Boris Averboukh

Formen der Arbeit mit mathematisch begabten Schülern in Russland[1]

Eine Ursache der mathematischen und technischen Erfolge in Russland des 20. Jahrhunderts war die aktive Arbeit mit mathematisch begabten Kindern, an der viele hervorragende russische Mathematiker teilnahmen. Wahrscheinlich wird es für deutsche Mathematiker interessant sein, von dieser Arbeit zu erfahren und Aufgaben, die russische Schüler lösen, zu sehen.

1. PMS und das normale Gymnasium in Russland

Eine Organisationsform zur Pflege der Mathematik ist die sogenannte physikalisch-mathematische Schule (PMS), die vor ca. 40 Jahren entstand und jetzt in jeder großen Stadt zu finden ist. In Moskau zum Beispiel gibt es mehr als 30 solcher Schulen. Wissenschaftliche Zentren, die oft in kleinen oder mittleren Städten untergebracht sind, halfen dort PMS zu organisieren und unterstützen sie jetzt. Trotz Erscheinungen des Zerfalls in der Wirtschaft und in verschiedenen anderen Bereichen des gesellschaftlichen Lebens einschließlich der Schule gibt es noch sehr viele Familien und sehr viele Kinder, die den Ausweg aus ihrer schwierigen Lage in einer guten Ausbildung sehen. PMS wählen mathematisch begabte Jugendliche aus; sie lernen dort mit Spaß und Begeisterung und sind bereit, viele Stunden täglich zu arbeiten.

Lernen in PMS beginnt meistens erst im 6. oder 7. Schuljahr, manchmal noch später, und um dahin zu kommen, muss man eine schwierige Aufnahmeprüfung bestehen. Im Folgenden ist eine Mathematikprüfung zur Aufnahme in die 10. Klasse einer PMS dargestellt. Für eine solche Prüfung haben die Schüler 4 Stunden Zeit. Um in die Schule zu kommen, muss man auch eine Physikprüfung bestehen und dabei aus 40 maximal möglichen Punkten (20 in der Mathematik und 20 in der Physik) mindestens 30 bekommen.

1.1 Aufnahmeprüfung in eine PMS

1. Vereinfache die Ausdrücke:
   a) $\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2}+\frac{1}{4a^2+3a}\right)\cdot\left(3-\frac{7a}{a-1}\right)-\frac{1}{a}$ (1 Punkt)
   b) $\left(\frac{1}{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right):\sqrt{ab}$ (2 Punkte)
2. Zwei LKW transportieren zusammen 4 Stunden lang Sand. Wie viele Stunden muss jeweils jeder LKW allein fahren, um genau soviel Sand zu transportieren, wenn der erste dafür 6 Stunden mehr benötigt, als der zweite? (3 Punkte)
3. Löse das folgende Ungleichungssystem: $x \le 3-\frac{1}{x-1}$ und $|x-1|<4$ (3 Punkte)
4. Die Summe der drei ersten Glieder einer geometrischen Folge ist 21, und die Summe ihrer Quadrate ist 189. Finde das erste Glied und den Quotient dieser Folge. (4 Punkte)
5. Berechne $\cos\frac{\alpha}{2}$, wenn $\cos\alpha=\frac{1}{8}$ für $\pi<\alpha<2\pi$ (1 Punkt)
6. Die Summe der dritten Potenzen der Lösungen der Gleichung $2x^2-8x+p=0$ ist gleich 34. Finde p. (2 Punkte)

[1] Der Autor dankt Herrn Heino Günther herzlich für seine Hilfe bei der Vorbereitung des Textes.

7. In einer Raute mit dem Winkel 60° ist ein Kreis einbeschrieben, und in diesem Kreis ist ein Quadrat einbeschrieben. Finde das Verhältnis des Flächeninhalts der Raute zum Flächeninhalt des Quadrats. (4 Punkte)

Die Schüler der oberen Klassen einer PMS haben **8 bis 10 Stunden Mathematik pro Woche**. Aber im Vergleich zu deutschen Gymnasien muss man berücksichtigen, dass die 11. Klasse in Russland schon die Abgangsklasse ist. Die Lehrpläne im Fach Mathematik für ein deutsches Gymnasium und für die russische 11-jährige Schule sind zwar ähnlich, aber im üblichen russischen Lehrplan gibt es viel mehr Geometrie als im deutschen und es gibt keine Stochastik. Der Lehrplan Mathematik für PMS enthält dieses Thema (in einem geringeren Umfang als in Deutschland) und manch anderes, was im deutschen Lehrplan fehlt (z. B. komplexe Zahlen). Der Schwerpunkt des Mathematikunterrichts in oberen Klassen in Russland ist aber das Erlernen der Eigenschaften der elementaren Funktionen.

Der wichtigste Unterschied zwischen einem deutschen Gymnasium und einer üblichen russischen 11-jährigen Schule einerseits und PMS andererseits besteht im Niveau der Kompliziertheit und der Anforderungen: An PMS löst man viel schwierigere Aufgaben. In der 11. Klasse üblicher russischer Schulen oder an deutschen Gymnasien gibt es z. B. viele Schüler, die nicht quadratische Gleichungen lösen können. Es gibt aber keine solchen Schüler ab der 8. Klasse einer PMS.

