aufgabe 2.5: Zeichne zu 1.3 eine passende Figur und wende zweimal den Vierstreckensatz an.

Fortsetzung des Beweises des Satzes von CEVA:

Teil 2: Aus der Verhältnisgleichung $\lambda\nu\mu = 1$ folgt die Existenz des CEVA-Punktes:

Im Dreieck ABC teile P die Seite AB im Verhältnis λ , Q die Seite BC im Verhältnis ν und R die Seite CA im Verhältnis μ und es gelte $\lambda\nu\mu = 1$.

2.1 Die Ecktransversalen CP und AQ schneiden sich in S und BS trifft CA in R' mit $\lambda\nu\mu' = 1$ nach dem bereits bewiesenen Teil. Andererseits gilt $\lambda\nu\mu = 1$ nach Voraussetzung. Also ist $\mu' = \mu$ und damit $R' = R$. W. z. b. w.

2.2 Die Ecktransversalen CP und AQ sind parallel und die Parallele durch B trifft CA in R' mit $\lambda\nu\mu' = 1$ nach dem bereits bewiesenen Teil 1. Andererseits gilt $\lambda\nu\mu = 1$ nach Voraussetzung. Also ist $\mu' = \mu$ und damit $R' = R$. W. z. b. w.

2.3 Die Ecktransversalen CP und AQ sind parallel und die Parallele durch B trifft CA nicht. Dann muss gelten $C = Q$ und AQ ist keine Ecktransversale.

Aufgabe 2.6: Überprüfe, ob sich der Beweis des Satzes von CEVA ändert, wenn S nicht im Inneren des Dreiecks liegt.

Aufgabe 2.7: Beweise den Satz von CEVA mit Hilfe des Satzes von Menelaos.

Hinweis: S sei der CEVA-Punkt im Dreieck ABC, AB werde von P, BC von Q und CA von R geteilt. Wende den Satz des Menelaos auf die Dreiecke APC und PBC mit den Transversalen BR bzw. AQ an.

Aufgabe 2.8: Der Inkreis eines Dreiecks berührt die Dreiecksseiten in den Punkten P, Q, und R.

Zeige: Die Ecktransversalen zu den Berührungspunkten schneiden sich in einem Punkt, genannt GERONNE-Punkt (fanzösischer Mathematiker 1771 bis 1859). Eine analoge Überlegung zu den Berührungspunkten eines Ankreises führt zu den so genannten äußeren GERONNE-Punkten.

Hinweis: Berücksichtige die Tangentenabschnitte.

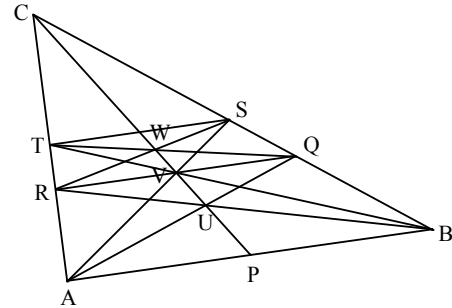
Aufgabe 2.9: Die Ankreise eines Dreiecks berühren die Dreiecksseiten bzw. deren Verlängerungen. Verbindet man gewisse Berührungspunkte mit den Dreiecksseiten, so erhält man die **NAGEL-Punkte**.

Aufgabe 2.10: Die nebenstehende Zeichnung entsteht wie folgt:

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC . P sei die Mitte der Strecke AB . Wähle Q beliebig auf BC . Zeichne AQ und BR so, dass sich die drei Linien in U schneiden. Wiederhole den Vorgang mit den Punkten S, T und V . Zeige:

1. Dann sind die Geraden AB, QR und ST parallel.
2. Die Geraden RS, QT und CP treffen sich in einem Punkt W .
3. Die Punktepaare P, V und U, C sind harmonisch.

Hinweis: Im Lehrbuch BARTH u. A. [1] Seite 43 wird nur 3. gefragt.



Ausflug in die sog. Projektive Geometrie:

In der Zeichenebene (**affine Ebene** genannt) schneiden sich nicht alle Geradenpaare, denn es gibt auch parallele Geraden. Um diesen „Schönheitsfehler“ zu beseitigen, ordnet man parallelen Geraden einen so genannten **Fernpunkt** als ideellen Schnittpunkt zu. So gelten die Sätze:

Satz 2.4: In der Projektiven Geometrie schneiden sich je zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt.

Satz 2.5: Der vierte harmonische Punkt zu 2 Punkten und dem dazugehörigen Fernpunkt ist die Mitte zwischen den beiden Punkten.

Zum Beweis: Die „Abstände“ des Fernpunktes zu den beiden gegebenen Punkten sind beide unendlich lang und deshalb „gleich lang“.

Definition 2.6: Eine Abbildung heißt 3-transitiv, wenn sie durch Vorgabe dreier (nicht auf einer Geraden gelegenen) Punkte und ihrer dazugehörigen Bilder eindeutig festgelegt ist.

Ohne Beweis wird angegeben:

Satz 2.7: In der Projektiven Geometrie gibt es zu beliebigen Punkttripeln (die nicht auf einer Geraden liegen) und deren Bildern (die nicht auf einer Geraden liegen) genau eine Abbildung (so genannte **projektive Abbildung**), die

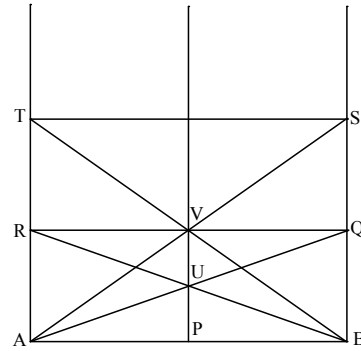
1. punkttreu ist (also das Bild eines jeden Punktes ein Punkt ist),
2. geradentreu ist (also das Bild einer jeden Geraden eine Gerade ist),
3. 3-transitiv ist,
4. das Doppelverhältnis unverändert lässt und
5. umkehrbar ist.

Man wendet diesen Satz auf die Konstruktion der Abbildung der Aufgabe 2.10 an:

1. Man legt die projektive Abbildung zur Figur der Aufgabe 2.10 fest durch die folgenden Bedingungen:
 - Der Fernpunkt zu der Richtung AB wird beibehalten.
 - C werde auf den Fernpunkt abgebildet, dessen Richtung auf AB senkrecht steht.
 - A wird Fixpunkt.
2. Es wird die Konstruktion der Aufgabe 1.9 wiederholt. Man findet als projektives Bild die folgende Zeichnung:

Zeichne die waagrechte Strecke AB mit ihrem Mittelpunkt P.
 Errichte in A, P und B Senkrechte zu AB.
 Wähle Q beliebig auf der Senkrechten durch B. Zeichne AQ und BR so, dass sich die drei Linien in U schneiden und R auf der Senkrechten durch A liegt. Wiederhole den Vorgang mit den Punkten S, T und V.

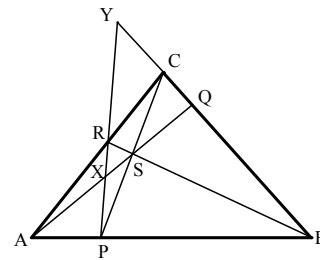
Man stellt fest, dass vermutlich die Streckenlängen von BQ und SQ gleich lang sind.



Aufgabe 2.11: Beweise, dass in obiger Figur gilt: $|\overline{BQ}| = |\overline{SQ}|$

Die in Aufgabe 2.10 definierte projektive Abbildung wird auch **Perspektive** (genauer **Frontalperspektive**) genannt, weil ihre Umkehrung aus einer auf der Standebene liegenden „Leiter“ (siehe die letzte Abbildung) das dazugehörige perspektive Bild erzeugt. Der Punkt C liegt dann als Fernpunkt der Standebene auf dem so genannten **Horizont**, der eine Linie durch C parallel zu AB ist.

Aufgabe 2.12: Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks ABC in S und legt man durch zwei ihrer Schnittpunkte P und R mit den Seiten eine Gerade, so bestimmt diese auf der dritten Seite BQC einen Punkt Y und auf der Transversalen ASQ einen Punkt X so, dass
 (B,C; Q,Y),
 (A,S; X,Q) und
 (P,R; X,Y)
 harmonische Punktequadrupel sind.