Hier möchte ich übliche Aufgaben der Abgangsmathematikprüfungen zeigen. Für die Prüfungsarbeit erhalten die Schüler 4 Stunden. Die beste Note (das ist "5" in Russland) bekommt ein Schüler noch, wenn er mindestens 5 Aufgaben ohne Fehler gelöst hat. Dabei können zwei nicht ganz richtige Lösungen nicht eine fehlerlos gemachte Aufgabe ersetzen. Um die Prüfung zu bestehen, muss man mindestens 3 Aufgaben richtig lösen. Schüler dürfen keinen Taschenrechner und keine Formelsammlung benutzen.

Es ist auch wichtig zu wissen, dass die Abgangsprüfungen zentralisiert sind. Dadurch ist das Niveau der Prüfung mit der Autorität des Staates und der Gesellschaft bekräftigt. Manchmal schützt es Lehrer gegen Probleme mit Schülern und Eltern.

1.2 Abgangsprüfung der PMS

1. Finden Sie alle komplexen Zahlen $z \neq 0$ mit $\arg z = \frac{\pi}{4}$, für die $z^3 - 8z$ eine reelle Zahl ist.
2. Zeichnen Sie die Menge der Punkte der (x, y)-Ebene, deren Koordinaten das Ungleichungssystem $|y| - x^2 + 4|x| - 4 \leq 0$ und $|x| \leq 1$. erfüllen. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Figur, die aus diesen Punkten besteht.
3. Finden Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (2x+3)\sqrt{2x+3} + x^2$, die keine gemeinsamen Punkte mit der Geraden zu $y = x$ hat.
4. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl, die im Dezimalsystem aus den Ziffern 1, 2, 3, 5 besteht und jede dieser Ziffern genau einmal enthält, durch 4 teilbar ist.
5. Lösen Sie die Ungleichung $\log_{2-2^y} \dfrac{2^{2y+5} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^y}{2^{1-y} - 1} + 1 \leq 0$.
6. Für welche Werte des Parameters a existiert mindestens ein solcher Wert des Parameters b, dass die Gleichung $3 \cos x + 4 \sin x = a$ genau eine Lösung im Intervall $]b; b + 4\pi[$ hat?

1.3 Abgangsprüfung der üblichen 11-jährigen Schule

1. Lösen Sie die Ungleichung $\log_4\left(x^2 + 3x\right) \leq 1$.

2. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 5$ auf Monotonie und Extrempunkte hin. Finden Sie ihren größten und kleinsten Wert auf dem Intervall $[-3; 0]$.

3. Lösen Sie die Gleichung $2\sin^2 6x + \cos^2 3x = 0.$

4. Lösen Sie die Gleichung $5 \cdot 4^x + 23 \cdot 10^x - 10 \cdot 25^x = 0.$

5. Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x^2 - 3x + 11} - 5 = x^2 - 3x$.

6. Finden Sie den Flächeninhalt der Figur, die von unten durch die Linie $x^2 + y^2 = 4$ und von oben durch den Graph der Funktion $y = -|x| + 2$ begrenzt ist.

1.4 Ein Beispiel eines physikalisch - mathematischen Internats (PMS)

Beispielhaft berichte ich jetzt über eine PMS, an der ich ca. 10 Jahre lang gearbeitet habe. Diese PMS wurde vor 15 Jahren in der Stadt Koroljov neben Moskau mit Hilfe des russischen Leitungszentrums für Raumflüge, das sich dort befindet, organisiert. Die Schule nimmt jährlich 50 Kinder in die 8. Klasse und 50 in die 10. auf. Die Schüler der 10. und der 11. Klassen haben **8 Stunden Mathematik pro Woche**: 3 Stunden *Vorlesungen* und 5 Stunden praktischen Unterricht. Die Vorlesungen halten *Professoren einer Technischen Universität*. Den praktischen Unterrichte führen die Lehrer der Schule in Gruppen aus 12 bis 13 Schülern durch. Zusätzlich hält man einen fakultativen Kurs und es gibt mathematische Zirkel für verschiedene Klassen.

Einige Male erreichten Schüler der Schule hervorragende Erfolge an gesamtrussischen mathematischen Olympiaden. Das Leitungszentrum für Raumflüge veranstaltete alljährlich seine eigene Olympiade. Sie dauert 3 Tage. Am ersten und zweiten Tage lösen Teilnehmer mathematische und physikalische Aufgaben, am dritten Tag erzählen sie über ihre technischen oder naturwissenschaftlichen Ausarbeitungen. Oft enthalten sie Computerprogramme. In den letzten Jahren nahmen an diesen Olympiaden neben Schüler einiger russischer PMS, auch solche einer Schule aus den USA und einer aus England teil. Die russischen Teilnehmer erreichten bessere Erfolge als die anderen.

In Russland sind die Schulabgangsprüfungen noch nicht die Universitätsaufnahmeprüfungen. Diese Lage hat ihre Vor- und Nachteile, aber sie ist unvermeidlich in Russland. Die Universitätsaufnahmeprüfungen sind oft viel schwieriger als Schulabgangsprüfungen (siehe das folgende Beispiel einer solchen Prüfung). Alle Schüler meiner PMS setzen in der Regel ihre Ausbildung an Universitäten fort. Ca. 60 ehemalige Schüler studieren jetzt an zwei mathematischen Fachbereichen der Moskauer Universität „M.W. LOMONOSOW“. Das sind ca. 2% der Studenten dieser Fachbereiche. Allein in Moskau kommen Absolventen von eintausend 11-jährigen Schulen. Ein paar ehemalige Schüler sind schon Doktoren der Mathematik. Durch die Erfolge ihrer Schüler ist diese PMS wahrscheinlich an 5. oder 6. Stelle im Großraum von Moskau.

Die beste Schule für mathematisch begabte Kinder in Moskau ist das physikalisch-mathematische Internat „A.N. KOLMOGOROFF“, das vor ca. 40 Jahre von diesem im 20. Jahrhundert bedeutendesten russischen Mathematiker gegründet wurde. Dort lernen besonders begabte Kinder, deren Familien weit von Moskau entfernt leben.

Aber ich will hier über ein anderes, wahrscheinlich noch erfolgreicheres Internat berichten, das zur selben Zeit in Sibirien gegründet wurde: Im Jahr 1960 wurde die Sibirische Abteilung der Russischen Akademie der Wissenschaften (SO RAW) in der Stadt Novosibirsk gegründet. Seit 1961 veranstaltet sie Sibirische Physikalische und Mathematische Olympiaden. Ungefähr die 1000 besten Teilnehmer lädt man nach Novosibirsk ein. Im August während der Schulferien wohnen sie im Campus der Novosibirsk Universität (NSU). Morgens hören sie Vorlesungen von Professoren, nachmittags löst man mit ihnen schwierige Aufgaben. Abends haben sie Möglichkeiten für Sport und Erholung. Das heißt physikalisch-mathematische Sommerschule bei NSU. In Russland gibt es auch andere solche Sommerschulen, aber sie sind kleiner als diese. Zum Abschluss veranstaltet man einen Wettbewerb, und die besten ca. 500 Teilnehmer bekommen das Recht, an dem physikalisch-mathematischen Internat „M.A. LAWRENTJEW“ zu studieren. Dieses Internat und diese Sommerschule wurden von dem Präsidenten von SO RAW M.A. LAWRENTJEW (er war Mathematiker) und von dem Direktor des Kernphysikinstituts G.I. BUDKER gegründet. Beide starben vor vielen Jahren.

Das Internat ist jetzt ein Bestandteil der NSU. Den Unterricht führen Lektoren der Universität durch. Ca. 1000 bis 1200 Schüler insgesamt lernen dort. Sie verbringen im Internat ihre letzten zwei (manchmal drei) Schuljahre und setzen ihre Ausbildung an verschiedenen Fachbereichen der NSU (nicht nur „Mathematik“ und „Physik“) fort.

Um den Lebensweg ehemaliger Schüler des Internats aufzuzeigen, zitiere ich jetzt einen Brief des bekannten Algebraprofessors BOKUT an der NSU. Sein ehemaliger Doktorand E.I. ZELMANOV bekam im Jahr 1994 eine Medaille des Internationalen Mathematischen Kongresses und ist jetzt ein Professor der Yale Universität (USA), ein Mitglied der Nationalakademie der Wissenschaften der USA und Akademie der Wissenschaften Spaniens. Professor BOKUT schreibt mir, dass 15 aus 30 seiner ehemaligen Doktoranden im Internat lernten. Fünf von ihnen sind jetzt Mathematikprofessoren in Russland und sieben in anderen Ländern (USA, England, Brasilien, Mexiko). Sie kamen irgendwann nach Novosibirsk aus verschiedenen Orten Sibiriens, vom Ural bis zum Pazifik und vom Polarkreis bis an die Grenze mit der Mongolei.

2. Mathematische Zirkel und Olympiaden

Eine Form der außerschulischen Arbeit mit mathematisch begabten Kindern sind mathematische Zirkel. Sie existieren an Universitäten, bei verschiedenen Organisationen, die mit Kindern arbeiten (zum Beispiel ehemalige Pionierpaläste) und an vielen Schulen.

Mathematische Zirkel an der Moskauer Universität „M.W. LOMONOSOW" existieren seit mindestens 50 Jahren. Der Autor besuchte sie in den Jahren 1953 / 1954. Unser Leiter N.S. BACHVALOW war damals ein Doktorand, jetzt ist er ein Professor der Universität und ein Mitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften. Aus ca. 20 bis 30 Schülern, die damals den Zirkel besuchten, wurden mindestens 10 Mathematikprofessoren. Der größte Teil von ihnen arbeitet noch heute an verschiedenen Universitäten in Russland, in den USA und in Frankreich. Professor W. I. ARNOLD ist ein Mitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften. Der Zirkel arbeitet jetzt für die Schüler ab dem 7. Schuljahr. Für die Schüler der 5. und 6. Klassen veranstaltet man mathematische Feiern. Solche Feiern für die Schüler der unteren Klassen organisiert man im ehemaligen Stadtpionierpalast.