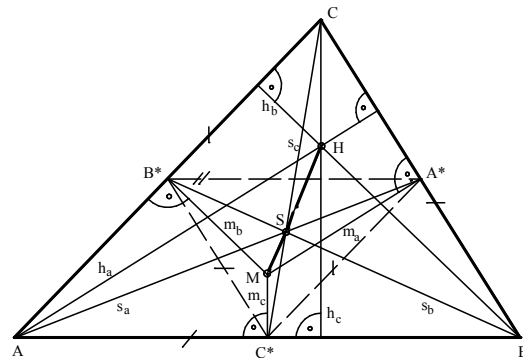
3. EULER-Gerade und FEUERBACH-Kreis

Das Folgende geht zurück auf die Darstellung HEFENDEHL-HEBEKER [1] eines Vortrags am Mathematikseminar des Gymnasiums Sarnberg vom 8. bis 11. 11. 1987 bei der Siemens AG in Erlangen:

Die nebenstehende Abbildung zeigt, wie das Dreieck ABC durch zentrische Streckung am Schwerpunkt S mit dem Streckungsfaktor $-\frac{1}{2}$ in das zugehörige Mittendreieck $A^*B^*C^*$ übergeht.

Dabei gehen die Höhen des Dreiecks ABC über in die Höhen des Dreiecks $A^*B^*C^*$, welche die Mittelsenkrechten von ABC sind. Das bedeutet, dass beim Dreieck ABC der Schwerpunkt S auf der Verbindungsgeraden des Höhenschnittpunkts H mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten liegt. Wegen obiger zentrischer Streckung gilt:

$$|\overline{HS}| : |\overline{SM}| = 2 : 1$$



Satz 3.1: In einem Dreieck liegen der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M auf einer Geraden, genannt **EULER-Gerade** (LEONHARD EULER geboren 1707 in Basel, gestorben 1783 in St. Petersburg). Es gilt $|\overline{HS}| : |\overline{SM}| = 2 : 1$.

Hilfssatz 3.2:

- Das Bild $H_1H_2H_3$ des Dreiecks ABC unter der Streckung mit Zentrum H und Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist zum Seitenmittendreieck $A^*B^*C^*$ kongruent. Die Seiten der beiden Dreiecke sind paarweise parallel.
- Die Dreiecke $A^*B^*C^*$ und $H_1H_2H_3$ gehen durch Punktspiegelung an F auseinander hervor. F liegt auf der EULER-Geraden und halbiert \overline{HM} .
- Die Dreiecke $A^*B^*C^*$ und $H_1H_2H_3$ haben den gemeinsamen Umkreis $k(F; R:2)$, wobei R der Radius des Umkreises zum Dreieck ABC ist.
- Auf dem Kreis $k(F; R:2)$ liegen auch die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c des Dreiecks ABC .

Beweis zu a):

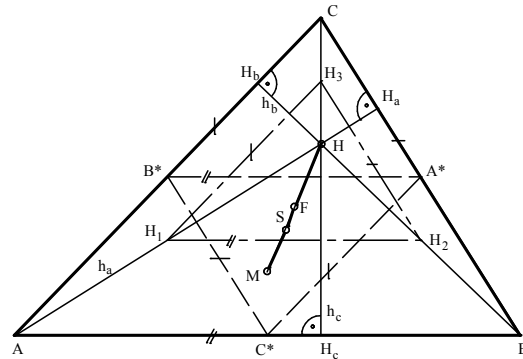
Die fraglichen Dreiecke gehen beide aus Dreieck ABC durch zentrische Streckungen hervor; deshalb sind entsprechende Seiten parallel. Da bei beiden Streckungen der Betrag des Streckungsfaktors $\frac{1}{2}$ ist, sind die Streckungsbilder kongruent.

Beweis zu b):

$H_1H_2A^*B^*$ und $A^*H_3H_1C^*$ sind wegen a) Parallelogramme. In beiden Parallelogrammen sind H_1 und A^* gegenüberliegende Punkte. Die Mitte F von $\overline{H_1A^*}$ ist daher das Symmetriezentrum beider Parallelogramme. Deshalb trifft die Punktspiegelung an F die folgende Zuordnung:

$$H_1 \leftrightarrow A^*, \quad H_2 \leftrightarrow B^*, \quad H_3 \leftrightarrow C^*$$

Die Dreiecke $H_1H_2H_3$ und ABC haben denselben Höhenschnittpunkt H . Dieser geht bei Spiegelung an F über in den Höhenschnittpunkt H^* von $A^*B^*C^*$. Wie oben beim Beweis von Satz 3.1 gezeigt worden ist, sind die Höhen vom Dreieck $A^*B^*C^*$ identisch mit den Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC ; also ist $H^* = M$. Somit gilt $H \leftrightarrow M$ und F ist die Mitte von \overline{HM} .



Beweis zu c):

Die im Beweis zu b) genannten Parallelogramme sind Rechtecke, weil z. B. A^* die Mitte von \overline{BC} und H_2 die Mitte von \overline{BH} sind, also ist A^*H_2 nach der Umkehrung des Vierstreckensatzes parallel zur Höhe CH_3 und steht damit auf H_1H_2 senkrecht. Analog schließt man beim anderen Rechteck. Dann aber ist F Symmetriezentrum beider Rechtecke und damit liegen alle Ecken der beiden Dreiecke auf einem Kreis k um F . Da beide Dreiecke aus dem Dreieck ABC durch Stauchung um $\frac{1}{2}$ hervorgehen, hat ihr Umkreis k den Radius $\frac{R}{2}$.

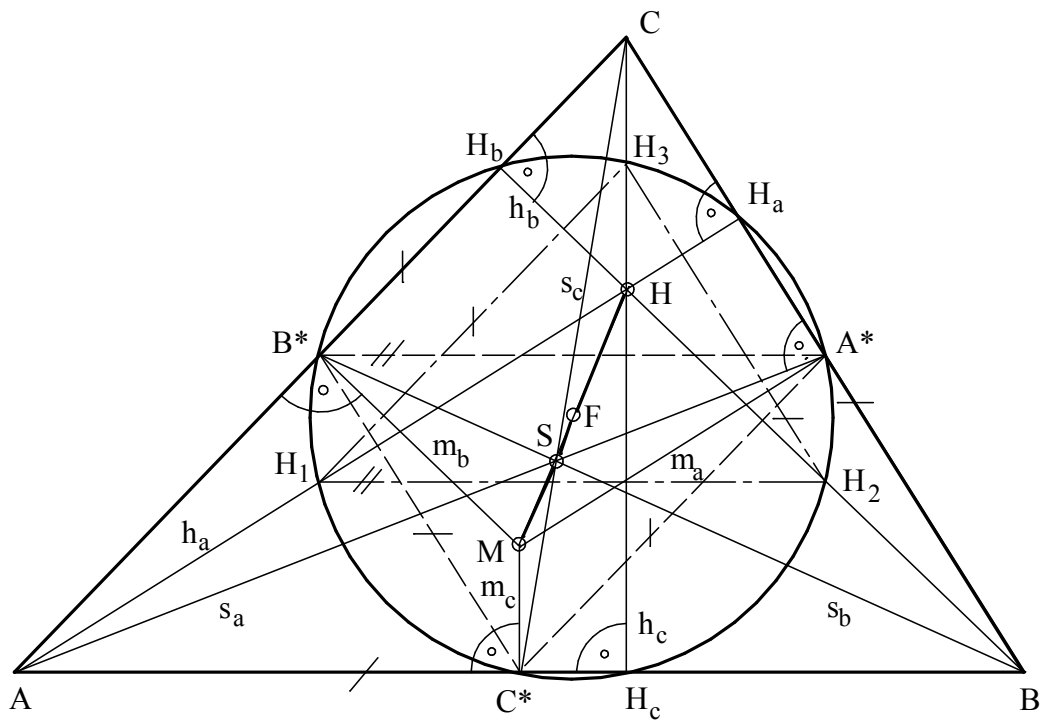
Beweis zu d):

Das Dreieck $H_1A^*H_a$ hat einen rechten Winkel bei H_a . Die Hypotenusenlänge $|\overline{H_1A^*}|$ ist Durchmesser von k . Nach dem Satz des THALES liegt daher auch H_a auf k . Für H_b und H_c schließt man analog.