Jetzt möchte ich über russische mathematische Olympiaden erzählen. Wahrscheinlich die älteste ist die Moskauer Mathematische Olympiade. Die Moskauer Universität veranstaltet sie jährlich für die Schüler der vier oberen Klassen und das schon seit ungefähr 70 Jahren. Ungefähr vor 40 Jahren schlossen sich verschiedene örtliche Olympiaden (auch sibirische) zusammen, und die alljährliche allgemeinrussische Olympiade entstand. Man veranstaltet sie auch für die Schüler der vier oberen Klassen. Die Olympiade besteht aus fünf Runden (Schule – Kreis – Gebiet – Gruppe der Gebiete – Land). Alle Runden ab der dritten veranstaltet man an zwei Tagen. Jeden Tag findet eine vierstündige Klausur mit vier Aufgaben statt. Die russische Mannschaft der Teilnehmer der Internationalen Mathematik-Olympiade bildet man aus den Siegern der allgemeinrussischen Olympiade. Diese Mannschaft bekommt immer einen der besten Plätze (1999: 1. und 2. Platz, 2000: 2. Platz, 2001: 2. Platz). Zum Vergleich hatten in diesen Jahren die USA die Plätze 10, 3 bzw. 3 und Deutschland die Plätze 17, 20 bzw. 14.

Als Beispiel führe ich Aufgaben der zweiten Runde der allgemeinrussischen Olympiade an, die vor einigen Jahren den Schülern des 8. und des 11. Schuljahres in einer kleinen autonomen Republik an der Wolga angeboten wurden (siehe [1]). Die Schüler hatten vier Stunden zum Lösen Zeit. Vermutlich lösten die Sieger drei oder sogar dreieinhalbe Aufgaben. Es kommt nur selten vor, dass jemand alle Aufgaben richtig löst.

Aufgaben der allgemeinrussischen Olympiade

für das 8. Schuljahr:

1. Ein Quadrat $5 \cdot 5$ ist so mit Zahlen ausgefüllt, dass das Produkt der Zahlen in jeder Zeile negativ ist. Beweise, dass eine Spalte existiert, in der das Produkt der fünf Zahlen negativ ist.

2. Auf wie viele Nullen können die Zahlen der Art $9^n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ enden?

3. Beweise: Wenn $a + b + c = 0$ ist, dann ist $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

4. Die Diagonalen unterteilen ein Viereck in vier Dreiecke mit gleichen Umfängen. Beweise, dass dieses Viereck eine Raute ist.

für das 11. Schuljahr:

1. Beweisen Sie, dass für beliebige natürliche Zahl n gilt:
$$\frac{1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{1}{3\cdot(2n-3)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$$
2. Finden Sie alle Funktionen f, die für alle Werte x und y die folgende Gleichung erfüllen:
$x\,f(y) - y\,f(x) = (x - y)\,f(xy)$.
3. Beweisen Sie, dass die folgende Ungleichung für alle $x \in\,]0;\pi[$ gilt $\frac{2+\cos x}{\sin x} \geq \sqrt{3}$.
4. Gegeben ist ein regulärer Tetraeder. Beweisen Sie: Es existiert eine Ebene so, dass die Schnittfläche des Tetraeders mit dieser Ebene ein Quadrat ist.

Außer der allgemeinrussischen Olympiade, gibt es andere gesamtrussische mathematische Olympiaden. Beispiele sind „Das Turnier der Städte“, das man auf Initiative des Lehrers einer der besten Moskauer PMS, K. KONSTANTINOW, vor einigen Jahren zu veranstalten begann, oder die Olympiade der Zeitschrift „Quant“ (das ist eine physikalisch-mathematische Zeitschrift für Schüler). In verschiedenen Städten, auch in Moskau, gibt es alljährliche mathematische Olympiaden für die Schüler der 5. – 7. Klassen, und irgendwo sogar für die Schüler der 2. – 4. Klassen.

Es ist sehr wichtig in Russland, dass alle diese Formen der Zusatzmathematik (PMS und Internate, mathematische Zirkel, Olympiaden) unentgeltlich für die Familien sind. Die Zirkel an den Universitäten und die Olympiaden werden von Studenten und Doktoranden durchgeführt, die selbst vor kurzem noch als Schüler an solchen Veranstaltungen teilnahmen. Sie machen das kostenlos oder fast kostenlos.

In Russland wird man Student mit 17 Jahren, manchmal sogar früher (I.R. SCHAFAREWITSCH mit 14, und bereits nach drei Jahre beendete er sein Studium an der Moskauer Universität; er ist nicht der einzige, dem dies so gelang.). Es ist sehr wichtig für junge Mathematiker, früh an eine Universität zu kommen, weil sich mathematische Begabungen früh zeigen. Schon mit 19 bis 21 Jahren schreiben die besten Studenten ihre ersten Publikationen. Man soll Jugendlichen die Möglichkeit geben, mit der Geschwindigkeit voranzukommen, zu der sie individuell fähig sind.