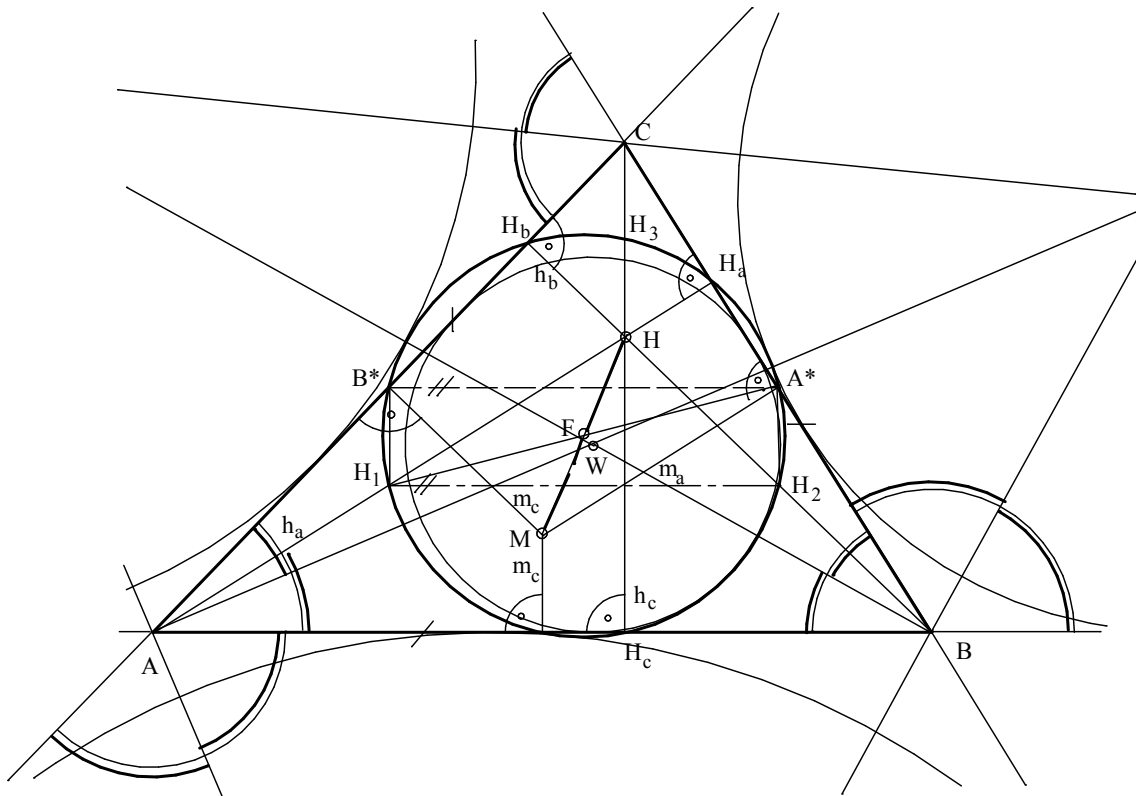
Das Ergebnis wird zusammengefasst in dem folgenden Satz:

Satz 3.3 (Satz vom Neunpunktekreis, Kreis von FEUERBACH): In einem Dreieck liegen die drei Höhenfußpunkte, die Seitenmitten und die Mitten der Verbindungsstrecken von den Ecken zum Höhenschnittpunkt alle

auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{R}{2}$. Der Mittelpunkt des Neunpunktekreises liegt auf der EULER-Geraden und halbiert die Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt und dem Umkreismittelpunkt.



Korollar 3.4 (von FEUERBACH): Der Neunpunktekreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise.



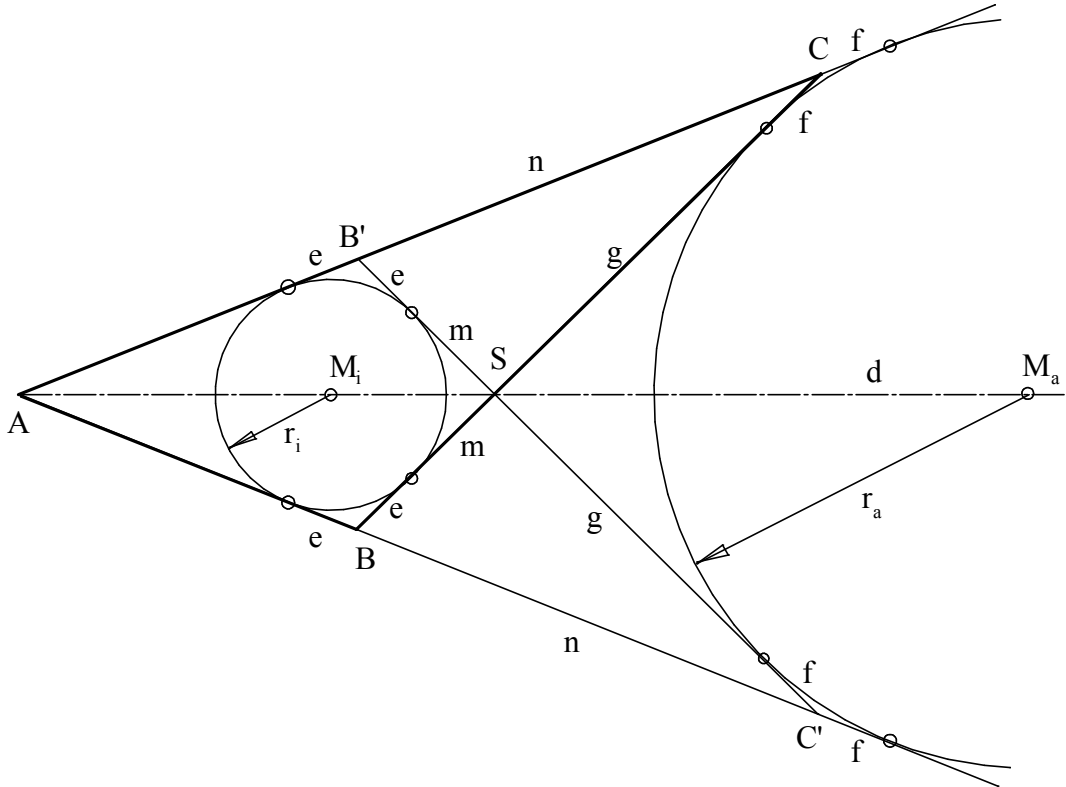
Hinweis:

Die Zeichengenauigkeit bei der Konstruktion des Feuerbach-Kreises ist sehr gering. Die Abbildungen von Kapitel 3 darf man deshalb nicht in der vorgegebenen Reihenfolge konstruieren. Dies gilt auch bei Verwen-

dung einer Zeichensoftware. Man beginnt am besten mit der letzten Zeichnung, bei der man den Mittelpunkt des FEUERBACH-Kreises so lange variiert, bis er einen Kreis liefert, der durch die 9 Punkte geht. Dann kann man aus dieser Zeichnung durch Weglassen von Linien und Bezeichnungen die anderen beiden Abbildungen gewinnen.

Vor dem Beweis des Korollars sind einige Vorerörterungen nötig:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachtet man den Inkreis und einen beliebigen Ankreis des Dreiecks ABC.



Weil der Inkreis mit einem Ankreis eines Dreiecks keine Punkte gemeinsam hat, gilt stets $|M_i M_a| > r_i + r_a$. D. h., die beiden Kreise haben 4 gemeinsame Tangenten. Die Konfiguration ist zu d symmetrisch. Weil Tangentenabschnitte an demselben Kreis gleich lang sind, ergeben sich die Benennungen in der obigen Zeichnung.

Letzteres angewandt auf die Punkte C und B führt zu den folgenden Gleichungen:

$$n + e = f + g + m \quad \text{bzw.} \quad n + f = e + m + g$$

Die Differenz der beiden Gleichungen lautet: $e - f = f - e$

Hieraus folgt $e = f$ und $n = g + m$.

(1)

Aus der Symmetrie zu d folgt $n = b - c$ also $g + m = b - c$.

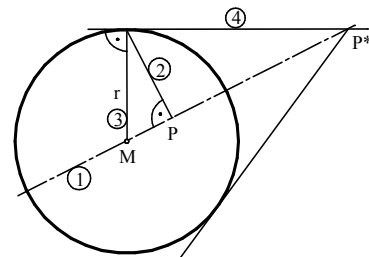
(2)

Wir benötigen einige einfache Kenntnisse aus der Kreisgeometrie der Anschauungsebene (siehe MEYER [5] für eine algebraische Herleitung und KRATZ [1] für einen mehr synthetischen Weg).

Definition 3.5: Die Abbildung $P \rightarrow P^*$ heißt **Inversion oder Spiegelung am Kreis**

$k = k(M,r)$, wenn alle Punkte von k Fixpunkte sind und für alle nicht auf k liegende Punkte P gilt: Die Punkte M, P und P^* sind kollinear und

$$|PM| \cdot |P^*M| = r^2 \quad \text{ist erfüllt.}$$



Aus dem Kathetensatz des EUKLID folgt die Gleichwertigkeit des in der Zeichnung

angedeuteten Konstruktionsganges mit der definierenden Bedingung.

Die Inversion ist involutorisch, d. h. die gleiche Inversion zweimal nacheinander angewendet ergibt die identische Abbildung. Das Bild des Mittelpunktes M vom Inversionskreis ist ein Fernpunkt. Der Fernpunkt wird umgekehrt also auf den Mittelpunkt abgebildet. Als Punktabbildung ist sie punkttreu, d. h. das Bild eines Punktes ist ein Punkt. Das Bild eines Kreises kann deshalb ein Kreis oder eine Gerade sein, je nachdem der Kreis *nicht durch* M bzw. *durch* M geht. Es wird also bei Inversion die Gesamtheit aus Geraden *und* Kreisen auf sich abgebildet.

Ohne Beweis wird angegeben:

Hilfssatz 3.6: Jeder Kreis oder jede Gerade, die auf dem Inversionskreis senkrecht steht, bleibt als Ganzes (nicht punktweise!) fix.

Beweisidee zu 3.4:

Man sucht zu der letzten Figur einen Inversionskreis, der den Inkreis und den Ankreis auf sich abbildet und dabei den FEUERBACH-Kreis in eine Gerade überführt, von der man beweist, dass sie den Inkreis und Ankreis berührt. Dann gilt diese Eigenschaft wegen der Inzidenztreue der Abbildung auch für das Urbild, eben dem FEUERBACH-Kreis.

Beweis zu 3.4 in Anlehnung an KRATZ [1] bzw. H. S. M. COXETER und S. L. GREITZER [1]):

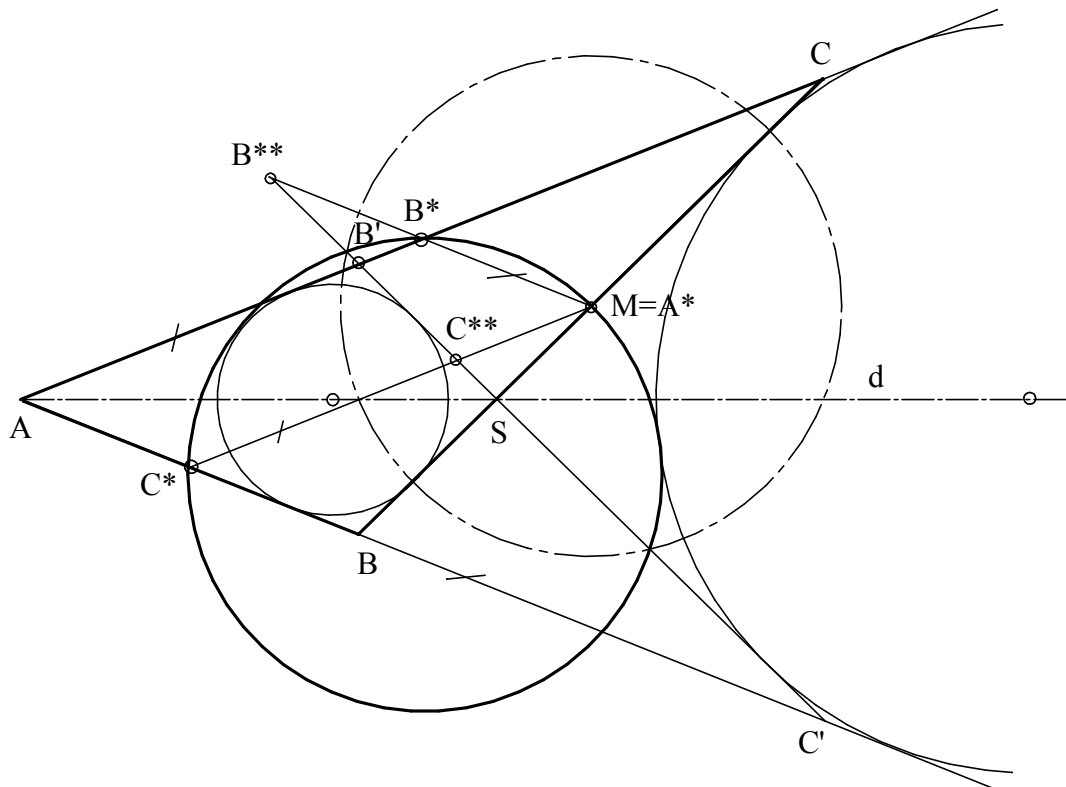
Bezeichnet man die Berührungspunkte der Dreiecksseite a mit dem Inkreis mit T_i und mit dem Ankreis T_a , so führt der THALES-Kreis über $\overline{T_i T_a}$ mit Mittelpunkt M In- und Ankreis in sich über, weil beide auf dem THALES-Kreis senkrecht stehen.

Wegen (1) ist M die Mitte A^* der Dreiecksseite a und wegen (2) ist der

$$\text{Radius des THALES-Kreises } r = \frac{b-c}{2}. \quad (3)$$

$M = A^*$ ist also ein Punkt des FEUERBACH-Kreises und deshalb verwandelt die Inversion ihn in eine Gerade.

Der FEUERBACH-Kreis sei durch die Mitten A^* , B^* und C^* der Dreiecksseiten definiert. Wir definieren die Schnittpunkte der Geraden B^*M und C^*M mit der In- und Ankreis gemeinsamen Tangente $B'C'$ als B^{**} bzw. C^{**} und beweisen, dass diese Punkte der Inversionsbedingung aus 3.5 genügen.



Die Geraden B^*M und C^*M sind parallel zu den Dreiecksseiten c bzw. b . Es können also Vierstreckensätze angewendet werden:

$$\frac{|B^{**}M|}{|BC'|} = \frac{|SM|}{|SB|} \quad (4)$$

$$\frac{|C^{**}M|}{|B'C|} = \frac{|C^*M|}{|BC'|} = \frac{|SM|}{|SC|} \quad (5)$$

Dividiert man die Gleichung (4) durch die Gleichung (5) so erhält man wegen Satz 1.5 und der Eigenschaft der Punkte A^* , B^* und C^* :

$$\frac{|B^{**}M|}{|C^{**}M|} = \frac{|SC|}{|SB|} = \frac{b}{c} = \frac{2|C^*M|}{2|B^*M|}$$

$$\text{Aus letzterem folgt dann } |B^*M||B^{**}M| = |C^*M||C^{**}M|. \quad (6)$$

Nach (4) folgt:

$$|B^{**}M| = |BC'| \cdot \frac{|SM|}{|SB|} = (b-c) \cdot \frac{|SM|}{|SB|} \quad (7)$$

$$|SM| = \frac{a}{2} - |SB| \quad (8)$$

$$\text{Aus Satz 1.5 folgt } \frac{a - |SB|}{|SB|} = \frac{b}{c} \text{ und damit } \frac{a - |SB| + |SB|}{|SB|} = \frac{b+c}{c}; \text{ also ist } |SB| = \frac{ac}{b+c}. \quad (9)$$

$$\text{Aus (8) und (9) findet man: } |SM| = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

Setzt man dies mit (9) in (7) ein, so erhält man:

$$|B^{**}M| = (b-c) \cdot \frac{a(b-c)(b+c)}{2(b+c)ac} = \frac{(b-c)^2}{2c}$$

Da $|B^*M| = \frac{c}{2}$ ist, erhält man also mit (6):

$$|B^*M||B^{**}M| = |C^*M||C^{**}M| = \frac{(b-c)^2}{4} = r^2$$

Letzteres gilt wegen (3). Damit liegen nach Definition 3.5 die Bildpunkte B^{**} und C^{**} auf der Tangente des In- und Ankreises. W. z. b. w.

Es gibt noch viele interessante Aussagen über merkwürdige Punkte und Linien im Dreieck. Man findet z. B. Einschlägiges bei H. S. M. COXETER und S. L. GREITZER [1].

Die folgenden Aufgaben entstanden in Anlehnung an RENNER [1] und SCHEID [1]:

Aufgabe 3.1: Begründe:

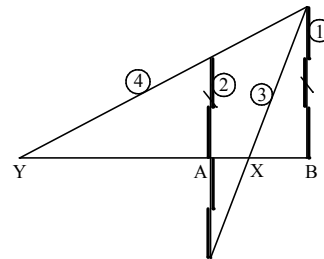
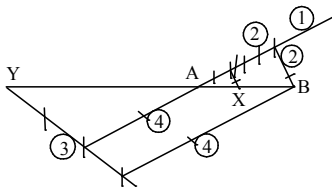
- Die Kreise, die durch 2 Dreiecksecken und dem Höhenschnittpunkt festgelegt sind, sind alle kongruent zum Umkreis des Dreiecks.
- Die Höhen sind die Winkelhalbierenden des Dreiecks aus den Höhenfußpunkten.
- Der Umkreis des Dreiecks aus den Höhenfußpunkten eines Dreiecks ABC halbiert die Seiten des Dreiecks ABC.
- In einem Dreieck ist die Strecke, die die Mitte einer Seite mit der Mitte des oberen Abschnitts der zur Seite gehörigen Höhe verbindet, gleich dem Radius des Umkreises.
- In einem Dreieck bilden der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt, der FEUERBACH-Punkt und der Umkreismittelpunkt ein harmonisches Punktequadrupel.