Viele Bücher und Broschüren für mathematisch begabte Kinder und ihre Lehrer sind in Russland veröffentlicht. Oft sind sie von bekannten Mathematikern geschrieben. Manchmal enthalten solche Broschüren eine ausführliche Darlegung eines Themas, das sich an den Schullehrplan anschließt (das sind zum Beispiel komplexe Zahlen oder algebraische Gleichungen höheren Grades). Manchmal ist es eine Antwort auf eine „einfache“ Frage („Was ist eine Linie?“) oder eine populäre Darstellung irgendeiner mathematischen Theorie. Es gibt Sammlungen der Aufgaben für mathematische Zirkel.

Besonders große Auflagen haben Sammlungen der Musteraufgaben für die Vorbereitung zu den Universitätsaufnahmeprüfungen. Einige Hunderte von hochqualifizierten Mathematikern denken sich jährlich neue schwierige und oft schöne Aufgaben für diese Prüfungen aus. Allmählich werden sie schwieriger, und neue solche Sammlungen entstehen.

3. Aufnahmeprüfung zur Hochschule

Die folgende Prüfung wurde vor einigen Jahren Abiturienten zur Aufnahme in den Fachbereich "Physik" der Moskauer Universität "M.W. LOMONOSOW" vorgelegt (siehe [2]). Die Aufnahmeprüfungen für mathematische Fachbereiche an Universitäten sind schwieriger, und die Aufnahmeprüfungen für Technische Universitäten sind gewöhnlich ein bisschen einfacher. Abiturienten dieser Fachbereiche sollen meistens schriftliche und mündliche Prüfungen in der Mathematik und eine mündliche Prüfung in der Physik bestehen. Das Resultat hängt von der Summe der Noten dieser Prüfungen ab, aber wer nur fünf unten angeführte Aufgaben richtig löste, hatte geringe Chancen, an der Universität immatrikuliert zu werden.

1. Löse die Gleichung $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$.

2. Löse die Ungleichung $\frac{2x}{x^2-4} \le \frac{1}{x+1}$.

3. Löse die Gleichung $\log_9 \frac{x^2}{4} + \log_3(x+5) = 1$.

4. Der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich 20, und der Umkreisdurchmesser ist gleich 25. Finde den Inkreisradius.

5. Löse die Ungleichung $2^{x-3} < \frac{2}{8^{x^{-1}}}$.

6. Die Punkte N und L liegen auf den Seiten PQ bzw. PR eines Dreiecks PQR, dabei sei $|NQ| = |LR|$. Der Schnittpunkt der Strecken QL und NR teilt die Strecke QL im Verhältnis m:n beginnend von dem Punkt Q. Finde das Verhältnis $|PN| : |PR|$.

7. Finde alle Werte von a, für welche die Ungleichung $\log_a(x^2 + 4) > 1$ für beliebige Werte von x erfüllt ist.

8. Die Basis ABCD einer Pyramide SABCD ist ein Rechteck, dabei seien $|SA| = 2$, $|SB| = 3$ und $|SC| = 4$. Finde $|SD|$.

Um Schüler für Aufnahmeprüfungen vorzubereiten, führen gewöhnlich Universitäten **Vorlesungen für Abiturienten** durch, und darum haben die meisten Schüler der Abgangsklassen der Universitätsstädte zusätzlich 2 **bis 4 Stunden Zusatz-Mathematik pro Woche**. Aber diese Vorlesungen sind nicht kostenlos.

4. Hinweise zu den Lösungen der Aufgaben

Die folgendenden Notizen sind für Lehrer gedacht und stellen keine Musterlösungen dar.

4.1 Aufnahmeprüfung in eine PMS

1. a) $$\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2} + \frac{1}{4a^2+3a}\right)\left(3 - \frac{7a}{a-1}\right) - \frac{1}{a} = \left(\frac{(3-4a)^2}{(3-4a)(3+4a)} + \frac{1}{a(3+4a)}\right)\frac{3+4a}{1-a} - \frac{1}{a} =$$
$$\frac{3a-4a^2+1}{a(1-a)} - \frac{1}{a} = \frac{1+4a}{a} - \frac{1}{a} = 4$$

   b) $$\left(\frac{1}{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^{-2}} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right) : \sqrt{ab} = \left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - \left(a+\sqrt{ab}+b\right)\right) : \sqrt{ab} = 1$$

2. Für die gesuchten Größen m und n erhalten wir das Gleichungssystem:
$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ und $m - n = 6$
Wir eliminieren n und lösen die quadratische Gleichung $m^2 - 2m - 24 = 0$. Wir erhalten $m = 12$ und $n = 6$.

3. Zuerst formen wir die erste Ungleichung um zu $x - 3 + \frac{1}{x-1} \le 0$ und erhalten hieraus $\frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0$.

Ihre Lösungsmenge ist $\left]-\infty;1\right[\cup\{2\}$. Die Lösungsmenge der zweiten Ungleichung ist das Intervall]-3; 5[. Die Schnittmenge dieser beiden ist die Lösungsmenge $\left]-3;1\right[\cup\{2\}$.