Aufgabe 3.2: Begründe: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn sein FEUERBACH-Kreis mit dem Inkreis übereinstimmt.

4. Lösungen

Die folgenden Abbildungen sind in aller Regel nicht maßstabsgerecht sondern stimmen nur bis auf Ähnlichkeit. Alle Buchstaben werden normgerecht verwendet.

zu *Aufgabe 1.1:* Die beiden Zeichnungen zeigen links, wie es grundsätzlich geht. Rechts dgg. wird gezeigt, wie man Linien sparen kann. Im Allgemeinen reicht es nicht, wenn man nur die rechte Zeichnung vorführt und der Schüler so nicht von selbst auf diese Vereinfachung kommt. Auch sollte man nicht glauben, dass derartige Überlegungen im Computerzeitalter überflüssig sind, da jede Vereinfachung eines Konstruktions- oder Rechenganges auch im Computer die Genauigkeit hebt. Die rechte Zeichnung ist die gesuchte Lösung.



zu *Aufgabe 1.2:* Zeichnet man zur äußeren Winkelhalbierenden in C die Parallele BE, so erhält man eine Vierstreckensatzfigur (vgl. die Abbildung bei der Aufgabenstellung) mit $\frac{|AY|}{|BY|} = \frac{|AC|}{|EC|}$. Man erkennt wieder F- und

Z-Winkel und findet so $\frac{\gamma'}{2} = \angle CEB = \angle CBE$. Also ist das Dreieck CBE gleichschenkelig.

Die Gültigkeit der Umkehrrichtung wird wörtlich bei Satz 1.5 gezeigt.

zu *Aufgabe 1.3:*

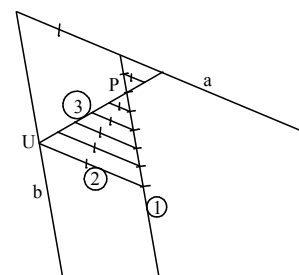
Nach Satz 1.5 gilt $b:26 \text{ cm} = 6,5 \text{ cm}:16,9 \text{ cm}$ also $b = 10 \text{ cm}$ bzw. $a:26 \text{ cm} = 10,4 \text{ cm}:16,9 \text{ cm}$ und damit $a = 16 \text{ cm}$. Für den Wert der Summe muss gelten $a + b = 26,0 \text{ cm}$. Das ist erfüllt.

Die Zusatzfrage ist erfüllt, wenn $a + b > 16,9 \text{ cm}$ ist. Anderenfalls gibt es kein Dreieck.

zu *Aufgabe 1.4:* $a + b + c = 25,0 \text{ cm}$. Die Länge von c ist angegeben als $c = 5,1 \text{ cm} + 3,4 \text{ cm} = 8,5 \text{ cm}$. Zieht man diesen Wert von $25,0 \text{ cm}$ ab, so hat man die Voraussetzungen der Aufgabe 1.4 und kann im Weiteren wie bei dieser Aufgabe verfahren.

zu *Aufgabe 1.5:*

- Man trägt auf den Schenkeln 5 bzw. 2 gleiche Teile ab und verbindet die Endpunkte durch eine Gerade c. Eine Parallele zu a durch P liefert dann die Lösung nach dem Vierstreckensatz.
- Die Schenkel des gegebenen Winkels seien a und b. Man lege durch P eine Gerade parallel zu b und teile die Strecke bis a auf ihr in 2 Teile der Länge l ein. Dann trage man auf der anderen Seite von P fünf solche Teile ab.



Der Endpunkt sei L. Zeichne durch L eine Parallele zu a, die sich dann mit b in einem Punkt U schneidet. Die gesuchte Gerade durch P ist dann nach dem Vierstreckensatz UP.

zu Aufgabe 1.6: Man teilt die Strecke \overline{AB} harmonisch wie bei Aufgabe 1.1 und zeichnet über \overline{XY} den THALES-Kreis.

zu Aufgabe 1.7: Man löst zunächst wie bei Aufgabe 1.3, zeichnet dann zu c Parallelen im Abstand h_c . Es kann bis auf Kongruenz und Einhaltung des Drehsinns keine, eine oder zwei Lösungen geben. Im Fall $h_c = 3,0$ cm sind es 2 Lösungen.

zu Aufgabe 1.8: Man löst zunächst wie bei Aufgabe 1.3, zeichnet dann in A den Winkel α und bekommt die Lösung.

zu Aufgabe 1.9: Man löst zunächst wie bei Aufgabe 1.3, zeichnet dann über \overline{AB} den THALES-Kreis bzw. den Peripheriewinkelkreis zu $\gamma = 60^\circ$. Die Schnittpunkte der beiden Kreise liefern dann bis auf Kongruenz eine Lösung.

zu Aufgabe 1.10: Man löst zunächst wie bei Aufgabe 1.3, zeichnet dann um den inneren Teilungspunkt X einen Kreis mit dem Radius w_γ . Allgemein gibt es keine oder genau eine Lösung bis auf Kongruenz und Einhaltung des Drehsinns.

zu Aufgabe 1.11: Die Lösung wird analog zu Aufgabe 1.10 durchgeführt, nur dass der Kreis um die Seitenmitte von \overline{AB} mit Radius s_c gezeichnet wird.

zu Aufgabe 1.12: Diese Aufgabe hat nichts mit dem vorliegenden Lehrinhalt zu tun: Man zeichnet den Winkel α und bekommt den Punkt C in der Höhe h_c . Damit hat man die Mitte D der Seite b. Eine Parallele zu c durch D schneidet sich mit dem Kreis um A mit Radius s_a in E_i für $i = 1$ oder 2 . Verbindet man E_i mit C, so erhält man zwei Dreiecke, von denen nur eines den richtigen Drehsinn hat.

zu Aufgabe 1.13: X teile die Strecke c in u und v ein. Zu A, B und dem inneren Teilungspunkt X findet man analog zu Aufgabe 1.3 den äußeren Teilungspunkt Y und über XY den THALES-Kreis. Man zeichnet über \overline{AB} den Peripheriewinkelkreis zu $\gamma = 60^\circ$. Es gibt zwei Schnittpunkte. Unter Berücksichtigung des Drehsinns führt nur einer zur Lösung ABC.

zu Aufgabe 1.14: Diese Aufgabe hat nichts mit dem vorliegenden Lehrinhalt zu tun:

$$s_a = 6,4 \text{ cm} + 3,2 \text{ cm} = 9,6 \text{ cm. Hieraus folgt } s_b = \frac{5}{6} s_a = 8,0 \text{ cm und } s_c = \frac{7,5}{5} s_a = 12,0 \text{ cm.}$$

zu Aufgabe 1.15: $c = 12,0 \text{ cm} + 9,0 \text{ cm} = 21,0 \text{ cm}$. Man hat das folgende Gleichungssystem zu lösen:

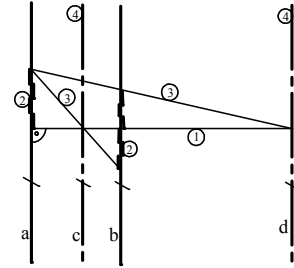
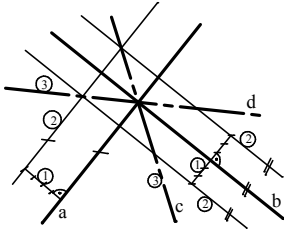
$$a^2 + b^2 = 21^2 \text{ cm}^2$$

$$a : b = 9 : 12$$

Lösung: $a = 19,6875 \text{ cm} \approx 19,7 \text{ cm}$ und $b = 26,25 \text{ cm} \approx 26,3 \text{ cm}$

zu Aufgabe 1.16:

a und b sind jeweils gegeben; c und d sind die Ergebnisse. Die Beweise werden mit dem Vierstreckensatz geführt.