4. Wir bezeichnen das zweite Glied mit $a_2 = a$ und den Quotienten dieser Folge mit q und erhalten das folgende Gleichungssystem $a{:}q + a + aq = 21$ und $a^2{:}q^2 + a^2 + a^2q^2 = 189$.
   Jetzt substituieren wir mit $q+\frac{1}{q}=t$ und erhalten das System (1)
   $$a(1 + t) = 21 \text{ und } a^2(t^2 - 1) = 189.$$
   Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, so erhält man
   $$a(t - 1) = 9.$$
   Deshalb gilt $\frac{t-1}{t+1}=\frac{3}{7}$. Hieraus folgt $t=\frac{5}{2}$. Mit (1) folgt $q = 2$ oder $q = \frac{1}{2}$. In beiden Fällen erhält man $a = 6$. Hieraus ergibt sich $a_1 = 3$ oder $a_1 = 12$.

5. Mit den Angaben folgt $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{9}{16}$ und $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$.
   Daher ist $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{4}$.

6. Es seien x_1 und x_2 die Lösungen der gegebenen Gleichung. Dann gibt es nach VIETA die folgende Formel: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=4\left(16-3\frac{p}{2}\right)=34$; hieraus folgt $p = 5$.

7. Es sei O der Schnittpunkt der Diagonalen der gegebenen Raute, M der Berührungspunkt ihrer Seite AB mit dem Inkreis und $|OM| = r$. Wir können annehmen, dass $\angle BAO = 30^o$ ist. Jetzt finden wir aus dem Dreieck AMO, dass $|AO| = 2r$ ist, und aus dem Dreieck ABO, dass $|BO|=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$ ist. Der Flächeninhalt der Raute ist daher gleich $F_1=2|AO||BO|=\frac{8}{3}r^2\sqrt{3}$ Die Seite des einbeschriebenen Quadrats ist gleich $r\sqrt{2}$ und sein Flächeninhalt ist gleich $F_2 = 2r^2$. Die Antwort ist: $F_1 : F_2 = 4\sqrt{3} : 3$.

4.2 Abgangsprüfung der PMS

1. Die gesuchte Zahl kann man mit $z = a(1 + i)$ mit a aus R^+ bezeichnen. Dann gilt $\mathrm{Im}(z^3-8z)=2a^3-8a=0$. Hieraus berechnet sich als positive Lösung $a = 2$ und somit ist $z = 2 + 2i$.
2. Der Teil der gegebenen Figur, der im Streifen $-1\le x\le 0$ liegt, ist von den Parabeln $y = (x + 2)^2$ und $y = -(x + 2)^2$ begrenzt.
   Ihr Teil im Streifen $0\le x\le 1$ ist von den Parabeln $y = (x - 2)^2$ und $y = -(x - 2)^2$ begrenzt.
   Die Figur ist symmetrisch zu den Achsen des Koordinatensystems, und ihren Flächeninhalt ist gleich
   $$F=4\int_0^1(x-2)^2\,dx=\frac{28}{3}$$

3. Wir finden die Ableitung, stellen sie gleich 1 und erhalten die Gleichung $3\sqrt{2x+3}+2x=1$;
   Sie führt zur quadratischen Gleichung $2x^2-11x-13=0$.Die einzige Lösung, die den Radikanten der Wurzel positiv lässt, ist – 1. Die Gleichung der Tangente lautet also $y = x + 3$.

4. Eine Zahl, die aus Ziffern 1, 2, 3 und 5 besteht, ist dann und nur dann durch 4 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 2 ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich $p=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}$.

5. Die gegebene Ungleichung kann man umschreiben in $\log_{2-2^y}\left(2^{3y+5}-7\right)\le 0$.

Jetzt muss man zwei Fälle unterscheiden:

- Falls $0 < 2 - 2^y < 1$, d.h. $0 < y < 1$ ist, dann ist diese Ungleichung der Ungleichung $2^{3y+5} - 7 \geq 1$ äquivalent. Die Bedingungen sind wahr für alle $y > 0$.
- Falls $2 - 2^y > 1$ d.h. $y < 0$ ist, dann ist die betrachtete Ungleichung der Ungleichung $0 < 2^{3y+5} - 7 \leq 1$ äquivalent. Ihre Lösungsmenge ist $\left]\frac{1}{3}(\log_2 7 - 5); -\frac{2}{3}\right]$.

Die Antwort ist $\left]\frac{1}{3}(\log_2 7 - 5); -\frac{2}{3}\right] \cup \left]0;1\right[$.

6 Zuerst dividieren wir beide Seiten der gegebenen Gleichung durch 5 und schreiben sie wie folgende um: $\sin(x + \varphi) = \frac{a}{5}$, wobei $\varphi = \arcsin\frac{3}{5}$ sein möge. Ist $\left|\frac{a}{5}\right| > 1$, dann hat diese Gleichung keine Lösungen. Ist $\left|\frac{a}{5}\right| < 1$, dann enthält jedes Intervall $[c; c + 2\pi]$ mit $c \in R$ mindestens zwei Lösungen dieser Gleichung. Ist a = 5 oder a = - 5, dann haben alle ihre Lösungen die Form $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi$ für $n \in Z$ bzw. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi$ für $n \in Z$.

Eine beliebige solche Zahl kann man als b annehmen, und das Intervall $\left]b; b + 4\pi\right[$ wird genau eine Lösung der Gleichung enthalten. Die Antwort ist $a = \pm 5$.

4.3 Abgangsprüfung der üblichen 11-jährigen Schule

1. Zuerst schreiben wir die gegebene Ungleichung in $0 < x^2 + 3x \leq 4$ um. Die Lösungsmenge der linken Ungleichung ist $\left]-\infty; -3\right[\cup \left]0; \infty\right[$. Die Lösungsmenge der rechten Ungleichung ist $[-4; 1]$. Die Schnittmenge der beiden Mengen ist Lösungsmenge: $\left[-4; -3\right[\cup \left]0; 1\right]$

2. Aus $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 12x(x + 2)(x - 3)$ entnehmen wir: Die Funktion f steigt auf den Intervallen]- 2; 0[und]3; ∞[. Die Funktion f fällt auf den Intervallen]- ∞; - 2[und]0; 3[. Die Punkte $(-2|-59)$ und $(3|-184)$ sind Tiefpunkte, der Punkt $(0|5)$ ist ein Hochpunkt. Um den größten und den kleinsten Wert zu finden, berechnen wir noch f(-3) = 32. Der größte Wert ist also gleich 32, der kleinste Wert ist gleich -59.

3. Zuerst schreiben wir die Gleichung um in $(8 \sin^2 3x + 1) \cos^2 3x = 0$. Hieraus erhalten wir:
   - $\cos 3x = 0$ und damit $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$ für ganzzahlige n.
   - $\sin 3x = \sqrt{-\frac{1}{8}}$ ist reell unlösbar.

4. Wir dividieren beide Seiten der Gleichung durch 25^x, substituieren mit $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ und erhalten die Gleichung $5y^2 + 23y - 10 = 0$ mit den Lösungen $y_1 = \frac{2}{5}$ und $y_2 = -5$. Nur die erste Lösung führt zu einer Lösung x = 1.

5. Wir substituieren mit $y = \sqrt{x^2 - 3x + 11}$ und erhalten die Gleichung $y^2 - y - 6 = 0$ mit den Lösungen 3 und –2; die letztere spielt keine Rolle, weil Wurzeln nicht negativ sind. Die Gleichung $x^2 - 3x + 11 = 9$ (und daher auch die gegebene Gleichung) hat die Lösungen 1 und 2. Man müsste dies an der Ausgangsgleichung überprüfen..

6. Der gesuchte Flächeninhalt F ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Halbkreises und des Dreiecks: $F = 2\pi + 4$

4.3 Der mathematische Wettbewerb, 8. Schuljahr

1. Jede Zeile enthält eine ungerade Anzahl negativer Zahlen. Also gibt es eine ungerade Anzahl negativer Zahlen in diesem Quadrat. Daraus folgt, dass mindestens eine Spalte mit einer ungeraden Anzahl negativer Zahlen existiert.

2. Jede Zahl der Art 9^n hat die Form $4k + 1$ mit natürlichem k. Daraus folgt, dass die Zahlen der Art $9^n + 1$ nicht durch 4 teilbar sind und nicht auf zwei Nullen enden können.

3. Es gilt: $a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3ab(a+b) = 3abc$

4. Wir bezeichnen die Ecke des gegebenen Vierecks mit A, B, C und D, den Schnittpunkt der Diagonalen mit O und beweisen, dass die Diagonalen senkrecht zueinander sind und der Punkt O sie halbiert:

   Annahme: Es sei z. B. $|AO| \le |OC|$ und $\angle AOB \le \frac{\pi}{2}$, wobei mindestens eine Ungleichung streng ist.

   Dann bekommen wir mit Hilfe des Cosinussatzes, dass $|AB| < |BC|$ ist. Also ist der Umfang des Dreiecks AOB kleiner als der Umfang des Dreiecks BOC im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist das Gegenteil der Annahme richtig und es handelt sich um eine Raute.
   Ist der Winkel AOB stumpf, dann muss man die Dreiecke AOD und DOC statt der Dreiecke AOB und BOC betrachten.

4.5 Der mathematische Wettbewerb, 11. Schuljahr

1. Es gilt:
$$\frac{1}{1\cdot(2n-1)} + \frac{1}{3\cdot(2n-3)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot 1} =$$
$$= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n-3}\right) + \ldots . + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{1}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

2. Wir setzen $y = 1$ ein und erhalten $x\,f(1) - f(x) = (x-1)\,f(x)$ und hieraus $x\,f(1) = x\,f(x)$ also $f(x) =$ constant für $x \neq 0$, d. h.: $f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } x \neq 0 \\ c_2 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

   Jetzt bleibt nur noch zu prüfen, dass alle solche Funktionen die gegebene Gleichung erfüllen.

3. Es gilt $\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-1-2\cos x}{\sin^2 x}$. Man kann leicht prüfen, dass die Funktion $\frac{2+\cos x}{\sin x}$ ihr absolutes Minimum auf dem Intervall $]0;\pi[$ an der Stelle $x = \frac{2}{3}\pi$ hat und ihr Wert an dieser Stelle $\sqrt{3}$ ist.

4. Wir bezeichnen die Ecke des Tetraeders mit A, B, C und D. Die Geraden AC und BD schneiden sich nicht und sind zueinander senkrecht. Die Strecken, die nacheinander die Mittelpunkte der Kanten AB, BC, CD und DA verbinden, bilden ein Quadrat. Um das zu beweisen, muss man die Eigenschaften der Dreiecksmittellinie verwenden.