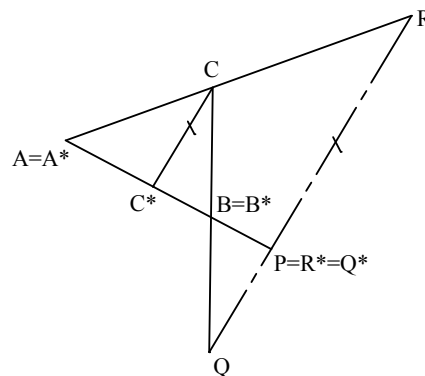
zu Aufgabe 1.17: Man verfährt wie bei Aufgabe 1.16 a) für die ersten beiden Dreiecksseiten. Schließlich macht man das Gleiche für die zweite und dritte Seite. Dort wo sich die geometrischen Ortslinien schneiden, ist jeweils der gesuchte Punkt. Man kann sich noch überlegen, weshalb die Linien der dritten Ecke durch die bereits gefundenen Punkte gehen. Es gibt 4 Lösungen.

zu Aufgabe 2.1: Man wird finden $\lambda\nu\mu \approx -1$.

zu Aufgabe 2.2:

- Meidet die Transversale das Dreieck, so trifft sie alle Geraden außerhalb der Dreiecksseiten. Deshalb sind alle erzielten Teilungsverhältnisse negativ und ebenso das Produkt aus ihnen.
- Trifft die Dreieckstransversale das Innere des Dreiecks und geht durch keine Ecke, dann trifft sie nach dem Axiom von PASCH genau zwei Dreiecksseiten im Inneren. D. h. das Produkt ist abermals negativ.

zu Aufgabe 2.3: Geht man von der Lösung zur Aufgabe 1.2 und der Zeichnung beim Beweis aus, so fehlt noch die Untersuchung des Falles, dass die Transversale das Dreieck meidet; es ergeben sich die gleichen Verhältnisgleichungen wie im Beweis.



zu Aufgabe 2.4: Das gesuchte Verhältnis ist ungefähr 1.

zu Aufgabe 2.5:

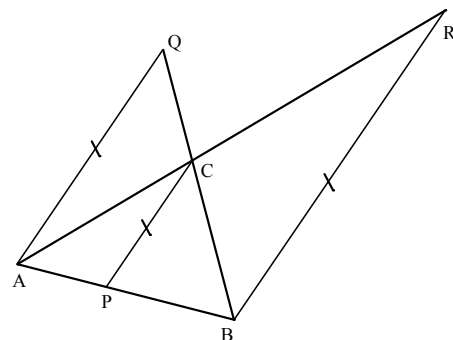
Man hat eine Figur, in der 2 Vierstreckensätze abgelesen werden können:

Da $\frac{|BQ|}{|CQ|} = \frac{|AB|}{|AP|}$ und $\frac{|CR|}{|AR|} = \frac{|BP|}{|AB|}$ folgt:

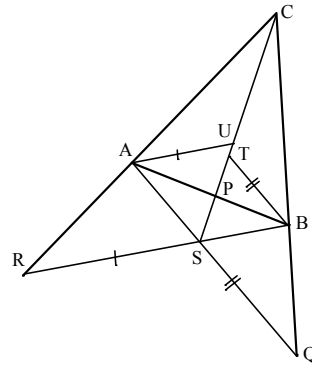
$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|CR|}{|AR|} = \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|AB|}{|AP|} \cdot \frac{|BP|}{|AB|} = 1$$

zu Aufgabe 2.6:

Die Aufgabe 2.5 liefert bereits ein Beispiel, bei dem sich der Beweis des Satzes ändert. Das liegt allerdings daran, dass S „ins Unendliche“ verschoben worden ist.



Leicht ist zu überprüfen: Der ursprüngliche Beweis funktioniert allerdings auch dann, wenn – wie in der nebenstehenden Figur – S im Endlichen außerhalb des Dreiecks liegt.



Zu Aufgabe 2.7: Das Folgende bezieht sich auf die Figur beim Beweis nach BERNOULLI:
Nach MENELAOS gilt für die Transversale BR

$$\text{im Dreieck APC: } \frac{|AB|}{|BP|} \cdot \frac{|SP|}{|SC|} \cdot \frac{|AR|}{|CR|} = -1$$

Nach MENELAOS gilt für die Transversale AQ

$$\text{im Dreieck PBC: } \frac{|AP|}{|AB|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|SC|}{|SP|} = -1$$

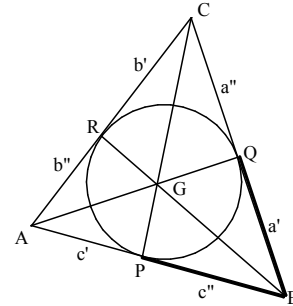
Das Produkt der beiden Gleichungen liefert die Verhältnismgleichung von CEVA.

zu Aufgabe 2.8:

- Der GERONNE-Punkt: Die Tangentenabschnitte von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang. Deshalb gilt:

$$\frac{a'b'c'}{a''b''c''} = \frac{c''a''b''}{a''b''c''} = 1$$

Damit ist die Existenz von G bewiesen.

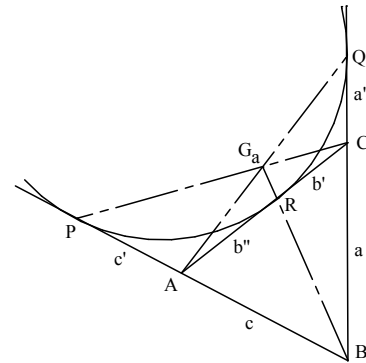


- Ein äußerer GERONNE-Punkt: Auch hier werden gleich lange Tangentenabschnitte berücksichtigt:

$$\frac{(a + a'')b'c'}{a''b''(c + c')} = \frac{c'(c + c'')a''}{a''c'(c + c')} = 1$$

Damit ist die Existenz von G_a bewiesen.

Woran liegt es, dass wir eigentlich keinen Beweis haben schreiben müssen?



zu Aufgabe 2.9:

Man kann aber auch die drei äußeren Ankreise benutzen und erhält einen so genannten NAGEL-Punkt. Jede Dreiecksseite wird durch einen Berührungspunkt in zwei Abschnitte x' und x'' zerlegt. Da Tangentenabschnitte zu einem Kreis gleich lang sind, kommt jeder dieser Abschnitte doppelt vor.

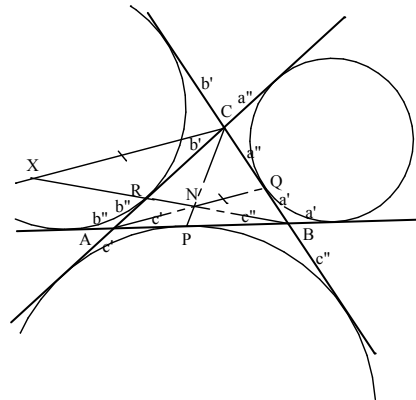
Da Tangentenabschnitte zu einem Kreis gleich lang sind, gilt:

$$c' + b'' + b = c'' + a' + a'' \quad (1)$$

$$a'' + b' + b'' = a' + c'' + c' \quad (2)$$

$$b'' + c' + c'' = b' + a'' + a' \quad (3)$$

$$\text{bzw. } b' + a' + a'' = b'' + c' + c'' \quad (3')$$

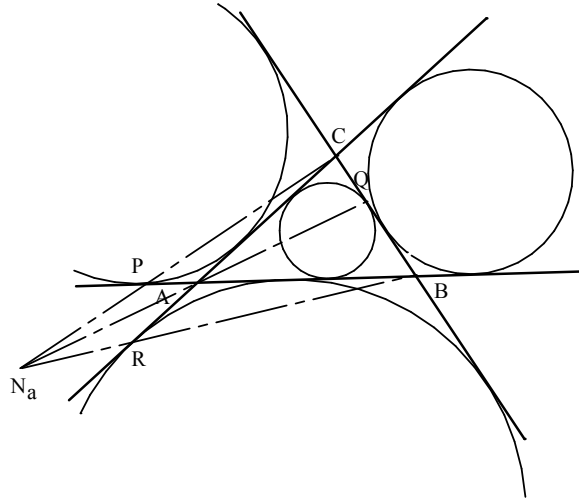


$$\begin{aligned} (1)-(2) \quad c' - a'' &= a'' - c', \text{ d. h. } a'' = c' \\ (1)-(3) \quad b' - c'' &= c'' - b', \text{ d. h. } c'' = b' \\ (2)-(3') \quad b'' - a' &= a' - b'', \text{ d. h. } b'' = a' \end{aligned}$$

Hieraus findet man $a'b'c' = a''b''c''$. Nach der Umkehrung des Satzes 1.7 von CEVA schneiden sich also die drei Ecktransversalen in einem Punkt N, der im Inneren des Dreiecks liegen muss, weil der Berührungspunkt des Ankreises jeweils die entsprechende Dreiecksseite im Inneren berührt.

Mit den Ankreisen kann man aber auch einen äußeren NAGEL-Punkt erhalten, indem man wörtlich wie oben schließt. Da dieses Mal die Ecktransversalen durch äußere Berührungspunkte der Ankreise gehen, liegen sie außerhalb des Dreiecks.