4.6 Aufnahmeprüfung zur Hochschule

1. Zuerst schreiben wir die Gleichung in die Form 4 sin x $\cos^2 x$ = 4 $\cos^3 x$ um. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist cos x = 0 und x $\in \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \text{ für } n \in Z\right\}$ oder sin x = cos x und $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \text{ für } n \in Z\right\}$.

2. Wir erhalten durch Umformung die Ungleichung $\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x+1)(x-2)} \le 0$.
   Der Zähler ist überall positiv, der Nenner wechselt sein Vorzeichen an den Stellen x = - 2, x = - 1 und x = 2. Die Lösungsmenge lautet deshalb $]-\infty; -2[\cup]-1; 2[$.

3. Die folgenden Zeilen sind äquivalent:
   $\log_9 \frac{x^2}{4} + \log_9 (x+5)^2 = 1$
   $x^2(x + 5)^2 = 36$
   $x(x+5) = \pm 6$
   Jetzt muss man diejenigen Lösungen aussuchen, für die $x + 5 > 0$ ist. Das sind –3, -2 und 1.

4. Wir bezeichnen die Länge des Schenkels des Dreiecks mit a und die Länge seiner Basis mit c. Die gegenüber liegenden Winkel sind entsprechend α, β und γ, wobei $\alpha = \beta$ ist. R und r sind der Umkreis- bzw. der Inkreisradius.
   Zuerst berechnen wir sin α und sin γ: $\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, $\sin\gamma = \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{24}{25}$
   Jetzt kann man den Flächeninhalt F und den Umfang 2U des Dreiecks finden:
   $F = \frac{1}{2}a^2 \sin\gamma = 192$, $c = 2R\sin\gamma = 24$, 2U = 2a + c = 64. Schließlich erhalten wir $r = \frac{F}{U} = 6$.

5. Wir logarithmieren auf beiden Seiten zur Basis 2 und bekommen die Ungleichung $x - 3 < 1 - \frac{3}{x}$ oder $\frac{(x-1)(x-3)}{x} < 0$. Die Lösungsmenge ist also $]-\infty; 0[\cup]1; 3[$.

6. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Strecken QL und RN mit O und die Längen der Strecken PR, PN und NQ entsprechend mit q, t bzw. s. Es seien $\vec{e}$ und $\vec{i}$ solche Einheitsvektoren, dass $\overrightarrow{PR} = q\vec{e}$ und $\overrightarrow{PN} = t\vec{i}$ sind. Dann erhalten wir:
   $\overrightarrow{OL} = \frac{n}{m+n}\left(\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PQ}\right) = \frac{(q-s)n}{m+n}\vec{e} - \frac{(t+s)n}{m+n}\vec{i}$
   $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LR} = \frac{nq+ms}{m+n}\vec{e} - \frac{(t+s)n}{m+n}\vec{i}$
   $\overrightarrow{NR} = q\vec{e} - t\vec{i}$
   Da N, O und R kollinear sind, haben die Vektoren $\overrightarrow{OR}$ und $\overrightarrow{NR}$ proportionale Koordinaten, d. h. es gilt (nq + ms)t = (t + s)nq. Hieraus errechnet sich t:q = n:m.

7. Man muss zwei Fälle behandeln:
   - Ist 0 < a < 1, dann ist die gegebene Ungleichung der Ungleichung $x^2 + 4 < a$ äquivalent. Diese Ungleichung hat für die zu betrachtenden Werte von a keine Lösungen.
   - Ist a > 1, dann ist die gegebene Ungleichung der Ungleichung $x^2 + 4 > a$ äquivalent. Diese Ungleichung ist dann und nur dann für beliebige Werte von x erfüllt, wenn a < 4 ist. Die gesuchten Lösungen sind durch 1 < a < 4 gekennzeichnet.

8. Wenn man in der Basisebene ein Koordinatensystem mit dem Ursprung A und zueinander senkrechten Achsen so einführt, dass die Geraden AB und AD seine Achsen sind, dann kann man für die Projektion S', A, B, C und D der Pyramide in die Basisebene leicht die folgende Formel beweisen: $|S'A|^2 + |S'C|^2 = |S'B|^2 + |S'D|^2$, wobei S' ein beliebiger Punkt in der Rechteckebene ist. Hieraus ergibt sich der Zusammenhang $|SA|^2 + |SC|^2 = |SB|^2 + |SD|^2$. Daher gilt: $|SD| = \sqrt{4+16-9} = \sqrt{11}$

5. Literatur

Merzljakov, A.S., Mednikov, L.E. [1]: Mathematische Olympiaden (Russisch), Switok Ishewsk 1997

Melnikov, I.I., Olechnik, S.N., Sergeev, I.N. [2]: Mathematik. Aufgaben der Aufnahmeprüfungen mit den Lösungen (1993-1997) (Russisch), UNZ DO MGU Moskau 1998

Anschrift des Autors:
Dr. Boris Averboukh
Mengsbergerstraße 6
34630 Gilserberg