Interessant wäre noch zu klären, wie viele äußere NAGEL-Punkte es gibt.



zu Aufgabe 2.10:

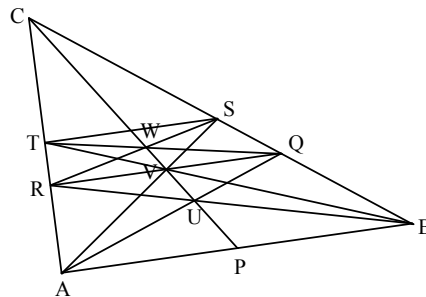
1. Weil sich die Geraden AQ, BR und CP in U schneiden und P die Mitte der Strecke AB ist, gilt:

$$\frac{|AP| \cdot |BQ| \cdot |CR|}{|PB| \cdot |QC| \cdot |RA|} = \frac{|BQ| \cdot |CR|}{|QC| \cdot |RA|} = 1$$

$$\text{Hieraus folgt } \frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{|AR|}{|RC|}.$$

Die Umkehrung des Vierstreckensatzes ergibt damit, dass die Geraden RQ und AB parallel sind.

Analog ergibt sich die zweite Parallelität, nur dass man hier den Punkt S nicht mehr willkürlich wählen kann, sondern darauf achten muss, dass AS durch $v = RQ \cap CP$ geht.



2. Aus der Parallelität von TS und RQ folgt nach dem Vierstreckensatz:

$$\frac{|CT|}{|TR|} = \frac{|CS|}{|SQ|}$$

Weil V die Mitte von RQ ist, folgt hieraus:

$$\frac{|RP| \cdot |CT| \cdot |SQ|}{|PQ| \cdot |TR| \cdot |CS|} = 1$$

Mit der Umkehrung des Satzes von CEVA folgt dann, dass sich die Geraden CP, RS und QT in einem Punkt schneiden, der W genannt ist.

3. Nach dem Vierstreckensatz gilt:

$$\frac{|\overline{CP}|}{|\overline{CV}|} = \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{CR}|} \quad (1)$$

Im Dreieck ABR gilt für die Transversale PC nach MENELAOS:

$$\frac{|\overline{PA}|}{|\overline{PB}|} \cdot \frac{|\overline{UB}|}{|\overline{UR}|} \cdot \frac{|\overline{CR}|}{|\overline{CA}|} = -1$$

Weil P die Mitte von AB ist, folgt hieraus:

$$\frac{|\overline{UB}|}{|\overline{UR}|} = -\frac{|\overline{CA}|}{|\overline{CR}|} \quad (2)$$

Nach dem Vierstreckensatz gilt:

$$\frac{|\overline{UP}|}{|\overline{UV}|} = \frac{|\overline{UB}|}{|\overline{UR}|} \quad (3)$$

Das gesuchte Doppelverhältnis findet man durch Anwendung von (1), (2) und (3) in dieser Reihenfolge:

$$\frac{|\overline{UP}|}{|\overline{UV}|} = \frac{|\overline{UP}|}{|\overline{UV}|} = -\frac{|\overline{UB}|}{|\overline{UR}|} = -\frac{|\overline{UP}|}{|\overline{UV}|} = -1$$

$$\frac{|\overline{CP}|}{|\overline{CV}|} = \frac{|\overline{CA}|}{|\overline{CR}|} = -\frac{|\overline{UB}|}{|\overline{UR}|} = -\frac{|\overline{UP}|}{|\overline{UV}|} = -1$$

Also liegen diese vier Punkte harmonisch.

4. Z. B. ist ein weiteres harmonisches Quadrupel gegeben durch (U,W;V,C).

zu Aufgabe 2.11:

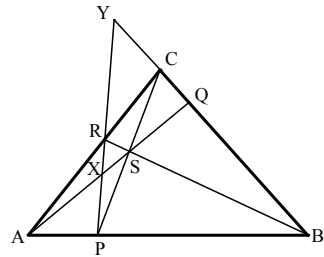
Da die projektive Abbildung nach Satz 2.7.4 Doppelverhältnisse erhält, liegt der Punkt Q in der Mitte von SB.

zu Aufgabe 2.12:

Bei der Verwendung der Sätze von MENELAOS und von CEVA muss man jeweils klären, auf welches (Teil-)Dreieck und welche Gerade bzw. auf welches (Teil-)Dreieck und welchen Punkt sich der Einsatz bezieht.

Es ist auch zweckmäßig die Schreibweise der vorkommenden Proportionen zu normieren.

Unter diesen Aspekten ist Aufgabe 2.12 ein Musterbeispiel:



1. Satz des MENELAOS angewandt auf das Dreieck ABC und der Geraden YZ und Satz des CEVA angewandt auf Dreieck ABC und dem Punkt S:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|} \cdot \frac{|\overline{BY}|}{|\overline{CY}|} \cdot \frac{|\overline{CR}|}{|\overline{AR}|} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|} \cdot \frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{CQ}|} \cdot \frac{|\overline{CR}|}{|\overline{AR}|} = 1. \quad \text{Der Quotient aus beiden ergibt} \quad \frac{|\overline{BY}|}{|\overline{CY}|} : \frac{|\overline{BQ}|}{|\overline{CQ}|} = -1.$$

Also hat man das harmonische Punktequadrupel (B,C; Q,Y).

2. Satz des MENELAOS angewandt auf das Dreieck ASC und der Geraden YP und Satz des CEVA angewandt auf Dreieck ASC und dem Punkt B:

$$\frac{|\overline{AX}|}{|\overline{SX}|} \cdot \frac{|\overline{SP}|}{|\overline{CP}|} \cdot \frac{|\overline{CR}|}{|\overline{AR}|} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{SQ}|} \cdot \frac{|\overline{SP}|}{|\overline{CP}|} \cdot \frac{|\overline{CR}|}{|\overline{AR}|} = 1. \quad \text{Der Quotient aus beiden ergibt} \quad \frac{|\overline{AX}|}{|\overline{SX}|} : \frac{|\overline{AQ}|}{|\overline{SQ}|} = -1.$$

Also hat man das harmonische Punktequadrupel (A,S; X,Q).

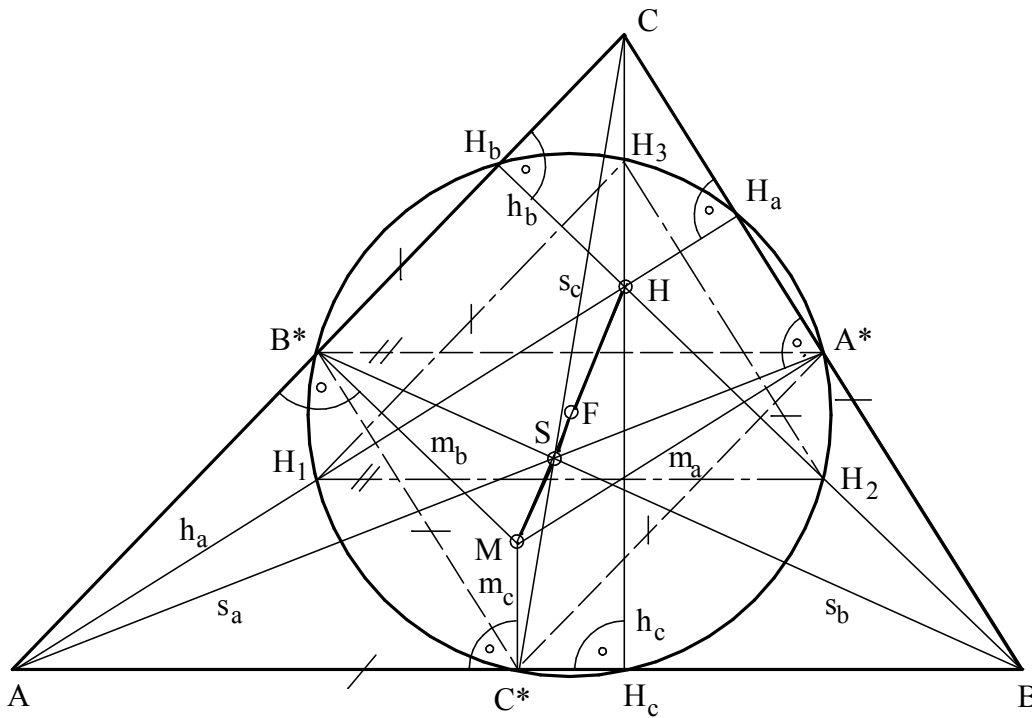
3. Satz des MENELAOS angewandt auf das Dreieck RSP und der Geraden BC und Satz des CEVA angewandt auf Dreieck RSP und dem Punkt A:

$$\frac{|SC|}{|PC|} \cdot \frac{|PY|}{|RY|} \cdot \frac{|RB|}{|SB|} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|SC|}{|PC|} \cdot \frac{|PX|}{|RX|} \cdot \frac{|RB|}{|SB|} = 1. \quad \text{Der Quotient aus beiden ergibt} \quad \frac{|PY|}{|RY|} \cdot \frac{|PX|}{|RX|} = -1.$$

Also hat man das harmonische Punktequadrupel (P,R; X,Y). W. z. b. w.

zu Aufgabe 3.1:

Für die folgende Bearbeitung wird die Gesamtfigur wiederholt:



Da z. B. H_1 die Strecke \overline{AH} halbiert und H_1H_3 zu AC parallel ist, wird $\overline{HH_b}$ von der Dreiecksseite AC halbiert; deshalb liegen die Punkte $HH_1H_bH_3$ zur Seite AC symmetrisch und der genannte Kreis ist zum FEUERBACH-Kreis kongruent. Dieser Kreis ist aber vom Dreieck $H_1H_2H_3$ Umkreis.

b) Da H_b zu H bezüglich H_1H_3 symmetrisch liegt, halbiert H_1H_3 den Winkel H_bH_1H der Größe δ . Betrachtet man den FEUERBACH-Kreis als Peripheriewinkelkreis einmal bezüglich der Sehne H_aH_b , so folgt hieraus, der Winkel $H_bH_cH_a$ hat die Größe δ . Andererseits kann man den FEUERBACH-Kreis als Peripheriewinkelkreis bezüglich der Sehne H_bH_3 auffassen und findet, dass die Höhe h_c den Winkel $H_bH_cH_a$ halbiert.

c) Die Höhenfußpunkte bestimmen den FEUERBACH-Kreis, der eben auch durch die Seitenmitten geht.

d) Die genannte Strecke ist der Durchmesser des FEUERBACH-Kreises, weil die Endpunkte auf diesem Kreis liegen und die beiden Punkte durch Spiegelung am Kreismittelpunkt F auseinander hervorgehen. Der Umkreisradius ist aber die Hälfte des Radius vom FEUERBACH-Kreis.

e) Nach Konstruktion dieser Punkte gilt $\frac{|FH|}{|MH|} = \frac{1}{2}$ und $\frac{|MS|}{|HS|} = \frac{1}{2}$. Hieraus erhält man $|MS| = \frac{2}{3}|MF|$.

Also gilt ebenfalls $\frac{|FS|}{|MS|} = \frac{1}{2}$. Damit hat man das harmonische Quadrupel (M,F; S,H) erhalten.

zu Aufgabe 3.2:

Beim gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte M , S , F und H zusammen. Die EULER-Gerade entartet zu einem Punkt. Darüber hinaus ist $A^* = H_a$ usw. Da M auch der Mittelpunkt für den Inkreis und z. B. H_a der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite a ist, fallen der FEUERBACH-Kreis und der Inkreis zusammen.

Umgekehrt, wenn der FEUERBACH-Kreis Inkreis ist, fallen die Punkte A^* und H_a usw. zusammen, was bedeutet, dass die Höhe h_a und die Mittelsenkrechte m_a eine Linie sind usw. D. h. die klassischen Ecktransversalen fallen alle zusammen, was nur beim gleichseitigen Dreieck vorkommt.

5. Schlussbemerkung

Es folgen einige Bemerkungen, weshalb die Behandlung des vorliegenden Stoffs am Gymnasium zumindest in einer Begabtengruppe durchaus auch noch zu Beginn des 21. Jahrhunderts von Interesse ist.

Forschungsrelevant (vgl. BAPTIST [1]) wie im 19. Jahrhundert sind diese Dinge sicher nicht mehr. Trotzdem handelt es sich um komplexe Ergebnisse der Elementargeometrie, die erst über viele Jahrhunderte hinweg gefunden werden konnten. Heute findet man hiervon kaum mehr etwas in der modernen mathematischen Literatur und auch nicht mehr in den Schulbüchern. Es wäre schade, wenn diese Ergebnisse verloren gehen würden, steckt doch in ihnen ein Stück **Entwicklungsgeschichte der Mathematik und damit Kultur**.

Diese Inhalte sind aber auch hinsichtlich der didaktischen Situation an der Schule interessant: Der Aufbau der Elementargeometrie seit EUKLID hat geradezu in solch komplexen Aussagen wie den vorgelegten gegipfelt. Leider hat die um 1900 beginnende **Entfrachtung der mathematischen Lehrpläne** dazu geführt, dass zwar die Grundlagen hierzu dem Unterricht erhalten blieben, quasi also das Gerippe der Geometrie, das dazugehörige Fleisch, eben Aussagen wie die vorgelegten, hat man „entfrachtet“ mit dem Erfolg, dass man heute bereits allen Ernstes die Frage diskutiert, weshalb immer noch das Gerippe unterrichtet wird, da man ja ohnedies am Gymnasium nicht einsehen kann, wozu es gut ist und offenbar sich die mathematische Forschung hierfür auch nicht mehr interessiert.

Dies ist natürlich auch eine Folge des **Siegeszugs der algebraischen Kalküle**, was sich auch auf das Schulcurriculum dahingehend auswirkte, dass viel zu oft z. B. Vektorrechnung zum Einsatz kommt, auch wenn dieser Weg manchmal so umständlich wie nur möglich ist.

Einige Didaktiker haben sich zwar etwa ab 1975 (vgl. etwa MEYER [4]) im Rahmen des so genannten **Fächerübergriﬀs** bemüht, in anderer Form die planimetrischen Grundlagen wieder einzusetzen, doch muss zugegeben werden, dass dann doch sehr häufig zumindest der Lehrer Inhalte außerhalb der Mathematik kennen muss, was nicht immer gegeben ist und vor allem von vielen Lehrern abgelehnt wird.

So ergibt sich eine riesige **Diskrepanz zwischen den Erfordernissen vieler Berufe und dem Unterricht** am Gymnasium in Geometrie, der in Geometrie so mager geworden ist, dass die meisten Absolventen und auch spätere Natur- und Ingenieurwissenschaftler nicht mehr einsehen, weshalb überhaupt noch am Gymnasium Geometrie gelehrt wird, wenn sie nicht zufällig zu denen gehören, die Geometrie im Beruf benötigen. Man kann sich zwar heute durch die Schaffung eines eigenen Faches Technik am Gymnasium erhoffen, dass der 1975 begonnene Anstoß zum Fächerübergriﬀ eines Tages echt realisierbar wird. Zwischenzeitlich aber sollte man zumindest den begabteren Schülerinnen und Schülern im Rahmen des klassischen Angebots an innermathematischen Fragestellungen die Schwierigkeiten aber auch die **Eleganz des Einsatzes geometrischer Grundaussagen** nahe bringen. Eines steht fest, wenn man im Unterricht alle komplexen Fragestellungen weglässt, geraten die einzelnen Bausteine zu rasch in Vergessenheit und der Schüler lernt nicht, Probleme in die Grundbausteine aufzugliedern, wie dies die Anwenderpraxis erfordert.

5. Literatur

- Baptist, Peter [1]: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie, Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd. 19, BI Wissenschaftsverlag Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich 1992

- Barth u. a. [1]: Anschauliche Geometrie 9, Ehrenwirth Verlag GmbH München 1994
- Coxeter, H. S. M. und Greitzer, S. L. [1]: Zeitlose Geometrie, Stuttgart 1983
- Hefendehl-Hebeker, L. [1]: Merkwürdige Punkte im Dreieck, Mathematikinformation Nr. 23 (1. 2. 1988), Seiten 32 -36
- Kratz, [1]: Die Kreisspiegelung, Didaktik der Mathematik Heft 3 (1994), Seiten 161 - 186
- Meyer, Karlhorst [1]: Zum Kreis des APOLLONIUS, Mathematikinformation Nr. 2A (9. 2. 1981)
- [2]: Gymnasialer Mathematikunterricht im Wandel, texte zur mathematischen for-
schung und lehre Bd.2 franzbecker Bad Salzdetfurth ü. Hildesheim 1996
- [3]: Beispiele zum Wiederholen und zur Differenzierung des Geometrieunterrichts,
Mathematikinformation Nr. 39 (15. September 2003), Seiten 7 - 18
- [4]: Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht Bd.1, Algebra und Geometrie,
Hirschgraben Frankfurt 1980
- [5]: Kreisgeometrie, Mathematikinformation Nr. 26 (1. März 1996)
- Renner, Christian [1]: Planimetrie, Ehrenwirth Verlag München 6. Auflage 1958
- Scheid, Harald [1]: Elemente der Geometrie, Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien, Zürich 1991
- Teller, O., Nikol, F. [1]: Zwerger-Klug Planimetrie, Lindauers Mathematisches Unterrichtswerk, München
1960

Anschrift des Autors:

Dr. Karlhorst Meyer
Kyffhäuserstraße 20
85579 Neubiberg